SUR QUELQUES POINTS D'ALGÈBRE HOMOLOGIQUE.

ALEXANDRE GROTHENDIECK

(Reçu mars 1, 1957)

Introduction[1)]

I. Contenu du travail. Ce travail a son origine dans une tentative d'exploiter l'analogie formelle entre la théorie de la cohomologie d'un espace à coéfficients dans un faisceau [4], [5] et la théorie des foncteurs dérivés de foncteurs de modules [6], pour trouver un cadre commun permettant d'englober ces théories et d'autres.

Ce cadre est esquissé dans le Chapitre I, dont le thème est le même que celui de [3]. Ces deux exposés cependant ne se recouvrent pas, sauf dans le seul N°1.4. Je me suis attaché notamment à donner des critères maniables, à l'aide de la notion de sommes et produits infinis dans les catégories abéliennes, pour l'existence de "suffisamment" d'objets injectifs ou projectifs dans une catégorie abélienne, sans quoi les techniques homologiques essentielles ne peuvent s'appliquer. De plus, pour la commodité du lecteur, une place assez large a été faite à l'exposé du langage fonctoriel (N^{os} 1.1, 1.2 et 1.3). L'introduction des catégories additives au N° 1.3, préliminaire aux catégories abéliennes, fournit un langage commode (par exemple pour traiter des foncteurs spectraux au Chapitre II).

Le Chapitre II esquisse les points essentiels du formalisme homologique dans les catégories abéliennes. La parution de [6] m'a permis d'être très concis, les techniques de Cartan-Eilenberg se transportant sans aucun changement dans le nouveau cadre. Les numéros 2.1 et 2.2 ont été écrits cependant de façon à ne pas exclure les catégories abéliennes ne contenant pas assez d'objets injectifs ou projectifs. Dans les numéros suivants, nous employons à fond les techniques usuelles de résolutions. Les N^{os} 2.4 et 2.5 contiennent des compléments divers et sont essentiels pour la compréhension de la suite. En particulier, le théorème 2.4.1 donne une façon mécanique d'obtenir la plupart des suites spectrales connues (et en tous cas *toutes* celles rencontrées dans ce travail).

Dans le Chapitre III nous redéveloppons la théorie de la cohomologie d'un espace à coéfficients dans un faisceau, y inclus les suites spectrales classiques de Leray. L'exposé donné ici représente un assouplissement par rapport à [4], [15], en particulier en ce que tous les resultats essentiels sont obtenus sans faire, à presque aucun moment dans ce Chapitre (pas plus que dans les suivants), d'hypothèse restrictive sur la nature des espaces envisagés; de sorte

1) L'essentiel des Chapitres I, II, IV et une partie du Chapitre III a été développé au printemps 1955, à l'occasion d'un séminaire d'Algèbre Homologique donné à l'Université de Kansas. —Les numéros entre crochets renvoient à la fin de cet article.

que la théorie s'applique aussi aux espaces non séparés qui interviennent en Géométrie Algébrique abstraite ou en "Géométrie Arithmétique" [15] [8]. Des conversations avec R. Godement et H. Cartan ont été très précieuses pour la mise au point de la théorie, et en particulier l'introduction par Godement des *faisceaux flasques* et des *faisceax mous*, qui se substituent avantageusement aux faisceaux fins dans bien des questions, s'est révélée extrêmement commode. Un exposé plus complet, auquel nous renverrons pour divers points de détail, sera donné dans un livre en préparation par R. Godement [9].

Le Chapitre IV traite la question non classique des Ext de faisceaux de modules, on y trouvera en particulier une suite spectrale utile qui relie les Ext "globaux" et les Ext "locaux". La situation se corse au Chapitre V, où de plus un groupe G opère sur l'espace X, le faisceau d'anneaux $\mathbf{O}$ donné sur X, et les faisceaux de modules sur $\mathbf{O}$ qu'on considère. On obtient en particulier dans 5.2 un énoncé qui me semble être la forme définitive de la théorie cohomologique "Čechiste" des espaces à groupe (non topologique) d'opérateurs, pouvant avoir des points fixes. II s'exprime en introduisant de nouveaux foncteurs $H^n(X; G, A)$ (implicites déjà dans bien des cas particuliers antérieurs): on trouve alors deux foncteurs spectraux, à termes initiaux remarquables, qui y aboutissent.

II. Applications. Faute de place, je n'ai pu donner dans cet exposé que très peu d'applications des techniques employées (notamment dans 3.4 et 3.6), me contentant d'en signaler quelques unes au passage. Signalons encore les applications suivantes:

a) La notion de Ext de faisceaux de modules permet la formulation la plus générale connue du "théorème de dualité algébrique" de Serre: Si A est un faisceau algébrique cohérent [15] sur une variété algébrique projective de dimension n sans singularités, alors le dual de $H^p(X, A)$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Ext}_{\mathbf{O}}^{n-p}(X; A, \Omega^n)$, ou $\mathbf{O}$ (resp. Ω^n) est le faisceau des germes de fonctions régulières (resp. de n-formes régulières) sur X.

b) Tout le formalisme développé dans les Chapitres III, IV, V peut s'appliquer en Géométrie Algébrique Abstraite. Je montrerai ailleurs comment il permet d'étendre aux variétés algébriques complètes divers résultats prouvés par Serre [15] [16] [17] pour les vartiétés projectives.

c) Il semble que les $H^n(X; G, A)$ soient l'intermédiaire naturel pour une théorie générale des puissances réduites de Steenrod dans les faisceaux, et la cohomologie des puissances symétriques d'espaces quelconques, théorie qui s'applique aussi en Géométrie Algébrique en car. p.

III. Lacunes. Pour ne pas allonger cet exposé, j'ai passé sous silence les questions de structures multiplicatives, quoiqu'elles soient tout à fait essentielles dans l'application des notions des Chapitres III, IV, V. Signalons d'ailleurs qu'il ne semble y avoir encore de théorie satisfaisante des structures multiplicatives en Algèbre Homologique, ayant le degré de généralité et de simplicité nécessaire (le Chapitre II de [6] étant d'ailleurs une illustration frappante de cet état de choses) [1 bis] Pour la multiplication en cohomologie des faisceaux, un exposé satisfaisant se trouvera dans [9]. De nombreuses autres lacunes se signaleront d'elles mêmes à l'attention du lecteur.

Pour terminer, je suis heureux d'exprimer mes remerciements à MM. R. Godement, H. Cartan et J. P. Serre, dont l'intérêt a été le stimulant indispensable pour la rédaction du présent travail.

TABLE DES MATIÈRES

1 bis) M. P. Cartier vient de trouver une formulation satisfaisante générale pour les structures multiplicatives en Algèbre Homologique, qu'il exposera en son lieu.

Chapitre I Généralités sur les catégories abéliennes

1.1. Catégories. Rappelons qu'on appelle *catégorie* une classe non vide $\mathbf{C}$ d'objets, avec la donnée pour $A, B \in \mathbf{C}$ d'un ensemble $\mathrm{Hom}\,(A, B)$ (appelé ensemble des *morphismes* de A dans B), et pour trois objets $A, B, C \in \mathbf{C}$, d'une application (dite *composition des morphismes*) $(u, v) \to vu$ de $\mathrm{Hom}(A, B) \times \mathrm{Hom}(B, C)$ dans $\mathrm{Hom}(A, C)$, ces données satisfaisant aux deux axiomes suivants: la composition des homomorphismes est *associative*; pour tout $A \in \mathbf{C}$, il existe dans $\mathrm{Hom}(A, A)$ un élément I_A (appelé le *morphisme identique* de A) qui soit une unité à droite et à gauche pour la composition des morphismes. (Cet élément I_A est alors déterminé de façon unique). Enfin, il sera prudent de supposer que la donnée d'un morphisme u détermine ses objets de "départ" et "d'arrivée", en d'autres termes que si (A, B) et (A', B') sont deux couples distincts d'objets de $\mathbf{C}$, alors $\mathrm{Hom}\,(A, B)$ et $\mathrm{Hom}\,(A', B')$ sont deux ensembles disjoints.

Si $\mathbf{C}$ est une catégorie, on définit la *catégorie duale* $\mathbf{C}^\circ$ comme la catégorie ayant les mêmes objets que $\mathbf{C}$, et où l'ensemble $\mathrm{Hom}\,(A, B)^\circ$ des morphismes de A dans B est identique à $\mathrm{Hom}(B, A)$, le composé de u et v dans $\mathbf{C}^\circ$ étant défini comme le composé de v et u dans $\mathbf{C}$. Toute notion et tout énoncé relatif à une catégorie non précisée admet une notion ou un énoncé dual ("procédé de renversement des flèches"), qui sera tout aussi utile dans les applications, mais dont l'explicitation est laissée le plus souvent au lecteur.

Soit donné une catégorie $\mathbf{C}$ et un morphisme $u: A \to B$ dans $\mathbf{C}$. Pour tout $C \in \mathbf{C}$, on définit une application $v \to uv$: $\mathrm{Hom}\,(C, A) \to \mathrm{Hom}\,(C, B)$ et une application $w \to wu$: $\mathrm{Hom}\,(B, C) \to \mathrm{Hom}\,(A, C)$. On dit que u est un *monomorphisme* ou que u est *injectif* (resp. que u est un *épimorphisme* ou que u est *surjectif*) si la première (resp. la seconde) des deux applications précédentes est toujours injective; u est dit *bijectif* si u est à la fois injectif et surjectif. On appelle *inverse à gauche* (resp. *à droite*) de u un $v \in \mathrm{Hom}\,(B, A)$ tel que $vu = I_A$ (resp. $uv = I_B$); v est dit *inverse de u* s'il est à la fois inverse à gauche et inverse à droite (auquel cas il est determiné de façon unique). u est dit un *isomorphisme* s'il admet un inverse. Si u admet un inverse à gauche (resp. à droite) il est injectif (resp. surjectif), donc un isomorphisme est bijectif (la réciproque étant en général inexacte).

Le composé de deux monomorphismes (épimorphismes) est un monomorphisme (épimorphisme) donc le composé de deux bijections est une bijection; de même le composé de deux isomorphismes est un isomorphisme. Si le composé vu de deux morphismes u, v est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) alors u (resp. v) l'est aussi. Bien que le développement de tels sorites soit évidemment nécessaire, nous nous dispenserons le plus souvent par la suite de les derouler explicitement, et nous nous contenterons d'indiquer avec soin les définitions.

Considérons deux monomorphismes $u: B \to A$ et $u': B' \to A$, on dit que u' *majore* ou *contient* u et on écrit $u \leqq u'$, si on peut factoriser u en $u'v$, où v est un morphisme de B dans B' (qui est alors déterminé de façon unique). C'est là une relation de *préordre* dans la classe des monomorphismes à valeurs dans A. On dira que deux tels monomorphismes u, u' sont *équivalents* si chacun majore l'autre, alors les morphismes correspondants $B \to B'$ et $B' \to B$ sont inverses l'un de l'autre. Choisissons (par exemple au moyen du symbole à tout faire τ de Hilbert) un monomorphisme dans toute classe de monomorphismes équivalents: les monomorphismes choisis seront appelés les *sous-trucs* de A. Ainsi un sous-truc de A est, non un simple objet de $\mathbf{C}$, mais un objet B muni d'un monomorphisme $u: B \to A$, appelé l'*injection canonique* de B dans A. (Néanmoins, par abus de langage, on désignera souvent un sous-truc de A. par le symbole B de l'objet $\in \mathbf{C}$ correspondant). La relation de majoration définit une relation d'*ordre* (et non seulement de préordre) sur la classe des sous-trucs de A. De ce qu'on a vu plus haut résulte que les sous-trucs de A contenus dans un sous-truc B s'identifient aux sous-trucs de B, cette correspondance respectant les relations d'ordre naturelles. (Ceci ne signifie pas toutesfois qu'un sous-truc de B soit *égal* à un sous-truc de A, ce qui exigerait en effet que l'on ait $A = B$).

Dualement, la considération d'un préordre sur la classe des épimorphismes de A permet de définir la classe ordonnée des *trucs quotient* de A.

Soient $A \in \mathbf{C}$, et soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille non vide de morphismes $u_i : A \to A_i$. Alors pour tout $B \in \mathbf{C}$, les applications $v \to u_i v$ de $\mathrm{Hom}(B, A)$ dans $\mathrm{Hom}(B, A_i)$ définissent une application naturelle

$$\mathrm{Hom}(B, A) \to \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}(B, A_i).$$

On dit que les u_i définissent une *représentation de A comme produit direct des A_i*, si quel que soit B, l'application précédente est bijective. S'il en est ainsi, et si A' est un autre objet de $\mathbf{C}$ représenté comme produit des A'_i par des morphismes $u'_i: A' \to A'_i$, (l'ensemble d'indices étant le même), alors pour toute famille (v_i) de morphismes $v_i : A_i \to A'_i$ il existe un morphisme et un seul v de A dans A' tel que $u'_i v = v_i u_i$ pour tout i. On en conclut que si les v_i sont des équivalences, il en est de même de v; en particulier, si les v_i sont les applications identiques I_{A_i}, on voit que deux objects A, A' représentés comme produits de la famille des A_i sont canoniquement isomorphes. Il est donc naturel de choisir alors parmi tous les $(A, (u_i))$ comme ci-dessus, un système particulier (par exemple au moyen du symbole τ de Hilbert) qu'on appellera *le produit* de la famille d'objets $(A_i)_{i\in I}$. C'est donc, non un simple objet A de $\mathbf{C}$, mais un tel objet muni d'une famille (u_i) de morphismes dans les A_i, appelés les *projections canoniques du produit* sur ses facteurs A_i. On note le produit des A_i (s'il existe) par $\prod_{i\in I} A_i$. Si I est réduit à un élément i, alors le produit s'identifie à A_i lui même. On dit que $\mathbf{C}$ est une *catégorie avec produits* si le produit de deux objets de $\mathbf{C}$ existe toujours (alors, il en est de même du produit d'une famille finie non vide quelconque d'objets de $\mathbf{C}$). On dit que $\mathbf{C}$ est une *catégorie avec produits infinis* si le produit d'une famille non vide quelconque d'objets de $\mathbf{C}$ existe toujours. Nous avons vu que si on a deux produits $A = \prod_{i\in I} A_i$ et $B = \prod_{i\in I} B_i$ correspondants à un même ensemble d'indices I, alors une famille (v_i) de morphismes $A_i \to B_i$ définit canoniquement un morphisme v de A dans B, appelé *produit des morphismes* v_i et parfois noté $\prod_{i\in I} v_i$. Si les v_i sont des monomorphismes, il en est de même de leur produit, mais l'énoncé analogue pour les épimorphismes n'est pas vrai en général, (comme on voit par exemple sur la catégorie des faisceaux sur un espace topologique fixé).

Des considérations duales des précédentes permettent de définir la notion de *représentation d'un objet A comme somme* d'une famille d'objets A_i par des morphismes $u_i : A_i \to A$ (pour tout $B \in \mathbf{C}$, l'application naturelle

$$\mathrm{Hom}\,(A, B) \to \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}\,(A_i, B)$$

est bijective), de *somme directe* $\bigoplus_{i\in I} A_i$, munie des *injections canonique* $A_i \to \bigoplus_{i\in I} A_i$ (qui d'ailleurs ne sont pas nécessairement des monomorphismes, malgré leur nom), de *morphisme somme* d'une famille de morphismes $u_i : A_i \to B_i$. Si les u_i sont des épimorphismes, il en est de même de leur somme.

1.2. Foncteurs. Soient $\mathbf{C}, \mathbf{C}'$ deux catégories. Rappelons qu'on appelle *foncteur covariant* de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}'$ une "fonction" F qui à un objet $A \in \mathbf{C}$, associe un objet $F(A)$ de $\mathbf{C}'$, et à un morphisme $u : A \to B$ dans $\mathbf{C}$, un morphisme $F(u) : F(A) \to F(B)$, de telle façon qu'on ait $F(I_A) = I_{F(A)}$ et $F(vu) = F(v)F(u)$. Définition analogue pour les *foncteurs contravariants* de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}'$ (qui sont aussi des foncteurs covariants de $\mathbf{C}^\circ$ dans $\mathbf{C}'$ ou de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}'^\circ$). On définit de même les foncteurs de plusieurs variables ou *multifoncteurs*, covariants en certaines variables et contravariants en d'autres. Dans les généralités, nous nous bornerons pour simplifier aux foncteurs d'une variable. Les foncteurs se composent comme des fonctions, cette composition est associative et les "foncteurs identiques" jouent le rôle d'unités.

Soient $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C}'$ deux catégories fixées, F et G deux foncteurs covariants de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}'$, un *morphisme fonctoriel* f de F dans G (appelé aussi "transformation naturelle" de F dans G par certains auteurs) est une "fonction" qui associe à tout $A \in \mathbf{C}$ un morphisme $f(A)$ de $F(A)$ dans $G(A)$, de telle façon que pour tout morphisme $u: A \to B$ dans $\mathbf{C}$, le diagramme suivannt

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(u)} & F(B) \\ {\scriptstyle f(A)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f(B)} \\ G(A) & \xrightarrow{G(u)} & G(B) \end{array}$$

soit commutatif. Les morphismes de foncteurs $F \to G$ et $G \to H$ se composent encore de façon évidente, cette composition est associative, et le "morphisme identique" du foncteur F est une unité pour la composition des morphismes de foncteurs. (Donc si $\mathbf{C}$ est un ensemble, les foncteurs de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}'$ forment de nouveau une catégorie). Notons enfin que le composé GF de deux foncteurs $F: \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ et $G: \mathbf{C}' \to \mathbf{C}''$ se comporte formellement comme un bifoncteur par rapport aux arguments G et F: un morphisme fonctoriel $G \to G'$ (resp. $F \to F'$) définit un morphisme fonctoriel $GF \to G'F$ (resp. $GF \to GF'$).

Une *équivalence* d'une catégorie $\mathbf{C}$ avec une catégorie $\mathbf{C}'$ est un système (F, G, φ, ψ) formé de foncteurs covariants:

$$F: \mathbf{C} \to \mathbf{C}' \qquad G: \mathbf{C}' \to \mathbf{C}$$

et d'homomorphismes de foncteurs

$$\varphi: \mathbf{1}_{\mathbf{C}} \to GF \qquad \psi: \mathbf{1}_{\mathbf{C}'} \to FG$$

(où $\mathbf{1}_{\mathbf{C}'}$ $\mathbf{1}_{\mathbf{C}'}$ sont les foncteurs identiques dans $\mathbf{C}$, resp. $\mathbf{C}'$) tels que pour tout $A \in \mathbf{C}$, $A' \in \mathbf{C}'$, les composés

$$F(A) \xrightarrow{F(\varphi(A))} FGF(A) \xrightarrow{\psi^{-1}(F(A))} F(A)$$

$$G(A') \xrightarrow{G(\psi(A))} GFG(A') \xrightarrow{\varphi^{-1}(G(A))} G(A')$$

soient l'identité dans $F(A)$ resp. $G(A')$. Alors pour tout couple A, B d'objets de $\mathbf{C}$ l'application $f \to F(f)$ de $\mathrm{Hom}\,(A, B)$ dans $\mathrm{Hom}\,(F(A), F(B))$ est une bijection, dont l'inverse est l'application $g \to G(g)$ de $\mathrm{Hom}\,(F(A), F(B))$ dans $\mathrm{Hom}\,(GF(A), GF(B))$ identifié à $\mathrm{Hom}\,(A, B)$ grâce aux isomorphismes $\varphi(A)$: $A \to GF(A)$ et $\varphi(B): B \to GF(B)$. Les équivalences entre catégories se composent comme les foncteurs. Deux catégories sont dites *équivalentes* s'il existe une équivalence entre ces catégories. On se permet alors couramment, dans le langage, de ne pas distinguer entre l'une et l'autre. Il importe cependant d'observer la différence de cette notion avec la notion beaucoup plus stricte d'isomorphisme (qui s'applique si on veut comparer des catégories qui sont des ensembles): Soit $\mathbf{C}$ un ensemble non vide, soit pour tout couple d'objets $A, B \in \mathbf{C}$, un ensemble $\mathrm{Hom}\,(A, B)$ reduit à un élément, alors $\mathbf{C}$ devient (pour les uniques lois de composition possibles $\mathrm{Hom}\,(A, B) \times \mathrm{Hom}\,(B; C) \to \mathrm{Hom}\,(A, C)$) une catégorie, et deux catégories construites par ce procédé sont toujours équivalentes, mais elles ne sont isomorphes que si elles sont équipotentes. Aucune des équivalences de catégories qu'on rencontre en pratique n'est un isomorphisme.

1. 3. Catégories additives. Une *catégorie additive* est une catégorie $\mathbf{C}$ pour laquelle on s'est donné, pour tout couple (A, B) d'objets de $\mathbf{C}$, une loi de groupe abélien dans Hom (A, B), de telle façon que la composition des morphismes soit une operation bilinéaire. On suppose de plus que la somme et le produit de deux objets quelconques A, B de $\mathbf{C}$ existe. Il suffit d'ailleurs de postuler l'existence de la somme *ou* du produit de A et B, l'existence de l'autre s'en déduit alors facilement et de plus $A+B$ est canoniquement isomorphe à $A \times B$. (Supposant par exemple que $A \times B$ existe, on considère les morphismes $A \rightarrow A \times B$ et $B \rightarrow A \times B$ dont les composantes sont $(I_A, 0)$ resp. $(0, I_B)$, et on vérifie qu'on obtient là une représentation de $A \times B$ comme somme directe de A et B). Enfin, on postule l'existence d'un objet A tel que $I_A = 0$, on l'appelle un objet nul ou *zéro* de $\mathbf{C}$. Il revient au même de dire que Hom (A, A) est réduit à zéro, ou encore que pour tout $B \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Hom}(A, B)$ (ou $\operatorname{Hom}(B, A)$) est réduit à zéro. Si A et A' sont deux objets nuls, alors il existe un isomorphisme unique de A sur A' (savoir l'unique élément 0 de Hom (A, A') !), aussi on identifiera tous les objets nuls de $\mathbf{C}$ à un seul, noté 0 par abus d'écriture.

La catégorie duale d'une catégorie additive est encore une catégorie additive.

Soient $\mathbf{C}$ une catégorie additive, $u : A \rightarrow B$ un morphisme dans C. Pour que u soit injectif (resp. surjectif) il faut et il suffit qu'il n'existe pas de morphisme non nul, qui composé à droite (resp. à gauche) avec u donne zéro. On appelle *noyau généralisé* de u tout monomorphisme $i : A' \rightarrow A$ tel que les morphismes $C \rightarrow A$ qui sont diviseur de zéro à droite de u soient exactement ceux qui se factorisent en $C \rightarrow A' \xrightarrow{i} A$; un tel monomorphisme est défini à équivalence près (cf. N°1), donc parmi les noyaux généralisés de u (s'il en existe) il y a exactement un qui soit un sous-truc de A : on l'appelle *le noyau de* u, et on le note $\operatorname{Ker} u$. On définit dualement le *conoyau* de u (qui est un truc quotient de B, s'il existe), noté $\operatorname{Coker} u$. On appelle *image* (resp. *coimage*) du morphisme u, le noyau de son conoyau (resp. le conoyau de son noyau), s'il existe ; c'est donc un sous-truc de B (resp. un truc quotient de A)[1ter)] on les note $\operatorname{Im} u$ resp. $\operatorname{Coim} u$. Si u admet une image et une coimage, alors il existe un morphisme unique $\bar{u}$: $\operatorname{Coim} u \rightarrow \operatorname{Im} u$ tel que u soit identique au composé $A \rightarrow \operatorname{Coim} u \rightarrow \operatorname{Im} u \rightarrow B$, où les morphismes extrêmes sont les morphismes canoniques.

Un foncteur F d'une catégorie additive $\mathbf{C}$ dans une autre $\mathbf{C}'$ est dit *foncteur additif* si pour deux morphismes $u, v : A \rightarrow B$ dans $\mathbf{C}$, on a $F(u+v) = F(u) + F(v)$. Définition analogue pour les multifoncteurs. Des foncteurs composés de foncturs additifs sont additifs. Si F est un foncteur additif, F transforme une somme directe finie d'objets A_i en la somme directe des $F(A_i)$.

1 ter) Une définition, plus naturelle à vrai dire, de l'image de u, serait de prendre le plus petit sous-truc B' de B (s'il en existe) tel que u provienne d'un morphisme de A dans B'. Cette définition n'est équivalente à celle donnée dans le texte que dans le cas où $\mathbf{C}$ est une catégorie *abélienne* (cf. 1. 4.)

1. 4. Catégories abéliennes. On appelle *catégorie abélienne* une catégorie additive **C** satisfaisant aux deux axiomes supplémentaires suivants (qui sont autoduals):

AB 1) *Tout morphisme admet un noyau et un conoyau* (cf. 1. 3.)

AB 2) *Soit u un morphisme dans* **C**. *Alors le morphisme canonique* $\bar{u}$: Coim $u \to \operatorname{Im} u$ (cf. 1. 3) *est un isomorphisme.*

Il en résulte en particulier qu'*une bijection est un isomorphisme*. Notons qu'il existe de nombreuses catégories additives satisfaisant à AB 1) et où les morphismes $\bar{u}$: Coim $u \to$ Im u sont toujours bijectifs, sans être nécessairement des isomorphismes. Il en est ainsi par exemple de la catégorie additive des modules topologiques séparés sur un anneau topologique donné, en y prenant comme morphismes les homomorphismes continus, ou de la catégorie des groupes abélien *filtrés*. Autre exemple moins évident: la catégorie additive des espaces fibrés holomorphes à fibre vectorielle sur une variété holomorphe de dimension complexe 1. Ce sont donc là des catégories additives non abéliennes.

Si **C** est une catégorie abélienne, alors tout le formalisme habituel des diagrammes d'homomorphismes entre groupes abéliens peut se développer à nouveau en y remplaçant les homomorphismes par des morphismes dans **C**, pour autant qu'on n'a en vue que des propriétés "de caractère fini", i. e. ne faisant pas intervenir des sommes directes ou produits directs infinis (pour lesquels des précautions spéciales sont nécessaires, voir N°5). Nous nous contentons ici d'indiquer quelques faits particulièrement importants, renvoyant pour d'autres détails à [3].

Dans la suite, nous nous plaçons dans une catégorie abélienne fixée **C**. Soit $A \in \mathbf{C}$, et à tout sous-truc de A faisons correspondre son conoyau (qui est donc un quotient de A), et à tout truc quotient de A faisons correspondre son noyau (qui est donc un sous-truc de A). On obtient ainsi *une correspondance biunivoque entre la classe des sous-trucs de A et la classe des trucs quotients de A*, cette correspondance étant d'ailleurs un *antiisomorphisme* pour les relations d'ordre naturelles. D'ailleurs, les sous-trucs de A forment une classe *réticulée* (donc aussi les trucs quotients): Si P et Q sont deux sous-trucs de A, leur sup est l'image de la somme directe $P+Q$ par le morphisme dont les composantes sont les injections canoniques de P et Q dans A, et leur inf est le noyau du morphisme de A dans le produit $(A/P) \times (A/Q)$ dont les composantes sont les surjections canoniques de A sur A/P et A/Q. (Conformément à l'usage, on désigne par A/P le quotient de A qui correspond au sous-truc P; une notation duale comme $A\backslash R$ pour le sous-truc de A qui correspond à un truc quotient R semble naturelle). On a des interprétations duales pour le inf ou le sup de deux trucs quotient de A.

Soit $u: A \to B$ un morphisme. Si A' est un sous-truc de A, on définit l'image de A' par u, notée $u(A')$, comme $\operatorname{Im} ui$, où i est l'injection canonique $A' \to A$. Dualement, on définit l'image inverse $u^{-1}(B')$ d'un quotient B' de B, c'est un quotient de A. Si B' est maintenant un sous-truc de B, on définit l'image inverse de B' par u, notée $u^{-1}(B')$, comme le noyau de ju, où j est là surjection canonique $B \to B/B'$. On définit dualement l'image directe $u(A')$ d'un quotient A' de A, c'est un quotient de B. On démontre pour ces notions toutes les propriétés formelles usuelles.

Enfin, rappelons qu'un couple $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ de deux morphismes consécutifs est dit *exact* si $\operatorname{Ker} v = \operatorname{Im} u$, d'où plus généralement la notion de *suite exacte* de morphismes. Pour qu'une suite $0 \to A \to B \to C$ soit exacte, il faut et il suffit que pour tout $X \in \mathbf{C}$, la suite d'homomorphismes de groupes abéliens suivante soit exacte :

$$0 \to \operatorname{Hom}(X, A) \to \operatorname{Hom}(X, B) \to \operatorname{Hom}(X, C).$$

Critère dual pour qu'une suite $C \to B \to A \to 0$ soit exacte. Pour qu'une suite $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ soit exacte, il faut et il suffit que u soit un monomorphisme et que v en soit un conoyau généralisé.

Soit F un foncteur covariant d'une catégorie abélienne $\mathbf{C}$ dans une autre $\mathbf{C}'$. Suivant la terminologie introduite dans [6], nous dirons que F est un *foncteur semi-exact* (resp. *exact à gauche* resp. *exact à droite*) si pour toute suite exacte $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ dans $\mathbf{C}$, la suite de morphismes correspondants $0 \to F(A') \to F(A) \to F(A'') \to 0$ est exacte en $F(A)$ (resp. en $F(A)$ et $F(A')$, resp. en $F(A)$ et $F(A'')$). F est dit un *foncteur exact* si F est exact à gauche et à droite, i. e. transforme une suite exacte du type précédent en une suite exacte ; alors F transforme *toute* suite exacte en une suite exacte. Si F est exact à gauche, F transforme une suite exacte $0 \to A \to B \to C$ en une suite exacte $0 \to F(A) \to F(B) \to F(C)$; énoncé dual pour les foncteurs exacts à droite. Si F est un foncteur contravariant, on dit que F est semi-exact (resp. exact à gauche etc.) si F l'est en tant que foncteur covariant de $\mathbf{C}^{\circ}$ dans $\mathbf{C}'$. Le composé de foncteurs covariants exacts à gauche (resp. à droite) est du même type. Nous renvoyons à [6] pour d'autres sorites de ce genre, et l'étude des propriétés d'exactitude des multifoncteurs. Comme exemple important, notons que $\operatorname{Hom}(A, B)$ est un bifoncteur additif sur $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$, à valeurs dans la catégorie abélienne des groupes abéliens, contravariant en A et covariant en B, et exact à gauche par rapport aux deux arguments (c'est-à-dire un bifoncteur exact à gauche dans la terminologie de [6]).

1. 5. Sommes et produits infinis. Dans certaines constructions, nous aurons besoin de l'existence et de certaines propriétés des sommes directes et produits directs infinis. Voici par ordre de force croissante, les axiomes les plus utilisés.

AB 3) *Pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ d'objet de $\mathbf{C}$, la somme directe des A_i (cf. N°1) existe.*

Cet axiome implique que pour toute famille de sous-trucs A_i d'un $A \in \mathbf{C}$, le sup des A_i existe : il suffit de prendre l'image de la somme directe $\oplus A_i$ par le morphisme dont les composantes sont les injections canoniques $A_i \to A$. Nous avons vu que la somme directe d'une famille quelconque de morphismes surjectifs est surjectif (N° 1) ; en fait, on voit même que le foncteur $(A_i)_{i \in I} \to \bigoplus_{i \in I} A_i$, défini sur la "catégorie produit" $\mathbf{C}^I$, et à valeurs dans **C**, est *exact à droite*. Il est même exact si I est fini, mais pas nécessairement si I est infini, car la somme directe d'une famille infinie de monomorphismes n'est pas nécessairement un monomorphisme, comme nous l'avons remarqué au N°1 (pour la situation duale). D'où l'axiome suivant :

AB 4) *L'axiome* AB 3) *est vérifié, et la somme directe d'une famille de monomorphismes est un monomorphisme.*

L'axiome suivant est strictement plus fort que AB 4) :

AB 5) *L'axiome* AB 3) *est vérifié, et si* $(A_i)_{i\in I}$ *est une famille filtrante croissante de sous-trucs d'un* $A \in \mathbf{C}$, *B un sous-truc quelconque de A, on a*

$$\Big(\sum_i A_i\Big) \cap B = \sum_i (A_i \cap B).$$

(On a noté, conformément aux usages, $\sum A_i$ le sup des A_i, et $P \cap Q$ le inf des sous-trucs P et Q de A). AB 5) peut encore s'exprimer ainsi : AB 3) *est satisfait, et si* $A \in \mathbf{C}$ *est le sup d'une famille filtrante croissante de sous-trucs* A_i, *et si pour tout i on se donne un morphisme* $u_i : A_i \to B$ *tel que pour* $A_i \subset A_j$, u_i *soit induit par* u_j, *alors il existe un morphisme* u (évidemment unique) *de A dans B qui induise les* u_i. Notons enfin l'axiome suivant qui renforce encore AB 5), mais dont nous n'aurons pas à nous servir dans ce travail :

AB 6) *L'axiome* AB 3) *est vérifie, et pour tout* $A \in \mathbf{C}$ *et toute famille* $(B^j)_{j\in J}$ *de familles* $B^j = (B^j_i)_{i\in I_j}$ *filtrantes croissantes de sous-trucs* B^j *de A, on a*

$$\bigcap_{j\in J_j} \Big(\sum_{i\in I_j} B^j_i\Big) = \sum_{(i_j)\in\Pi I_j} \Big(\bigcap_{j\in J} B^j_{i_j}\Big)$$

(Cet axiome inclut implicitement l'existence du inf d'une famille quelconque de sous-trucs de A).

Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer les axiomes duals AB 3*), AB 4*), AB 5*) et AB 6*), relatifs aux produits infinis, des axiomes précédents. Signalons à titre d'exemple que la catégorie des groupes abéliens (ou plus généralement, la catégorie des modules sur un anneau avec unité fixé) satisfait, relativement aux sommes directes, à l'axiome le plus fort AB 6), elle satisfait de plus aux axiomes AB 3*) et AB 4*), mais non à AB 5*). Les faits sont inverses pour la catégorie duale, qui par la dualité de Pontrjagin est isomorphe à la catégorie des groupes abéliens topologiques compacts. (Cela montre que AB 5*) n'est pas une conséquence de AB 4*), donc AB 5) n'est pas non plus conséquence de AB 4)). La catégorie abélienne des faisceaux de groupes abéliens sur un espace topologique fixé X satisfait à l'axiome AB 5) et AB 3*), mais non à AB 4*), car nous avons déjà remarqué qu'un produit de morphismes surjectifs n'est pas nécessairement un morphisme surjectif. Remarquons pour finir que si **C** est une catégorie satisfaisant à la fois à AB 5) et AB 5*), alors **C** est réduit aux éléments nuls (car on voit alors facilement que pour $A \in \mathbf{C}$, le morphisme canonique $A^{(I)} \to A^I$ est un isomorphisme, et on vérifie que ceci n'est possible que si A est nul).

Les axiomes précédents nous seront surtout utile pour l'étude des limites inductives et projectives dont nous aurons besoin pour donner des conditions d'existence maniables pour des objets "injectifs" et "projectifs" (voir N°10). Pour éviter des redites, nous allons d'abord étudier un procédé très général et très employé de formation de nouvelles catégories à l'aide de diagrammes.

1.6. Catégories de diagrammes et propriétés de permanence. Un *schéma de diagramme* est un triple (I, Φ, d) formé de deux ensembles I et Φ et d'une application d de Φ dans $I \times I$. Les éléments de I sont les *sommets*, les éléments de Φ les *flèches* du diagramme, et si φ est une flèche du diagramme, $d(\varphi)$ est appelé sa *direction*, caractérisée par *l'origine* et l'*extrémité* de la flèche (ce sont donc des sommets du schéma). Une *flèche composée* d'origine i et extrémité j est par définition une suite finie non vide de flèches du diagramme, l'origine de la première étant i, l'extrémité de chacune étant l'origine de la suivante et l'extrémité de la dernière étant j. Si $\mathbf{C}$ est une catégorie, on appelle *diagramme dans* $\mathbf{C}$, *de schéma* S une fonction D qui associe à tout $i \in I$ un objet $D(i) \in \mathbf{C}$, et à toute flèche φ d'origine i et extrémité j, un morphisme $D(\varphi)$ de $D(i)$ dans $D(j)$. La classe de tels diagrammes sera noté $\mathbf{C}^S$, elle sera considérée comme une catégorie, en prenant comme morphismes de D dans D' une famille de morphismes $v_i : D(i) \to D'(i)$ telle que pour toute flèche φ d'origine i et d'extrémité j, on ait commutativité dans le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} D(i) & \xrightarrow{v_i} & D'(i) \\ {\scriptstyle D(\varphi)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle D'(\varphi)} \\ D(j) & \xrightarrow{v_j} & D'(j) \end{array} .$$

Les morphismes de diagrammes se composent de façon évidente, et les axiomes d'une catégorie se verifient trivialement. Si D est un diagramme de schéma S, alors pour toute flèche composée $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ dans S, on définit $D(\varphi) = D(\varphi_k) \ldots D(\varphi_1)$, c'est un morphisme de $D(i)$ dans $D(j)$ si i et j sont resp. l'origine et l'extrémité de φ. D est dit un *diagramme commutatif* si on a $D(\varphi) = D(\varphi')$ chaque fois que φ et φ' sont deux flèches composées ayant même origine et même extrémité. Plus généralement, si R est un ensemble formé de couples (φ, φ') de flèches composées ayant mêmes origines et mêmes extrémités, et de flèches composées dont l'origine égale l'extrémité, on considère la sous-catégorie $\mathbf{C}^{S,R}$ de $\mathbf{C}^S$ formée des diagrammes satisfaisant aux *relations de commutation* $D(\varphi) = D(\varphi')$ pour $(\varphi, \varphi') \in R$, $D(\varphi) =$ morphisme identique de $D(i)$ si $\varphi \in R$ a i pour origine et extrémité.

On a à envisager encore d'autres types de commutation pour des diagrammes, dont la nature varie avec les catégories envisagées. Ce qui suit semble couvrir les cas les plus importants. Pour tout $(i, j) \in I \times I$, donnons nous un ensemble R_{ij} de combinaisons linéaires formelles à coéfficients entiers de flèches composées d'origine i et extrémité j, et, si $i = j$, d'un élément e_i auxiliaire. Si alors D est un diagramme, à valeurs dans une catégorie additive $\mathbf{C}$, on peut pour tout $L \in R_{ij}$ définir le morphisme $D(L) : D(i) \to D(j)$, en remplaçant dans l'expression de L, une flèche composée φ par $D(\varphi)$, et e_i par le morphisme identique de $D(i)$. Si on désigne par R la réunion des

R_{ij}, on dira que D est R-commutatif si tous les $D(L)$ ($L \in R$) sont nuls. Appelons *schéma de diagramme avec relations de commutation* un couple $(S, R) = \Sigma$ formé d'un schéma de diagramme et d'un ensemble R comme ci-dessus. Pour toute catégorie additive $\mathbf{C}$, on peut alors considérer la sous-catégorie $\mathbf{C}^{\Sigma}$ de $\mathbf{C}^{S}$ formée des schémas R-commutatifs.

PROPOSITION 1.6.1. *Soient Σ un schéma de diagramme avec relations de commutation, $\mathbf{C}$ une catégorie additive. Alors la catégorie $\mathbf{C}^{\Sigma}$ est une catégorie additive, et si $\mathbf{C}$ est une catégorie avec produits directs infinis (resp. sommes directes infinies) il en est de même de $\mathbf{C}^{\Sigma}$. De plus, si $\mathbf{C}$ satisfait à un des axiomes* AB 1) *à* AB 6) *ou des axiomes duals* AB 3*) *à* AB 6*), *il en est de même de $\mathbf{C}^{\Sigma}$.*

D'ailleurs, si $D, D' \in \mathbf{C}^{\Sigma}$, et si u est un morphisme de D dans D', alors son noyau (resp. conoyau, resp. image, resp. coimage) est le diagramme formé par les noyaux (resp. ....) des composantes u_i, les morphismes dans ce diagramme (correspondants aux flêches du schéma) se déduisant de ceux de D (resp. D'....) de la façon évidente par restriction (resp. passage au quotient). On interprète de façon analogue la somme directe ou le produit direct d'une famille de diagrammes. Les sous-trucs D' d'un diagramme D s'identifient aux familles $((D'(i))$ de sous-trucs des $D(i)$ telles que pour toute flêche φ d'origine i et extrémité j, on ait $D(\varphi). D'(i) \subset D'(j)$; alors $D'(\varphi)$ se définit comme le morphisme $D'(i) \to D'(j)$ défini par $D(\varphi)$. Les trucs quotients de D se déterminent de façon duale.

Si S est un schéma de diagrammes, on appele *schéma dual* et on désigne par S^0 le schéma ayant mêmes sommets et même ensemble de flêches que S, mais l'origine et l'extrémité des flêches de S étant intervertis. Si on donne de plus un ensemble R de relations de commutation pour S, on gardera le même ensemble pour S^0. Avec cette convention, pour une catégorie additive $\mathbf{C}$, la catégorie duale de $\mathbf{C}^{\Sigma}$ s'identifie à $(\mathbf{C}^{0})^{\Sigma^0}$.

Soient $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}'$ deux catégories additives, Σ un schéma de diagramme avec relations de commutation. Pour tout foncteur F de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}'$, on définit de façon évidente le foncteur F^{Σ} de $\mathbf{C}^{\Sigma}$ dans $\mathbf{C}'^{\Sigma}$, dit *prolongement canonique de F aux diagrammes.* F^{Σ} se comporte formellement comme un foncteur par rapport à l'argument F, en particulier un momorphisme fonctoriel $F \to F'$ définit un homomorphisme fonctoriel $F^{\Sigma} \to F'^{\Sigma}$. Notons enfin qu'on a pour un foncteur composé: $(GF)^{\Sigma} = G^{\Sigma}F^{\Sigma}$, et que les propriétés d'exactitude d'un foncteur se conservent par prolongement à une classe de diagrammes.

1.7. Exemples de catégories définies par des schémas de diagrammes. a) Prenons I réduit à un élément, et l'ensemble des flêches vide. Alors les relations de commutation sont de la forme $n_i e = 0$, donc peuvent se réduire à une unique relation $ne = 0$. Alors $\mathbf{C}^{\Sigma}$ est la sous-catégorie de $\mathbf{C}$ formé des objets annulés par l'entier n. Si $n = 0$. c'est $\mathbf{C}$ lui-même.

b) Prenons I quelconque, pas de flêches, pas de relations de commutation. Alors $\mathbf{C}^{\Sigma}$ s'identifie à la catégorie produit $\mathbf{C}^{I}$. Si on suppose données des relations de commutation, on obtient un produit de catégories du type envisagé dans 1.

c) Prenons I réduit à deux éléments, a et b, avec seule flèche d'origine a et extrémité b: on trouve la catégorie des morphismes $u: A \to B$ entre objets de $\mathbf{C}$. L'introduction de relations de commutation reviendrait à se borner aux A, B, u annulés par certains entiers précisés.

d) *Catégories de foncteurs.* Soit $\mathbf{C}'$ une autre catégorie, supposons qu'elle soit un ensemble. Alors les foncteurs covariants de $\mathbf{C}'$ dans $\mathbf{C}$ forment une catégorie, en prenant pour morphismes les morphismes fonctoriels (cf. 1, 1). Cette catégorie peut s'interpréter comme une catégorie $\mathbf{C}^{\Sigma}$, où l'on prend $I = \mathbf{C}'$, les flèches d'origine A' et d'extrémité B' étant par définition les éléments de $\mathrm{Hom}(A', B')$, et les relations de commutation étant celles qui expriment les deux axiomes d'un foncteur. Si $\mathbf{C}'$ est de plus une catégorie additive, les foncteurs *additifs* de $\mathbf{C}'$ dans $\mathbf{C}$ peuvent aussi s'interpréter comme une catégorie $\mathbf{C}^{\Sigma}$ (on rajoute les relations de commutation qu'il faut).

e) *Complexes à valeurs dans* $\mathbf{C}$. $I = Z$ (ensemble des entiers), l'ensemble des flèches étant $(d_n)_{n \in Z}$ où d_n est d'origine n et d'extrémité $n+1$, les relations de commutation étant $d_{n+1} d_n = 0$. On peut encore rajouter des relations de la forme $e_n = 0$ si on veut se borner aux complexes à degrés positifs, ou à degrés négatifs. On obtient de façon analogue les bicomplexes etc.

f) *La catégorie* $\mathbf{C}^{G}$, *(G un groupe).* Soit G un groupe, $\mathbf{C}$ une catégorie (non nécessairement additive). On appelle *objet avec groupe d'opérateurs G* dans $\mathbf{C}$, un couple (A, r) formé d'un objet $A \in \mathbf{C}$ et d'une représentation r de G dans le groupe des automorphismes de A. Si (A', r') est un deuxième tel couple, on appelle morphisme du premier dans le second un morphisme de A dans A' qui permute aux opérations de G. La classe $\mathbf{C}^{G}$ des objets dans $\mathbf{C}$ avec groupe d'opérateurs G devient ainsi une catégorie. On peut l'interpréter comme une classe $\mathbf{C}^{\Sigma}$, où on prend pour $\Sigma = \Sigma(G)$ le schéma avec relations suivant: l'ensemble des sommets est réduit à un élément i_0, l'ensemble des flèches est G, les relations de commutation sont $(s)(t) = (st)$ (où le premier membre désigne une flèche composée) et $(e) = e_{i_0}$ (ou e designe l'élément unité de G). En particulier, si $\mathbf{C}$ est une catégorie additive, il en est de même de $\mathbf{C}^{G}$; dans ce cas, notre construction est contenue dans celle qui suit, (grâce à la considération de l'algèbre du groupe G).

g) *La catégorie* $\mathbf{C}^{U}$ *(U un anneau avec unité).* On considère la catégorie additive formé des couples (A, r) d'un objet A de $\mathbf{C}$ et d'une représentation unitaire de U dans l'anneau $\mathrm{Hom}(A, A)$, les morphismes dans cette catégorie étant définis de façon évidente. Elle s'interprète encore comme ci-dessus comme une catégorie $\mathbf{C}^{\Sigma(U)}$, où $\Sigma(U)$ est le schéma avec relations ayant un seul sommet, U comme ensemble de flèches, et des relations de commutation que nous n'écrirons pas.

h) *Systèmes inductifs et systèmes projectifs.* On prend comme ensemble de sommets un ensemble *préordonné I*, comme flèches les couples (i, j) de sommets avec $i \leqq j$, l'origine et l'extrémité de (i, j) étant respectivement i et j. Les relations de commutation sont $(i, j)\,(j, k) = (i, k)$ et $(i, i) = e_i$. Les diagrammes correspondants (pour une catégorie **C** donnée, non nécessairement additive) sont connus sous le nom de *systèmes inductifs* sur I à valeurs dans **C**. Si on change I en l'ensemble préordonné opposé, ou **C** en $\mathbf{C}^\circ$, on obtient les *systèmes projectifs* sur I à valeurs dans **C**. Un cas important est celui où I est l'ensemble des parties ouvertes d'un espace topologique X, ordonné par la relation $\supset$: on obtient alors la notion de *préfaisceau* sur X (à valeurs dans la catégorie **C**).

1.8. **Limites inductives et projectives.** Nous ne parlerons que des premières, la notion de limite projective étant duale de celle de limite inductive. Soit **C** une catégorie, I un ensemble préordonné, $\mathbf{A} = (A_i, u_{ij})$ un système inducif sur I à valeurs dans **C** (u_{ij} est un morphisme $A_j \to A_i$ défini pour $i \geqq j$). On appelle *limite inductive* (généralisée) de **A** un système formé d'un $\bar{\mathbf{A}} \in \mathbf{C}$ et d'une famille (u_i) de morphismes $u_i : A_i \to \bar{\mathbf{A}}$, satisfaisant aux conditions suivantes : a) Pour $i \leqq j$, on a $u_i = u_j u_{ji}$ b) Pour tout $B \in \mathbf{C}$ et toute famille (v_i) de morphismes $v_i : A_i \to B$, telle que l'on ait pour tout couple (i, j) avec $i \leqq j$, la relation $v_i = v_j u_{ji}$, on peut trouver un morphisme v et un seul de $\bar{\mathbf{A}}$ dans B tel que l'on ait $v_i = v u_i$ pour tout $i \in I$. Si $(\bar{\mathbf{A}}, (u_i))$ est une limite inductive de $\mathbf{A} = (A_i, u_{ij})$, et si $(\bar{\mathbf{B}}, (v_i))$ est une limite inductive d'un deuxième système inductif $\mathbf{B} = (B_i, v_{ij})$, enfin si $w = (w_i)$ est un morphisme de **A** dans **B**, alors il existe un morphisme $\bar{w}$ et un seul de $\bar{\mathbf{A}}$ dans $\bar{\mathbf{B}}$ tel que l'on ait, pour tout $i \in I : \bar{w} u_i = v_i w_i$. En particulier, deux limites inductives d'un même système inductif sont canoniqnement isomorphes (dans un sens évident), aussi est-il naturel de choisir, pour tout système inductif qui admet une limite inductive, une telle limite inductive (par exemple au moyen du symbole τ de Hilbert), qu'on notera alors $\varinjlim \mathbf{A}$ ou $\varinjlim_{i \in I} A_i$, et qu'on appellera *la* limite inductive du système inductif donné. Si I et **C** sont tels que $\varinjlim \mathbf{A}$ existe pour *tout* système inductif **A** sur I à valeurs dans **C**, il résulte de ce qui précède que $\varinjlim \mathbf{A}$ est un *foncteur covariant* défini sur la catégorie des systèmes inductifs de I dans **C**, à valeurs dans **C**.

PROPOSITION 1.8. *Soit* **C** *une catégorie abélienne satisfaisant à l'axiome* AB 3) (*existence des sommes directes quelconques*) *et soit I un ensemble préordonné filtrant croissant. Alors pour tout système inductif* **A** *sur I, à valeurs dans* **C**, *la limite inductive* $\varinjlim \mathbf{A}$ *existe, et c'est un foncteur additif exact à droite de* **A**. *Si* **C** *satisfait à l'axiome* AB 5) (*cf.* 1.5) *ce foncteur est même exact, et alors le noyau du morphisme canonique $u_i : A_i \to \varinjlim \mathbf{A}$ est le* sup *des noyaux des morphismes $u_{ji} : A_i \to A_j$ pour $j \geqq i$. (En particulier, si les u_{ji} sont injectifs, il en est de même de u_i).*

Pour construire une limite inductive de (A_i, u_{ij}), on considère $S = \bigoplus_{i \in I} A_i$, et pour tout couple (i, j) avec $i \leqq j$, le morphisme w_{ij} de A_i dans S déduit du morphisme $A_i \to A_i + A_j$ dont les composantes sont I_{A_i} et $-u_{ji}$. Soit N_{ij}

$= w_{ij}(A_i)$, soit N le sous-truc de S borne supérieure des N_{ij} (qui existe en vertu de l'axiome AB 3)), soit $\mathbf{A} = S/N$, soit $u_i : A_i \to \mathbf{A}$ le morphisme induit par le morphisme canonique $S \to S/N$, on constate aussitôt que $(\mathbf{A}, u_i)$ est une limite inductive de $\mathbf{A}$. Nous laissons au lecteur la démonstration des autres assertions de la proposition 1.8., démonstration évidemment bien connue.

1.9. Générateurs et cogénérateurs. Soit $\mathbf{C}$ une catégorie, et soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'objets de $\mathbf{C}$. On dit que c'est une *famille de générateurs* de $\mathbf{C}$ si pour tout objet $A \in \mathbf{C}$ et tout sous-truc $B \neq A$, on peut trouver un $i \in I$ et un morphisme $u : U_i \to A$ qui ne provienne pas d'un morphisme de U_i dans B. Alors pour tout $A \in \mathbf{C}$, les sous-trucs de A forment un *ensemble*: en effet, un sous-truc B de A est complètement déterminé par l'ensemble des morphismes d'objets U_i dans A qui proviennent d'un morphisme de U_i dans B. On dit qu'un objet $U \in \mathbf{C}$ est un *générateur* de $\mathbf{C}$ si la famille $\{U\}$ est une famille de générateurs.

PROPOSITION 1.9.1. *Supposons que* $\mathbf{C}$ *soit une catégorie abélienne satisfaisant à l'axiome* AB 3) (*existence de sommes directes infinie*), *soit* $(U_i)_{i\in I}$ *une famille d'objets de* $\mathbf{C}, U = \bigoplus U_i$ *sa somme directe. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

a) (U_i) *est une famille de générateurs de* $\mathbf{C}$.

b) *U est un générateur de* $\mathbf{C}$.

c) *Tout* $A \in \mathbf{C}$ *est isomorphe à un quotient d'une somme directe* $U^{(I)}$ *d'objets tous identiques* à U.

L'équivalence de a) et b) est une conséquence à peu près immédiate de la définition. b) implique c), car il suffit de prendre pour I l'ensemble $\mathrm{Hom}(U, A)$ et de considérer le morphisme de $U^{(I)}$ dans A dont la composante suivant chaque $u \in I$ est u lui-même: l'image B de ce morphisme est A, puisque autrement il existerait un $u \in \mathrm{Hom}\,(U, A) = I$ tel que $u(A) \not\subset B$, ce qui serait absurde; donc A est isomorphe à un quotient de $U^{(I)}$. c) implique b), car il est immédiat que si A est un quotient de $U^{(I)}$, alors pour tout sous-truc B de A distinct de A, il existe un i tel que l'image canonique dans A du i. ème facteur de $U^{(I)}$ soit $\not\subset B$, d'où un morphisme de U dans A qui ne provient pas d'un morphisme de U dans B. (On notera que la structure additive de $\mathbf{C}$ n'a pas réellement servi ici).

EXEMPLES. Si $\mathbf{C}$ est la catégorie abélienne des modules à gauche unitaires sur un anneau U avec unité, alors U (considéré comme module à gauche sur lui-même) est un générateur. Si $\mathbf{C}$ est la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur un espace topologique fixé X, et si pour tout ouvert $U \subset X$ on désigne par $\mathbf{Z}_U$ le faisceau sur X qui est nul au dessus de $\complement U$ et identique au faisceau constant des entiers au dessus de U, la famille des $\mathbf{Z}_U$ forme un système de générateurs de $\mathbf{C}$; cet exemple se généralise aussitôt au cas où on se donne sur X un faisceau $\mathbf{O}$ d'anneaux, et où l'on considère la catégorie des faisceaux de $\mathbf{O}$-modules sur X. D'autres exemples sont contenus dans la proposition suivante:

PROPOSITION 1.9.2. *Soit* Σ *un schéma de diagrammes avec relations de commutation* (*cf* 1.6), *et soient* $\mathbf{C}$ *une catégorie abélienne,* $(U_i)_{i\in I}$ *une famille de générateurs de* $\mathbf{C}$. *On suppose que pour toute flèche de* Σ, *l'origine et l'extrémité de la flèche sont distincts, et que dans les relations de commutation ne figurent pas les morphismes identiques* e_S (*où s est un sommet*)[2]. *Alors pour tout* $A \in \mathbf{C}$, *et tout sommet s du schéma, le diagramme* $\mathcal{E}_S(A)$ *dont la valeur est A au sommet s et* 0 *en tous les autres sommets, et dont la valeur sur chaque flèche est* 0, *appartient à* $\mathbf{C}^\Sigma$. *De plus, la famille des* $\mathcal{E}_S(U_i)$ (*s et i variables*) *est un système de générateurs de* $\mathbf{C}$.

La vérification est immédiate, il suffit de remarquer, pour la dernière assertion, que les morphismes de $\mathcal{E}_S(A)$ dans un diagramme D s'identifient aux morphismes de A dans $D(s)$.

Nous laissons au lecteur le soin de développer la notion duale de *famille de cogénérateurs* d'une catégorie abélienne. On peut montrer que si $\mathbf{C}$ est une catégorie abélienne satisfaisant à l'axiome AB 5) (*cf.* 1.5.) alors l'existence d'un générateur implique l'existence d'un cogénérateur (nous ne nous servirons pas de ce résultat). Ainsi la catégorie des modules unitaires à gauche sur un an neau U avec unité admet toujours un cogénérateur : si par exemple $U = \mathbf{Z}$, on peut prendre pour cogénérateur le groupe des nombres rationnels mod $\mathbf{Z}$ (ou le tore $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$).

1.10. Objets injectifs et projectifs. Rappelons qu'un objet M d'une catégorie abélienne $\mathbf{C}$ est dit *injectif* si le foncteur $A \to \mathrm{Hom}\,(A, M)$ (qui de toutes façons est exact à gauche) est exact, i. e. si pour tout morphisme u dans M d'un sous-truc B d'un $A \in \mathbf{C}$, il existe un morphisme de A dans M qui le prolonge. Un morphisme $A \to M$ est dit un *effacement injectif* (de A) si c'est un monomorphisme, et si pour tout monomorphisme $B \to C$ et tout morphisme $B \to A$, on peut trouver un morphisme $C \to M$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & M \end{array}$$

Ainsi, pour que l'application identique de M soit un effacement injectif il faut et il suffit que M soit injectif ; tout monomorphime dans un objet injectif est un effacement injectif.

THÉORÈME 1.10.1. *Si* $\mathbf{C}$ *satisfait à axiome* AB 5) (*cf.* 1.5.) *et admet un générateur* (*cf.* 1.9) *alors pour tout* $A \in \mathbf{C}$, *il existe un monomorphisme de A dans un objet injectif M.*

On va même construire un foncteur M: $A \to M(A)$ (non additif en général !)

2) La catégorie $\mathbf{C}^\Sigma$ des systèmes inductifs dans $\mathbf{C}$ construits sur un ensemble d'indices *ordonné* I, rentre dans ce cas. En effet il suffit alors, dans l'exmple 1.7.h) de considérer les flèches (i,j) avec $i<j$, et les relations de commutation $(i,j)\,(j,k) = (i,k)$, où les e_s n'intervienent plus.

de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$, et un homomorphisme f du foncteur identique dans M, tels que pour tout $A \in \mathbf{C}$, $M(A)$ soit injectif et $f(A)$ soit un monomorphisme de A dans $M(A)$. La démonstration étant essentiellement connue, nous esquisserons seulement les points principaux.

LEMME 1. *Si* $\mathbf{C}$ *satisfait l'axiome* AB 5), *alors l'objet* $M \in \mathbf{C}$ *est injectif si et seulement si pour tout sous-truc* V *du générateur* U, *et tout morphisme* v *de* V *dans* M, v *se prolonge en un morphisme de* U *dans* M.

Il suffit de prouver que la condition est suffisante, soit donc alors u un morphisme d'un sous-truc B d'un $A \in \mathbf{C}$ dans M, montrons qu'il existe un morphisme de A dans M prolongeant u. Considérons l'ensemble P des prolongements de u à des sous-trucs de A contenant B (c'est bien un ensemble, car en vertu de l'existence d'un générateur, les sous-trucs de A forment un ensemble). Ordonnons-le par la relation de prolongement. En vertu de la deuxième formulation de l'axiome AB 5) (cf. 1. 5) cet ensemble est inductif. Il admet donc un élément maximal, on est donc ramené au cas où u est lui-même maximal, et à prouver qu'alors $B = A$. Prouvons donc que si $B \neq A$, il existe un prolongement de u à un $B' \neq B$. Soit en effet j un morphisme de U dans A tel que $j(U) \not\subset B$, posons $B' = j(U) + B$ (donc $B' \neq B$). Soit $V = j^{-1}(B)$ l'image inverse de B par j, soit $j' : V \to B$ le morphisme induit par j, considérons la suite de morphismes $V \xrightarrow{\varphi'} U \times B \xrightarrow{\varphi} B' \to 0$, où le morphisme φ' a pour composantes l'application identique de V dans U et $-j'$, et φ a pour composantes j et l'application identique de B dans B'. On voit aussitôt que cette suite est exacte, donc pour définir un morphisme v de B' dans M, il suffit de définir un morphisme w de $U \times B$ dans M tel que $w\varphi' = 0$. Or soit k une extension de $uj' : V \to M$ à U, et prenons pour w le morphisme de $U \times B$ dans M dont les composantes sont k et u, on vérifie aussitôt que $w\varphi' = 0$, et que le morphisme $v : B' \to M$ défini par w prolonge u, ce qui achève la démonstration du lemme 1.

Soit $A \in \mathbf{C}$, soit $I(A)$ l'ensemble de tous les morphismes u_i de sous-trucs V_i de U dans A. Considérons le morphisme $\bigoplus V_i \to A \times U^{(I(A))}$ dont la restriction au facteur V_i a pour composantes $-u_i : V_i \to A$, et l'injection canonique de V_i dans le i. ème facteur de la somme directe $U^{(I(A))}$. Soit $M_1(A)$ le conoyau du morphisme envisagé, $f(A) : A \to M_1(A)$ le morphisme induit par l'épimorphisme canonique de $A \times U^{(I(A))}$ sur son quotient. Alors $f(A)$ est un monomorphisme (vérification facile grâce au fait que le morphisme canonique $\bigoplus V_i \to U^{(I(A))}$ est un monomorphisme en vertu de AB 4)) et de plus tout morphisme $u_i : V_i \to A$ se "prolonge" en un morphisme $U \to M_1(A)$ (savoir le morphisme induit sur le i. ème facteur de $U^{(I(A))}$ par l'épimorphisme canonique de $A \times U^{(I(A))}$ sur son quotient $M_1(A)$). Définissons par récurrence transfinie, pour tout nombre ordinal i, l'objet $M_i(A)$, et pour deux nombres ordinaux $i \leqq j$, un morphisme *injectif* $M_i(A) \to M_j(A)$, de telle façon que les $M_i(A)$ pour $i < i_0$ (i_0 nombre ordinal fixé) forment un système inductif. Pour $i = 0$, on prendra $M_0(A) = A$; pour $i = 1$, $M_1(A)$ et $M_0(A) \to M_1(A)$ sont déjà définis. Si la construction est faite pour les ordinaux $< i$, et si i est de la forme $j + 1$, on posera $M_i(A) = M_1(M_j(A))$, et le morphisme $M_j(A) \to M_{j+1}(A)$ sera $f(M_j(A))$ (ce qui définit en même temps les morphismes $M_k(A) \to M_i(A)$ pour $k \leqq i$). Si i est ordinal limite, on posera $M_i(A) = \varinjlim_{j<i} M_j(A)$, et on prendra pour morphismes $M_j(A) \to M_i(A)$ $(j < i)$ les morphismes canoniques, qui sont bien injectifs (prop. 1.8). Soit maintenant k le plus petit ordinal dont la puissance est strictement plus grande que la puissance de l'ensemble des sous-trucs de U, (prenons $M(A) = M_k(A)$), tout revient à prouver que M_k est injectif, i. e. satisfait à la condition du lemme 1. Avec les notations de ce lemme prouvons que $v(V)$ est contenu dans un des M_i avec $i < k$ (ce qui achèvera la démonstration). En effet, de $M_k = \operatorname{Sup} M_i$ on tire $V = \operatorname{Sup}_{i<k} v^{-1}(M_i)$ (en vertu de AB 5)), or comme l'ensemble des sous-trucs de V a une puissance $<$ puiss. k, et que tout ensemble de nombres ordinaux $< k$ et ayant pour limite k a la puissance de k (car puiss. k n'est pas cardinal limite), il s'ensuit que $v^{-1}(M_i)$ reste constant à partir d'un $i_0 < k$, d'où $V = v^{-1}(M_{i^0})$, ce qui achève la démonstration.

REMARQUES. 1. VARIANTE DU THÉORÈME 1.10.1 : Si **C** satisfait aux axiomes AB 3), AB 4) et AB 3*), et admet un cogénérateur T, alors tout $A \in \mathbf{C}$ admet un effacement injectif. Nous n'aurons pas à nous servir de ce résultat.

2. Le fait que $M(A)$ soit un foncteur en A peut-être commode, par exemple pour prouver que tout objet $A \in \mathbf{C}^G$ (i. e. un objet $A \in \mathbf{C}$ avec groupe d'opérateurs G — cf. 1.7. exemple f —) qui est injectif dans $\mathbf{C}^G$, est aussi injectif dans **C**.

3. Dans beaucoup de cas, l'existence d'un monomorphisme de A dans un objet injectif peut se voir directement de façon plus simple. Le théoréme 1 a l'avantage de s'appliquer à des cas très différents. De plus, les conditions du théorème sont stables par passage à certaines catégories de diagrammes (cf. prof. 1.6.1 et 1.9.2), où l'existence de suffisamment d'objets injectifs n'est pas toujours visible à l'oeil nu.

4. On laisse au lecteur le soin de donner les énoncés duals relatifs aux objets projectifs et les effacement projectifs.

1.11. Catégories quotient. Bien qu'elles ne serviront pas dans la suite de ce travail, les considérations de ce numéro, qui systématisent et assouplissent le "langage modulo **C**" de Serre [17], sont commodes dans diverses applications.

Soit **C** une catégorie, on appelle *sous-catégorie* de **C** une catégorie **C**$'$ dont les objets sont des objets de **C**, telle que pour $A, B \in \mathbf{C}'$, l'ensemble $\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}'}(A, B)$ de morphismes de A dans B au sens de **C**$'$, soit une partie de l'ensemble $\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ des morphismes de A dans B au sens de **C**, la composition des morphismes dans **C**$'$ étant induite par la composition des morphismes dans **C**, et les morphismes identiques dans **C**$'$ étant des morphismes identiques dans **C**. Ces deux dernières conditions signifient que la "fonction" qui à un objet ou morphisme de **C**$'$ associe le même objet ou morphisme de **C**, est un foncteur covariant de **C** dans **C**$'$ (appelé *injection canonique* de **C**$'$ dans **C**). Si **C**, **C**$'$ sont des catégories addtives, **C**$'$ est dite *sous-catégorie additive* si en plus des conditions précédentes, les groupes $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}'}(A,B)$ sont des sous-groupes de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A,B)$. Supposons que $\mathbf{C}$ soit une catégorie abélienne, $\mathbf{C}'$ est appelé une sous-catégorie *complète* si (i) *pour* $A, B \in \mathbf{C}'$, *on a* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}'}(A,B) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A,B)$. (ii) *Si dans une suite exacte* $A \to B \to C \to D \to E$ *les* 4 *termes extrêmes sont dans* $\mathbf{C}'$, *il en est de même du terme médian* D. D'après (i), $\mathbf{C}'$ est complètement déterminé par la classe de ses objets. (ii) équivaut à dire que pour tout morphisme $P \to Q$ avec $P, Q \in \mathbf{C}'$ le noyau et le conoyau sont dans $\mathbf{C}'$, et que pour toute suite exacte $0 \to R' \to R \to R'' \to 0$ avec R', R'' dans $\mathbf{C}'$, R est dans $\mathbf{C}'$. On vérifie aussitôt, qu'alors $\mathbf{C}'$ est elle-même une classe abéliennne, et que pour un morphisme $u: A \to B$ dans $\mathbf{C}'$, noyau et conoyau (donc aussi image et coimage) sont identiques au noyau et conoyau (resp. ....) envisagé dans $\mathbf{C}$.

La sous-catégorie $\mathbf{C}'$ de $\mathbf{C}$ est dite *épaisse*, si elle satisfait à la condition (i) ci-dessus, et au renforcement suivant de la condition (ii): (iii) *Si dans une suite exacte* $A \to B \to C$ *les termes extrêmes* A, C *sont dans* $\mathbf{C}'$, *il en est de même de* B. Si $\mathbf{C}$ est la catégorie abélienne des groupes abéliens, on trouve la notion de "classe de groupes abéliens" de [17]. On voit comme dans [17] que (iii) équivaut à la conjonction des trois conditions suivantes: Tout objet nul est dans $\mathbf{C}'$, tout objet isomorphe à un sous-truc ou un truc-quotient d'un objet $\mathbf{C}'$ est dans $\mathbf{C}'$, toute extension de deux objets de $\mathbf{C}'$ est dans $\mathbf{C}'$.

Soit $\mathbf{C}$ une catégorie abélienne, $\mathbf{C}'$ une sous-catégorie épaisse, nous allons définir une nouvelle catégorie abélienne, notée $\mathbf{C}/\mathbf{C}'$ et appelée *catégorie quotient* de $\mathbf{C}$ par $\mathbf{C}'$. Les objets de $\mathbf{C}/\mathbf{C}'$ sont par définition les objets de $\mathbf{C}$. Nous allons définir les morphismes dans $\mathbf{C}/\mathbf{C}'$ de A dans B, appelés "morphismes mod. $\mathbf{C}'$ de A dans B". Disons qu'un sous-truc A' de A est égal mod. $\mathbf{C}'$ à A, ou quasi-égal à A, si $A/A' \in \mathbf{C}'$; alors tout sous-truc de A contenant A' est encore quasi-égal à A, de plus le inf de deux sous-trucs de A quasi-égaux à A est encore quasi-égal à A. Dualement, on introduit la notion de quotient de B qussi-égal à B: un tel quotient B/N est quasi-égal à B si $N \in \mathbf{C}'$. Un morphisme mod. $\mathbf{C}'$ de A dans B est alors défini par un morphisme f' d'un sous-truc A' de A quasi-égal à A, dans un quotient B' de B quasi-égal à B, étant entendu qu'un morphisme $f'': A'' \to B''$ (satisfaisant aux mêmes conditions), définit le même morphisme mod. $\mathbf{C}'$, si et seulement si on peut trouver $A''' \leqq \mathrm{Inf}(A', A'')$, $B''' \leqq \mathrm{Inf}(B', B'')$, A''' quasi égal à A, B''' quasi égal à B, tels que les morphismes $A''' \to B'''$ définis par f', f'' soient identiques. Cette dernière relation entre f' et f'' est bien une relation d'équivalence, la définition précédente des morphismes mod. $\mathbf{C}'$ est donc cohérente. Supposons que pour tout $A \in \mathbf{C}$, les sous-trucs de A forment un ensemble (ce qui est vrai pour toutes les catégories connues), alors on peut considérer l'ensemble des morphismes mod. $\mathbf{C}'$ de A dans B, noté $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}/\mathbf{C}'}(A,B)$. $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}/\mathbf{C}'}(A,B)$ apparaît comme limite inductive des groupes abéliens $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A', B')$ où A' (B') parcourt les sous-trucs de A (quotients de B) quasi-égaux à A (B), et peut être considéré par suite comme un groupe abélien. On définit de même un accouplement $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}/\mathbf{C}'}(A,B) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}/\mathbf{C}'}(B,C) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}/\mathbf{C}'}(A,C)$ de la façon suivante. Soit $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A', B')$ un représentant d'une $u' \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}/\mathbf{C}'}(A,B)$, et $v \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(B'', C')$ un représentant d'un $v' \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}/\mathbf{C}'}(B,C)$. Soit Q l'image du morphisme canonique $B'' \to B'$ du sous-truc B'' de B dans le quotient B', Q est aussi isomorphe à la coimage de ce morphisme, et est donc à la fois un sous-truc de B' et un truc-quotient de B''. En diminuant au besoin le sous-truc A' de A et le quotient $\mathbf{C}'$ de $\mathbf{C}$, on peut supposer que u et v proviennent respectivement de morphismes (notés encore par la même lettre) $A' \to Q$ et $Q \to C'$. On peut donc prendre le composé $vu \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A', C')$, et on vérifie que l'élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}/\mathbf{C}'}(A, C)$ qu'il définit ne dépend que de u' et v', on le notera $v'u'$. Il n'y a aucune difficulté à prouver que la loi de composition ainsi définie est bilinaire, associative, et que la classe dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}/\mathbf{C}'}(A, A)$ de l'application identique I_A est une unité universelle, donc que $\mathbf{C}/\mathbf{C}'$ est une catégorie additive ; et enfin que c'est même une catégorie abélienne. Nous ne ferons pas ici cette vérification extrêmement fastidieuse. Ainsi *$\mathbf{C}/\mathbf{C}'$ apparait comme une catégorie abélienne, de plus le foncteur identique F de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}/\mathbf{C}'$ est exact* (et permute en particulier aux noyaux, conoyaux, images et coimages), *$F(A)$ est nue si et seulement si $A \in \mathbf{C}'$, enfin tout objet de $\mathbf{C}/\mathbf{C}'$ est de la forme $F(A)$, $A \in \mathbf{C}$.* Ce sont ces faits (qui essentiellement caractérisent la catégorie quotient) qui permettent d'appliquer le langage "mod. $\mathbf{C}'$" en toute sécurité, ce langage signifiant simplement qu'on se place dans la catégorie abélienne quotient. Il est particulièrement commode pour exploiter, quand on a une suite spectrale (cf. 2. 4) dans $\mathbf{C}$, le fait que certains termes de cette suite spectrale sont dans $\mathbf{C}'$: réduisant mod. $\mathbf{C}'$ (i. e. appliquant le foncteur F) on trouve une suite spectrale dans $\mathbf{C}/\mathbf{C}'$ où les termes correspondants sont nuls, d'où souvent des suites exactes mod. $\mathbf{C}'$ à l'aide des critères usuels d'obtention de suites exactes à partir de suites spectrales dont certains termes sont nuls.

Chapitre II Algèbre Homologique dans les catégories abéliennes.

2. 1. ∂-foncteurs et ∂^*-foncteurs. Soient $\mathbf{C}$ une catégorie abélienne, $\mathbf{C}'$ une catégorie additive, a et b deux entiers (pouvant être égaux à $+\infty$ ou $-\infty$) tels que $a+1<b$. Un *∂-foncteur covariant de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}'$, à degrés $a<i<b$*, est un système $T=(T^i)$ de foncteurs covariants additifs de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}'$, $(a<i<b)$, plus la donnée, pour tout i tel que $a<i<b-1$, et toute suite exacte $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ dans $\mathbf{C}$, d'un morphisme

$$\partial : T^i(A'') \to T^{i+1}(A')$$

("l'homomorphisme bord" ou "connecting homomorphism"), les axiomes suivants étant supposés satisfaits :

(i) Si on a une deuxième suite exacte $0 \to B' \to B'' \to 0$ et un homomorphisme de la première suite exacte dans la seconde, alors les diagrammes correspondants

$$\begin{array}{ccc} T^i(A'') & \xrightarrow{\partial} & T^{i+1}(A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^i(B'') & \xrightarrow{\partial} & T^{i+1}(B') \end{array}$$

sont commutatifs.

(ii) Pour toute suite exacte $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$, la suite de morphismes associée

(2.1.1.) $\quad \ldots . T^i(A') \to T^i(A) \to T^i(A'') \to T^{i+1}(A') \to \ldots .$

est un complexe, i. e. le composé de deux morphismes consécutifs dans cette suite est nul.

Définition analogue pour un ∂^*-foncteur covariant, la seule différence étant que l'opérateur ∂ diminue le degré d'une unité au lieu de l'augmenter. Définition analogue pour les ∂-foncteurs et ∂^*-foncteurs contravariants; les T^i sont alors des foncteurs additifs contravariants et les opérateurs bords vont de $T^i(A')$ dans $T^{i+i}(A'')$ ou $T^{i-1}(A'')$. Si on change de signe les degrés i dans T^i, ou si on remplace la catégorie $\mathbf{C}'$ par sa duale, les ∂-foncteurs sont changés en ∂^*-foncteurs. Ainsi, on peut toujours se ramener à l'étude des ∂-foncteurs covariants. Remarquons que si $a = -\infty$, $b = +\infty$, un ∂-foncteur est une "connected sequence of functors" de [6, Chap. III].

Etant donnés deux ∂-foncteurs T et T' définis pour les mêmes dégrés, on appelle *morphisme* (ou transformation naturelle) de T dans T' un système $f = (f^i)$ de morphismes fonctoriels $f^i : T^i \to T'^i$, soumis à la condition naturelle de commutation naturelle de commutation avec ∂: pour toute suite exacte $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} T^i(A') & \xrightarrow{\partial} & T^{i+1}(A') \\ \downarrow & \partial & \downarrow \\ T'^i(A'') & \rightarrow & T'^{i+1}(A') \end{array}$$

est commutatif. Les morphismes de ∂-foncteurs s'ajoutent et se composent de façon évidente.

Supposons que $\mathbf{C}'$ soit aussi une catégorie abélienne. Alors un ∂-foncteur est dit *exact* si pour toute suite exacte $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ dans $\mathbf{C}$, la suite correspondante (2.1.1) de morphismes est exacte. On appelle *foncteur cohomologique* (resp. *foncteur homologique*) un ∂-foncteur (resp. ∂^*-foncteur) *exact* défini pour tous les degrés.

2.2. ∂-foncteurs universels. Soit $T = (T^i)$ $0 \leqq i \leqq a$ un ∂-foncteur covariant de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}'$, où $a > 0$. T est dit un ∂-foncteur *universel* si pour tout ∂-foncteur $T' = (T'^0)$ défini pour les mêmes degrés, et tout morphisme fonctoriel f^{i0} de T^{i0} dans T'^{i0}, il existe un morphisme et un seul f de T dans T' qui pour le degré i_0 se réduise à f^{i0}. Définition identique pour un ∂-foncteur contravariant; dans le cas des ∂^*-foncteurs il faut considérer des morphismes de T' dans T et non de T dans T'.

Par définition même, pour un foncteur covariant F donné de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$, et pour a, donné, $a > 0$, il ne peut exister, à isomorphismes canoniques près, qu'un seul ∂-foncteur universel défini en degrés $0 \leqq i \leqq a$ et se réduisant à F en degré 0. Ses composantes sont alors notées S^iF, et appelées *foncteurs satellites* droits de F. Si $i < 0$, on posera aussi $S_iF = S^{-i}F$, où les S_iF sont les satellites *gauches* de F, définis comme S^iF, mais par la considération des ∂^*-foncteur universels définis en degrés $0 \leqq i \leqq a$, tels que $T^0 = F$. On vérifie aussitôt que pour i donné, si S^iF existe, il est indépendant du choix de a.

Dans tous les cas à ma connaissance, les foncteurs satellites d'un foncteur additif quelconque F existent. D'ailleurs, si $\mathbf{C}, \mathbf{C}'$ sont donnés, pour montrer que pour tout foncteur covariant additif F de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}'$, il existe un ∂-foncteur universel défini en tous les degrés et se réduisant à F pour le degré zéro (i. e. tous les satellites S^iF existent) il suffit manifestement de prouver que S^1F et $S^{-1}F$ existent, en vertu des formules $S^1(S^iF) = S^{i+1}F$ si $i \geqq 0$, $S^{-1}(S^iF) = S^{i-1}F$ si $i \leqq 0$, (dont la vérification à partir de la définition est triviale). D'ailleurs, la recherche de S^1F et $S^{-1}F$ sont deux problèmes duals, ces deux foncteurs se permutent si on remplace $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C}'$ par les catégories duales.

Un foncteur additif F de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}'$ est dit *effaçable* si pour tout $A \in \mathbf{C}$, on peut trouver un monomorphisme $u: A \to M$ tel que $F(u) = 0$; si $\mathbf{C}$ est tel que tout objet $A \in \mathbf{C}$ admet un effacement injectif (cf. 1.10 remarque 1) il revient au même de dire que $F(u) = 0$ pour tout effacement injectif u; si enfin $\mathbf{C}$ est tel que tout objet $A \in \mathbf{C}$ admet un monomorphisme dans un objet injectif M (cf. 1.10.1) il revient au même de dire que $F(M) = 0$ pour tout objet injectif M. Dualement, F est dit *coeffaçable* si pour tout $A \in \mathbf{C}$, on peut trouver un épimorphisme $u: P \to A$ tel que $F(u) = 0$.

PROPOSITION 2.2.1. *Soient* $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}'$ *deux catégories abéliennes,* $T = (T^i)$ $0 < i < b$ *un* ∂*-foncteur exact (covariant ou contravariant) de* $\mathbf{C}$ *dans* $\mathbf{C}'$, *avec* $a > 0$ *Si* T^i *est effaçable pour* $i > 0$ *alors* T *est un* ∂*-foncteur universel, et la réciproque est vraie si* $\mathbf{C}$ *est tel que tout objet* $A \in \mathbf{C}$ *admet un effacement injectif* (*cf.* 1.10).

Il suffit pour la partie directe, de prouver par exemple que si (T'^0, T'^1) est un ∂-foncteur défini pour les degrés 0, 1 et f^0 un morphisme fonctoriel $T^0 \to T'^0$, alors il existe un morphisme (f^0, f^1) unique de (T^0, T^1) dans (T'^0, T'^1) se réduisant à f^0 pour le degré 0 (nous avons supposé T covariant pour fixer les idées). Soit $A \in \mathbf{C}$, considérons une suite exacte $0 \to A \to M \to A' \to 0$ telle que le morphisme $T^1(A) \to T^1(M)$ soit nul. Si on a pu construire f^1, on aura un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} T^0(M) & \to & T^0(A') & \to & T^1(A) & \to & T^1(M) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ T'^0(M) & \to & T'^0(A') & \to & T'^1(A). & & \end{array}$$

La première ligne étant exacte, on en conclut que le morphisme $T^0(A') \to T^1(A)$ est surjectif, et par suite que le morphisme $f^1(A): T^1(A) \to T'^1(A)$ est complétement déterminé par passage au quotient à partie de $f^0(A'): T^0(A) \to T'^0(A')$, ce qui prouve l'unicité de $f^1(A)$. D'ailleurs, le diagramme précédent sans $f^1(A)$, compte tenu du fait que le produit des deux morphismes de la deuxième ligne est nul, permet de définir un morphisme $T^1(A) \to T'^1(A)$ de façon unique par la condition que le diagramme reste commutatif. Des raisonnements standarts montrent que le morphisme ainsi défini ne dépend pas du choix particulier de la suite exacte $0 \to A \to M \to A' \to 0$, puis le fait que ce morphisme est fonctoriel, et "permute à ∂". Cela prouve donc la première partie de la proposition. La deuxième partie est contenue dans le théorème d'existence suivant:

THÉOREME 2.2.2. *Soit* $\mathbf{C}$ *une catégorie abélienne telle que tout objet* $A \in \mathbf{C}$ *admette un effacement injectif* (*cf.* 1.10). *Alors pour tout foncteur additif covariant* F *sur* $\mathbf{C}$, *les satellites* S^iF $(i \geqq 0)$ *existent et sont des foncteurs effaçables pour* $i > 0$. *Pour que le* ∂*-foncteur universel* $(S^iF)_{i \geqq 0}$ *soit exact, il* *faut et il suffit que F satisfasse aux conditions suivantes; F est semi-exact, et pour $P \subset Q \subset R$ dans* **C**, *le noyau de $F(Q/P) \to F(R/P)$ est contenu dans l'image de $F(Q) \to F(Q/P)$ (conditions toujours satisfaites si F est exact à gauche ou exact à droite).* [2bis)]

La démonstration est essentiellement contenue dans [6, Chap. III]. Pour la première partie, il suffit de prouver l'existence de S^1F. Soit $A \in \mathbf{C}$, considérons une suite exacte $0 \to A \to M \to A' \to 0$, où le premier morphisme est un effacement injectif de A, posons $S^1F(A) = F(A')/\mathrm{Im}(F(M))$, on voit comme dans [6] que le deuxième membre est indépendant du choix particulier de la suite exacte choisie, (modulo des isomorphismes canoniques) et peut être considéré comme un foncteur en A. La définition de l'homomorphisme bord, la vérification des axiomes (i) et (ii) du N°2. 1, et du fait que le ∂-foncteur obtenu (F, S^1F) est universel est aussi standart. De même, nous omettrons la démonstration du critère d'exactitude. — Signalons l'énoncé dual: *Si dans* **C**, *tout objet admet un effacement projectif, alors les satellites S^iF ($i \leqq 0$) existent, et sont des foncteurs coeffaçables; la condition pour que le ∂-foncteur $(S^iF)_{i\leqq 0}$ soit exact est la même que dans l'énoncé du théorème* 2. 2. 2. Par suite, si dans **C** tout objet admet un effacement injectif et un effacement projectif, alors tout foncteur covariant additif F admet des satellites S^iF pour tout i, et pour que le ∂-foncteur universel (S^iF) soit exact, il faut et il suffit que F satisfasse à la condition donnée dans l'énoncé du théorème 2. 2. 2. Si F est un foncteur contravariant, il faut, dans les énoncés ci-dessus, permuter les cas $i \leqq 0$ et $i \geqq 0$, et remplacer la condition d'exactitude par une condition duale.

REMARQUE. Signalons un autre cas, très différent de celui donné dans le théorème 2. 2. 2, où on peut construire les foncteurs satellites d'un foncteur arbitraire de **C** dans **C**$'$: Supposons qu'on puisse trouver un *ensemble* $\mathbf{C}_0 \subset \mathbf{C}$ tel que tout $A \in \mathbf{C}$ soit isomorphe à un objet $\in \mathbf{C}_0$, et supposons que **C**$'$ soit une catégorie abélienne où les sommes directes infinies existent. Alors pour tout foncteur additif F de **C** dans **C**$'$, les satellites (S^iF) $(i \geqq 0)$ existent. De plus, si **C**$'$ satisfait à l'axiome AB 5) (cf. 1. 5) et si F satisfait la condition de la fin du théorème 2. 2. 2, alors le ∂-foncteur $(S^iF)_{i\geqq 0}$ est *exact*. Comme en particulier la catégorie des groupes abéliens satisfait à la condition AB 5), on peut appliquer le résultat précédent au foncteur Hom(A, B) à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens et définir ainsi les foncteurs Ext^i (A, B) comme satellites de Hom (A, B), considéré soit comme foncteur covariant en B, soit comme foncteur contravariant en A. (Mais il resterait à prouver que ces deux procédés donnent le même résultat). La condition envisagée sur **C** est vérifiée pour des catégories dont les objets sont soumis à certaines conditions de finitude (et où en particulier des sommes directes infinies n'existent pas en général). Exemple: la catégorie abélienne des groupes algébriques (non nécessairement connexes) définies sur un corps k fixé de caractéristique 0, qui sont complètes en tant que variétés algébriques et abéliennes en tant que groupes, i. e. la catégorie des groupes algébriques

2 bis) (Note ajoutée pendant la correction des épreuves.) Cette condition est aussi automatiquement vérifiée si tout objet de C est isomorphe à un sous-truc d'un objet injectif, cf. [6, Chap. III]

abéliens définis sur k dont la composante connexe de l'élément neutre est une "variété abélienne". (On est obligé de supposer la caractéristique nulle, sinon un homomorphisme bijectif ne serait pas nécessairement un isomorphisme). Indiquons seulement qu'on démontre le résultat énoncé ci-dessus en construisant $S^1F(A)$ comme limite inductive des objets $F(M/A)\operatorname{Im}(F(M))$ pour "tous" les monomorphismes $A \to M$ dans $\mathbf{C}$, préordonnés en disant que $A \to M$ est "majore" par $A \to M'$ si on peut trouver un morphisme $M \to M'$ induisant l'identité sur A.

2. 3. Foncteurs dérivés. Soient $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C}'$ deux catégories abéliennes. La théorie des foncteurs dérivés d'un foncteur additif F de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}'$ se développe comme dans [6, Chap. V], à cela près qu'il faut supposer suivant les cas que tout objet $A \in \mathbf{C}$ est isomorphe à un sous-truc d'un objet injectif, resp. à un truc quotient d'un objet projectif, ou les deux. Ainsi, pour pouvoir définir les foncteurs dérivés *droits* d'un foncteur *covariant* ou les foncteurs dérivés *gauches* d'un foncteur *contravariant*, il faut supposer que tout objet $A \in \mathbf{C}$ est isomorphe à un sous-truc d'un objet injectif, d'où on conclut en effet que tout $A \in \mathbf{C}$ admet une résolution injective[3] : $0 \to A \to C^0 \to C^1 \to \cdots$, d'où la définition des $R^iF(A) = H^i(F(C))$ (où C désigne le complexe des C^i). Si on veut définir des foncteurs dérivés gauches d'un foncteur covariant ou des foncteurs dérivés droits d'un foncteur contravariant, il faut de même supposer que tout objet $A \in \mathbf{C}$ est isomorphe à un quotient d'un objet projectif. Et enfin, pour définir des foncteurs dérivés d'un foncteur mixte en plusieurs variables, il faut faire sur la catégorie de chaque variable l'hypothèse appropriée. A cela près, l'exposé de [6] se transporte tel quel. En particulier, si F est par exemple covariant et si on peut former les foncteurs dérivés droits R^iF, alors (posant $R^iF = 0$ pour $i < 0$) $RF = (R^iF)$ est un foncteur cohomologique (dit *foncteur cohomologique dérivé droit* de F), et on a un morphisme canonique de ∂-foncteurs à degrés positifs $SF \to RF$ (où $SF = (S^iF)$ est le ∂-foncteur universel a degrés positifs satellite de F, qui existe en vertu de th. 2. 2. 2.); ce dernier est un isomorphisme si et seulement si F est exact à gauche. Notons qu'il semble que la considération des R^iF n'ait guère d'intérêt que dans le cas où F est exact à gauche, i. e. quand ils coincident avec les foncteurs satellites; cependant la définition simultanée des R^iF par résolutions injectives est plus maniable que la définition récurrente des S^iF, et en particulier se prête mieux à la construction des suites spectrales les plus importantes (voir 2. 4).

Soient $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}'$ trois catégories abéliennes, soit $T(A, B)$ un bifoncteur additif de $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$ dans $\mathbf{C}'$, que nous supposerons pour fixer les idées contravariant en A et covariant en B. Supposons que tout objet de $\mathbf{C}_2$ soit isomorphe à un sous-truc d'un objet injectif, on peut alors construire les

3) Une *résolution droite* d'un $A \to \mathbf{C}$ est par définition un complexe $\mathbf{C}$ à degrés positifs, muni d'un "homomorphisme d'augmentation" $A \to C$ (A étant considéré comme un complexe réduit au degrè 0), de façon que la suite $0 \to A \to C^0 \to C^1 \to \cdots\cdots$ soit exacte. On appelle *résolution injective* de A une résolution C de A telle que les C^i soient des objets injectifs. Les *résolutions gauches* de A, et en particulier les *résolutions projectives* de A, se définissent dualement.

foncteurs dérivés partiels droits de T par rapport à la seconde variable B,

$$R_2^i T(A,B) = H^i(T(A, C(B)))$$

où $C(B)$ est le complexe défini par une résolution droite de B par des objets injectifs. Bien entendu, les $R_2^i T$ sont des bifoncteurs. *Supposons maintenant que pour tout objet injectif B dans $\mathbf{C}_2$, le foncteur $A \to T(A,B)$ sur $\mathbf{C}_1$ doit exact*, nous allons montrer que *pour tout* $B \in \mathbf{C}_2$ la suite $(R_2^i T(A,B))$ peut-être considéré comme un foncteur cohomologique en A. Soit en effet $C(B)$ le complexe défini par une résolution droite de B par des objets injectifs. Pour toute suite exacte $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ dans $\mathbf{C}_1$, la suite d'homomorphismes de complexes $0 \to T(A'', C(B)) \to T(A, C(B)) \to T(A', C(B)) \to 0$ est exacte (d'après l'hypothèse sur T, les termes de $C(B)$ étant injectifs), elle définit donc une suite exacte de cohomologie, c'est-à-dire une suite exacte

$$\cdots \to R_2^i T(A'',B) \to R_2^i T(A,B) \to R_2^i T(A',B) \xrightarrow{\partial} R_2^{i+1} T(A'',B) \to \cdots.$$

On vérifie aussitôt que le morphisme ∂ dans cette suite ne dépend pas du choix particulier du complexe $C(B)$, et qu'il permute aux homomorphismes de suites exactes, ce qui montre bien que $(R_2^i T(A,B))$ pour B fixé est un foncteur cohomologique en A; on vérifie d'ailleurs aussitôt que pour un morphisme $B \to B'$ dans $\mathbf{C}_2$, les morphismes correspondants $R_2^i T(A,B) \to R_2^i T\ (A,B')$ définissent un morphisme de ∂-foncteurs en A. Si on suppose que dans $\mathbf{C}_1$, tout objet est isomorphe à un quotient d'un objet projectif, et que pour tout objet projectif $A \in \mathbf{C}_1$, le foncteur $T(A,B)$ est exact en B (on dit alors, conformément à la terminologie de [6], que T est "right balanced"), alors les $R_2^i T(A,B)$ sont aussi les foncteurs dérivés droits $R^i T(A,B)$ de T, et coincident aussi avec les foncteurs dérivés partiels $R_1^i T(A,B)$; dans ce cas, les homomorphismes bords construits ci-dessus ne sont autres que les homomorphismes bords naturels de $R^i T$ et $R_1^i T$ par rapport à leur première variable.

Les considérations précédentes ont été développées surtout pour le cas d'une catégorie abélienne $\mathbf{C}$ dans laquelle tout objet est isomorphe à un sous-truc d'un objet injectif, mais oû on ne suppose pas que tout objet soit isomorphe à un truc quotient d'un objet projectif. Prenons alors $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_2 = \mathbf{C}$, $\mathbf{C}' =$ catégorie des groupes abéliens, $T(A,B) = \mathrm{Hom}\ (A,B)$; par définition même d'un objet injectif, $\mathrm{Hom}\ (A,B)$ est exact en A si B est injectif. Désignant par $\mathrm{Ext}^p\ (A,B)$ les foncteurs dérivés droits par rapport à B, on voit que les $\mathrm{Ext}^p\ (A,B)$ forment un foncteur cohomologique en B *et* en A. On a $\mathrm{Ext}^0(A,B) = \mathrm{Hom}\ (A,B)$ puisque $\mathrm{Hom}\ (A,B)$ est exact à gauche, il est facile de voir que $\mathrm{Ext}^1(A,B)$ peut encore s'interprèter comme le groupe des classes d'extensions de A (quotient) par B (sous-truc) [6: Chap. XIV].

Un cas important où la catégorie abélienne $\mathbf{C}$ contient suffisamment d'objets injectifs, mais pas assez d'objets projectifs, est celui où $\mathbf{C}$ est la catégorie des faisceaux de modules sur un faisceau d'anneaux donné sur un espace topologique X. Au Chap. IV, nous étudierons de façon plus détaillée les groupes $\mathrm{Ext}^p\ (A,B)$ dans ce cas.

2.4. Suites spectrales et foncteurs spectraux. Pour la théorie des suites spectrales, nous renvoyons à [6, Chap. XV et XVII], en nous contentant de préciser notre terminologie, et de dégager les cas généraux les plus utiles pour la suite où l'on peut écrire des suites spectrales.

Soit $\mathbf{C}$ une catégorie abélienne. Soit $A \in \mathbf{C}$, une *filtration* (décroissante) sur A est une famille $(F^n(A))$ de sous-trucs de A ($n \in \mathbf{Z}$) avec $F^n(A) \subset F^{n'}(A)$ si $n \geqq n'$, un *objet filtré* dans $\mathbf{C}$ est un objet de $\mathbf{C}$ muni d'une filtration. Si A, E sont deux objets filtrés de $\mathbf{C}$, un morphisme $u : A \to B$ est dit compatible avec la filtration si $u(F^n(A)) \subset F^n(B)$ pour tout n. Avec cette notion de morphisme, les objets avec filtration dans $\mathbf{C}$ forment un catégorie additive (mais non un catégorie abélienne, car une bijection de cette catégorie n'est pas nécessairement un isomorphisme !). On appelle *gradué associé* à un objet filtré A la famille des $G^n(A) = F^n(A)/F^{n+1}(A)$, on la dénote par $G(A)$[4]. $G(A)$ est un foncteur covariant par rapport à l'objet filtré A. Une *suite spectrale* dans $\mathbf{C}$ est un système $E = (E_r^{p,q}, E^n)$ formé a) d'objets $E_r^{p,q} \in \mathbf{C}$ définis pour des entiers p, q, r avec $r \geqq 2$ (on pourrait remplacer 2 par un entier r_0 quelconque, mais dans les applications seul le cas $r = 2$ ou $r = 1$ semble intéressant); b) de morphismes $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$ tels que $d_r^{p+r,q-r+1}\, d_r^{p,q} = 0$; c) d'isomorphismes $\alpha_r^{p,q}$: $\operatorname{Ker}(d_r^{p,q})/\operatorname{Im}(d_r^{p-r,q+r-1}) \to E_{r+1}^{p,q}$; d) d'objets filtrés E^n dans $\mathbf{C}$, définis pour tout entier n ; on suppose que pour tout couple (p, q) fixé, on ait $d_r^{p,q} = 0$ et $d_r^{p-r,q+r-1} = 0$ pour r assez grand, d'oû on conclut que $E_r^{p,q}$ est indépendant de r pour r assez grand, on note cet objet par $E_\infty^{p,q}$; on suppose de plus que pour tout n fixé, $F^p(E^n)$ est égal à E^n pour p assez petit et égal à 0 pour p assez grand ; enfin on suppose donnés e) des isomorphismes $\beta^{p,q}$: $E^{pq} \to G^p(E^{p+q})$. La famille (E^n) (sans filtrations) est appelée *l'aboutissement* de la suite spectral E. Un *morphisme u d'une suite spectrale* $E = (E_r^{p,q}, E^n)$ dans une autre $E' = (E'^{p,q}_r, E'^n)$ consiste en un système de morphismes $u_r^{p,q}$: $E_r^{p,q} \to E'^{p,q}_r$, et $u^n : E^n \to E'^n$ compatibles avec les filtrations, ces morphismes étant assujetis à commuter aux morphismes $d_r^{p,q}$, $\alpha_r^{p,q}$ et $\beta^{p,q}$. Les suites spectrales dans $\mathbf{C}$ forment alors une catégorie additive (mais bien entendu pas une catégorie abélienne). On appelle *foncteur spectral* un foncteur additif défini sur une catégorie abélienne, à valeurs dans une catégorie de suites spectrales[5]. Une suite spectrale est dite *suite spectrale cohomologique* si $E_r^{p,q}$ est nul pour $p < 0$ et pour $q < 0$, alors on a $E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q}$ dès que $r > \operatorname{Sup}(p, q + 1)$, $E^n = 0$ pour $n < 0$, $F^m(E^n) = 0$ si $m > n$, $F^m(E^n) = E^n$ si $m \leqq 0$.

4) Ces définitions ne sont pas autoduales. On rétablit la dualité en associant à toute "filtration décroissante" de A par des $F^n(A)$, la "cofiltration décroissante associée" par les $F'_n(A) = A/F_{1-n}(A)$. Alors, passant d'une catégore à la catégorie duale, ces deux filtrations deviennent respectivement une cofiltration décroissante et une filtration décroissante associées. Il est encore commode de poser $F_n(A) = F^{1-n}(A)$, $F'^n(A) = F'_{1-n}(A)$ (filtration et cofiltration *croissantes* associées aux filtrations précédentes), et suivant les cas, c'est l'une ou l'autre parmi quatre filtrations ainsi associées dont la considération est la plus commode. Posant $G^n(A) = \operatorname{Coker.} (F^n(A) \to F^{n-1}(A))$, $G_n(A) = \operatorname{Ker}(F'_n(A) \to F'_{n-1}(A))$, on aura $G^n(A) = G_{-n}(A)$. Les foncteurs G^n et G_n s'échangent si on passe de $\mathbf{C}$ à la catégorie duale.

5) Il semble que pour tous les foncteurs spectraux connus, l'aboutissement soit en fait un foncteur cohomologique. Il resterait à examiner les rélations entre les homomorphismes bords dans l'aboutissement, et les autres constituants du foncteur spectral.

Soit par exemple K un *bicomplexe*[6] dans $\mathbf{C}, K = (K^{p,q})$, et supposons que pour tout entier n, il n'existe qu'un nombre fini de couples (p, q) tels que $p + q = n$ et que $K^{p,q} \neq 0$. Alors on peut trouver deux suites spectrales, aboutissant toutes deux à $H(K) = (H^n(K))$, (cohomologie du complexe simple (K^n) associé à K, $K^n = \sum_{p+q=n} K^{p,q}$) et dont les premiers termes sont respectivement

$$(2.4.1) \qquad {}^{I}E_2^{p,q}(K) = H_I^p H_{II}^q(K) \qquad {}^{II}E_2^{p,q}(K) = H_{II}^p H_I^q(K)$$

(en employant les notations de [6, Chap. XV, N°6]). Ces suites spectrales sont des foncteurs spectraux en K. Ce sont d'ailleurs des suites spectrales *cohomologiques* si les degrés de K sont positifs.

Soit $\mathbf{F}$ un foncteur covariant d'une catégorie abélienne $\mathbf{C}$ dans une autre $\mathbf{C}'$, supposons que dans $\mathbf{C}$ tout objet soit isomorphe à un sous-truc d'un objet injectif. Soit $K = (K^n)$ un complexe dans $\mathbf{C}$, limité à gauche (i. e. $K^n = 0$ pour n assez petit). Alors les considérations de [6, Chap. XVII] s'appliquent, et permettent de construire deux suites spectrales, $({}^{I}F_r^{p,q}(K), {}^{I}F^n(K))$ et $({}^{II}F_r^{p,q}(K), {}^{II}F^n(K))$, aboutissant au même truc gradué $\mathfrak{R}F(K) = (\mathfrak{R}^n F(K))$ (pour deux filtrations convenables de ce dernier), et dont les termes initiaux sont respectivement:

$$(2.4.2) \qquad {}^{I}F_2^{p,q}(K)^p = H(R^q F(K)) \qquad {}^{II}F_2^{p,q}(K) = R^p F(H^q(K))$$

(comme d'habitude, un foncteur appliqué à un complexe K désigne le complexe obtenu en appliquant le foncteur à chacun des termes de K). Ces suites spectrales sont des foncteurs par rapport à K, et la variance des termes initiaux et finaux est celle qui est évidente sur leur forme explicite. On a ainsi défini deux foncteurs spectraux sur la catégorie des complexes dans $\mathbf{C}$ limités à gauche, on les appelle les *foncteurs spectraux dérivés à droite de F* ou encore les *foncteurs spectraux d'hyperhomologie* (à droite) *de F*. Les foncteurs $\mathfrak{R}^n F(K)$ sont appelés les *foncteurs d'hyperhomologie* de F.

Rappelons le principe de la construction, en nous bornant pour fixer les idées au cas où K est à degrés positifs. Soit $L = (L^{p,q})$ un complexe double, à degrés positifs, muni d'une augmentation $K \to L$ (où K est considéré comme un bicomplexe où le second degré est nul); on suppose que pour tout p, le complexe $L^{p*} = (L^{p,q})_q$ est une *résolution* de K^p, et que pour tout p, q, on a $R^n F(L^{p,q}) = 0$ pour $n > 0$. Voici deux façons particulières, toutes deux uniques à une équivalence d'homotopie de bicomplexes près, de construire un tel bicomplexe: a) On considère K comme un objet de la catégorie abélienne $\mathfrak{K}$ des complexes dans $\mathbf{C}$ à degrés positifs, et on prend pour L une résolution *injective* de l'objet K. On constate facilement que les objets injectifs dans $\mathfrak{K}$ sont les complexes $A = (A^i)$ à degrés positifs tels que chaque A^i soit injectif, $H^i(A) = 0$ pour $i > 0$, et qui "se décomposent" (i. e. les sous-trucs $Z(A^i)$ des cycles sont facteurs directs dans les A^i). De plus, tout objet de $\mathfrak{K}$ se plonge dans

6) Contrairement à la terminologie introduite dans [6], nous supposons que les deux opérateurs bord d' et d'' d'un bicomplexe K *commutent*, et nous prendrons donc comme opérateur bord *total* $d = d' + d''$, où $d''x = (-1)^p d''x$ pour $x \in K^{p,q}$.

un objet injectif. b) On prend une "résolution injective" de K au sens de [6, Chap. XVII] (les guillemets sont nécessaires, la terminologie de [6] étant visiblement équivoque), i.e. on suppose que les $L^{p,q}$ sont injectifs, et que pour p fixé, si on prend les cycles (resp. bords, resp. la cohomologie) des $L^{p,*}$ par rapport au premier opérateur différentiel, on trouve une résolution injective de truc formé des cycles (resp. les bords, resp. la cohomologie) dans K^p. — Ceci dit, si L est comme ci-dessus, alors $H^*F(L)$ est essentiellement indépendant du choix de L, et s'identifie d'ailleurs à $R^*(F\circ H^0)(K)$ (où H^0 est considéré comme un foncteur covariant exact à gauche $\mathfrak{K} \to \mathbf{C}$, et $F\circ H^0$ est le foncteur composé $\mathfrak{K} \to \mathbf{C}'$). Pour le voir, il suffit de prendre une résolution injective L' de K (au sens de a)), il y donc a un homomorphisme (unique à homotopie près) de la résolution L dans la résolution L', d'où un homomorphisme $F(L) \to F(L')$, qui induite un *isomorphisme* $I_2^{p,q}(F(L)) \to I_2^{p,q}(F(L'))$ (les deux membres s'identifient en effet à $H^p(R^qF(K))$, donc un *isomorphisme* de $HF(L)$ sur $HF(L')$. Or ce dernir s'explicite grâce à la seconde suite spectrale du bicomplexe $F(L')$: on a $H_{II}^q(F(L')) = 0$ pour $q > 0$ comme on voit aussitôt, on trouve donc $H^nF(L') = H^n(H^0(L'^{*n}))$, or le deuxième membre est par définition $R^n(F\circ H^0)(A)$. D'où la définition et le mode de calcul général de *l'hyperhomologie* $\mathfrak{R}F(K) = \mathfrak{R}^*(FH^0)(K)$ du foncteur F par rapport au complexe K, et de la première suite spectrale, de terme initial $I_2^{p,q}F(K) = H^p(R^qF(K))$ qui y aboutit. Si maintenant on prend pour L une "résolution injective" de K comme dans b), alors la deuxième suite spectrale du bicomplexe $F(L)$ est essentiellement indépendante de L (puisque L est unique à une équivalence d'homotopie près), elle aboutit à $\mathfrak{R}F(K)$ et son terme initial est celui donné dans (2.4.2); il suffirait d'ailleurs qu'on ait $R^nF(L^{p,q}) = 0$ pour $n > 0$ (au lieu de $L^{p,q}$ injectif) dans l'énoncé des conditions b), pour que la deuxième suite spectrale du complexe $F(L)$ soit celle envisagée dans (2.4.2). Notons encore que, si les degrés de K sont positifs, les deux suites spectrales dérivées de F sont des suites spectrales *cohomologiques*. On peut encore définir les suites spectrales dérivées de F sur K si on ne suppose plus que K est à degrés bornés inférieurement, *pourvu que F soit de dimension injective finie*, i.e. $R^pF = 0$ pour p convenable. Ce fait ne semble pas contenu dans [6], mais comme nous ne nous en servirons pas dans la suite, nous nous bornons à le signaler ici sans démonstration. — Bien entendu, on pourrait définir aussi des foncteurs spectraux dérivés à gauche de F, pourvu que $\mathbf{C}$ contienne assez d'objets projectifs, et on peut envisager aussi le cas d'un foncteur contravariant. Dans [6], on envisage le cas où F est un multifoncteur, mais nous n'aurons pas à nous en servir.

Soient $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}'$, $\mathbf{C}''$ trois catégories abéliennes, considérons deux foncteurs covariants $F: \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ et $G: \mathbf{C}' \to \mathbf{C}''$. On suppose que tout objet de $\mathbf{C}$ ou $\mathbf{C}'$ est isomorphe à un sous-truc d'un objet injectif, ce qui permet de considérer les foncteurs dérivés à droite de F, G, GF, on se propose d'établir des relations entre ces foncteurs dérivés. Soit $A \in \mathbf{C}$, soit $C(A)$ le complexe associé à une résolution droite de A par des objets injectifs, considérons le complexe $F(C(A))$ dans $\mathbf{C}'$, il est déterminé à une homotopie près quand on fait varier

$C(A)$. Il s'ensuit aussitôt que les suites spectrales définies par G et ce complexe $F(C(A))$ ne dépendent que de A, ce sont donc des foncteurs spectraux cohomologiques sur $\mathbf{C}$, ayant le même aboutissement, appelés *foncteurs spectraux du foncteur composé* $G \circ F$. Les formules données plus haut donnent immédiatement leurs termes initiaux:

$$I_2^{p,q}(A) = (R^p((R^qG)F))(A) \qquad II_2^{p,q}(A) = R^pG(R^qF(A)).$$

De loin le cas le plus important pour l'obtention de suites spectrales non triviales est celui où F transforme objets injectifs en objets annulés par les R^qG, $q \geqq 1$ (on appelle de tels objets *G-acycliques*), et où $R^0G = G$ (i.e. G est exact à gauche): alors $I_2^{p,q} = 0$ si $q > 0$, et se réduit à $R^p(GF)$ si $q = 0$, d'où résulte que l'aboutissement commun des deux suites spectrales s'identifie au foncteur dérivé droit de GF. On obtient ainsi le

THÉORÈME 2.4.1. *Soient* $\mathbf{C}, \mathbf{C}', \mathbf{C}''$ *trois catégories abéliennes, on suppose que tout objet de* $\mathbf{C}$ *ou* $\mathbf{C}'$ *est isomorphe à un sous-truc d'un objet injectif. Considérons des foncteurs covariants* $F: \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ *et* $G: \mathbf{C}' \to \mathbf{C}''$, *on suppose que* G *est exact à gauche et que* F *transforme objets injectifs en objets* G*-acycliques* (*i.e. annulés par les* R^qG, $q > 0$). *Alors il existe une foncteur spectral cohomologique sur* $\mathbf{C}$, *à valeurs dans* $\mathbf{C}''$, *aboutissant au foncteur dérivé à droite* $\mathfrak{R}(GF)$ *de* GF, (*convenablement filtré*), *et dont le terme initial est*

$$E_2^{p,q}(A) = R^pG(R^qF(A)). \tag{2.4.3}$$

REMARQUES 1. La deuxième hypothèse sur le couple (F, G) signifie que les foncteurs $(R^qG)F$ $(q > 0)$ sont effaçables (cf. 2.2), ou encore que pour tout $A \in \mathbf{C}$, on peut trouver un monomorphisme de A dans un M tel que $(R^qG)(F(M)) = 0$ pour $q \geqq 1$; c'est sous cette forme que le plus souvent nous vérifierons cette hypothèse.

2. On vérifie aussitôt que pour calculer la deuxième suite spectrale d'un foncteur composé (i.e. celle dont il est question dans le théorème 2.4.1) il suffit de prendre une résolution $C(A)$ de A par des C^i qui sont F-acycliques (et non nécessairement injectifs) et de prendre la deuxième suite spectrale d'hyperhomologie du foncteur G par rapport au complexe $FC(A)$.

3. Notons deux cas particuliers importants où l'une des deux suites spectrales d'hyperhomologie d'un foncteur F par rapport à un complexe K dégénère. *Si* K *est une résolution*[3] *d'un objet* A *de* $\mathbf{C}$, *alors* $\mathfrak{R}^nF(K) = R^nF(A)$, donc l'objet gradué $(R^nF(A))$ est l'aboutissement d'une suite spectrale de terme initial $I_2^{p,q}(K) = H^p(R^qF(K))$. *Si les* K^n *sont* F*-acycliques* (i.e. $R^mF(K^n) = 0$ pour $m > 0$) *alors* $\mathfrak{R}^nF(K) = H^n(F(K))$, donc l'objet gradué $(H^n(F(K))$ est l'aboutissement d'une suite spectrale de terme initial $II_2^{p,q}(K) = R^pF(H^q(K))$. Combinant ces deux résultats, on trouve donc: *si* K *est une résolution de* A *par des objets* F*-acyliques, on a* $R^nF(A) = H^n(F(K))$. Les isomorphismes ainsi obtenus sont d'ailleurs aussi les morphismes déduits d'un homomorphisme de K dans une résolution injective de A; par suite, ils coïncident aussi, au signe près, avec les homomorphismes définis par le "iterated connecting homomorphism" dans K [6, V, 7].

2.5. Foncteurs résolvants. Soient $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C}'$ deux catégories abéliennes, on suppose que tout objet de $\mathbf{C}$ est isomorphe à un sous-truc d'un objet injectif. Soit F un foncteur covariant exact à gauche de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}'$. On appelle *foncteur résolvant* de F un foncteur covariant $\mathbf{F}$ défini sur $\mathbf{C}$, à valeurs dans la catégorie des complexes à degrés positifs dans $\mathbf{C}'$, $\mathbf{F}(A) = (\mathbf{F}^n(A))$, muni d'une augmentation $F \to \mathbf{F}$ (i. e. d'un homomorphisme du foncteur F dans le foncteur $Z^0\mathbf{F}^0$ des cocycles de $\mathbf{F}^0$), et satisfaisant aux conditions suivantes: (i) Le foncteur $\mathbf{F}$ est exact (ii) $F \to Z^0\mathbf{F}^0$ est un isomorphisme (iii) si A est injectif, alors $\mathbf{F}(A)$ est acyclique en degrés > 0.

Soit $\mathbf{F}$ un foncteur résolvant pour F. Considérons les foncteurs $H^n\mathbf{F}(A)$ sur $\mathbf{C}$, à valeurs dans $\mathbf{C}'$. A cause de la condition (i), ils forment un foncteur cohomologique, à caus de (ii) ce dernier se réduit à F en dimension 0, enfin en vertu de (iii) les $H^n\mathbf{F}(A)$ pour $n > 0$ sont effaçables. Par suite:

PROPOSITION 2.5.1. *Si* $\mathbf{F}$ *est un foncteur résolvant pour* F, *alors on a pour tout* $A \in \mathbf{C}$ *des isomorphismes uniques* $H^n\mathbf{F}(A) = \mathbf{R}^nF(A)$, *définissant un isomorphisme de foncteurs cohomologiques, et se réduisant en dimension* 0 *à l'isomorphisme d'augmentation.*

Nous allons donner une autre démonstration de la proposition précédente, permettant un calcul commode de ces isomorphismes:

PROPOSITION 2.5.2. *Soit* $\mathbf{F}$ *un foncteur résolvant pour* F. *Soit* $A \in \mathbf{C}$, *et soit* $C = (C^p(A))$ *une résolution droite de* A *par des objets* F*-acycliques. Considérons le bicomplexe* $\mathbf{F}C(A) = (\mathbf{F}^qC^p(A))_{p,q}$, *et les homomorphismes naturels*

$$F(C(A)) \to \mathbf{F}(C(A)) \leftarrow \mathbf{F}(A) \tag{2.5.1}$$

définis respectivement par l'augmentation $F \to \mathbf{F}$ *et par l'augmentation* $A \to C(A)$. *Alors les homomorphismes correspondants*

$$H^nF(C(A)) = R^nF(A) \to H^n\mathbf{F}(C(A)) \leftarrow H^n\mathbf{F}(A) \tag{2.5.2}$$

sont des isomorphismes, et l'isomorphisme correspondant $H^n\mathbf{F}(A) = R^nF(A)$ *est celui de la proposition* 2.5.1.

Nous considérons $F(C(A))$ (resp. $\mathbf{F}(A)$) comme un bicomplexe dont le deuxième (resp. premier) degré est nul. La première suite spectrale de $\mathbf{F}(C(A))$ a pour terme initial $H(F(C(A)))$ (car $H^q_{II}(\mathbf{F}(C(A)))$ est nul pour $q > 0$ et s'identifie à $F(C(A))$ pour $q = 0$, en vertu de prop. 2.5.1 et du fait que les $C^p(A)$ sont F-acycliques), donc le premier homomorphisme (2.5.1) induit un isomorphisme pour les termes initiaux de la suite spectrale I, donc induit un isomorphisme pour la cohomologie. De même, $H_I(\mathbf{F}(C(A)))^{p,q}$ est nul pour $p > 0$ et égal à $\mathbf{F}(A)$ pour $p = 0$ (puisque $\mathbf{F}$ est un foncteur exact et $C(A)$ est une résolution de A), donc le deuxième homomorphisme (2.5.1) induit un isomorphisme pour les termes initiaux des suites spectrales II, donc induit encore un isomorphisme pour la cohomologie. Pour montrer que l'isomorphisme obtenu de $H^n\mathbf{F}(A)$ sur $R^nF(A)$ est bien celui de proposition 2.5.1, on peut prendre une résolution *injective* $C'(A)$ de A, un homomorphisme de $C(A)$ dans $C'(A)$, et envisager l'homomorphisme associé du diagramme (2.5.2) dans le diagramme analogue relatif à $C'(A)$, ce qui nous montre que l'isomorphisme obtenu est indépendant du choix de $C(A)$. D'autre part, se bornant désormais à des résolutions injectives, on voit immédiatement que les isomorphismes obtenus sont fonctoriels et permutent aux homomorphismes cobords, de plus ils se réduisent en dimension 0 à l'isomorphisme d'augmentation (ou plutôt son inverse), donc ces isomorphismes sont bien ceux de la proposition 1.

EXEMPLES. a) Considérons le foncteur identique I de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$, un foncteur résolvant de I (appelé aussi *résolution de l'identité* dans $\mathbf{C}$) est donc un foncteur covariant *exact* C de $\mathbf{C}$ dans la catégorie des complexes à degrès positifs dans $\mathbf{C}$, muni d'une augmentation $A \to C(A)$ qui soit un isomorphisme de A sur $Z^0C(A)$, et tel que $C(A)$ soit une résolution de A si A est injectif; alors $C(A)$ est une résolution de A quel que soit A en vertu de proposition 2.5.1 (puisque le foncteur I étant exact, on a $R^nI = 0$ pour $n > 0$). Soient C une résolution de l'identité dans $\mathbf{C}$, F un foncteur covariant exact à gauche de $\mathbf{C}$ cans $\mathbf{C}'$, *supposons* $R^nF(C^i(A)) = 0$ pour tout $n > 0$ (i.e. les $C^i(A)$ F-acycliques). *Alors* $\mathbf{F}(A) = F(C(A))$ *est un foncteur résolvant pour* F. En effet ce foncteur est exact, car si on a une suite exacte $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ on en conclut une suite exacte $0 \to C^i(A') \to C^i(A) \to C^i(A'') \to 0$ d'où, puisque $R^1F(C^i(A')) = 0$, une suite exacte $0 \to F(C^i(A')) \to F(C^i(A)) \to F(C^i(A'')) \to 0$. Ainsi (i) est vérifié; il en est de même de (ii) puisque F est exact à gauche et C est exact et de même de (iii) puisque on a ($C(A)$ étant une résolution F-acyclique de A) $H^n(C(A)) = R^nF(A)$, qui est nul si $n > 0$ et si A est injectif. — Une façon commode de construire une résolution de l'identité dans $\mathbf{C}$ est de prendre un foncteur exact $C^0(A)$ de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ et un *monomorphisme* fonctoriel $A \to C^0(A)$: on définit alors par récurrence les $C^n(A)$ ($n \geqq 0$) et les homomorphismes d^{n-1}: $C^{n-1} \to C^n$ en prenant $C^1(A) = C^0(C^0(A)/\mathrm{Im}\ A)$, et, pour $n \geqq 2$, $C^n(A) = C^0(C^{n-1}(A)/\mathrm{Im}\ C^{n-2}(A))$, d^{n-1} étant défini à l'aide de l'homomorphisme d'augmentation de $Q = C^{n-1}(A)/\mathrm{Im}\ C^{n-2}(A)$ dans $C^0(Q)$. On obtient bien ainsi une résolution de l'identité; pour que les $C^i(A)$ soient F-acycliques, il suffit que les $C^0(A)$ le soient.

b) Soit $P = (P_n)$ une résolution projective d'un objet A de $\mathbf{C}$. Soit F le foncteur $F(B) = \mathrm{Hom}\ (A, B)$ de $\mathbf{C}$ dans la catégorie des groupes abéliens. Alors F admet le foncteur résolvant $\mathrm{Hom}\ (P, B)$.

Nous allons maintenant montrer comment les suites spectrales les plus importantes peuvent se calculer au moyen de foncteurs résolvants. Soit $\mathbf{F}$ un foncteur résolvant d'un foncteur exact à gauche F de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}'$. Soit K un complexe dans $\mathbf{C}$, à degrés limités à gauche, considérons le bicomplexe $\mathbf{F}(K) = (\mathbf{F}^q(K^p))_{p,q}$, il dépend fonctoriellement de K, il en est donc de même de ses deux suites spectrales et de leur aboutissement. Les termes initiaux de ces deux suites spectrales s'écrivent aisément en utilisant l'exactitude du foncteur $\mathbf{F}$ et la proposition 2.5.1, on trouve

(2.5.3) $\quad I_2^{p,q}(\mathbf{F}(K)) = H^p(R^qF(K)) \qquad II_2^{p,q}(\mathbf{F}(K)) = R^pF(H^q(K)).$

Ce sont là des isomorphismes fonctoriels avec les termes initiaux des suites spectrales d'hyperhomologie (2.4.2) de F par rapport au complexe K.

PROPOSITION 2.5.3. *Les isomorphismes* (2.5.3) *proviennent d'isomorphismes fonctoriels de la première* (*resp. la deuxième*) *suite spectrale du bicomplexe* $\mathbf{F}(K)$ *avec la première* (*resp. la deuxième*) *suite spectrale d'hyperhomologie du foncteur F par rapport au complexe K.*

Ces isomorphismes vont être explicités dans la démonstration ci-dessous. Soit $C(K) = (C^{p,q}(K))_{p,q}$ une "résolution injective" de K au sens de [6, Chap. XVII]; considérant K comme un bicomplexe à deuxième degré nul, on a un homomorphisme d'augmentation $K \to C(K)$. Considérons le bicomplexe $M(K) = \mathbf{F}(C(K))$ donné par

$$M^{p,q}(K) = \sum_{q'+q''=q} \mathbf{F}^{q''}(C^{p,q'}(K))$$

$M(K)$ n'est pas déterminé de façon unique par K, cependant les deux suites spectrales de $M(K)$ et leur aboutissement commun le sont (puisque $C(K)$ est déterminé à une équivalence d'homotopie de bicomplexes près), ce sont des foncteurs spectraux bien déterminés en la variable K. Posons $L(K) = F(C(K))$; les homomorphismes d'augmentation $K \to C(K)$ et $F \to \mathbf{F}$ définissent des homomorphismes de bicomplexes

$$L(K) = F(C(K)) \to M(K) = \mathbf{F}(C(K)) \leftarrow \mathbf{F}(K)$$

d'où des homomorphismes *fonctoriels* pour les suites spectrales correspondantes (homomorphismes indépendants du choix de $C(K)$):

$$(2.5.4) \qquad \begin{array}{c} IL(K) \to IM(K) \leftarrow I\mathbf{F}(K) \\ IIL(K) \to IIM(K) \leftarrow II\mathbf{F}(K) \end{array}$$

définissant les mêmes homomorphismes pour les aboutissements

$$HL(K) \to HM(K) \leftarrow H\mathbf{F}(K)$$

pour les termes initiaux, les homomorphismes (2.5.4) donnent:

$$(2.5.5) \qquad \begin{array}{c} I_2^{p,q}L(K) \to I_2^{p,q}M(K) \leftarrow I_2^{p,q}\mathbf{F}(K) \\ II_2^{p,q}L(K) \to II_2^{p,q}M(K) \leftarrow II_2^{p,q}\mathbf{F}(K) \end{array}$$

Nous allons prouver que les homomorphismes (2.5.5) sont des isomorphismes, et que les isomorphismes correspondants entre les termes extrêmes de (2.5.5) (qui sont les termes initiaux des suites spectrales d'hyperhomologie de F pour K, resp. du bicomplexe $\mathbf{F}(K)$) sont ceux résultant des formules (2.5.3); il en résultera que les homomorphismes (2.5.4) sont des isomorphismes, d'où des isomorphismes entre les termes extrêmes, ce seront évidemment les isomorphismes cherchés. Tout revient donc à prouver que les termes médians des lignes (2.5.5) ont respectivement la forme $H^p(R^q(F(K)))$ et $R^pF(H^{\cdot}(K))$ (la vérification que les homomorphismes dans (2.5.5) sont bien les isomorphismes naturels étant alors purement mécanique, et d'ailleurs implicitement contenue dans la démonstration qui suit).

On va démontrer $H_{II}(M)^{p,q} = R^qF(K^p)$ (d'où résultera aussitôt $I_2^{p,q}(M) = H^p(R^qF(K))$). Or pour p fixé, $M^{p*} = (M^{p,q})_q$ est le complexe simple associé au bicomplexe $(\mathbf{F}^{q''}(C^{p,q'}(K))_{q',q''} = \mathbf{F}(C(K^p))$, où $C(K^p)$ désigne le complexe $C^{p*}(K)$, qui est une résolution injective de K^p. Par suite, $H^q(M^{p*}) = H^q(\mathbf{F}(C(K^p)))$, et le dernier membre s'identifie à $R^qF(K^p)$ en vertu de prop. 2.5.2.

Reste à calculer le terme médian de la deuxième ligne (2.5.5). On a tout d'abord

$$H_I(M)^{p,q} = \sum_{q'+q''=q} H^p(\mathbf{F}^{q''}(C^{*q'}(K)).$$

Comme $\mathbf{F}^{q''}$ est un foncteur exact, on obtient pour le terme général de la somme du second membre $\mathbf{F}^{q''}(H^p(C^{*q'}(K))) = \mathbf{F}^{q''}(C^{q'}(H^p(K)))$, où $C(H^p(K))$ désigne une résolution injective de $H^p(K)$ (se rappeler la définition d'une "résolution injective" $C(K)$ du complexe K!). On trouve donc $(H_{II}(H_I(M)))^{p,q} = H^q(\mathbf{F}(C(H^p(K)))$. qui s'identifie à $R^qF(H^p(K))$ en vertu de proposition 2.5.2, cqfd.

$\mathbf{F}$ étant toujours un foncteur résolvant pour le foncteur exact à gauche F de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}'$, supposons de plus qu'on se donne un foncteur covariant G de $\mathbf{C}'$ dans une catégorie abélienne $\mathbf{C}''$, et que dans $\mathbf{C}'$ tout objet est isomorphe à un sous-truc d'un objet injectif. Pour tout $A \in \mathbf{C}$, considérons la deuxième suite spectrale d'hyperhomologie du foncteur G par rapport au complexe $\mathbf{F}(A)$; c'est un foncteur spectral en A, dont le terme initial, en vertu de proposition 2.5.1, se calcule aussitôt:

(2.5.6) $$II_2^{p,q}G(\mathbf{F}(A)) = R^pG(R^qF(A)).$$

C'est là un isomorphisme fonctoriel avec le terme initial de la deuxième suite spectrale du foncteur composé GF.

PROPOSITION 2.5.4. *L'isomorphisme* (2.5.6) *provient d'un isomorphisme fonctoriel de la deuxième suite spectrale d'hyperhomologie de G par rapport au complexe* $\mathbf{F}(K)$, *avec la deuxième suite spectrale du foncteur composé GF.*

Soit $C(A)$ une résolution injective de A, considérons $\mathbf{F}(\mathbf{C}(A))$ comme un complexe simple dans $\mathbf{C}'$, et considérons les homomorphismes naturels (2.5.1), d'où des homomorphismes correspondants pour les deuxièmes suites spectrales d'hyperhomologie de G:

$$IIG(F(C(A))) \to IIG(\mathbf{F}(C(A))) \leftarrow IIG(\mathbf{F}(A)).$$

Tout revient encore à montrer que ce sont là des isomorphismes, et pour ceci, à montrer que les homomorphismes correspondants pour les termes initiaux sont des isomorphismes. Or en vertu de proposition 2.5.1, les homomorphismes $H(F(C(A)) \to H(\mathbf{F}(C(A))) \leftarrow H(\mathbf{F}(A))$ sont des isomorphismes, d'où aussitôt la conclusion voulue.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, "G'"] \arrow[d, "{F,\mathbf{F}}"'] & \mathbf{C}''' \arrow[d, "{F',\mathbf{F}'}"] \\ \mathbf{C}' \arrow[r, "G"'] & \mathbf{C}'' \end{tikzcd}$$

Soient $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}'$, $\mathbf{C}''$, $\mathbf{C}'''$ quatre catégories abéliennes, on suppose pour les trois premières que tout objet y est isomorphe à un sous-truc d'un objet injectif. Considérons des foncteurs covariants F, G, F', G' (voir diagramme ci-contre), on suppose donné un foncteur résolvant $\mathbf{F}$ pour F et un foncteur résolvant $\mathbf{F}'$ pour F', satisfaisant aux conditions de commutation $\mathbf{F}'G' = G\mathbf{F}$[7]. Supposons de plus que $\mathbf{F}$ transforme objets injectifs en

7) Il est entendu que cet isomorphisme est fonctoriel, et respecte l'homomorphisme cobord dans les complexes $\mathbf{F}'G'(A)$ et $G\mathbf{F}(A)$.

objets G-acycliques.

PROPOSITION 2.5.5. *Plaçons-nous dans les conditions précédentes. Pour un $A \in \mathbf{C}$, considérons les deux suites spectrales de hyperhomologie de G par rapport au complexe $\mathbf{F}(A)$, ce sont des foncteur spectraux en A. Ils sont isomorphes respectivement au deuxième foncteur spectral du foncteur composé $F'G'$ et GF.*

L'assertion relative au foncteur composé GF n'est autre que la proposition 2.5.4. Quant à la deuxième suite spectrale du foncteur composé $F'G'$, c'est par définition la deuxième suite spectrale de F' par rapport au complexe $G'(C(A))$ (où $C(A)$ désigne une résolution injective de A), donc s'identifie en vertu de proposition 2.5.3 à la deuxième suite spectrale du bicomplexe $\mathbf{F}'G'(C(A))$ (dont le premier degré est celui qui provient de $C(A)$), or on a $\mathbf{F}'G' = G\mathbf{F}$, il faut donc calculer la suite spectrale $II(G\mathbf{F}(C(A)))$. Or pour tout q fixé, $\mathbf{F}^q C(A)$ est une résolution de $\mathbf{F}^q(A)$ (puisque $\mathbf{F}^q$ est exact) par des objets G-acycliques, donc $\mathbf{F}(C(A))$ devient, après échange de ses deux degrés, une résolution de $\mathbf{F}(A)$ par des objets G-acycliques. En vertu de 2.4, il s'ensuit que la deuxième suite spectrale de $G(\mathbf{F}(C(A)))$ s'identifie à la première suite spectrale d'hyperhomologie de G par rapport au complexe $\mathbf{F}(A)$.

COROLLAIRE. $\mathbf{C}, \mathbf{C}', \mathbf{C}'', \mathbf{C}'''$ *et* F, G, F', G' *étant comme ci-dessus (voir diagramme) on suppose donnés des foncteurs résolvants* $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{F}', \mathbf{G}'$ *pour* F, G, F', G', *on suppose* $\mathbf{F}'^i\mathbf{G}'^j = \mathbf{G}^j\mathbf{F}^i$ *(isomorphismes fonctories compatibles avec les opérateurs de dérivation dans les foncteurs résolvants), et que* $\mathbf{F}$ *(resp.* $\mathbf{G}'$*) transforme objets injectifs en objets qui sont* G*-acycliques (resp.* F'*-acycliques). Alors pour tout* $A \in \mathbf{C}$, *les deuxièmes suites spectrales des foncteurs composés* $F'G'$ *et* GF *pour* A *s'identifient à la première et deuxième suite spectrale d'hyperhomologie de* G *pour le complexe* $\mathbf{F}(A)$, *ou encore à la première et la deuxième suite spectrale d'hyperhomologie de* F' *pour le complexe* $\mathbf{G}'(A)$, *ou enfin à l'une et l'autre des deux suites spectrales du bicomplexe* $\mathbf{G}(\mathbf{F}(A)) = \mathbf{F}'(\mathbf{G}'(A))$.

Chapitre III Cohomologie a coéfficients dans un faisceau.

3.1. Généralités sur les faisceaux. Soit X un espace topologique (non nécessairement séparé). Rappelons (1.7 exemple h) qu'on appelle ***préfaisceau d'ensembles*** sur X tout système inductif d'ensembles défini sur l'ensemble des parties ouvertes non vides de X, ordonné par $\supset$. Il consiste donc en la donnée, pour tout ouvert $U \subset X$, d'un ensemble $F(U)$, et pour tout couple d'ouverts non vides U, V avec $U \supset V$, d'une ***application de restrication*** $\varphi_{VU}: F(U) \to F(V)$, avec les conditions: $\varphi_{UU} =$ application identique de $F(U)$, $\varphi_{WV}\, \varphi_{VU} = \varphi_{WU}$ si $U \supset V \supset W$. On dit que le préfaisceau F est un ***faisceau*** si pour tout recouvrement (U_i) d'un ouvert U de X par des ouverts non vides, et toute famille (f_i) d'éléments $f_i \in F(U_i)$ telle que $\varphi_{U_{ij}U_i} f_i = \varphi_{U_{ij}U_j} f_j$ pour tout couple (i, j) tel que $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \phi$, il existe un $f \in F(U)$ et un seul tel que $\varphi_{U_i U} f = f_i$ pour tout i. Si dans les définitions précédentes, on suppose que les $F(U)$ sont des groupes (resp. des anneaux etc.) et que les φ_{VU} sont des homomorphismes, on obtient la notion de ***préfaisceau*** (ou de ***faisceau***) ***de groupes*** (resp. ***d'anneaux*** etc.) ; plus généralement, on pourrait définir la notion de préfaisceau ou faisceau à valeurs dans une catégorie (cf. 1. 1) donnée. Les préfaisceaux, ou les faisceaux, sur X, à valeurs dans une catégorie donnée, forment une catégorie, les morphismes étant définis comme morphismes de systèmes inductifs. Les préfaisceaux ou faisceaux sur X, à valeurs dans une catégorie ***additive***, par exemple la catégorie des groupes abéliens, forment une catégorie additive, et dans le cas des préfaisceaux et faisceaux de groupes abéliens, même une catégorie abélienne. (Pour abréger, nous dirons ***faisceau abélien*** et ***préfaisceau abélien*** pour un faisceau ou préfaisceau de groupes abéliens). Mais on fera attention que le foncteur identique, qui à un faisceau abélien fait correspondre le préfaisceau abélien correspondant, est exact à gauche mais non pas exact : si on a un homomorphisme de faisceaux $u: F \to G$, son conoyau en tant qu'homomorphisme de préfaisceaux est le préfaisceau $Q(U) = G(U)/\mathrm{Im}\, F(U)$, qui en général n'est pas un faisceau ; son conoyau en tant qu'homomorphisme de faisceaux est le faisceau ***associé*** au préfaisceau Q (voir plus bas). Nous n'insisterons pas plus sur ces questions, assez bien connues actuellement (cf. [4] et le livre de Godement [9]).

Soit F un préfaisceau d'ensembles sur X, on pose pour tout $x \in X$: $F(x) = \varinjlim F(U)$, la limite inductive étant prise suivant l'ordonné filtrant des vosinages ouverts U de x. Sur l'ensemble $\bar{F}$ réunion des $F(x)$, on met la topologie engendrée par l'ensemble des parties de $\bar{F}$ qui sont de la forme $A(f)$, oû pour tout ouvert $U \subset X$ et tout $f \in F(U)$, on désigne par $A(f)$ l'ensemble des images canoniques $f(x)$ de f dans les $F(x)$, $x \in U$. Quand $\bar{F}$ est muni de cette topologie, l'application naturelle de $\bar{F}$ dans X est un homéomorphisme local (i. e. tout point de $\bar{F}$ a un voisinage ouvert appliqué homéomorphiquement sur un ouvert de X), nous dirons (en suivant Godement) que $\bar{F}$ est un *espace étalé* dans X. D'ailleurs un espace étalé dans X, soit E, définit un faisceau $\mathfrak{F}(E)$ de façon naturelle, savoir celui qui a un ouvert U associe l'ensemble des "section" continues de E au dessus de U; de plus l'espace étalé $\overline{\mathfrak{F}(E)}$ associé à $\mathfrak{F}(E)$ s'identifie canoniquement à E. Si on part d'un préfaisceau F sur X, on a d'autre part un homomorphisme canonique $F \to \mathfrak{F}(\bar{F})$, car toute $f \in F(U)$ définit une section continue $x \to f(x)$ de $\bar{F}$ sur U ; cet homomorphisme est un isomorphisme si et seulement si F est un faisceau. Ces considérations prouvent : (i) ***La notion de faisceau d'ensembles sur X est équivalente à la notion d'espace étalé dans X*** (de façon précise, nous avons défini une équivalance de la catégorie des faisceaux d'ensembles sur X, sur avec la catégorie des espaces étalés dans X). (ii) ***A tout préfaisceau F sur X correspond un faisceau $\mathfrak{F}(\bar{F})$ et un homomorphisme $F \to \mathfrak{F}(\bar{F})$, qui est un isomorphisme si et seulement si F est un faisceau.*** (D'ailleurs, $\mathfrak{F}(\bar{F})$ est un *foncteur* en F, et l'homomorphisme $F \to \mathfrak{F}(\bar{F})$ est fonctoriel). Si on veut interpréter la notion de faisceau de groupes (ou de faisceau de groupes abéliens etc.) en termes d'espaces étalés, il faut se donner sur chaque "fibre" de l'espace étalé une loi de groupe (resp. de groupe abélien etc.) de façon à satisfaire à une condition naturelle de continuité: on retrouve alors la définition de [4, XIV]. — On voit immédiatement sur les espaces étalés correspondants quand un homomorphisme $F \to G$ de faisceaux est un monomorphisme resp. un épimorphisme: il faut et il suffit que sur chaque "fibre" $F(x)$, l'homomorphisme correspondant $F(x) \to G(x)$ soit un monomorphisme resp. un épimorphisme. De même, la fibre en x du noyau, conoyau, image, coimage d'un homomorphsime de faisceaux de groupes abéliens s'obtient en prenant le noyau, conoyau etc. du homomorphisme de groupes abéliens $F(x) \to G(x)$.

Soit $\mathbf{O}$ un faisceau d'anneaux avec unité sur X, un *faisceau de* $\mathbf{O}$-*modules à gauche* ou bref un $\mathbf{O}$-*Module à gauche* sur X est un faisceau de groupes abéliens F, avec la donnée pour tout ouvert $U \subset X$ d'une structure de $\mathbf{O}(U)$-module unitaire à gauche sur $F(U)$, de telle façon que les opérations de restrictions $F(U) \to F(V)$ soient compatibles avec les opérations de $\mathbf{O}(U)$ et $\mathbf{O}(V)$ sur $F(U)$ resp. $F(V)$. (On peut exprimer ceci aussi en disant qu'on s'est donné un homomorphisme du faisceau d'anneaux $\mathbf{O}$ dans le faisceau d'anneaux des germes d'endomorphismes du faisceau de groupes abéliens F). On définit de façon analogue les $\mathbf{O}$-Modules à droite; pour abréger, nous dirons simplement $\mathbf{O}$-Modules au lieu de $\mathbf{O}$-Modules à gauche. La notion de homomorphisme de $\mathbf{O}$-Modules, et de la composition et addition de tels homomorphismes est évidente, on obtient alors, *la catégorie additive des* $\mathbf{O}$-*Modules sur* X, notée $\mathbf{C}^{\mathbf{O}}$. Si par exemple k est un anneau donné avec unité, on peut considérer sur X le faisceau d'anneaux constant correspondant, noté k_X. La catégorie des k_X-Modules n'est autre que la catégorie des faisceaux de k-modules sur X; si par exemple $k = \mathbf{Z}$, on obtient la catégorie des faisceaux de groupes abéliens. Rappelons les faits suivants, signalés en passant dans 1.5 et 1.9:

PROPOSITION 3.1.1. *Soit* $\mathbf{O}$ *un faisceau d'anneaux avec unité sur l'espace* X. *Alors la catégorie additive* $\mathbf{C}^{\mathbf{O}}$ *des* $\mathbf{O}$-*Modules sur* X *est une catégorie abélienne satisfaisant les axiomes* AB 5) *et* AB 3*), *et admet un générateur.*

Signalons que la somme directe S d'une famille (F_i) de faisceaux F_i se construit simplement en prenant pour chaque ouvert U la somme directe des $F_i(U)$ et passant au faisceau associé au préfaisceau ainsi construit; le procédé est le même pour la construction du produit P des faisceaux F_i. La différence essentielle dans les deux cas est que pour tout $x \in X$, $S(x)$ est bien la somme directe des $F_i(x)$, mais $P(x)$ *n'est pas* le produit direct des $F_i(x)$. On se convainc aussi aisément que l'axiome AB 4*) n'est pas satisfait en général (en prenant par exemple pour $\mathbf{O}$ le faisceau constant $\mathbf{Z}_X$). Enfin, rappelons que si pour tout ouvert $U \subset X$, on désigne par $\mathbf{O}_U$ le faisceau de $\mathbf{O}$-modules dont la restriction à $\complement U$ est nulle, et qui sur U coïncide avec $\mathbf{O}$ [4, XVII, prop. 1], la famille des $\mathbf{O}_U$ est un système de générateurs de $\mathbf{C}^{\mathbf{O}}$, comme il résulte facilement de la définition 1.9 et du fait que les homomorphismes de $\mathbf{O}_U$

dans un $\mathbf{O}$-Module F s'identifient aux éléments de $F(U)$. Tenant compte de théorème 1.10.1, on trouve:

COROLLAIRE. *Tout* $\mathbf{O}$-*module est isomorphe à un sous-*$\mathbf{O}$-*module d'un* $\mathbf{O}$-*module injectif.*

Indiquons une démonstration directe de ce corollaire, due à Godement. Soit, pour tout $x \in X$, M_x un $\mathbf{O}(x)$-module, et soit M le faisceau sur X défini par $M(U) = \prod_{x \in U} M_x$, les applications de restrictions, et les opérations de $\mathbf{O}(U)$ sur $M(U)$, étant définies de façon évidente. M est un $\mathbf{O}$-Module sur X, par construction isomorphe au produit des $\mathbf{O}$-Modules $M^x(x \in X)$ qu'on obtient en définissant $M^x(U)$ comme étant égal à M_x si $x \in U$, à 0 dans le cas contraire. De cette remarque, on déduit aussitôt que pour tout $\mathbf{O}$-Module F, les homomorphismes de F dans M s'identifient aux familles $(u_x)_{x \in X}$, où pour tout $x \in X$, u_x est un $\mathbf{O}(x)$-homomorphisme de $F(x)$ dans M_x. De ceci on conclut:

PROPOSITION 3.1.2. *Si pour tout* $x \in X$, M_x *est un* $\mathbf{O}_x$-*module injectif, alors le faisceau produit* M *défini ci-dessus est un* $\mathbf{O}$-*module injectif.*

Soit alors F un $\mathbf{O}$-module quelconque, il est classique (et résulte d'ailleurs de th. 1.10.1) que pour tout $x \in X$, $F(x)$ peut se plonger dans un $\mathbf{O}_x$-module injectif, soit M_x, et par suite on obtient un plongement de F dans le $\mathbf{O}$-module injectif M défini par les M_x.

Signalons encore pour usage ultérieur:

PROPOSITION 3.1.3. *Soit* M *un* $\mathbf{O}$-*Module injectif sur* X, U *une partie ouverte de* X, $\mathbf{O}_U$ *(resp.* M_U*) la restriction de* $\mathbf{O}$ *(resp.* M*) à* U. *Alors* M_U *est un* $\mathbf{O}_U$-*Module injectif.*

M_U est évidemment un $\mathbf{O}_U$-module. Soient F un $\mathbf{O}_U$-module, G un sous-module, u un homomorphisme de G dans M_U, prouvons que u peut se prolonger en un homomorphisme de F dans M_U. Pour tout $\mathbf{O}_U$-Module H sur U, soit $\bar{H}$ le $\mathbf{O}$-Module obtenu, en termes d'espaces étalés, en "prolongeant H par 0 dans $\complement U$" (cf. [4, XVII, prop. 1]), la donnée d'un homomorphisme de $\mathbf{O}_U$-Modules $u: G \to M_U$ est alors équivalente à la donnée d'un homomorphisme de $\mathbf{O}$-Modules $\bar{G} \to M$. $\bar{G}$ étant un sous-module de $\bar{F}$ et M étant injectif, $\bar{u}$ peut se prolonger en un homomorphisme de $\bar{G}$ dans M, qui induit l'homomorphisme cherché de G dans M_U. —On notera que la proposition 3.1.3 devient *fausse* si on suppose U *fermé* au lieu d'ouvert. On démontre de façon toute analogue:

PROPOSITION 3.1.4. *Soit* M *un* $\mathbf{O}$-*Module injectif sur une partie fermée* Y *de* X. *Alors le* $\mathbf{O}$-*Module* M^X *qui coincide avec* M *sur* Y, *et est nul dans* $\complement Y$, *est injectif.*

3.2. Définition des $H^p_\Phi(X, F)$. Soit X un espace topologique, nous désignons par $\mathbf{C}^X$ la catégorie abélienne $\mathbf{C}^Z{}_X$ des faisceaux abéliens sur X. Si F est un tel faisceau, A une partie de X, on désigne par $\Gamma(A, F)$ le groupe des sections de F (considéré comme espace étalé) sur A, et on pose $\Gamma(F) = \Gamma(X, F)$, (de sorte qu'on a $\Gamma(A, F) = \Gamma(F|A)$, où $F|A$ désigne la restriction de F à A). Plus généralement, soit Φ un ensemble non vide de parties fermées de X, filtrant croissant, et tel que $A \in \Phi$, $B \subset A$ implique $B \in \Phi$: pour abréger, nous dirons que Φ est un *antifiltre de parties fermées* de X. On désigne par $\Gamma_\Phi(F)$ le sous-groupe de $\Gamma(F)$ formé des sections f dont le support (= complémentaire du plus grand ouvert dans X sur lequel la restriction de f soit nulle) est $\in \Phi$. On voit aussitôt que $\Gamma_\Phi(F)$ est un foncteur exact à gauche défini sur $\mathbf{C}^X$ à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens. Il s'impose donc de considérer ses foncteurs dérivés droits, identiques aux satellites droits (cf. 2.3), qui existent en vertu du corollaire à la prop. 3.1.1. On les note $H^p_\Phi(X, F)$, (où p est un entier quelconque). D'après la théorie des foncteurs dérivés :

PROPOSITION 3.2.1. *Le système des foncteurs $H^p_\Phi(X, F)$ ($-\infty < p < -\infty$) est caractérisé par les conditions suivantes : ils forment un foncteur cohomologique sur $\mathbf{C}^X$ à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens, $H^p_\Phi(X, F)$ est nul pour $p < 0$, coincide avec $\Gamma_\Phi(F)$ pour $p = 0$, et est effaçable (c'est-à-dire s'annule pour F injectif) si $p > 0$.*

Pour calculer les $H^p_\Phi(X, F)$, on prend une résolution droite de F par des faisceaux C^i injectifs, ou plus généralement tels qu'on sache à l'avance que les $H^p(X, C^i)$ sont nuls pour $p > 0$ (on dit alors que les C^i sont Γ_Φ-acycliques), on considère le complexe $C(F)$ formé par les C^i, et on aura alors

$$H^p_\Phi(X, F) = H^p\Gamma_\Phi(C(F)).$$

Pour appliquer cette méthode, il est donc important de connaître des critères permettant d'affirmer qu'un faisceau est Γ_Φ-acyclique, nous en indiquerons plus bas (cf. 3.3).

Soit f une application continue d'un espace X dans un espace Y, pour tout faisceau F sur Y, on définit de façon naturelle le *faisceau image réciproque* de F par f, (noté $f^{-1}(F)$ par abus de notations) : si on considère F comme espace étalé sur Y, il suffit de reprendre la définition de l'image inverse d'un fibré. On obtient ainsi un *foncteur covariant additif exact* $F \to f^{-1}(F)$ de $\mathbf{C}^Y$ dans $\mathbf{C}^X$, que nous allons désigner par g. Pour tout $F \in \mathbf{C}^Y$, on a un homomorphisme évident $\Gamma(F) \to \Gamma(\mathrm{g}(F))$, d'ailleurs fonctoriel, i.e. on a un homomorphisme de foncteurs $\Gamma^Y \to \Gamma^X\mathrm{g}$ (où nous avons mis en exposant l'espace relativement auquel on considère le foncteur Γ). Plus généralement, considérons un antifiltre Φ de parties fermées de X et un antifilre Ψ de partie fermées de Y tel que pour tout $B \in \Psi$, on ait $f^{-1}(B) \in \Phi$. Alors pour tout $F \in \mathbf{C}^Y$, l'homomorphisme $\Gamma(F) \to \Gamma(\mathrm{g}(F))$ applique $\Gamma_\Psi(F)$ dans $\Gamma_\Phi(\mathrm{g}(F))$, d'où un homomorphisme fonctoriel $\Gamma_\Psi \to \Gamma_\Phi\mathrm{g}$. D'ailleurs, g étant un foncteur *exact*, le foncteur $(R\Gamma_\Phi)\mathrm{g}$ peut être considéré comme un *foncteur cohomologique* sur $\mathbf{C}^Y$, se réduisant à $\Gamma^X_\Phi\mathrm{g}$ en dimensions 0 ; comme le foncteur cohomologique $R\Gamma^Y_\Psi$ est "universel "(prop. 2.2.1) l'homomorphisme fonctoriel $\Gamma^Y_\Psi \to \Gamma^X_\Phi\mathrm{g}$

se prolonge de façon unique en un homomorphisme de foncteurs cohomologiques $R\Gamma_\Psi \to (R\Gamma_\Phi)g$. On a donc prouvé :

PROPOSITION 3.2.2. *Soint f une application continue d'un espace X dans un espace Y, Φ (resp. Ψ) un antifiltre de parties fermées de X (resp. Y), tels que $B \in \Psi$ implique $f^{-1}(B) \in \Phi$. On peut de façon unique trouver, pour tout faisceau de groupes abéliens F sur Y, des homomorphismes*

$$H^p_\Psi(Y,F) \to H^p_\Phi(X, f^{-1}(F)) \quad (-\infty < p < +\infty)$$

de façon à obtenir un homomorphisme de foncteurs cohomologiques, se réduisant à l'homomorphisme naturel en dimension 0.

Ces homomorphismes seront appelés homomorphismes naturels. De leur unicité résulte une propriété de transitivité évidente, dont l'énoncé est laissé au lecteur.

En particulier, si Y est une *partie* de X, et si on pose $H^p_\Psi(Y,F) = H^p_\Psi(Y, F|Y)$, oû $F|Y$ désigne la "restriction" du faisceau F à Y, on a des "homomorphismes de *restriction*" $H^p_\Phi(X,F) \to H^p_{\Phi\cap Y}(Y,F)$, où $\Phi \cap Y$désigne la *trace* de Φ sur Y.

3.3. Critères d'acyclicité. Les développements de ce numéro, très commodes pour la suite, sont dûs à Godement, et seront traités de façon détaillée dans le livre de Godement [9] cité dans l'Introduction.

LEMME 3.3.1. *Soit F un foncteur covariant d'une catégorie abélinne* $\mathbf{C}$ *dans une autre* $\mathbf{C}'$, *on suppose que tout objet de* $\mathbf{C}$ *est isomorphe à un sous-truc d'un objet injectif. Soit* $\mathbf{M}$ *une classe d'objets de* $\mathbf{C}$, *satisfaisant aux conditions suivantes*: (*i*) *Pour tout* $A \in \mathbf{C}$, *il existe un monomorphisme de A dans un* $M \in \mathbf{M}$ (*ii*) *Tout* $A \in \mathbf{C}$, *isomorphe à un facteur direct d'un* $M \in \mathbf{M}$, *appartient à* $\mathbf{M}$ (*iii*) *Pour toute suite exacte* $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ *dans* $\mathbf{C}$ *avec M' et M dans* $\mathbf{M}$, *M'' appartient aussi à* $\mathbf{M}$, *et la suite* $0 \to F(M') \to F(M) \to F(M'') \to 0$ *est aussi exacte. Sous ces conditions, tout objet injectif de* $\mathbf{C}$ *est dans* $\mathbf{M}$, *et pour tout* $M \in \mathbf{M}$, *on a* $R^pF(M) = 0$ *pour* $p > 0$.

Soit d'abord I un objet injectif dans $\mathbf{C}$, I se plonge dans un $M \in \mathbf{M}$ en vertu de (i), et est donc isomorphe à un facteur direct de M (puisque I est injectif), donc est dans $\mathbf{M}$ en vertu de (ii). Soit $M \in \mathbf{M}$, prouvons $R^pF(M) = 0$ pour $p > 0$, pour ceci considérons une résolution droite de M par des objets injectifs C^i ($i \geqq 0$), soit Z^i le sous-truc des cycles dans C^i, il suffit de prouver que les suites $0 \to F(M) \to F(C^0) \to F(Z^1) \to 0$, $0 \to F(Z^0) \to F(C^0) \to F(Z^1) \to 0$ etc. sont exactes, et pour ceci il suffit de prouver en vertu de (iii) que les Z^i et C^i sont dans M. On le sait déjà pour les C^i puisqu'ils sont injectifs, et pour les Z^i cela résulte de (iii) par récurrence sur i.

COROLLAIRE. *Pour tout* $A \in \mathbf{C}$, *on peut calculer les* $R^pF(A)$ *à l'aide d'une résolution (quelconque) de A par des* $C^i \in \mathbf{M}$.

En effet, une telle résolution existe en vertu de (i), et elle permet de calculer les $R^pF(A)$ puisque les C^i sont F-acycliques en vertu du lemme.

Un faisceau d'ensembles F sur un espace X est dit *flasque* (resp. *mou*) si pour toute partie A ouverte (resp. fermée) de X, toute section de F sur A est la restriction d'une section de F sur X. Ainsi si on se donne pour tout $x \in X$ un ensemble E_x, le faisceau E dont l'ensemble des sections sur un ouvert U est $E(U) = \prod_{x \in U} E_x$ (avec les applications de restrictions évidentes; comparer l'exemple traité avant prop. 3.1.2) est évidemment flasque et mou ; on en conclut que tout faisceau d'ensembles se plonge dans un faisceau flasque d'ensembles, de même tout faisceau de groupes abéliens (resp. de $\mathbf{O}$-modules, si $\mathbf{O}$ est un faisceau d'anneaux sur X) se plonge dans un faisceau flasque de groupes abéliens (resp. de $\mathbf{O}$-modules). Notons que si une partie fermée A de X admet un voisinage paracompact, alors toute section sur A d'un faisceau F défini sur X est la restriction d'une section définie dans un voisinage de A; il en résulte aussitôt que *si X est paracompact, un faisceau flasque est mou.* — Soit maintenant Φ une famille de parties fermées de X satisfaisant aux conditions générales envisagées dans 3.2, un faisceau F de groupes abéliens sur X est dit *Φ-mou* si pour tout $A \in \Phi$ et toute section de F sur A, il existe une $f \in \Gamma_\Phi(F)$ induisant la section donnée. Disons que Φ est une *famille paracompactifiante* si, en plus des conditions déjà envisagées, elle satisfait aux conditions supplémentaires suivantes (introduites d'abord dans [4]): *tout $A \in \Phi$ est paracompact, et admet un voisinage $B \in \Phi$.* On voit alors facilement, comme ci-dessus, *qu'un faisceau flasque de groupes abéliens est Φ-mou pour toute famille Φ paracompactifiante*, d'où résulte en particulier que tout faisceau de groupes abéliens se plonge dans un faisceau Φ-mou (puisqu'il se plonge même dans un flasque). L'intérêt des définitions précédentes tient à la

PROPOSITION 3.3.2. *Soit X un espace topologique muni d'une "famille Φ". Considérons le foncteur Γ_Φ défini sur la catégorie $\mathbf{C}^X$ des faisceaux de groupes abéliens sur X, et à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens. Alors les conditions du lemme* 3.3.1 *sont satisfaites dans chacun des deux cas suivants:*

1) $\mathbf{M}$ *est la famille des faisceaux flasques sur X.*

2) Φ *est paracompactifiante, et M est la famille des faisceaux Φ-mous sur X.*

COROLLAIRE. *$H^p_\Phi(X, F) = 0$ pour $p > 0$ si F est flasque, ou si F est Φ-mou et la famile Φ paracompactifiante.*

La condition (i) du lemme a déjà été vérifiée, la condition (ii) se vérifie trivialement, seule la condition (iii) demande une démonstration, pour laquelle nous renvoyons au livre de Godement (ou que nous proposons au lecteur à titre d'exercice).

REMARQUE. Si la famille Φ est paracompactifiante, on vérifie facilement que les faisceaux fins [4, XV] sont Φ-mous, donc vérifient $H^p_\Phi(X, F) = 0$. Il en résulte que la théorie de la cohomologie donnée dans [4] pour des familles Φ paracompactifiantes est bien un cas particulier de celle développée ici. Nous renvoyons aussi au livre de Godement pour une définition, particulièrement jolie, des faisceaux fins en termes de faisceaux mous.

Résolution de l'identité. Pour tout faisceau F, soit $C^0(F)$ le faisceau produit défini par la famille des ensembles $F(x)$, on a un homomorphisme fonctoriel $F \to C^0(F)$, d'ailleurs injectif. Si on se restreint à prendre F dans la catégorie des faisceaux abéliens sur X, la méthode de 2.5, exemple a), permet de construire une résolution de l'identité, $C(F)$ qui se réduit à $C^0(F)$ en dimension 0 et est défini par $C^n(F) = C^0(C^{n-1}(F)/\mathrm{Im}C^{n-2}(F))$ en dimension $n \geqq 2$. Les $C^n(A)$ sont flasques, donc Γ_Φ-acycliques quel que soit l'antifiltre Φ de parties fermées, donc $\Gamma_\Phi C(A)$ est un foncteur résolvant pour Γ_Φ, et on a par suite $H^n_\Phi(X, F) = H^n(\Gamma_\Phi C(F))$. $C(F)$ est appelée la *résolution canonique* de F, (introduite et utilisée systématiquement par Godement). Si la famille Φ est paracompactifiante, on trouve un autre foncteur résolvant pour Γ_Φ en prenant une résolution fixe C du faisceau constant $\mathbf{Z}$ par des faisceaux *fins* et *sans torsion*, et prenant pour tout F le complexe de faisceaux $F \otimes C$. C'est la une résolution de F (parce que C est sans torsion), c'est un foncteur exact en F (même raison), de plus les $F \otimes C^n$ sont aussi fins donc Γ_Φ-acycliques; donc le foncteur Γ_Φ $(F \otimes C)$ est un foncteur résolvant pour Γ_Φ, et on a par suite $H^n_\Phi(X, F) = H^n(\Gamma_\Phi(F \otimes C))$. $F \otimes C$ sera appelée la résolution de Cartan de F. On se rappellera qu'elle n'est utilisable que si Φ est paracompactifiante.

Un exemple amusant. Un espace X est dit *irréductible* s'il n'est pas réunion de deux parties fermées distinctes de lui-même, c'est-à-dire si l'intersection de deux parties ouvertes non vides est non vide; il revient encore au même de dire que toute partie ouverte de X est connexe. Alors tout faisceau *constant* F sur X est évidemment flasque (la réciproque étant d'ailleurs vraie si X est connexe, comme on voit en prenant un faisceau constant à fibre non réduite à un point). En particulier, *si F est un faisceau constant de groupes abéliens sur l'espace irreductible X, on a $H^p(X, F) = 0$ pour $p > 0$.*

3.4. Applications à des questions de relèvement de groupe structural[8]. Soit X une variété algébrique irréductible sur un corps k algébriquement clos (voir [15, Chap. II], dont nous suivons la terminologie), $\mathbf{O}$ son faisceau d'anneaux locaux (=faisceau des germes de fonctions régulières sur X), $\mathbf{K}$ le faisceau des germes de fonctions rationelles sur X. $\mathbf{K}$ est un faisceau constant (loc. cit. prop. 9). Soient $\mathbf{O}^*$ et $\mathbf{K}^*$ resp. les sous-faisceaux des $\mathbf{O}$ et $\mathbf{K}$ formé des germes inversibles; évidemment $\mathbf{K}^*$ est encore un faisceau constant de groupes abéliens, et $\mathbf{O}^*$ en est un sous faisceau. Le faisceau quotient $\mathbf{K}^*/\mathbf{O}^* = \mathbf{D}$ est le faisceau des *germes de diviseurs localement principaux* sur X, et coïncide avec le faisceau des *germes de diviseurs* sur X si les anneaux locaux $\mathbf{O}(x)$ de X sont factoriels (par exemple si X est sans singularités), ce que nous supposerons désormais. D'autre part, il est immédiat que le faisceau $\mathbf{D}$ des germes de diviseurs sur

8) La lecture du présent numéro est inutile pour la compréhension de la suite.

X est *flasque*, car une section de $\mathbf{D}$ sur un ouvert non vide $U \subset X$ est une combinaison linéaire formelle $\sum n_i V_i$ d'hypersurfaces irréductibles V_i dans U, et est donc la restriction de la section $\sum n_i V_i$ de $\mathbf{D}$ sur X. Par suite, la suite exacte $0 \to \mathbf{O}^* \to \mathbf{K}^* \to \mathbf{D} \to 0 \to 0 \to \ldots$ est une résolution de $\mathbf{O}$ par des faisceaux flasques ($\mathbf{K}^*$ est flasque puisqu'il est constant et que X est irréductible, (cf. fin de 3.3). On en conclut les valeurs des $H^p(X, \mathbf{O}^*)$ (on omet le signe Φ quand on prend pour Φ la famille de toutes les parties fermées de X): $H^1(X, \mathbf{O}^*) = \Gamma(\mathbf{D})/\mathrm{Im}(\Gamma(\mathbf{K}^*)) =$ groupe des classes de diviseurs modulo les diviseurs principaux (fait bien connu, et qui résulte d'ailleurs aussitôt de la suite exacte de cohomologie), et $H^i(X, \mathbf{O}^*) = 0$ si $i \geqq 2$, (résultat que j'avais obtenu d'abord, de façon beaucoup moins simple, par la méthode des recouvrements de Čech). On notera d'ailleurs que ce résultat s'étend sans changement au cas où X est un "schéma de variété" au sens de [5 bis], plus généralement au cas de "variétés arithmétiques", définies par "recollement" à partir de "spectres" d'anneaux commutatifs [8]. L'application ci-dessous peut aussi se formuler dans le cadre des variétés arithmétiques :

PROPOSITION 3.4.1. *Soit X une variété algébrique irréductible (sur un corps algébriquement clos k) dont les anneaux locaux sont factoriels (par exemple une variété sans singularités), alors on a $H^i(X, \mathbf{O}^*) = 0$ pour $i \geqq 2$. Si E est un fibré algébrique localement trivial sur X, de groupe structural le groupe projectif $GP(n-1, k)$ (cf. [20]), alors E est isomorphe à l'espace fibré associé à un espace fibré algébrique localement trivial de groupe structural le groupe linéaire $Gl(n, k)$.*

Pour tout groupe algébrique G, désignons par $\mathbf{O}(G)$ le faisceau de groupes des germes d'applications régulières de X dans G. Alors la première assertion de la proposition à démontrer s'écrit $H^i(X, \mathbf{O}(k^*)) = 0$ pour $i \geqq 2$, et a déjà été prouvée, la deuxième s'écrit, en utilisant les notions et la terminologie développée dans [11] : l'application canonique

$$H^1(X, \mathbf{O}(Gl(n, k)) \to H^1(X, \mathbf{O}(GP(n-1, k))$$

est surjective. Pour le prouver, considérons la suite exacte de groupes algébriques $e \to k^* \to Gl(n, k) \to GP(n-1, k) \to e$, où le premier homomorphisme est l'isomorphisme naturel de k^* sur le centre de $Gl(n, k)$. On constate facilement que la fibration de $Gl(n, k)$ par le sous-groupe k^* est localement triviale (i.e. il existe une section rationelle), donc la suite exacte précédente donne naissance à une suite exacte de faisceaux

$$e \to \mathbf{O}(k^*) \to \mathbf{O}(Gl(n, k)) \to \mathbf{O}(GP(n-1, k)) \to e$$

où $\mathbf{O}(k^*)$ est dans le centre de $\mathbf{O}(Gl(n, k))$. La proposition résulte alors de $H^2(X, \mathbf{O}(k^*)) = 0$, et du corollaire au resultat suivant, qui généralise [11, prop. 5.7.2, corollaire], où nous étions obligés de faire des hypothèses de paracompacité :

PROPOSITION 3.4.2. *Soient X un espace topologique, $e \to F \to G \to H \to e$ une* *suite exacte de faisceaux de groupes sur X, avec F abélien. Soient E un espace fibré sur X à faisceau structural H* [11, *Chap. IV*], $\mathbf{F}^E$ *le faisceau de groupes associé à E et aux opérations de H sur F définies à l'aide des automorphismes intérieurs de G (qui opèrent sur le faisceau invariant F). On peut alors définir un "élément cobord" $\partial E \in H^2(X, F)$, de façon "fonctorielle", de telle façon que la condition nécessaire et suffisante pour que $\partial E = 0$, c'est que la classe $c(E)$ de E dans $H^1(X, H)$* [11, *Chap. V*] *appartienne à l'image de $H^1(X, G)$.*

Cet énoncé se simplifie quand F est dans le centre de G, car alors $F^E = F$ ne dépend plus du fibré E, et on obtient:

COROLLAIRE. *Soit $e \to F \to G \to H \to e$ une suite exacte de faisceaux de groupes sur l'espace X, avec F daus le centre de G. Alors on peut trouver une application ("fonctorielle") ∂: $H^1(X, H) \to H^2(X, F)$ telle que $\partial^{-1}(0) =$* $\mathrm{Im}(H^1(X, G))$.

DÉMONSTRATION DE PROP. 3. 4. 2. Plongeons tout faisceau M sur X dans le faisceau $\overline{M}$ dont l'ensemble des section sur l'ouvert U est l'ensemble $\prod_{x \in U} M(x)$; $\overline{M}$ est donc un faisceau *flasque* et M s'identifie à un sous-faisceau de $\overline{M}$. Si M est un faisceau de groupes (resp. de groupes abéliens) il en est de même de $\overline{M}$. D'autre part, on vérifie facilement que si L est un faisceau flasque de groupes (non nécessairement abéliens), alors $H^1(X, L)$ est réduit à l'élément neutre (en d'autres termes, tout faisceau *principal* sous L [11, définition 3. 4. 2] admet une section; on construit aisément une telle section par "zornification" sur l'ensemble des sections construites sur des ouverts de X). Il résulte de ceci, que pour des faisceaux F de groupes abéliens, le groupe $H^1(X, F)$ tel qu'il est défini dans [11] (par la méthode de Čech) est le même que celui défini axiomatiquement dans ce travail (savoir le premier satellite droit $S^1\Gamma$ du foncteur Γ sur $\mathbf{C}^X$). Revenons alors aux conditions de prop. 3. 4. 2, on a un homomorphisme de suites exactes:

$$\begin{array}{ccccccccc} e & \to & F & \to & G & \to & H & \to & e \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ e & \to & \overline{F} & \to & \overline{G} & \to & \overline{H} & \to & e \end{array} \qquad \overline{F} \cap G = F$$

G et $\overline{F}$ sont des sous-faisceaux de groupes de $\overline{G}$, $\overline{F}$ distingué. Soit $\overline{F}{\cdot}G$ le faisceau de groupes de $\overline{G}$ engendré par G et $\overline{F}$, posons:

$$P = \overline{F}G, \qquad F' = \overline{F}/F.$$

On définit de façon évidente une suite exacte d'homomorphismes de faisceaux de groupes

$$e \to \overline{F} \to P \to H \to e.$$

Montrons que *l'application correspondante $H^1(X, P) \to H^1(X, H)$ est bijective.* C'est un monomorphisme en vertu de la suite exacte de cohomologie de [11, prop. 5. 6. 2], compte tenu du fait que $H^1(X, L)$ est réduit à l'élément neutre si L est localement isomorphe à $\bar{F}$ (car on voit facilement qu'un faisceau localement isomorphe à un faisceau flasque est flasquee). C'est un épimorphisme, car soit (h_{ij}) un 1-cocycle de H relatif à un recouvrement ouvert (U_i) de X, comme $H^1(X, \bar{H})$ est réduit à l'élément neutre, il existe des $\bar{h}_i \in \Gamma(U_i, \bar{H})$ telles que $h_{ij} = \bar{h}_i^{-1}\bar{h}_j$, d'autre part on peut évidemment relever les $\bar{h}_i$ en des sections $\bar{g}_i$ de $\bar{G}$ (il suffit de se rappeler de la définition de G et $\bar{H}$!). Posant $p_{ij} = \bar{g}_i^{-1}\bar{g}_j$, on voit aussitôt que la section de $\bar{H}$ sur U_{ij} définie par p_{ij} est h_{ij}, d'où on conclut que $p_{ij} \in \Gamma(U_{ij}, P)$, donc (p_{ij}) est un 1-cocycle de P définissant le 1-cocycle donné par passage au quotient.

Du résultat précédent on conclut que le fibré E est isomorphe au fibré associé à un fibré Q de faisceau structural P, bien déterminé d'ailleurs à isomorphisme près. Notons d'ailleurs que faisant opérer $P = \bar{F}G \subset \bar{G}$ sur $\bar{G}$ par automorphismes intérieurs, $\bar{F}$ reste stable par ces opérations (puisque $\bar{F}$ opère trivialement sur $\bar{F}$, et que F est invariant dans G), donc P opère dans $\bar{F}$ de façon naturelle. De plus F est stable sous les opérations de P, et les opérations de P sur F ainsi obtenues ne sont autres que celles qu'on obtient en composant $P \to H$ et la représentation naturelle de H par des opérations dans F. De ceci on déduit donc que le faisceau associé F^E s'identifie aussi au faisceau associé F^Q. Par ailleurs, les opérations de P passent aussi au quotient $F' = \bar{F}/F$; les représentations de P par germes d'automorphismes de $F, \bar{F}, F'$ seront notées par σ. Notons maintenant qu'on a une suite exact d'homomorphismes de faisceaux:

$$e \to G \to P \xrightarrow{u} F' \to e.$$

L'homomorphisme $G \to P = \bar{F}G$ est l'homomorphisme d'injection, donc un homomorphisme de faisceaux de groupes, et l'homomorphisme $u: P \to F'$ est défini en faisant correspondre, à un produit $\bar{f}g (\bar{f} \in \bar{F}(x),\ g \in G(x))$ la classe de $\bar{f}$ dans $F'(x)$ (cette definition a un sens, grâce au fait que $G \cap \bar{F} = F$). Cet homomorphisme *ne respecte pas* en général les structures multiplicatives, mais satisfait aux conditions suivantes: (i) u est surjectif, et deux éléments de P ont la même image si et seulement si ils sont congrus sous G opérant à droite (i. e. s'ils définissent le même élément de P/G) (ii) u est un homomorphisme croisé de P dans F' (P opérant sur F' comme indiqué plus haut), i. e. on a, dans chaque fibre $P(x)$, $u(e) = e$ et $u(pp') = u(p)\sigma(p)u(p')$. Nous allons de cette situation, et de la donnée du fibré Q à faisceau structural P, déduire un élément $d(Q) \in H^1(X, F'^Q)$ (où F'^Q est le faisceau associé à Q et aux opérations données de P sur F'), de telle façon que la nullité de $d(Q)$ soit nécessaire et suffisante pour que la classe $c(Q) \in H^1(X, P)$ de Q soit dans l'image de $H^1(X, G)$. Alors la proposition 3. 4. 2 sera prouvée (modulo des vérifications immédiates de naturalité). En effet la condition trouvée est nécessaire et suffisante pour que la classe $c(E) \in H^1(X, H)$ soit dans l'image de $H^1(X, G)$ (comme on voit aussitôt sur le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1(X,G) & \to & H^1(X,P) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(X,G) & \to & H^1(X,H) \end{array}$$

où les flêches verticales sont des bijections): et d'autre part $H^1(X, F'^Q)$ est cannoniquement isomorphe à $H^2(X, F^Q) = H^2(X, F^E)$, puisque de la suite exacte $0 \to F \to \bar{F} \to F' \to 0$ on déduit la suite exacte $0 \to F^Q \to \bar{F}^Q \to F'^Q \to 0$ et que, $\bar{F}^Q$ étant flasque puisque localement isomorphe au faisceau flasque $\bar{F}$, $H^i(X, \bar{F}^Q) = 0$ pour $i > 0$. Il suffira donc de poser $\partial(E) = -d(Q) \in H^2(X, F^E)$ pour satisfaire aux conditions voulues. Il reste donc à définir $d(Q)$, ayant les propriétés de fonctoralité et "d'exactitude" voulues. C'est ce qui va être fait sous les conditions plus générales qui suivent où les notations sont légèrement changées).

Soit P un faisceau de groupes sur X, A un faisceau de groupes sur lequel P opère (à gauche), l'opération définie par $p \in P$ étant désignée par $\sigma(p)$. Soit u un homomorphisme croisé de P dans A, i.e. un homomorphisme de faisceaux tel que, sur chaque fibre $F(x)$, on ait $u(e) = e$, $u(pp') = u(p)\sigma(p) \cdot u(p')$. Alors le sous-faisceau G de P image inverse de la section nulle de A par u est un sous-faisceau de groupes, et deux éléments de P ont même image dans A si et seulement si ils définissent la même classe à droite mod. G. D'autre part, pour tout $x \in X$, $p \in P(x)$, $a \in A(x)$, posons

$$\rho(p)a = u(p)\,(\sigma(p)a).$$

Dire que u est un homomosphisme croisé signifie précisément que la formule précédente définit une représentation ρ de P par des germes d'automorphismes du faisceau *d'ensembles* A. D'ailleurs l'homomorphisme de faisceaux d'ensembles $A \times A \to A$ défini par le produit dans A, est compatible avec les opérations de P opérant respectivement par ρ, σ, ρ:

$$\rho(p)(ab) = (\rho(p)a))\sigma(p)b).$$

On en conclut, pour tout fibré E à faisceau structural P, un homomorphisme des faisceaux d'ensembles associés $A(\rho)^E \times A(\sigma)^E \to A(\rho)^E$, et il est immédiat qu'ainsi $A(\rho)^E$ devient un faisceau d'ensembles sur lequel le faisceau de groupes $A(\sigma)^E$ opère à droite, et plus précisément $A(\rho)^E$ est un faisceau *principal* (à droite) sous $A(\sigma)^E$. Nous pouvons considérer sa classe $c(A(\rho)^E) \in H^1(X, A(\sigma)^E)$, que nous dénoterons aussi par $d(E)$. Son annulation est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une section du faisceau $A(\rho)^E$. Notons d'ailleurs que le monomorphisme $P/G \to A$ déduit de u est compatible avec les opérations de P, opérant sur P/G de la façon canonique et sur A par ρ; d'où un monomorphisme naturel pour les faisceaux associés: $(P/G)^E \to A(\rho)^E$, bijectif si et seulement si u est surjectif. Par suite, l'existence d'une section de $(P/G)^E$, qui est la condition nécessaire et suffisante pour que la classe $c(E) \in H^1(X, P)$ de E soit dans l'image de $H^1(X, G)$, implique l'existence d'une section de $A(\rho)^E$ c'est-à-dire la nullité de $d(A)$, et la réciproque est vraie si u est un épimorphisme de P sur A. Ces considérations achèvent donc la démonstration de la prop. 3.4.2.

REMARQUES. 1. On a mis le signe $-$ dans la formule $\partial(E) = -d(Q)$, donnée dans la démonstration de prop. 3. 4. 2, pour qu'on retrouve l'opérateur bord usuel de la suite exacte de cohomologie relative à la suite exacte $0 \to F \to G \to H \to 0$, dans le cas où G (donc aussi F et H) est abélien. Dans ce cas, on a un diagramme de suites exactes horizontales et verticales

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & F & \to & G & \to & H & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \overline{F} & \to & \overline{G} & \to & \overline{H} & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & F' & \to & G' & \to & H' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

d'où on conclut [6, prop. III 4. 1] que le diagramme d'homomorphismes cobords suivant est *anticommutatif*:

$$\begin{array}{ccc} H^0(X, H') & \to & H^1(X, F') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(X, H) & \to & H^2(X, F). \end{array}$$

Le premier homomorphisme vertical est surjectif, et on vérifie que dans la construction faite plus haut, $d(Q)$ s'obtient à partir de la classe $c(E) \in H^1(X, H)$ par passage au quotient dans l'homomorphisme composé $H^0(X, H^1) \to H^1(X, F') \to H^2(X, F)$, et est donc égal à $-\partial c(E)$.

2. On n'oubliera pas que pour appliquer prop. 3. 3. 1, à un fibré algébrique projectif, il faut d'abord vérifier qu'il est localement trivial. Malheureusement, cette vérification, quand on ne sait pas à priori qu'on peut remonter le groupe structural semble souvent difficile. Exemple: Sur une variété projective complexe sans singularités, on a un fibré *holomorphe* E à fibre l'espace projectif (on sait, d'après Kodaira-Borel, que E est aussi une variété algébrique), provient-il d'un fibré holomorphe vectoriel? La réponse est affirmative d'après prop. 3. 4. 1. si E est localement trivial du point de vue algébrique, i. e. si par tout point de la base passe une section rationelle; la réciproque est d'ailleurs vraie, car [16] tout fibré holomorphe vectoriel sur X est algébrique localement trival.

3. La situation $u: P \to A$ (u, homomorphisme croisé de faisceaux) décrite plus haut se rencontre dans diverses situations intéressantes, par exemple: X est une variété holomorphe, G un groupe de Lie complexe ayant l'algèbre de Lie V, P est le faisceau des germes d'application holomorphes de X dans G, A le faisceau des germes de 1-formes différentielles holomorphes sur X à valeurs dans V, sur lequel P opère à l'aide de la représentation adjointe, et on pose $u(g) = (dg)g^{-1}$. Ceci permet, à tout espace fibré holomorphe E sur X de groupe structural G, de faire correspondre une classe $d(E) \in H^1(X, \Omega^1(\mathrm{ad}(E)))$, où $\mathrm{ad}(E)$ désigne le fibré vectoriel (de fibre V) "adjoint" de E et $\Omega^1(\mathrm{ad}(E))$ le faisceau des germes de 1-formes différentielles holomorphes à valeurs dans $\mathrm{ad}(E)$. Le noyau de u étant le sous-faisceau de P formé des germes d'applications constantes de X dans G, on voit que l'annulation de $d(E)$ est une condition nécessaire pour que le

faisceau structural de E puisse se réduire au faisceau *constant* G, i. e. pour que sur E existe une connexion holomorphe intégrable; et cette condition est suffisante quand X est de dimension complexe 1 (car alors u est épijective). L'invariant $d(E)$ a été d'abord introduit par Weil [21]; une définition plus géométrique de Atiyah [1] prouve que l'annulation de $d(E)$ est en tous cas nécessaire et suffisante pour l'existence d'une connexion holomorphe (non nécessairement intégrable) sur E.

3.5. **La suite exacte relative à un sous-espace fermé.** Soit Y un sous-espace localement fermé (i. e. intersection d'une partie ouverte et d'une partie fermée) de l'espace X. Pour tout faisceau abélien F sur Y, il existe un faisceau abélien et un seul sur X, dont la restriction à Y soit F et dont la restriction à $\complement Y$ soit 0. Pour le voir, on est ramené aussitôt au cas où Y est ouvert ou fermé, où la vérification facile est faite dans [4, XVII, prop. 1]. Ce faisceau sur X sera noté F^X. $F \to F^X$ est un foncteur exact $\mathbf{C}^Y \to \mathbf{C}^X$, de plus on a, si $Z \subset Y \subset X$ (Z localement fermé dans Y donc dans X), et si F est un faisceau abélien sur Z: $(F^Y)^X = F^X$. Si maintenant F est un faisceau abélien sur X, on pose $F_Y = (F|Y)^X$, c'est donc le faisceau sur X caractérisé par la condition que sa restriction à Y est la même que celle de F, et sa restriction à $\complement Y$ est nulle. F_Y est un foncteur exact $\mathbf{C}^X \to \mathbf{C}^X$, de plus on a encore une propriété de transitivité $(F_Y)_Z = F_Z$ si $Z \subset Y \subset X$ sont comme ci-dessus. Si on suppose Y fermé, donc $U = \complement Y$ ouvert, on a une suite exacte bien connue

$$0 \to F_U \to F \to F_Y \to 0$$

pour tout faisceau abélien F sur X. Rappelons que l'on a $\Gamma(F_Y) = \Gamma(Y, F) = \Gamma(F|Y)$, tandis que $\Gamma(F_U)$ s'identifie au sous-groupe de $\Gamma(F)$ formé des sections dont le support est contenu dans U. Soit Φ un antifiltre de parties fermées de X; pour toute partie Z de X, soit Φ_Z l'antifiltre "induit" formé des $A \in \Phi$ qui sont contenus dans Z (ne pas confondre avec la trace $\Phi \cap Z$ de Φ sur Z !). On vérifie facilement que si Z est localement fermé, et Φ paracompactifiante (cf. 3.3.) alors Φ_Z est aussi paracompactifiante. Si Z est localement fermé, Φ quelconque, on déduit facilement des formules ci-dessus la formule plus générale suivante (valable en particulier si Z est ouvert, ou fermé):

$$\Gamma_\Phi(X, F_Z) = \Gamma_{\Phi_Z}(Z, F|Z)$$

valable pour tout faisceau abélien F sur X; formule d'ailleurs équivalente à la suivante:

$$\Gamma_{\Phi_Z}(Z, G) = \Gamma_\Phi(X, G^X)$$

valable pour tout faisceau abélien G sur Z. Comme G^X est un foncteur *exact* en G, les $H^p_\Phi(X, G^X)$ forment un foncteur cohomologique sur $\mathbf{C}^Z$, et comme le foncteur cohomologique universel $(H^p_{\Phi_Z}(Z, G))$ coïncide avec le premier en dimension 0, on en conclut des *homomorphismes canoniques*

$$H^p_{\Phi_Z}(Z, G) \to H^p_Z(X, G^X)$$

(caractérisés par le fait de définir un homomorphisme de foncteurs cohomologiques se réduisant en dimension 0 à celui envisagé plus haut) ; ou encore, partant d'un faisceau F sur X:

$$H^p_{\Phi_Z}(Z, F|Z) \to H^p_\Phi(X, F_Z).$$

THÉORÈME 3.5.1. *Les homomorphismes précédents sont des isomorphismes dans chacun des deux cas suivants*:

1. *Z est fermé.*
2. *Φ est paracompactifiante, Z est ouvert.*

DÉMONSTRATION. Il suffit dans chacun de ces deux cas, de vérifier que les foncteurs $H^p_\Phi(X, G^X)$ sur $\mathbf{C}^Z$ sont effaçables pour $p \geqq 1$. Si Z est fermé, cela résulte du fait que si G est injectif, G^X est injectif (prop. 3.1.4). Si Z est ouvert, et si Φ est paracompactifiante, il en est de même de Φ_Z, donc tout $G \in \mathbf{C}^Z$ se plonge dans un faisceau Φ_Z-mou (cf. 3.3), il suffit alors de noter que si G est Φ_Z-mou, alors G^X est Φ-mou, (fait dont la vérification est immédiate), et d'appliquer le corollaire à prop. 3.3.2.

Revenons alors à la suite exacte $0 \to F_U \to F \to F_Y \to 0$ relative à un sous-espace fermé Y et son complémentaire ouvert U, elle donne naissance à une suite exacte de cohomologie, qu'on peut écrire, grâce au théorème précédent:

$$\cdots\cdot H^p_\Phi(X, F_U) \to H^p_\Phi(X, F) \to H^p_{\Phi_Y}(Y, F) \to H^{p+1}_\Phi(X, F_U)\cdots\cdot$$

(où pour simplifier, on a écrit F au lieu de $F|Y$ dans le troisième terme). Si Φ est paracompactifiante, on peut de plus remplacer les termes de la forme $H^p(X, F_U)$ par $H^p_{\Phi_U}(U, F)$, et on obtient alors la suite exacte bien connue de [4, XVII].

3.6. Sur la dimension cohomologique de certains espaces[8)].

PROPOSITION 3.6.1. *Soient X un espace topologique, (T^p) un foncteur cohomologique covariant, défini sur la catégorie $\mathbf{C}^X$ des faisceaux de groupes abéliens sur X, à valeurs dans une catégorie $\mathbf{C}'$. On suppose que $\mathbf{C}'$ satisfait la condition* AB 4) (*cf.* 1.5) *qui implique que l'on peut former dans $\mathbf{C}'$ des limites inductives* (*prop.* 1.8), *et on suppose que les T^p permutent aux limites inductives. Soit $F \in \mathbf{C}^X$, alors $T^p(F)$ appartient à toute sous-catégorie épaisse* (*cf.* 1.11) *$\mathbf{C}''$ de $\mathbf{C}'$ stable par sommes directes infinies, qui contient tous les objets de la forme $T^i(\mathbf{Z}_U)$, où U est un ouvert arbitraire de X et où i est egal à $p, p+1$ ou $p+2$.*

(La signification de $\mathbf{Z}_U$ est la même qu'au numéro précédent). Considérons une famille $(f_i)_{i\in I}$ de sections de F sur des ouverts U_i ; chaque f_i définit un homomorphisme de $\mathbf{Z}_{U_i}$ dans F, donc (f_i) définit un homomorphisme de la somme directe $\bigoplus_i \mathbf{Z}_{U_i}$ dans F. Nous dirons que (f_i) est un *système de générateurs* de F si l'homomorphisme précédent est un épimorphisme. Il est trivial qu'il existe toujours, pour F donné, une famille de générateurs, d'où résulte aussitôt que F est limite inductive d'une famille filtrante croissante de sous-faisceaux F_j dont chacun admet une famille *finie* de générateurs. Comme $\mathbf{C}''$ est épaisse et stable par sommes directes infinies, elle est aussi stable par limites inductives (car une limite inductive d'objets dans $\mathbf{C}'$ est isomorphe à un quotient de leur somme directe); comme $T^p(F) = \varinjlim_j T^p(F_j)$, il suffit, pour prouver $T^p(F) \in \mathbf{C}''$, de prouver que $T^p(F_j) \in \mathbf{C}''$ pour tout j, ce qui nous ramène au cas où F admet une famille *finie* de générateurs $(f_i)_{1 \leqq i \leqq k}$. Désignons alors par F_n $(0 \leqq n \leqq k)$ le sous-faisceau de F engendré par les f_i avec $1 \leqq i \leqq n$. Les F_n forment une suite croissante finie de sous-faisceaux de F dont les quotients successifs F_n/F_{n-1} $(1 \leqq n \leqq k)$ admettent chacun *un* générateur. Raisonnant par récurrence sur la longeur k de cette suite, et utilisant le fait que T^p est semi-exact, on est ramené à prouver que $T^p(F_n/F_{n-1}) \in \mathbf{C}''$ pour tout n. Cela nous ramène au cas où F est engendré par *un* générateur, c'est-à-dire où il existe une suite exacte de faisceaux

$$0 \to R \to \mathbf{Z}_U \to F \to 0$$

oû R est un sous-faisceau de $\mathbf{Z}_U$ donc aussi de $\mathbf{Z}$. On en conclut la suite exacte $T^p(\mathbf{Z}_U) \to T^p(F) \to T^{p+1}(R)$, et comme on a $T^p(\mathbf{Z}_U) \in \mathbf{C}''$ par hypothèse, on est ramené à prouver que $T^{p+1}(R) \in \mathbf{C}''$. Or le sous-faisceau R du faisceau constant $\mathbf{Z}$ est engendré par une famille $(f_i)_{i \in I}$ de sections *constantes* n_i de $\mathbf{Z}$ sur des ouverts U_i. Procédant comme plus haut, on est ramené au cas où cette famille est finie. On peut bien entendu supposer les $n_i > 0$. Nous pouvons supposer de plus les f_i choisis de telle façon que peur tout $x \in X$, il existe parmi les n_i pour lesquels U_i contient x, un générateur du sous-groupe $R(x)$ du groupe $\mathbf{Z}(x)$ = groupe $\mathbf{Z}$ des entiers. Il suffit pour ceci, pour toute partie $(i_1, \ldots . i_p)$ de l'ensemble $[1, k]$ des k premiers entiers > 0, de considérer la section $f_{i_1 \ldots . i_p}$ de F sur $U_{i_1} \cap \ldots . \cap U_{i_p}$ dont la valeur est le pgcd de $n_{i_1}, \ldots, n_{i_p}$et d'adjoindre ces sections au système de générateurs. Supposons donc notre hypothèse sur les f_i satisfaite, et supposons $n_1 \leqq n_2 \leqq \ldots . \leqq n_k$. Si on désigne par R_m $(0 \leqq m \leqq k)$ le sousfaisceau de R engendré par les sections f_i avec $1 \leqq i \leqq m$, les R_m forment une suite croissante finie de sous-faisceaux de R, et on montre encore comme plus haut, par récurrence sur k, et utilisant le fait que T^{p+1} est semi-exact, que pour prouver $T^{p-1}(R) \in \mathbf{C}''$, il suffit de prouver $T^{p+1}(F_m/F_{m-1}) \in \mathbf{C}''$ pour $1 \leqq m \leqq k$. Or soit pour tout m, V_m la réunion des U_i pour $1 \leqq i \leqq m$, et soit $Y_m = U_m \cap \complement V_{m-1}$. Je dis que F_m/F_{m-1} *est isomorphe à* $\mathbf{Z}_{Y_m}$. En effet sa restriction au complémentaire de V_m est évidemment nulle (puisque celle de F_m l'est déjà), il en est de même de sa restriction à V_{m-1}. Il suffit de le vérifier en tout $x \in V_{m-1} \cap U_m$, or par hypothèse, parmi les n_i relatifs aux U_i contenant x figure leur pgcd n_{i_0}, qui doit donc diviser à la fois n_m et un n_i avec $i < m$ (prendre un indice $i < m$ avec $x \in U_i$, qui existe puisque $x \in V_{m-1}$). Alors ou bien $i_0 < m$, ce qui prouve que $f_{n_m}(x) \in F_{m-1}(x)$, ou $i_0 \geqq m$ d'où $n_{i_0} \geqq n_m$ et par suite $n_{i_0} = n_m$, donc n_m (divisant n_i et $\geqq n_i$) est egal à n_i, d'où encore $f_{n_m}(x) \in F_{m-1}(x)$, donc dans les deux cas $F_{m-1}(x) = F_m(x)$. Ainsi la restriction de F_m/F_{m-1} à la réunion de $\complement V_m$ et de V_{m-1}, i. e. à $\complement Y_m$, est nulle. D'autre part, la restriction de F_m/F_{m-1} à $Y_m = U_m \cap \complement V_{m-1}$ est isomorphe à celle de F_m (puisque celle de F_{m-1} est nulle) et y est engendrée par la restriction de la section f_m, donc elle est isomorphe au faisceau constant $\mathbf{Z}$. Ceci prouve bien que F_m/F_{m-1} est isomorphe à $\mathbf{Z}_{Y_m}$, et nous ramène à prouver que $T^{p+1}(\mathbf{Z}_Y) \in \mathbf{C}''$ si Y est une partie localement fermée de X. On a alors $Y = V \cap \complement U$, où U et V sont deux parties ouvertes de X. Soit W la partie ouverte de X réunion de U et V, on a une suite exacte évidente : $0 \to \mathbf{Z}_U \to \mathbf{Z}_W \to \mathbf{Z}_Y \to 0$, d'où une suite exacte $T^{p+1}(\mathbf{Z}_W) \to T^{p+1}(\mathbf{Z}_Y) \to T^{p+2}(\mathbf{Z}_U)$. Par hypothèse, les termes extrême de cette suite exacte sont dans $\mathbf{C}''$, il en est donc de même de $T^{p+1}(\mathbf{Z}_Y)$, ce qui achève la démonstration de la proposition.

Proposition 3.6.2. *Soient* $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}'$ *deux catégories abéliennes satisfaisant l'axiome* AB 5) (*cf.* 1.5), *on suppose que* $\mathbf{C}$ *admet un générateur* (*cf.* 1.9). *Soit* T *un foncteur covariant de* $\mathbf{C}$ *dans* $\mathbf{C}'$. *Pour que les foncteurs dérivés droits* R^pT *commutent aux limites inductives, il suffit que :*

a) T *permute aux limites inductives*

b) Si $M = \varinjlim_i M_i$ *dans* $\mathbf{C}$, *où les* M_i *sont injectifs, alors* M *est* T*-acyclique, i.e.* $R^pT(M) = 0$ *pour* $p > 0$.

(La condition *b*) est évidemment nécessaire pour que la conclusion soit valable, et de même a) si T est exact à gauche donc $R^0T = T$). Notons d'abord que les R^pT sont bien définis, en vertu de th. 1.10.1. Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système inductif dans $\mathbf{C}, A$ sa limite inductive, on veut prouver que les morphismes naturels $\varinjlim R^pT(A_i) \to R^pT(A)$ sont bijectifs. On va montrer d'abord qu'*il existe un système inductif* $(C_i)_{i\in I}$ *de complexes* (à valeurs dans $\mathbf{C}$) *et une "augmentation"* $(A_i) \to (C_i)$, *de telle façon que pour tout* $i \in I$, $A_i \to C_i$ *soit une résolution droite de* A *par des objets injectifs.* En effet, considérons la catégorie $I(\mathbf{C})$ des systèmes inductifs sur I à valeurs dans $\mathbf{C}$, c'est une catégorie de diagrammes, qui d'après prop. 1.6.1 satisfait aux mêmes hypothèses que $\mathbf{C}$. En vertu de théorème 1.10.1, tout objet de cette catégorie admet donc une résolution droite par des objets injectifs. Or, on vérifie aussitôt que si (M_i) est un objet injectif de $I(\mathbf{C})$, alors les M_i sont des objets injectifs de $\mathbf{C}$ (c'est un fait général pour les catégories de diagrammes pour un schéma $\sum$ satisfaisant aux conditions générales de prop. 1.9.2). Considérons alors une résolution droite de (A_i) par des objets injectifs de $I(\mathbf{C})$, $0 \to (A_i) \to (C_i^0) \to (C_i^1) \to \ldots$. Soit, pour tout i, C_i le complexe $0 \to C_i^0 \to C_i^1 \to \ldots$, on voit alors que le système (C_i) répond à la question. Comme le foncteur $\varinjlim$ sur $I(\mathbf{C})$ est exact (proposition 1.8), on obtient une résolution C de A par les $C^p = \varinjlim_i C_i^p$. En vertu de la condition b), les C^p sont T-acycliques, donc on a $R^pT(A) = H^p(T(C))$. Comme T permute aux limite inductives en vertu de a), on a $T(C) = \varinjlim T(C_i)$, donc, en vertu de l'exactitude du foncteur $\varinjlim$ sur $I(\mathbf{C}')$ (résultant de l'axiome AB 5) en vertu de prop. 1.8) on obtient $H^p(T(C)) = \varinjlim H^pT(C_i))$. Or C_i étant le complexe associé à une résolution injective de A_i, on a $H^pT(C_i) = R^pT(A_i)$, d'où la conclusion voulue $R^pT(A) = \varinjlim R^pT(A_i)$.

PROPOSITION 3.6.3. *Soit X un espace topologique muni d'un antifiltre Φ de parties fermées. Alors les foncteurs $H^p_\Phi(X, F)$ sur $\mathbf{C}^X$ permutent à la limite inductive dans les deux cas suivants:*

1. *X est localement compact et Φ la famille des parties compactes.*
2. *X est un espace de Zariski, Φ la famille de toutes ses parties fermées.*

(Nous appellerons *espace de Zariski* un espace dont toute suite décroissante de parties fermée est stationnaire, cf. [15, page 223]). — Il suffit de vérifier les conditions a) et b) de la proposition 3.6.2 pour le foncteur Γ_Φ. La vérification de a) est un exercice facile de compacité et laissée au lecteur (voir aussi [9]). La condition b) résultera du corollaire à prop. 3.3.1 et du

LEMME. 3.6.4. *Sous les conditions de* 1) *toute limite inductive de faisceaux Φ-mous est Φ-mou. Sous les conditions de* 2, *toute limite inductive de faisceaux flasques est flasque.*

Plaçons-nous les conditions de 1), soit (F_i) un système inductif de faisceaux-mous sur X, F sa limite inductive, f une section de F sur un $A \in \Phi$, i.e. sur une partie compacte A. D'après a) appliqué à l'espace compact A, f provient d'une section f_i d'un F_i sur A, et F_i étant Φ-mou, cette f_i est la restriction d'une $g_i \in \Gamma_\Phi(F_i)$, donc f est la restriction de la $g \in \Gamma_\Phi(F)$ définie par g_i. Le cas 2) se traite de façon toute analogue, en remarquant qu'une partie U d'un espace de Zariski est un espace de Zariski, donc que a) lui est applicable.

Nous dirons qu'un espace X est de *dimension cohomologique* $\leqq n$ si $H^i(X, F) = 0$ pour $i > n$, pour tout faisceau abélien F sur X. Conjuguant prop. 3.6.1 et prop. 3.6.3 on trouve le

COROLLAIRE *Soit X un espace qui est soit compact, soit un espace de Zariski, soit n un entier $\geqq 0$ Pour que X soit de dimension cohomologique $\leqq n$, il faut et il suffit que l'on ait $H^i(X, \mathbf{Z}_U) = 0$ pour $i > n$, et toute partie ouverte U de X.*

Nous en arrivons au résultat essentiel de ce N°. Soit X un espace de Zariski, on dit que X est de *dimension combinatoire* $\leqq n$ si toute suite strictement décroissante de parties fermées *irréductibles* a au plus $n+1$ éléments. Ceci dit:

THÉORÈME 3.6.5. *Soit X un espace de Zariski de dimension combinatoire $\leqq n$, alors X est de dimension cohomologique $\leqq n$, i.e. on a $H^i(X, F) = 0$ pour $i > n$, et tout faisceau abélien F sur X.*

Nous raisonnons par récurrence sur la dimension combinatoire n de X, le théorème étant trivial si $n = 0$ (alors X est un ensemble fini discret). Supposons le démontré pour les dimensions combinatoires $\leqq n-1$, où $n \geqq 1$, et prouvons le si X est de dimension combinatoire $\leqq n$. Soient X_k les composantes irréductibles de X [15, Chap. II, prop. 2]. Si F est un faisceau abélien sur X, on a un monomorphisme naturel de F dans la somme directe des $F_k = F_{X_k}$, d'où une suite exacte

$$0 \to F \to \oplus F_k \to R \to 0$$

où R est un faisceau dont le support est contenu dans $Y = \bigcup_{k \neq l} X_k \cap X_l$, qui est de dimension combinatoire $\leqq n-1$. On en conclut une suite exacte $H^{i-1}(X, R) \to H^i(X, F) \to \bigoplus_k H^i(X, F_k)$. Si $i > n$ d'où $i-1 > n-1$, on a $H^{i-1}(X, R) = H^{i-1}(Y, R) = 0$ d'après l'hypothèse de récurrence, il suffit donc, pour prouver $H^i(X, F) = 0$, de prouver que $H^i(X, F_k) = 0$. Or on a $H^i(X, F_k) = H^i(X_k, F)$, cela nous ramène à prouver le théorème pour l'espace irréductible X_k. Nous supposerons donc X irréductible. En vertu du corollaire à la proposition 3.6.3, il suffit de prouver que $H^i(X, \mathbf{Z}_U) = 0$ pour $i > n$ et toute partie ouverte U de X. On peut supposer $U \neq \phi$, alors $Y = \complement U$ est une partie fermée $\neq X$ de X, donc de dimension combinatoire $\leqq n-1$. De la suite exacte $0 \to \mathbf{Z}_U \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_Y \to 0$ on tire, puisque $\mathbf{Z}$ est flasque (cf. fin du 3.3), $H^i(X, \mathbf{Z}_U) = H^{i-1}(X, \mathbf{Z}_Y) = H^{i-1}(Y, \mathbf{Z})$, qui est encore nul d'après l'hypothèse de récurrence.

REMARQUES 1. Le thème précédent généralise un théorème antérieur de Serre [18].

2. On peut trouver des espace de Zariski de dimension cohomologique nulle, et de dimension combinatoire infinie, ou finie arbitrairement élevée. Il suffit de considérer, sur un ensemble bien ordonné X fini ou infini, la topologie dont les fermés sont les ensembles de la forme X_x, où pour tout $x \in X$, X_x désigne l'ensemble des $y \in X$ tels que $y < x$.

3.7. La suite spectrale de Leray d'une application continue. Soit f une application continue d'un espace Y dans un espace X. On suppose donné dans Y un antifiltre Ψ de partie fermées. Pour tout ouvert $U \subset X$, soit $\Psi(U)$ l'antifiltre de parties fermées dans $f^{-1}(U)$ formé des $A \subset f^{-1}(U)$ tels que, pour tout $x \in U$, existe un voisinage $V \subset U$ de x tel que l'adhérence de $A \cap f^{-1}(V)$ soit dans Ψ. En particulier, $\Psi(X)$ désigne un antifiltre de parties fermées de Y. Soit F un faisceau de groupes abéliens sur Y, considérons, pour tout ouvert $U \subset X$, le groupe $\Gamma_{\Psi(U)}(f^{-1}(U), F)$. On vérifie facilement que, pour les applications de restrictions évidentes (relatives à des inclusion $V \subset U$), ces groupes forment un *faisceau* sur X, noté $f\,(F)$ et appelé *image directe de F par f relativement à* Ψ. Si Ψ est la famille de toutes les parties fermées de Y, on écrit simplement $f_*(F)$ au lieu de $f_\Psi(F)$, et $f_*(F)$ est appelé l'*image directe du faisceau F par f*. D'ailleurs, dans ce cas, $\Psi(U)$ est l'ensemble de toutes les parties fermées de l'espace $f^{-1}(U)$, donc $\Gamma(U, f_*(F)) = \Gamma(f^{-1}(U), F)$ (définition qui a aussi sens si on suppose seulement que F est un faisceau d'ensembles). — Par définition, on a dans le cas général:

$$\Gamma(U, f\,(F)) = \Gamma_{\Psi(U)}(f^{-1}(U), F).$$

On vérifie aussitôt la formule:

$$\text{supp.}_X(\varphi) = \text{adhérence de } f(\text{supp.}_Y\varphi)$$

pour toute $\varphi \in \Gamma(f_\Psi(F)) = \Gamma_{\Psi(X)}(F)$ (dont on considère les supports dans X et dans Y, qu'on distingue dans la notation en mettant l'espace en indice au symbole supp.). Soit alors Φ un antifiltre de parties fermées dans X, désignons par Ψ' l'antifiltre des parties fermées A de Y qui sont dans $\Psi(X)$, et telles que l'adhérence de $f(A)$ soit dans Φ. Alors les formules précédentes impliquent la formule:

$$\Gamma_\Phi(f_\Psi(F)) = \Gamma_{\Psi'}(F).$$

(Les familles Φ et Ψ sont dites *adaptées* (*relativement à* f) si on a $\Psi = \Psi'$. C'est le cas par exemple si Φ et Ψ sont formés de toutes les parties fermées de X resp. Y).

f_Ψ est un foncteur exact à gauche de la catégorie $\mathbf{C}^Y$ des faisceaux abéliens sur Y dans la catégorie $\mathbf{C}^X$, de plus la formule précédente désigne un isomorphisme *fonctoriel*. On peut l'écrire

$$\Gamma_{\Psi'} = \Gamma_\Phi f_\Psi.$$

Nous voulons lui appliquer le théorème 2.4.1, pour ceci il faut donner des conditions moyennant lesquelles f_Ψ transforme un faisceau injectif en un faisceau Γ_Φ-acyclique.

LEMME 3.7.1. 1) *Si Ψ est l'ensemble de toutes les parties fermées de Y, f_Ψ transforme faisceaux injectifs en faisceaux injectifs.*

2) *Si Φ est paracompactifiante, alors f_Ψ transforme faisceaux flasques en faisceaux Φ-mous.*

DÉMONSTRATION. 1) Supposons que F soit injectif; soit, pour tout $y \in Y$, $M(y)$ un groupe abélien injectif contenant $F(y)$, et soit M le faisceau produit défini par les $M(x)$ (cf. 3.1). F est un sous-faisceau de M, donc un facteur direct de M puisqu'il est injectif, donc $f_\Psi(F)$ est un facteur direct de $f_\Psi(M)$, et il suffit de prouver que $f_\Psi(M)$ est injectif. Or pour tout $x \in X$, soit $N(x)$ le groupe produit des $M(y)$ pour $y \in f^{-1}(x)$, il résulte aussitôt des définitions que $f(M)$ est le faisceau produit N défini par la famille des $N(x)$. Or chaque $N(x)$ est un groupe abélien injectif comme produit de groupes injectifs, donc N est injectif (prop. 3.1.2) donc $f(M)$ est injectif.

2) Supposons F flasque, prouvons que $f_\Psi(F)$ est Φ-mou. Soit donc g une section de $f_\Psi(F)$ sur un $B \in \Phi$, on cherche une $h \in \Gamma_\Phi(f_\Psi(F)) = \Gamma_{\Psi'}(F)$ dont la restriction à B soit g. Comme Φ est paracompactifiante, B admet un voisinage $B' \in \Phi$ paracompact, donc g est la restriction d'une section g' de $f_\Psi(F)$ définie sur un voisinage convenable $U \subset B'$ de B. B' étant normal il existe un voisinage *fermé* B_1 de B contenu dans U, soit U_1 son intérieur. Considérons g' comme un élément de $\Gamma_{\Psi(U)}(f^{-1}(U), F)$, son support A est une partie fermée de $f^{-1}(U)$, donc $A \cap f^{-1}(B_1)$ est une partie fermée de Y, donc son complémentaire dans Y est ouvert. L'intersection de cet ouvert avec l'ouvert $f^{-1}(U_1)$ étant contenue dans $\complement A$, g' y est nulle, donc il existe une section g_1 de F sur l'ouvert réunion de $f^{-1}(U_1)$ et de $\complement(A \cap f^{-1}(B_1))$ qui coincide avec g' sur le premier et est nulle sur le second. Enfin, F étant flasque, il existe une section h de F sur Y

induisant g_1. Le support de h est contenu dans $A \cap f^{-1}(B_1)$, d'où il résulte aussitôt qu'il est dans Ψ'. Donc h peut être considéré comme un élément de $\Gamma_\Phi(f_\Psi(F))$, induisant évidemment sur U_1 la même section que g', et par suite induisant g sur B.

Il résulte du corollaire à la proposition 3.3.1 que dans chacune des conditions du lemme 3.7.1, on peut appliquer le théorème 2.4.1 au foncteur composé $\Gamma_{\Psi'} = \Gamma_\Phi f_\Psi$: il existe un foncteur spectral cohomologique sur $\mathbf{C}_Y$, aboutissant au foncteur gradué $(H^n_{\Psi'}(Y, F))$, et dont le terme initial est

$$E_2^{p,q} = H^p_\Phi(X, (R^q f_\Psi)(F)).$$

Il reste à expliciter les faisceaux $(R^q f_\Psi)(F)$. De façon générale :

LEMME 3.7.2. *Soit T un foncteur covariant d'une catégorie abélienne $\mathbf{C}$ dans la catégorie $\mathbf{C}^X$ des faisceaux abéliens sur X. On suppose que tout objet de $\mathbf{C}$ est isomorphe à un sous-truc d'un objet injectif, de sorte que les foncteurs dérivés droits $R^i T$ existent. Alors pour tout $A \in \mathbf{C}$, le faisceau $R^i T(A)$ s'identifie au faisceau associé (cf. 3.1) au préfaisceau qui, à tout ouvert $U \subset X$, associe $R^q(\Gamma^U T)(A)$ (où Γ^U désigne le foncteur $F \to \Gamma(U, F)$ sur $\mathbf{C}^X$).*

En effet, soit $C(A)$ le complexe associe à une résolution droite de A par des objets injectifs, on a donc $R^q T(A) = H^q(T(C(A)))$. Or le q.ème faisceau de cohomologie d'un complexe de faisceaux $K = (K^i)$ n'est autre que le faisceau associé au préfaisceau qui, à l'ouvert U, associe le groupe $H^q(\Gamma(U, K))$; donc $R^q T(A)$ est le faisceau associé au préfaisceau $U \to H^q(\Gamma(U, T(C(A))))$ $= R^q(\Gamma^U T)(A)$, ce qui démontre le lemme.

Dans le cas actuel $T = f_\Psi$, on voit donc que $R^q f_\Psi(F)$ est le faisceau associé au préfaisceau $U \to R^q(\Gamma^U f_\Psi)(F) = R^q \Gamma_{\Psi(U)}(F)$. Or nous avons déjà remarqué, comme conséquence immédiate de prop. 3.1.3, que les foncteurs dérivés de $\Gamma_{\Psi(U)}$ $(f^{-1}(U), F)$ ne sont autres que les $H^q_{\Psi(U)}(f^{-1}(U), F)$. On obtient donc :

THÉORÈME 3.7.3. *Soit f une application continue d'un espace Y dans un espace X, on suppose X et Y munis d'un antifiltre de parties fermées Φ resp. Ψ. Les notations $\Psi(U)$, f_Ψ, Ψ' sont celles indiquées au début de ce numéro. On suppose que Φ est paracompactifiante ou que Ψ est l'ensemble de toutes les parties fermées de Y. Alors il existe un foncteur spectral cohomologique sur la catégorie $\mathbf{C}^Y$ des faisceaux abéliens F sur Y, aboutissant au foncteur gradué $(H^n_{\Psi'}(Y, F))$, et dont le terme initial est*

$$E_2^{p,q}(F) = H^p_\Phi(X, R^q f_\Psi(F)).$$

Dans cette formule, $R^q f_\Psi(F)$ est le faisceau sur X associé au préfaisceau qui, à l'ouvert U sur X, associe le groupe $H^q_{\Psi(U)}(f^{-1}(U), F)$.

Le cas le plus simple est celui où Φ et Ψ sont l'ensemble de tous les fermés de X resp. Y. Alors, *sans aucune hypothèse* sur X, Y, f, *on trouve un foncteur spectral aboutissant à* $(H^n(Y, F))$, *et dont le terme initial est* $H^p(X, R^q f(F))$, *où $R^q f(F)$ est le faisceau associé au préfaisceau* $U \to H^q(f^{-1}(U), F)$. Cet énoncé peut s'appliquer par exemple utilement dans la théorie cohomologique des variétes algébriques (munis de leur topologie de Zariski).

Nous nous bornerons ici à cet énoncé des conditions naturelles de validité de la suite spectrale de Leray, dont nous ne pousserons pas l'étude plus loin.

3.8. Comparaison avec la cohomologie de Čech. Nous renvoyons à [15] pour la définition de "groupes de cohomologie" de X à coéfficients dans un faisceau abélien F, calculés par la méthode des recouvrements de Čech. Nous noterons ces groupes $\check{H}^p(X, F)$ par distinction avec les groupes $H^p(X, F)$ définis au N° 2. (Pour simplifier, nous ne considèrerons pas d'autre "famille Φ" que celle formée de l'ensemble de *toutes* les parties fermées). Nous noterons cependant que ces groupes peuvent se définir en supposant seulement que F est un *préfaisceau* de groupes abéliens : pour tout recouvrement ouvert $\mathbf{U} = (U_i)$ de X, on peut former le complexe $C(\mathbf{U}, F) = \sum_p C^p(\mathbf{U}, F)$ des cochaines de $\mathbf{U}$ à valeurs dans le préfaisceau F, et poser $H^p(\mathbf{U}, F) = H^p(C(\mathbf{U}, F))$, puis prendre

$$\check{H}^p(X, F) = \varinjlim H^p(\mathbf{U}, F),$$

la limite inductive étant prise sur l'ordonné filtrant des "classes de recouvrements ouverts" de X (deux recouvrements ouverts étant considérés comme équivalents si chacun raffine l'autre).

Malheureusement, les $\check{H}^p(X, F)$ ne forment pas en général un foncteur cohomologique sur la catégorie $\mathbf{C}^X$ des faisceaux de groupes abéliens sur X (voir exemple à la fin de ce N°). Mais $(\check{H}^0, \check{H}^1)$ forme un ∂-foncteur exact [15], [11]. De plus, les $\check{H}^p$ sont des foncteurs *effaçables* pour $p > 0$: pour ceci, il suffit de montrer par exemple que si M est le faisceau produit défini par une famille $(M_x)_{x \in X}$ de groupes abéliens, (cf. N°1), alors les $\check{H}^p(X, M)$ sont nuls pour $p > 0$. En fait, on prouve même $H^p(\mathbf{U}, M) = 0$ pour tout recouvrement ouvert $\mathbf{U}$ de X, en se servant de l'opérateur d'homotopie bien connu, employé classiquement dans le cas où M est fin et X paracompact. Il en résulte que, *si X est tel que les $\check{H}^p$ puissent être considérés comme les composantes d'un foncteur cohomologique, alors ces $\check{H}^p$ sont canoniquement isomorphes aux foncteurs H^p. Il en est ainsi si X est paracompact* (cf. par exemple [15, N° 25]), ou si X est quelconque mais en se bornant aux valeurs $p = 0$ et $p = 1$, (comme nous l'avions déjà remarqué au N° 4).

Des résultats plus précis sont liés à la suite spectrale de Cartan-Leray d'un recouvrement, comme me l'a fait observer M. Cartan, (dont je reprends ici l'idée). Soit $\mathbf{U}$ un recouvrement ouvert fixé de X, posons $C(F) = C(\mathbf{U}, F)$ pour tout faisceau F. On obtient ainsi un foncteur covariant exact à gauche de $\mathbf{C} = \mathbf{C}^X$ dans la catégorie $\mathbf{C}'$ des complexes de groupes abéliens, à degrés positifs. D'ailleurs, on a vu que les foncteurs $H^p(C(F))$ sont effaçables. On en conclut facilement un foncteur spectral aboutissant au foncteur dérivé droit $R(H^0C)$ du foncteur H^0C, et dont le terme initial est $E_2^{pq} = H^p(R^qC)$. On peut le voir, soit directement en prenant une résolution injective de $F \in \mathbf{C}$ et regardant les suites spectrales du-bicomplexe obtenu en transformant cette résolution par $\mathbf{C}$; soit mieux, en remarquant que si on considère $H^0(K)$ comme un foncteur covariant à gauche sur $\mathbf{C}'$, (à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens), ses foncteurs dérivés droits sont les $H^p(K)$, de sorte que notre suite spectrale est un simple cas particulier du théorème 2.4.1. Bien entendu, $(R^qC)(F)$ est le complexe dont les composantes sont les $(R^qC^p)(F)$, si les C^p sont les composantes de C. Il reste à expliciter, dans le cas qui nous occupe, les R^qC^p. En vertu de

$$C^pF = \prod_{\sigma^p} \Gamma(U_{\sigma^p}, F)$$

(le produit étant étendu à toutes les suites $\sigma^p = (i_0, \ldots, i_p)$ de $p+1$ indices du recouvrement $U = (U_i)_{i \in I}$), on voit aussitôt que

$$R^qC^p(F) = \prod_{\sigma^p} R^q(\Gamma(U_{\sigma^p}, F)).$$

Or si V est une partie ouverte de X, les foncteurs dérivés droits du foncteur $\Gamma(V, F) = \Gamma(F|V)$ s'explicitent aisément, grâce au fait que le foncteur restriction $F \to F|V$ de $\mathbf{C}^X$ dans $\mathbf{C}^V$ est exact, et transforme objets injectifs en objets injectifs (prop. 3.1.3) : on aura $R^q(\Gamma(V, F)) = (R^q\Gamma^V)(V|F) = H^q(V, F)$. Dénotons donc par $H^q(F)$ le *préfaisceau* sur X dont la valeur, sur un ouvert V, est $H^q(V, F)$, on aura alors

$$R^qC^p(F) = \prod_{\sigma^p} \Gamma(U_{\sigma^p}, H^q(F)) = C^p(\mathbf{U}, H^q(F)).$$

Bien entendu, l'opération de différentiation de $R^qC(F) = \sum_p R^qC^p(F)$ est celui de $C(\mathbf{U}, H^q(F))$, d'où en définitive $E_2^{p,q}(F) = H^p(\mathbf{U}, H^q(F))$. Quant à l'aboutissement de la suite spectrale, c'est le foncteur dérivé droit de $H^0C(F) = \Gamma(X, F)$, i.e. le foncteur $(H^n(X, F))$. D'où :

THÉORÈME 3.8.1. *Soit X un espace topologique muni d'un recouvrement ouvert $\mathbf{U}$. Alors il existe un foncteur spectral cohomologique sur la catégorie $\mathbf{C}^X$ des faisceaux de groupes abéliens sur X, aboutissant au foncteur gradué $(H^n(X, F))$, et dont le terme initial est*

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbf{U}, H^q(F))$$

où $H^q(F)$ désigne (pour tout faisceau $F \in \mathbf{C}^X$) le préfaisceau $V \to H^q(V, F)$ sur X.

On notera que cette suite spectrale est établie ici sans aucune hypothèse de paracompacité sur X ou de locale finitude sur $\mathbf{U}$. La suite spectrale précédente donne des homomorphismes fonctoriels

$$H^p(\mathbf{U}, F) \to H^p(X, F)$$

et de plus :

COROLLAIRE 1. *Les homomorphismes précédents sont des isomorphismes si* *tous les* $U_{i_0 \dots i_p}$ *sont* F*-acycliques (c'est-à-dire satisfont* $H^p(U_{i_0 \dots i_p}, F) = 0$ *pour* $p > 0$).

Bornons nous maintenant aux recouvrement $\mathbf{U} = (U_x)_{x \in X}$ indexés par les points x de X, tels que $x \in U_x$ pour tont x, ordonnons les en écrivant $\mathbf{U} \leqq \mathbf{U}'$ si $U_x \subset U'_x$ pour tout x. Si $C_{\mathbf{U}}$ et $C_{\mathbf{U}'}$ sont les foncteurs-complexes correspondants sur $\mathbf{C}^X$, on aura alors un homomorphisme fonctoriel $C_{\mathbf{U}} \to C_{\mathbf{U}'}$, d'où un homomorphisme pour les foncteurs spectraux correspondants. Un passage immédiat à la limite inductive donne alors le

COROLLAIRE 2. *Soit X un espace topologique quelconque. Il existe un foncteur spectral sur la catégorie* $\mathbf{C}^X$ *des faisceaux de groupes abéliens sur X, aboutissant au foncteur gradué* $(H^n(X, F))$, *et dont le terme initial est donné par*

$$E_2^{p,q}(F) = \check{H}^p(X, H^q(F))$$

($H^q(F)$ *étant le préfaisceau défini dans le th.* 3.5.1). *On a*

$$E_2^{0,q}(F) = 0 \quad pour \quad q > 0.$$

Cette dernière formule résulte de la définition de $\check{H}^0(X, H^q(F))$ et du fait suivant:

LEMME 3.8.2. *Soit U un voisinage de x et soit $c^q \in H^q(U, F)$, alors il existe un voisinage $V \subset U$ de x tel que l'image de c^q dans $H^q(U, F)$ soit nulle.*

Pour le voir, il suffit de prendre une résolution injective de $F|U$, soit C le complexe correspondant, et de représenter c^q par un élément de $H^q(\Gamma(U, C))$, défini par un cocycle $z \in \Gamma(U, C^q)$; d'après l'acyclicité de C en dimension q, la restriction de z à un voisinage convenable V de x est un cobord, d'oû le résultat, en remarquant que $C|V$ est une résolution injective de $F|V$ en vertu de prop. 3.1.3, donc que $H^q(V, F) = H^q(\Gamma(C|V))$.

La suite spectrale du corollaire 2 donne des homomorphismes fonctoriels

$$\check{H}^p(X, F) \to H^p(X, F)$$

et la formule $E_2^{0,1} = 0$ montre que:

COROLLAIRE 3. *Les homomorphismes précédents sont bijectifs si $p = 0$ ou 1 (ce que nous savions déjà) et des monomorphismes si $p = 2$.*

On retrouve d'ailleurs le fait que *si X est paracompact,* alors $\check{H}^p = H^p$, plus précisément, *les homomorphismes canoniques ci-dessus sont alors des isomorphismes.* En effet, on vérifie dans ce cas (grâce au fait que le faisceau associé au préfaisceau $H^q(F)$ est nul si $q > 0$) que $E_2^{p,q} = 0$ pour $q > 0$, cf. [9].

Le corollaire 3 se généralise ainsi: *Si* $\check{H}^p(X, H^q(F)) = 0$ *pour* $0 < q < n$, *alors l'homomorphisme* $\check{H}^i(X, F) \to H^i(X, F)$ *est un isomorphisme pour* $i \leqq n$ *et un monomorphisme pour* $i = n + 1$. On en conclut (avec H. Cartan):

COROLLAIRE 4. *Soit* $\mathbf{U}$ *un ensemble d'ouverts formant une base pour la topologie de X, soit F un faisceau abélien sur X tel que pour toute suite non* *vide* $(U_1, \ldots. U_k)$ *d'ouverts de* $\mathbf{U}$, *leur intersection* U *satisfait à* $\check{H}^i(U, F) = \{0\}$ *pour* $i > 0$. *Alors on a aussi* $H^i(U, F) = \{0\}$, *et pour toute partie ouverte* V *de* X, *l'homomorphisme naturel* $\check{H}^i(V, F) \to H^i(V, F)$ *est un isomorphisme.*

Il suffit de prouver $H^i(U, F) = \{0\}$, car V admet des recouvrements arbitrairement fins $\mathbf{R}$ par des ouverts de $\mathbf{U}$, et on conclut du corollaire 1 que pour un tel $\mathbf{R}$ l'homomorphisme $\check{H}^i(R, F) \to H^i(V, F)$ est un isomorphisme, ce qui prouve en même temps ($\mathbf{R}$ étant arbitrairement fin) que $\check{H}^i(V, F) \to H^i(V, F)$ est un isomorphisme. — Pour prouver $H^i(U, F) = \{0\}$, on prouve par récurrence sur n que $H^i(U, F) = \{0\}$ pour $0 < i \leqq n$ et tout U de la forme indiquée. C'est trivial si $n = 0$, supposons $n \geqq 1$ et l'assertion démontrée pour $n' = n - 1$. Il y a des recouvrements arbitrairement fins $\mathbf{R}$ de U par des ouverts de $\mathbf{U}$, pour un tel $\mathbf{R}$ on a $C(\mathbf{R}, H^q(F)) = 0$ pour $0 < q < n$ d'après l'hypothèse de récurrence, à fortiori $H^p(R, H^q(F)) = 0$ pour de tels q, d'où $\check{H}^p(U, H^q(F)) = 0$ pour de tels, ce qui, en vertu de la remarque précédent le corollaire 4, implique que $H^n(U, F) = \check{H}^q(U, F)$ qui est nul.

Le corollaire 4 s'applique par exemple au cas où X est une variété algébrique muni de sa topologie de Zariski, $\mathbf{U}$ l'ensemble des ouverts affines dans X, F un faisceau algébrique cohérent sur X [15]. En effet, d'après [15], les ouverts affines forment une base de la topologie de X, et l'intersection de deux ouverts affines est un ouvert affin si U est un ouvert affine, on a $\check{H}^i(U, F) = 0$ pour $i > 0$. On a donc $H^i(X, F) = \check{H}^i(X, F)$, de plus le corollaire 1 ci-dessus montre que l'on peut calculer les $H^i(X, F)$ à l'aide d'*un* recouvrement arbitrairement choisi de X par des ouverts affines.

Remarque. Il y a d'autres cas que celui du théorème 3.8.1 où la suite spectrale de Leray est valable. Le plus connu est celui d'un *recouvrement localement fini de X supposé paracompact par des ensembles fermés* (c'est le cas envisagé par Leray) ; il se traite le plus simplement comme ci-dessus pour les recouvrements ouverts, grâce au fait que la restriction d'un faisceau mou à une partie fermé est encore un faisceau mou (remplaçant prop. 3.1.3). Un autre cas, dégagé par Godement par une méthode différente, est celui d'un *recouvrement fini de X par des ensembles fermés* (sans hypothèse de paracompacité). Quand on est simultanément dans ces deux cas, les deux suites spectrales obtenues coïncident, fort heureusement.

Un exemple. Pour terminer ce N°, nous allons indiquer un exemple simple où le monomorphisme $\check{H}^2(X, F) \to H^2(X, F)$ n'est pas un isomorphisme, et où on a même $\check{H}^2(X, F) = 0, H^2(X, F) \neq 0$. Comme on tire du corollaire 2 au théorème 3.8.1 une suite exacte

$$0 \to \check{H}^2(X, F) \to H^2(X, F) \to \check{H}^1(X, H^1(F)) \to 0$$

il suffit d'*indiquer un cas où* $H^2(X, F) \neq 0$ *et* $H^2(X, F) \to \check{H}^1(X, H^1(F))$ *est un* *isomorphisme.*

Soit X un espace irréductible (cf. fin de 3.3), Y_1 et Y_2 deux parties fermées irréductibles de X se rencontrant en exactement deux points x_1 et x_2 (par exemple deux cercles sécants dans le plan muni de la topologie de Zariski), Y leur réunion. Par abus de notation, on désigne par $\mathbf{Z}$ le faisceau constant des entiers sur X, et on considère, avec les notations de 3.5, la suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathbf{Z}_{\complement Y} \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_Y \to 0.$$

Je dis que le faisceau $F = \mathbf{Z}_{\complement Y}$ satisfait aux conditions voulues. Tout d'abord, comme $H^p(X, \mathbf{Z}) = 0$ pour $p > 0$ d'après la fin de 3.3, on a $H^2(X, \mathbf{Z}_{\complement Y}) = H^1(X, \mathbf{Z}_Y) = H^1(Y, \mathbf{Z})$, montrons que ce groupe n'est pas nul, et de façon précise est isomorphe à $\mathbf{Z}$. En effet, on a un monomorphisme naturel du faisceau constant $\mathbf{Z}$ sur Y dans la somme directe des faisceaux $\mathbf{Z}_{Y_1}$ et $\mathbf{Z}_{Y_2}$, d'où une suite exacte de faisceaux sur Y:

$$0 \to \mathbf{Z}_Y \to (\mathbf{Z}_{Y_1} + \mathbf{Z}_{Y_2}) \to \mathbf{Z}_{Y_1 \cap Y_2} \to 0.$$

Or Y_i étant irréductible, on a encore $H^p(Y, \mathbf{Z}_{Y_i}) = H^p(Y_i, \mathbf{Z}) = 0$ pour $p > 0$, d'où $H^1(Y, \mathbf{Z}) = \Gamma(\mathbf{Z}_{Y_1 \cap Y_2})/\mathrm{Im}\,(\Gamma(\mathbf{Z}_{Y_2}))$, c'est le conoyau du homomorphisme de groupes $\mathbf{Z}^2 \to \mathbf{Z}^2$ donné par $(n_1, n_2) \to (n_1 - n_2, n_1 - n_2)$, c'est-à-dire un groupe isomorphe à $\mathbf{Z}$, d'où

$$H^2(X, \mathbf{Z}_{\complement Y}) = H^1(X, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}.$$

Il reste à prouver que $\check{H}^1(X, \check{H}^1(\mathbf{Z}_{\complement Y}))$ est isomrophe à $\mathbf{Z}$ (car compte tenu de la relation précédente, l'épimorphisme $\check{H}^2(X, F) \to H^1(X, H^1(F))$ sera nécessairement un isomorphisme). Calculons $H^1(\mathbf{Z}_{\complement Y})$; pour tout ouvert V, $H^1(V, \mathbf{Z}_{\complement Y})$ peut se calculer grâce à la suite exacte suivante de faisceaux *sur* V:

$$0 \to \mathbf{Z}_{\complement Y} \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_{Y'} \to 0$$

où on a posé $Y' = Y \cap V$. Comme V est aussi irréductible, on en conclut $H^1(V, \mathbf{Z}_{\complement Y}) = H^0(Y', \mathbf{Z})/\mathrm{Im}\, H^0(V, \mathbf{Z}) = \bar{H}^0(Y', \mathbf{Z})$, où le dernier groupe désigne le groupe de cohomologie entière *réduit* de dimension 0, i.e. ici le groupe abélien libre engendré par les composantes connexes de Y', modulo le sous-groupe diagonal. Ici $Y' = Y \cap V$ est un sous-espace ouvert de $Y = Y_1 \cup Y_2$, et a donc 0, 1 ou 2 composantes connexes, le dernier cas se présentant exactement si V rencontre à la fois Y_1 et Y_2 sans rencontrer leur intersection; donc on a $H^1(V, \mathbf{Z}_{\complement Y}) = 0$, sauf dans ce dernier cas.

Pour calculer $H^1(X, H^1(F)) = \varinjlim H^1(\mathbf{U}, H^1(F))$, on peut se limiter aux recouvrements $\mathbf{U} = (U_x)_{x \in X}$ tels que chaque U_x rencontre au plus un seul des deux fermés Y_1 et Y_2, sauf si x est l'un des deux points x_1, x_2 de $Y_1 \cap Y_2$ auquel cas on suppose qu'il ne contient pas l'autre. Pour un tel $\mathbf{U}$, on voit aussitôt $C^0(\mathbf{U}, H^1(F)) = 0$, donc $H^1(\mathbf{U}, H^1(F))$ s'identifie au groupe $Z^1(\mathbf{U}, H^1(F))$ des 1-cocycles $\mathbf{U}$ à coéfficients dans $H^1(F)$, soient $(f_{x,y})_{x, y \in X}$. Mais on a $\Gamma(U_x \cap U_y, H^1(F)) = 0$ sauf si $x = x_1, y = x_2$ ou $x = x_2, y = x_1$. D'où $C^1(\mathbf{U}, H^1(F)) \approx \mathbf{Z}^2$, et on voit aussitôt que les cocyles s'identifient aux couples $(n, -n)$ d'entiers opposés $(n = f_{x_1, x_2})$. On a donc $H^1(\mathbf{U}, H^1(F)) = \mathbf{Z}$, d'où aussitôt à la limite $\check{H}^1(X, H^1(F)) = \mathbf{Z}$, ce qui achève la démonstration.

3.9. Critères d'acyclicité par la méthode des recouvrements.[8] Soient X un espace topologique, $\mathfrak{S}$ un ensemble non vide de parties de X. Pour tout $A \in \mathfrak{S}$, on suppose donné un ensemble $\mathfrak{R}(A)$ non vide de recouvrements $\mathbf{R}$ de A par des ensembles qui sont dans $\mathfrak{S}$ ainsi que leurs intersections finies. On suppose que si $B \in \mathbf{R} \in \mathfrak{R}(A)$, alors la trace $\mathbf{R}_B$ de $\mathbf{R}$ sur B appartient à $\mathfrak{R}(B)$. On suppose de plus que l'on est dans l'une des trois conditions suivantes (qui permettent d'écrire la suite spectrale de Leray-Cartan pour chacun des recouvrements $\mathbf{R} \in \mathfrak{R}(A)$, avec $A \in \mathfrak{S}$: (i) les $A \in \mathfrak{S}$ sont ouverts (ii) Les $A \in \mathfrak{S}$ sont fermés et les recouvrements $\mathbf{R} \in \mathfrak{R}(A)$ sont finis (iii). Les $A \in \mathfrak{S}$ sont fermés, X est paracompact, les $\mathbf{R} \in \mathfrak{R}(A)$ sont localement finis.

THÉORÈME 3.9.1. *Sous les conditions précédentes, supposons donnés un faisceau abélien F sur X, et un entier naturel $n \geqq 0$. Supposons les conditions suivantes vérifiées :*

$A(n) : H^i(\mathbf{R}, F) = 0$ *pour* $1 \leqq i \leqq n$ *et tout* $\mathbf{R} \in \mathfrak{R}(A), A \in \mathfrak{S}$.

$B(n-1) :$ *Pour tout* $A \in \mathfrak{S}$, *tout* $c^i \in H^i(A, F)$ (*avec* $1 \leqq i \leqq n-1$) *il existe une partie finie* L *de* $\mathfrak{R}(A)$ *telle que, si* $\mathbf{R}^L$ *désigne le recouvrement "intersection" des recouvrements* $\mathbf{R} \in L$, *la restriction de* c^i *à tout ensemble* $B \in \mathbf{R}^L$ *est nulle.*

Sous ces conditions, pour tout $A \in \mathfrak{S}$ *on a* $H^i(A, F) = \{0\}$ *pour* $1 \leqq i \leqq n-1$, *et si* $c^n \in H^n(A, F)$, *alors* c^n *est nul si et seulement si on peut trouver une partie finie* L *de* $\mathfrak{R}(A)$ *telle que la restriction de* c^n *à tout* $B \in \mathbf{R}^L$ *soit nulle.*

Enonçons tout de suite les corollaires les plus intéressants :

COROLLAIRE 1. *Avec les notations du théorème* 3.9.1, *pour qu'on ait* $H^i(A, F) = \{0\}$ *pour tout* $A \in \mathfrak{S}$ *et* $1 \leqq i \leqq n$, *il faut et il suffit que les conditions* $A(n)$ *et* $B(n)$ *soient satisfaites.*

En effet, la suffisance résulte aussitôt du théorème. Réciproquement, supposons $H^i(A, F) = \{0\}$ pour $A \in \mathfrak{S}$ et $1 \leqq i \leqq n$, alors $B(n)$ est trivialement vérifiée, vérifions $A(n)$: la suite spectrale de Leray pour le recouvrement $\mathbf{R}$ de A, (théorème 3.8.1 et remarque de 3.8) aboutit à $H^*(A, F)$ et a pour terme initial $E_2^{p,q} = H^p(\mathbf{R}, H^q(F))$, qui est nul si $1 \leqq q \leqq n$ car $C(\mathbf{R}, H^q(F)) = 0$ pour ses valeurs de q (les intersections finies d'ensembles $\in \mathbf{R}$ appartenant à $\mathfrak{S}$). On en conclut classiquement que $H^i(A, F) = H^i(\mathbf{R}, F)$ pour $0 \leqq i \leqq n$, d'où $H^i(\mathbf{R}, F) = 0$ pour ces i.

COROLLAIRE 2. *Supposons* (*avec les notations du théorème* 3.9.1) *que pour tout* $A \in \mathfrak{S}$ *et tout recouvrement ouvert de* A, *on puisse trouver un recouvrement plus fin de la forme* $\mathbf{R}^L$, *où* L *est une partie finie de* $\mathfrak{R}(A)$. *Alors pour que* $H^i(A, F) = \{0\}$ *pour tout* $A \in \mathfrak{S}$ *et* $1 \leqq i \leqq n$, *il faut et il suffit que* $H^i(\mathbf{R}, F) = \{0\}$ *pour tout* $\mathbf{R} \in \mathfrak{R}(A)$ ($A \in \mathfrak{S}$) *et* $1 \leqq i \leqq n$.

En effet, la condition $B(n)$ est vérifiée (quel que soit $n > 0$) en vertu du lemme 3.8.2 il suffit donc d'appliquer le corollaire 1.

Corollaire 3. *Supposons la condition préliminaire du corollaire précédent satisfaite, supposons de plus que les recouvrements* $R \in \mathfrak{R}(A)$ *aient un nerf de dimension* $\leqq n$. *Alors les conditions équivalentes du corollaire précédent impliquent même* $H^i(A, F) = 0$ *pour* $A \in \mathfrak{S}$ *et tout* $i > 0$.

On aura en effet automatiquement $H^i(R, F) = 0$ pour $\mathbf{R} \in \mathfrak{R}(A)$ et $i > n$, donc pour tout i, c'est-à-dire la condition $A(m)$ sera vérifiée pour *tout* m, donc il suffit d'appliquer le corollaire avec m grand.

Démonstration du Théorème 3.9.1. Nous procèderons par récurrence sur l'entier n, la proposition étant évidente si $n = 0$. Supposons donc $n \geqq 1$, et théorème démontré pour les entiers $n' < n$. De l'hypothèse de récurrence on tire d'abord aussitôt $H^i(A, F) = \{0\}$ pour $1 \leqq i \leqq n-1$, il reste donc à prouver la nullité de $c^n \in H^n(A, F)$, sous la condition qu'il existe une partie finie L de $\mathfrak{R}(A)$ telle que la restriction de c^n à tout $B \in \mathbf{R}^L$ soit nulle. Soit k le nombre d'éléments de L, nous raisonnons par récurrence sur k. La conclusion est triviale si $k = 0$, prouvons la pour $k = 1$. Par hypothèse, il existe $\mathbf{R} \in \mathfrak{R}(A)$ tel que la restriction de c^n à tout $B \in \mathbf{R}$ soit nulle. Comme les $B \in \mathbf{R}$ sont dans $\mathfrak{S}$, d'où $H^i(B, F) = \{0\}$ pour $1 \leqq i \leqq n-1$, le terme $E_2^{p,q}$ de la suite spectrale de Leray relative à $\mathbf{R}$ est nul pour $1 \leqq q \leqq n-1$. On en conclut classiquement une suite exacte $H^n(\mathbf{R}, F) \to H^n(A, F) \to H^0(\mathbf{R}, H^n(F)) \to \cdots$. Comme le premier terme est nul en vertu de $A(n)$, le deuxième homomorphisme est injectif, or par hypothèse l'image de c^n par ce dernier est nulle, donc c^n est nul. Supposons maintenant $k \geqq 2$, et la conclusion démontrée pour les valeurs $k' < k$. Soit $L = (\mathbf{R}^1, \ldots, \mathbf{R}^k)$. Il suffit de prouver, d'après ce qu'on a vu, que la restriction c^n_B de c^n à tout $B \in R^1$ est nulle. Or pour $i = 2, \ldots, k$, la restriction $\mathbf{R}^i_B$ de $\mathbf{R}^i$ à B appartient à $\mathfrak{R}(B)$, d'autre part la restriction de c^n_B à tout ensemble appartenant à l'intersection des recouvrements $\mathbf{R}^i_B$ $(2 \leqq i \leqq k)$ est nulle par hypothèse sur c^n. Appliquant notre hypothèse de récurrence, pour $k' = k-1$, à c^n_B et B, on trouve que $c^n_B = 0$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Proposition 3.9.2. *L'hypothèse préliminaire du corollaire 2 est satisfaite dans le cas suivant: X est quasicompact, les $A \in \mathfrak{S}$ sont fermés, $X \in \mathfrak{S}$, les $\mathbf{R} \in \mathfrak{R}(X)$ sont finis et pour deux points distincts x, y de X, il existe un $\mathbf{R} \in \mathfrak{R}(X)$ dont aucun ensemble ne contient à la fois x et y.*

(Nous dirons qu'un espace est quasi-compact s'il satisfait à l'axiome des recouvrements ouverts des espaces compacts, sans être néanmoins nécessairement séparé).

Démonstration. Pour un recouvrement $\mathbf{R}$ de X et un $x \in X$, désignons par $E_x(\mathbf{R})$ (*étoile* de $\mathbf{R}$ en x) la réunion des $A \in \mathbf{R}$ qui contiennent x, et soit $O_x(\mathbf{R})$ le complémentaire de la réunion des $A \in \mathbf{R}$ qui ne contiennent pas x. On a donc $x \in O_x(\mathbf{R}) \subset E_x(\mathbf{R})$, de plus pour tout $y \in O_x(\mathbf{R})$, on a $E_y(\mathbf{R}) \subset E_x(\mathbf{R})$. Si $\mathbf{R}$ est un recouvrement fini de X par des ensembles fermés, $O_x(\mathbf{R})$ est un *voisinage ouvert* de x. Sous les conditions de la proposition, soit $\mathbf{U}$ un recouvrement ouvert de X, soit $x \in X$, soit $U_x \in \mathbf{U}$ avec $x \in U_x$; l'intersection des $E_x(\mathbf{R})$ pour $\mathbf{R}$ parcourant $\mathfrak{R}(X)$ est par hypothèse réduite à x, d'où on conclut, par raison de quasi-compacité, qu'il existe une partie finie L_x de $\mathfrak{R}(X)$ telle que l'intersection des $E_x(\mathbf{R})$ pour $\mathbf{R} \in L_x$, i.e. $E_x(\mathbf{R}^{L_x})$, est contenue dans U_x. Les $O_x(\mathbf{R}^{L_x})$ forment un recouvrement ouvert de X, il existe donc un ensemble fini $Y \subset X$ tel que les $O_x(\mathbf{R}^{L_x})$ correspondants aux $x \in Y$ recouvrent X. Soit L la réunion des L_x pour $x \in Y$, je dis que le recouvrement $\mathbf{R}^L$ de X est plus fin que $\mathbf{U}$. Soit en effet $A \in \mathbf{R}^L$ non vide, soit $a \in A$, il existe $x \in Y$ tel que $a \in O_x(\mathbf{R}^{L_x})$d'où $E_a(\mathbf{R}^{L_x}) \subset E_x(\mathbf{R}^{L_x}) \subset U_x$ et à fortiori $A \subset E_a(\mathbf{R}^L)$ $\subset E_a(\mathbf{R}^{L_x})$ est contenu dans U_x, ce qui démontre notre assertion. Appliquant ce résultat, pour tout $A \in \mathfrak{S}$, à l'ensemble des recouvrements de A induits par les recouvrements $\mathbf{R} \in \mathfrak{R}(X)$, la conclusion voulue apparaît.

Le cas d'application le plus frappant du corollaire 3 est celui où X est le cube compact $0 \leqq x_i \leqq 1$ de $\mathbf{R}^n$, où $\mathfrak{S}$ est la famille des cubes compacts A du type $a_i \leqq x_i \leqq b_i$ contenus dans X, $\mathfrak{R}(A)$ étant la famille des recouvrements à ensembles deux A définis par des hyperplans parallèles aux hyperplans coordonnées: Pour vérifier que $H^i(A, F) = 0$ pour $i > 0$ et tout A, il suffit de vérifier que pour tout A, et toute section f de F sur $A_1 \cap A_2$, on a $f = f_1 - f_2$, où f_i est une section de F sur A_i. C'est la réduction faite par H. Cartan dans sa démonstration des théorèmes fondamentaux sur les variétés de Stein [5].

Remarque. Si $n = 1$, le théorème 3.9.1 garde un sens, et se vérifie facilement directement, si on suppose que F est un faisceau de groupes non nécessairement abéliens. Cela permet de simplifier la démonstration du théorème [5, XVII] sur les matrices holomorphes inversibles.

3.10. Passages à la limite en cohomologie des faisceaux. Nous ne donnerons que deux résultats dans cette voie, (dont l'un nous servira au Chapitre 5, N° 7), cas particuliers du résultat général suivant d'algèbre homologique :

Proposition 3.10.1. *Soient* $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}'$ *deux catégories abéliennes, on suppose que tout élément de* $\mathbf{C}$ *est isomorphe à un sous-truc d'un élément injectif, et que* $\mathbf{C}'$ *satisfait à l'axiome* AB 5 (*cf.* 1.5), *qui permet en particulier de prendre des limites inductives dans* $\mathbf{C}'$ (*cf. prop.* 1.8). *Soit* $(F_i)_{i \in I}$ *un système inductif de foncteurs additifs covariants de* $\mathbf{C}$ *dans* $\mathbf{C}'$, *soit* $F = \varinjlim F_i$ *le foncteur limite inductive des* F_i, *défini par* $F(A) = \varinjlim F_i(A)$ *pour tout* $A \in \mathbf{C}$. *Les homomorphismes* $F_i \to F$ *définissent des homomorphismes de* ∂-*foncteurs* $(\mathbf{R}^p F_i) \to (\mathbf{R}^p F)$, *d'où un homomorphisme de* ∂-*foncteurs*:

$$\varinjlim \mathbf{R}^p F_i(A) \to \mathbf{R}^p F(A) \tag{3.10.1.}$$

(*les homomorphismes cobord pour la suite de foncteurs* $\varinjlim \mathbf{R}^p F_i$ *se définisant comme limite inductive des homomorphismes cobords relatifs aux* $\mathbf{R}^p F_i$). *Les homomorphismes* (3.10.1) *sont des isomorphismes.*

Il suffit pour le voir de prendre une résolution injective $C = C(A)$ de A, le premier membre de (3.10.1) est alors $\varinjlim H^p(F_i C(A))$, le deuxième est

$H^p(\varinjlim F_i C(A))$, ils sont donc isomorphes puisque le foncteur $\varinjlim$ sur la catégorie des systèmes inductifs sur I à valeurs dans $\mathbf{C}'$ est exact (prop. 1.8) et en particulier permute à la formation de homologies de complexes.

Corollaire 1. *Soit X un espace muni d'une famille paracompactifiante Φ. On a alors, pour tout faisceau abélien F sur X:*

$$H^p_\Phi(X, F) = \varinjlim_U H^p(X, F_U)$$

la limite inductive étant prise suivant l'ordonné filtrant des ouverts U de X dont l'adhérence est dans Φ. (F_U désigne le faisceau sur X dont la restriction à U est $F|U$, et la restriction à $\complement U$ est 0).

En vertu du théorème 3.5.1. on a $H^p(X, F_U) = H^p_{\Phi_U}(U, F)$, où Φ_U est l'ensemble des parties de U fermées dans X. Posant $\Gamma_{\Phi_U}(F) = H^0(X, F_U)$, on peut donc aussi écrire $H^p(X, F_U) = R^p\Gamma_{\Phi_U}(F)$ (compte tenu de proposition 3.1.3), d'où en vertu de prop. 3.10.1: $\varinjlim H^p(X, F_U) = R^p\Gamma_\Phi(F)$ puisque $\varinjlim \Gamma_{\Phi_U}(F) = \Gamma_\Phi(F)$, cqfd. — Le corollaire précédent est parfois utile pour ramener la cohomologie "à supports dans Φ" à la cohomologie à supports quelconques, et m'avait été signalé par M. Cartan.

Corollaire 2. *Soient X un espace topologique, Y une partie de X admettant un système fondamental de voisinages paracompacts (il suffit par exemple que X soit mêtrisable, ou localement compact et paracompact). Alors pour tout faisceau abélien F sur X, on a*

$$H^p(Y, F) = \varinjlim H^p(U, F)$$

la limite étant prise suivant l'ensemble ordonné filtrant décroissant des voisinages ouverts de U dans X.

En effet, il résulte de l'hypothèse que $H^0(Y, F) = \varinjlim H^0(U, F)$ ([11], prop. 2.2.1), or les foncteurs dérivés de $F \to H^0(U, F)$ sont les $H^p(U, F)$, de sorte que le corollaire 2 est un cas particulier de la proposition. On notera que l'on a aussi $H^0(Y, F) = \varinjlim H^0(U, F)$, et par suite la validité du corollaire 2, si Y est *fermé* et admet *un* voisinage paracompact (démonstration analogue à celle de [11]); dans loc. cité, on trouvera aussi un contre-exemple simple (avec $p = 0$) relatif au cas où on ne fait pas d'hypothèse de paracompacité.

A titre de complément, indiquons encore sans démonstration le résultat suivant, cas particulier de résultats généraux sur les systèmes projectifs. Soit X un espace localement compact, considérons l'ensemble filtrant croissant des parties ouvertes relativement compactes U de X, alors pour tout faisceau abélien F sur X, les homomorphismes de restriction $H^p(X, F) \to H^p(U, F)$ définissent des homomorphismes canoniques (qui sont évidemment des homomorphismes de ∂-foncteurs):

$$H^p(X, F) \to \varprojlim H^p(U, F) \tag{3.10.2}$$

qui sont évidemment bijectifs pour $p = 0$.

PROPOSITION 3.10.2. *Supposons l'espace localement compact X dénombrable à l'infini. Alors les homomorphismes* (3.10.2) (*où la limite projective est prise suivant l'ensemble filtrant croissant des parties ouvertes relativement compactes U de X*) *sont surjectifs. Si $p > 1$, pour qu'il soit bijectif, il suffit que pour tout U ouvert relativement compact, en existe un autre $V \supset U$ tel que pour tout ouvert relativement compact W contenant V, l'image dans $H^{p-1}(U, F)$ de $H^{p-1}(W, F)$ par l'homomorphisme de restriction soit identique à celle de $H^{p-1}(V, F)$. Si $p = 1$, pour que l'homomorphisme $H^1(X, F) \to \lim H^1(U, F)$ soit bijectif, il suffit qu'on puisse munir les $H^0(U, F)$ de topologies de groupes topologiques métrisables complets telles que les homomorphismes de restriction soient continus, et que pour tout ouvert relativement compact U, en existe un autre $V \supset U$ tel que pour tout ouvert relativement compact W contenant V, l'image de $H^0(W, F)$ dans $H^0(U, F)$ soit dense dans celle de $H^0(V, F)$.*

(Bien entendu, on pouvait dans cet énoncé remplacer les ouverts relativement compact par des compacts). Cette proposition, qui se démontre par un procédé d'approximation à la Mittag-Leffler, est par exemple essentielle dans la démonstration des théorèmes fondamentaux sur les variétés de Stein [5]. Pour $p = 1$, elle reste vraie si F est un faisceau de groupes non nécessairement abéliens, sous la forme : si la condition d'approximation énoncée (dans le cas $p = 1$) est vraie, tout élément du premier membre de (3.10.2) dont l'image est l'élément neutre, est l'élément neutre.