Tôhoku Math. J.
48 (1996), 363–390

# DIVISEURS INVARIANTS ET HOMOMORPHISME DE POINCARÉ DE VARIÉTÉS TORIQUES COMPLEXES

GOTTFRIED BARTHEL, JEAN-PAUL BRASSELET, KARL-HEINZ FIESELER ET LUDGER KAUP

(Received February 27, 1995, revised November 10, 1995)

**Résumé.** Le but de cet article est de comparer, pour une variété torique complexe, d'une part l'inclusion naturelle des classes de diviseurs invariants de Cartier dans ceux de Weil, d'autre part l'homomorphisme de dualité de Poincaré entre la cohomologie entière en dimension deux et l'homologie entière, à supports fermés, en dimension complémentaire. Si le groupe fondamental de la variété est fini, nous montrons que l'homomorphisme naturel "classes de Chern" du groupe de classes de diviseurs invariants de Cartier dans la cohomologie et l'homomorphisme "classe d'homologie" du groupe de classes de diviseurs invariants de Weil dans l'homologie sont tous deux des isomorphismes. On en déduit l'identification de l'inclusion de ces groupes de classes de diviseurs avec l'homomorphime de dualité de Poincaré. Nous étendons ce résultat au cas d'une variété torique quelconque, en utilisant des formules de Künneth adaptées.

Les groupes de classes de diviseurs invariants de Cartier et de Weil—et donc aussi les groupes de (co-)homologie correspondants—s'interprètent en termes des données combinatoires et géométriques de l'éventail qui définit la variété torique. Cette interprétation nous permet d'aborder les problèmes d'invariance des nombres de Betti des variétés toriques.

**Abstract.** For a complex toric variety, we compare the natural inclusion of the group of classes of invariant Cartier divisors into that of Weil divisors on the one hand, and the Poincaré duality homomorphism between the second integral cohomology and the integral homology (with closed supports) in complementary degree on the other. If the variety has finite fundamental group, we prove that the natural "Chern class homomorphism" from the group of classes of invariant Cartier divisors to cohomology and the "homology class map" from the group of classes of invariant Weil divisors to homology are both isomorphisms, thus identifying the inclusion of these divisor class groups with the Poincaré duality homomorphism. Using suitable Künneth formulae, that yields a result valid in the general case.

These groups of classes of invariant divisors—and hence the corresponding (co-)homology groups—have explicit descriptions in terms of combinatorial-geometric data of the fan that defines the toric variety. As an application, we use these to discuss problems of invariance of Betti numbers for toric varieties.

**Introduction.** Les variétés toriques sont des objets particulièrement intéressants, notamment à cause de leur relation étroite avec la géométrie convexe élémentaire. L'opération du tore donne lieu à une décomposition finie d'une telle variété en orbites, toutes isomorphes à des tores, et fournit une correspondance biunivoque entre les orbites

1991 *Mathematics Subject Classification*. Primary 14M25; Secondary 14C20, 14F25.

et les cônes d'un «éventail rationnel» dans un espace vectoriel réel. Réciproquement, à partir de cet éventail, objet de géométrie convexe combinatoire, il est possible de reconstruire la variété torique, ce qui en donne une description très explicite.

Les diviseurs dans les variétés algébriques complexes jouent le rôle important d'un lien entre aspects algébriques-analytiques et aspects géométriques-topologiques. Les deux notions de diviseur que l'on connaît pour des variétés normales—celle de Cartier et celle de Weil—sont liées à la cohomologie et à l'homologie, respectivement, de la façon suivante: A tout diviseur de Cartier d'une variété $X$, on sait associer sa classe de Chern, classe de cohomologie entière dans le groupe $H^2(X) := H^2(X, \boldsymbol{Z})$ (Dans la suite, et sauf indication du contraire, les groupes de (co-)homologie sont toujours entendus à coefficients entiers). D'autre part, à tout diviseur de Weil, on peut associer sa classe dans le groupe d'homologie entière à supports fermés $H_{2n-2}^{\mathrm{cld}}(X) := H_{2n-2}^{\mathrm{cld}}(X, \boldsymbol{Z})$, avec $n := \dim_{\boldsymbol{C}} X$ (Rappelons que l'homologie à supports fermés, souvent appelée homologie de Borel-Moore dans la littérature, peut être obtenue à partir du complexe de chaînes simpliciales localement finies; cf. [Bd: Ch. V] ou [Fu$_1$: §19.1, p. 371]). Dans les deux cas, on associe aux diviseurs principaux la classe nulle. En notant respectivement $\mathrm{Cl\,Div}_{\mathrm{C}}(X)$ et $\mathrm{Cl\,Div}_{\mathrm{W}}(X)$ les groupes abéliens des classes de diviseurs algébriques de Cartier et de Weil dans $X$ modulo les diviseurs principaux, on a donc des homomorphismes

$$(\mathrm{I}.1) \qquad c^1 : \mathrm{Cl\,Div}_{\mathrm{C}}(X) \longrightarrow H^2(X) \quad \text{et} \quad \kappa : \mathrm{Cl\,Div}_{\mathrm{W}}(X) \longrightarrow H_{2n-2}^{\mathrm{cld}}(X) .$$

L'homomorphisme de dualité de Poincaré

$$P_{2n-k} : H^k(X) \longrightarrow H_{2n-k}^{\mathrm{cld}}(X) ,$$

cap-produit par la classe fondamentale $[X]$, fournit, pour $k=2$, un lien naturel entre les deux homomorphismes: Pour un diviseur de Cartier $D$, on a la formule

$$(\mathrm{I}.2) \qquad P_{2n-2}(c^1(D)) = \kappa(D) .$$

Rappelons que, dans le cas lisse, d'une part les homomorphismes $P_{2n-k}$ sont des isomorphismes pour tout $k$, et d'autre part, les deux notions de diviseurs coïncident.

Pour une variété torique $X$, on sait (cf. [Fu$_2$: 3.4]) que les classes de diviseurs admettent toujours des représentants invariants par l'opération du tore $\boldsymbol{T}$; autrement dit, en notant $\mathrm{Cl\,Div}_{\mathrm{C}}^{\boldsymbol{T}}(X)$ et $\mathrm{Cl\,Div}_{\mathrm{W}}^{\boldsymbol{T}}(X)$ les groupes de classes de diviseurs invariants respectifs, on a des isomorphismes

$$(\mathrm{I}.3) \qquad \mathrm{Cl\,Div}_{\mathrm{C}}^{\boldsymbol{T}}(X) \cong \mathrm{Cl\,Div}_{\mathrm{C}}(X) \quad \text{et} \quad \mathrm{Cl\,Div}_{\mathrm{W}}^{\boldsymbol{T}}(X) \cong \mathrm{Cl\,Div}_{\mathrm{W}}(X) .$$

Dans le cas compact lisse, il résulte du théorème de Jurkiewicz-Danilov (cf. [Od: p. 134]) et de la dualité de Poincaré que les homomorphismes $c^1$, $\kappa$ et $P_{2n-2}$ sont tous des isomorphismes. Dans le cas singulier, il est clair que les deux notions de diviseurs ne coïncident plus. D'autre part, comme le tore ne contient pas de diviseurs invariants, les homomorphismes $c^1$ et $\kappa$ ne sont plus, en général, des isomorphismes. Or considérons le cas d'une variété torique $X$ de dimension $n$ dont le groupe fondamental est fini. Une telle variété est *non dégénérée* dans le sens qu'elle n'est pas isomorphe au produit d'une variété torique de dimension $d<n$ et d'un tore de dimension $n-d$, et l'éventail correspondant est *non dégénéré* dans le sens que ses cônes ne sont pas tous contenu dans un même hyperplan. Nous montrons alors le résultat suivant:

THÉORÈME PRINCIPAL (cas non-dégénéré). *Soit $X$ une variété torique non dégénérée, alors on a*:

$$H^1(X) \cong H^{\mathrm{cld}}_{2n-1}(X)=0\,;$$

*et les homomorphismes $c^1$ et $\kappa$ de* (I.1) *sont des isomorphismes. On a donc le diagramme commutatif suivant*:

(DP)
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Cl}\,\mathrm{Div}_{\mathrm{C}}^{\boldsymbol{T}}(X) & \xrightarrow{\subset} & \mathrm{Cl}\,\mathrm{Div}_{\mathrm{W}}^{\boldsymbol{T}}(X) \\ {\scriptstyle c^1}\downarrow{\scriptstyle\cong} & & {\scriptstyle\kappa}\downarrow{\scriptstyle\cong} \\ H^2(X) & \xrightarrow{P_{2n-2}} & H^{\mathrm{cld}}_{2n-2}(X)\ . \end{array}$$

Comme conséquence importante du théorème, nous obtenons une formule de calcul explicite de l'homologie $H^{\mathrm{cld}}_{2n-2}(X)$ en fonction des données de l'éventail qui correspond à la variété $X$ (voir la proposition 2.9). Ces résultats s'appliquent en particulier si $X$ est *compacte*; alors l'homologie à supports fermés n'est rien d'autre que l'homologie usuelle $H_\bullet(X)$.—Le cas dégénéré se déduit aisément, cf. le théorème 2.1.

La preuve de la partie homologique de l'énoncé est basée sur l'étude du cas particulier d'un éventail non dégégéré minimal, donc ne contenant que $n$ rayons indépendants, en plus du cône trivial réduit à l'origine. La variété torique correspondante est contenue, comme sous-variété ouverte invariante, dans la variété torique affine associée au cône simplicial engendré par ces rayons, et son complémentaire y est de codimension deux. Le résultat homologique découle alors de la description de cette variété ambiante comme quotient de $\boldsymbol{C}^n$ par l'action d'un groupe fini.

La partie cohomologique est connue dans quelques cas particuliers importants (voir la discussion suivant la preuve du corollaire 2.6). Notre démonstration utilise des résultats de la théorie de dualité de Poincaré dans le cas singulier et il nous faut pour cela connaître les faisceaux d'homologie locale $\mathscr{H}_{2n-j}$ de la variété $X$ pour $j\leq 2$. Or il résulte de la partie homologique que le faisceau $\mathscr{H}_{2n-1}$ est nul; le faisceau $\mathscr{H}_{2n-2}$ est constant le long des orbites de l'action du tore dans $X$ et sa fibre s'explicite en termes de diviseurs comme suit: Chaque orbite est contenue comme seule orbite fermée dans un unique ouvert invariant affine $X_\sigma$, et les fibres du faisceau $\mathscr{H}_{2n-2}$ le long de cette orbite s'identifient au groupe $\mathrm{Cl}\,\mathrm{Div}_{\mathrm{W}}^{\boldsymbol{T}}(X_\sigma)$ des classes de diviseurs de Weil invariants de $X_\sigma$ (voir le corollaire 2.6).

Etant donné ce résultat, la question se pose de savoir si le groupe d'homologie d'intersection $IH^{\mathrm{cld}}_{2n-2}(X)$, situé à mi-chemin entre la cohomologie et l'homologie, admet également une telle interprétation en termes de diviseurs. Dans l'article [BBFK], nous en donnons une réponse positive: Pour toute perversité $\boldsymbol{p}$, notons $i(\boldsymbol{p})$, le plus grand entier $i \leq n$ tel que $\boldsymbol{p}(2i) \leq 1$, et $V_{\boldsymbol{p}}$ l'ouvert invariant de $X$, réunion des orbites de dimension au moins $n-i(\boldsymbol{p})$. Alors le groupe $I_{\boldsymbol{p}}H_{2n-2}^{\mathrm{cld}}(X)$ est isomorphe au groupe $\mathrm{Cl}\,\mathrm{Div}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{T}}(X) := \{[D] \in \mathrm{Cl}\,\mathrm{Div}_{\mathrm{W}}^{\boldsymbol{T}}(X);\ D|_{V_{\boldsymbol{p}}} \in \mathrm{Div}_{\mathrm{C}}^{\boldsymbol{T}}(V_{\boldsymbol{p}})\}$; en outre, les inclusions naturelles $\mathrm{Cl}\,\mathrm{Div}_{\mathrm{C}}^{\boldsymbol{T}}(X) \subset \mathrm{Cl}\,\mathrm{Div}_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{T}}(X) \subset \mathrm{Cl}\,\mathrm{Div}_{\mathrm{W}}^{\boldsymbol{T}}(X)$ correspondent ainsi à la factorisation naturelle

$$H^2(X) \xrightarrow{\alpha} I_{\boldsymbol{p}}H_{2n-2}^{\mathrm{cld}}(X) \xrightarrow{\omega} H_{2n-2}^{\mathrm{cld}}(X)$$

de l'homomorphisme de Poincaré $P_{2n-2}$.

Si la variété torique $X$ admet un point fixe, son groupe de cohomologie $H^2(X)$ est libre, tandis que ceci n'est pas nécessairement vrai pour l'homologie $H_{2n-2}^{\mathrm{cld}}(X)$. D'autre part, le nombre de Betti $b_{2n-2}^{\mathrm{cld}}(X) = \mathrm{rg}\, H_{2n-2}^{\mathrm{cld}}(X)$ est déterminé par le nombre de rayons de l'éventail correspondant à $X$. Par conséquent, dans le cas non dégénéré, $b_{2n-2}^{\mathrm{cld}}(X)$ est un invariant du type combinatoire de l'éventail, tandis qu'en général $b_2(X) = \mathrm{rg}\, H^2(X)$ ne l'est pas. McConnell [MCo] a donné le premier exemple dans le cadre projectif. Dans 3.5, nous discutons un autre exemple parlant, dû à Eikelberg [$\mathrm{Ei}_{1,2}$]: Nous y considérons deux éventails complets, de même type combinatoire, qui ne diffèrent que par une distorsion minime, mais tels que, pour les variétés toriques compactes $X$ et $X'$ correspondantes, on a $b_2(X) = 1$ et $b_2(X') = 0$. Cependant, tous les nombres de Betti $b_i(X)$ et $b_i^{\mathrm{cld}}(X)$ jouissent de propriétés d'invariance remarquables: il s'agit d'invariants du «type linéaire» de l'éventail, ou, ce qui est équivalent, d'invariants par rapport aux revêtements ramifiés finis équivariants (voir la proposition 3.7).

Une des motivations, à l'origine de notre travail, était l'étude des classes caractéristiques de Chern, au sens de M.-H. Schwartz et MacPherson, pour les variétés toriques singulières. Contrairement au cas lisse, il s'agit de classes d'*homologie*, et comme il n'y a pas de structure multiplicative en homologie, on ne peut pas, a priori, utiliser ces classes $c_q(X) \in H_{2q}^{\mathrm{cld}}(X)$ pour définir des nombres caractéristiques. Il est donc naturel de chercher des conditions sous lesquelles on peut relever ces classes en cohomologie via l'homomorphisme de Poincaré $P_{2q}$.

Dans le cas torique, chaque classe $c_q(X)$ est représentée par un cycle algébrique invariant, somme des adhérences des orbites de dimension $q$. Ce résultat dû à Ehlers (non publié, cf. [$\mathrm{Fu}_2$: pp. 113, 145]) a été trouvé indépendemment et publié dans [BBF]. En particulier, la classe $c_{n-1}(X)$, qui généralise la classe «anticanonique» du cas lisse au cas singulier, est représentée par la somme de tous les diviseurs invariants premiers. Or on sait que la classe (anti-)canonique d'une variété torique provient d'un fibré en droites et donc, d'un diviseur de Cartier si et seulement si toutes les singularités sont de Gorenstein. En utilisant notre interprétation de l'homomorphisme de Poincaré $P_{2n-2}$ de la variété torique $X$ en termes de diviseurs invariants, on retrouve alors la caractérisation connue (cf. [Is: Thm. 7.5]) pour que les singularités d'une variété torique soient de Gorenstein (voir le théorème 3.11).

Ce travail était effectué avec le concours du programme «PROCOPE» pour l'avancement de la coopération franco-allemande dans la recherche scientifique.—Nous tenons à remercier le rapporteur pour ses remarques pertinentes qui nous ont été très utiles.

**0. Variétés toriques: Notions et notations fondamentales.** Nous donnons ci-dessous une liste des notions et des notations dont nous allons nous servir. Pour la théorie de base des variétés toriques, nous renvoyons à la littérature, notamment aux monographies [Fu$_2$] ou [Od].

A. Cônes, variétés toriques affines et orbites fermées: Nous notons

- $\boldsymbol{T} := (\boldsymbol{C}^*)^n$ le *tore algébrique* de dimension $n$,
- $N := \mathrm{Hom}(\boldsymbol{C}^*, \boldsymbol{T}) \cong \boldsymbol{Z}^n$ le «réseau» des *sous-groupes à un paramètre* de $\boldsymbol{T}$,
- $N_{\boldsymbol{R}} := N \otimes_{\boldsymbol{Z}} \boldsymbol{R} \cong \boldsymbol{R}^n$ l'espace vectoriel réel associé,
- $M := \mathrm{Hom}(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{C}^*)$ le *groupe de caractères* et
- $\langle\ ,\ \rangle : M \times N \to \mathrm{Hom}(\boldsymbol{C}^*, \boldsymbol{C}^*) \cong \boldsymbol{Z}$ l'accouplement naturel parfait, donné par composition, par lequel on identifie $M$ au réseau dual $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}(N; \boldsymbol{Z}) \cong \boldsymbol{Z}^n$ de $N$.

Dans toute la suite, un *cône* $\sigma$ dans $N_{\boldsymbol{R}}$ signifiera un cône rationnel par rapport à $N$, polyédral, convexe et saillant, c'est-à-dire l'ensemble $\sum \boldsymbol{R}_{\geq 0} v_i$ des combinaisons linéaires non négatives dans $N_{\boldsymbol{R}}$ d'une collection finie d'éléments $v_i \in N$ tels que, pour un caractère $\chi \in M$ convenable, on ait toujours $\langle \chi, v_i \rangle > 0$. Pour un tel cône, nous notons

- $\check{\sigma} := \{u \in M_{\boldsymbol{R}} := M \otimes_{\boldsymbol{Z}} \boldsymbol{R};\ \langle u, v \rangle \geq 0$ pour tout $v \in \sigma\}$ son *dual*, qui est un cône polyédral, rationnel par rapport au réseau $M$, convexe et de dimension (réelle) $n$,
- $X_\sigma$ la variété torique affine de dimension (complexe) $n$ associée à $\sigma$ (i.e. dont l'anneau de coordonnées $\boldsymbol{C}[X_\sigma]$ est l'anneau du monoïde $\boldsymbol{C}[\check{\sigma} \cap M]$), et
- $B_\sigma$ l'unique orbite fermée dans $X_\sigma$, de dimension (complexe) $n - \dim \sigma$, obtenue de la façon suivante: en considérant un vecteur arbitraire du réseau dans l'intérieur relatif $v \in \mathring{\sigma} \cap N$ comme sous-groupe à un paramètre, la trajectoire d'un point de base arbitraire $x_0$ de la grosse orbite a une « source» $x_\sigma := \lim_{t \to 0} v(t) \cdot x_0$ dans $X$, et $B_\sigma := \boldsymbol{T} \cdot x_\sigma$ en est l'orbite.

Nous décrirons la structure de $(X_\sigma, B_\sigma)$ en distinguant trois cas:

(a) Dans le cas $\dim \sigma = n$, l'orbite $B_\sigma$ est réduite au seul point fixe $x_\sigma$ de $X_\sigma$, et ce point $x_\sigma$ est la « source» commune de toutes les trajectoires de l'opération dans $X_\sigma$ pour tout vecteur $v \in \mathring{\sigma} \cap N$; autrement dit, pour tout point $x \in X_\sigma$, on a $\lim_{t \to 0} v(t) \cdot x = x_\sigma$. On en déduit que $X_\sigma$, en tant qu'espace topologique, est le cône réel ouvert de sommet $x_\sigma$ et de base $\{x \in X_\sigma;\ \|x\| = 1\}$, où $X_\sigma \hookrightarrow \boldsymbol{C}^p$ est le plongement minimal équivariant (déterminé par l'unique système minimal de générateurs du monoïde $\check{\sigma} \cap M$, cf. la description de l'espace cotangent de $X_\sigma$ en $x_\sigma$ donnée dans [Fu$_2$: 2.1, p. 28]). Alors l'ouvert contractile $X_\sigma$ est un «bon» voisinage du point fixe $x_\sigma$; en particulier, pour l'homologie locale de $X_\sigma$ au point fixe $x_\sigma$, on a des isomorphismes

$$\mathscr{H}_{q, x_\sigma} \cong H_q^{\mathrm{cld}}(X_\sigma)\,. \tag{0.A.1}$$

(b) Dans le cas $\dim \sigma < n$, notons $\mathrm{lin}\, \sigma$ le plus petit sous-espace vectoriel de $N_{\boldsymbol{R}}$

contenant $\sigma$. Alors le choix d'un sous-réseau $N''_\sigma$ complémentaire de $N'_\sigma := N \cap \operatorname{lin} \sigma$ fournit une décomposition du tore $\boldsymbol{T} \cong \boldsymbol{T}'_\sigma \times \boldsymbol{T}''_\sigma$ avec $\dim \boldsymbol{T}'_\sigma = \dim \sigma$. Celle-ci se prolonge à $X_\sigma$ de la façon suivante: Notons $Y_\sigma$ la variété torique (par rapport au tore $\boldsymbol{T}'_\sigma$) affine déterminée par $\sigma$ vu comme cône dans $N'_{\boldsymbol{R}} = \operatorname{lin} \sigma$, on a une décomposition compatible

$$X_\sigma \cong Y_\sigma \times \boldsymbol{T}''_\sigma, \tag{0.A.2}$$

induisant un isomorphisme

$$B_\sigma \cong \{y_\sigma\} \times \boldsymbol{T}''_\sigma \tag{0.A.3}$$

où $y_\sigma$ est le seul point fixe de $Y_\sigma$.

(c) Dans le cas $\dim \sigma = 0$, i.e. pour le cône $o := \{0\}$, on obtient la « grosse» orbite $B_o = X_o$, ouverte et dense dans $X$, identifiée le plus souvent au tore $\boldsymbol{T}$.

On dit qu'un cône $\sigma$ est *simplicial* s'il est engendré par $\dim \sigma$ éléments, qui sont alors linéairement indépendants.

B. Eventails et variétés toriques générales: Un *éventail* (fini) $\Delta$ dans $N_{\boldsymbol{R}}$ est une collection finie de cônes contenant toutes les faces de chacun de ses cônes et telle que deux cônes s'intersectent toujours suivant une face commune. Comme la variété torique affine $X_\tau$ qui correspond à une face $\tau$ d'un cône $\sigma$ admet un plongement ouvert équivariant naturel dans $X_\sigma$, cette propriété fournit un recollement équivariant unique des variétés toriques affines qui correspondent aux cônes d'un éventail $\Delta$ dans $N_{\boldsymbol{R}}$. Nous notons

- $X = X_\Delta$ la variété torique ainsi obtenue.

Un éventail est déterminé (ou *engendré*) par la collection $\Delta^{\max}$ de ses cônes maximaux, et les ouverts affines $X_\sigma$ correspondant aux cônes maximaux recouvrent $X_\Delta$. En particulier, si $\Delta$ est engendré par un seul cône $\sigma$, on retrouve la théorie affine, i.e. on a $X_\Delta = X_\sigma$. Etant donné un éventail $\Delta$, on note

- $\Delta^{(q)} \subset \Delta$ le sous-ensemble des cônes de dimension (réelle) $q$, et
- $\Delta^{(\leq q)} := \bigcup_{p \leq q} \Delta^{(p)} \subset \Delta$ le sous-éventail formé de tous les cônes de dimension au plus $q$,
- $k := k(\Delta) := \operatorname{card} \Delta^{(1)}$ le nombre de cônes de dimension 1 (i.e., les *demi-droites*, aussi appelées les *rayons*) de l'éventail $\Delta$,
- $P := P(\Delta) = \{v_1, \ldots, v_k\} \subset N$ l'ensemble des *vecteurs primitifs*, générateurs des rayons $\rho_i := \boldsymbol{R}_{\geq 0} v_i \in \Delta^{(1)}$, et
- $B_i = B_{\rho_i} \subset X$ pour $i = 1, \ldots, k$, l'orbite de codimension (complexe) 1 correspondant au rayon $\rho_i$, et ainsi, au vecteur primitif $v_i$.

Finalement, notons

- $d(\Delta) := \dim_{\boldsymbol{R}} \operatorname{lin} \Delta$ la dimension du plus petit sous-espace linéaire, $\operatorname{lin} \Delta$, de $N_{\boldsymbol{R}}$ contenant tous les cônes de $\Delta$.

Nous remarquons l'égalité $d(\Delta) = d(\Delta^{(1)})$. Dans le cas $d(\Delta) = n$, nous dirons que l'éventail $\Delta$ et la variété torique correspondante $X_\Delta$ sont *non dégénérés*. Etant donné le rôle important joué par cette notion dans la suite, nous en donnons quelques reformulations, essentiellement en termes topologiques. Pour cela, rappelons que la formule

(0.B.1) $$\pi_1(X_\Delta) \cong N/N_0\,, \quad \text{avec} \quad N_0 := \sum_{\sigma\in\Delta} (N \cap \operatorname{lin}\sigma)$$

pour le *groupe fondamental* topologique (cf. [Od: Prop. 1.9]) montre qu'il s'agit d'un groupe abélien, donc coïncidant avec le premier groupe d'homologie à supports compacts $H_1(X_\Delta)$. Or on a $d(\Delta) = \operatorname{rg} N_0$; nous pouvons alors écrire:

0.1. Remarque. Les conditions suivantes sont équivalentes:
( i ) L'éventail $\Delta$ est non dégénéré.
(i′) Le sous-éventail $\Delta^{(\leq 1)}$ est non dégénéré.
(ii) Le sous-réseau $N_0$ de $N$ est de rang maximum $n$.
(ii′) Le sous-réseau $\langle P(\Delta)\rangle = \langle v_1, \ldots, v_k\rangle$ de $N$, engendré par les vecteurs primitifs de $\Delta$, est de rang maximum $n$.
(iii) Le groupe fondamental $\pi_1(X_\Delta)$ est fini.
(iv) Le premier nombre de Betti $b_1(X_\Delta) := \operatorname{rg} H_1(X_\Delta)$ s'annule.
(v) On a $H^1(X_\Delta) = 0$.

Nous laissons au lecteur le soin d'expliciter les énoncés correspondants (iii′)–(v′) pour la sous-variété torique ouverte lisse $X_{\Delta^{(\leq 1)}}$.

L'éventail est *complet* (i.e., les cônes de $\Delta$ recouvrent $N_{\mathbf{R}}$) si et seulement si $X_\Delta$ est compacte. Si $\Delta$ est engendré par un seul cône $\sigma$, nous écrivons $k(\sigma)$, $P(\sigma)$ etc. au lieu de $k(\Delta)$, $P(\Delta)$ etc., respectivement, et parfois, nous appelons $P(\sigma)$ la « *base*» du cône $\sigma$.

C. Variétés toriques dégénérées, homologie locale et formules de Künneth: Tout éventail $\Delta$ peut être considéré comme éventail dans $N'_{\mathbf{R}} := \operatorname{lin}\Delta$, rationnel par rapport au sous-réseau induit $N'_\Delta := N \cap N'_{\mathbf{R}}$, et devient ainsi un éventail non dégénéré, noté $\Delta'$. Soit $\boldsymbol{T}'_\Delta$ le sous-tore correspondant de $\boldsymbol{T}$, de dimension $d := d(\Delta)$, et $Y_\Delta := X_{\Delta'}$ la variété torique (par rapport au tore $\boldsymbol{T}'_\Delta$) non dégénérée, définie par $\Delta'$. Comme dans le cas affine, on choisit un sous-réseau $N''_\Delta$ complémentaire de $N'_\Delta$, définissant ainsi des isomorphismes de réseaux $N \cong N'_\Delta \oplus N''_\Delta$, et d'éventails $\Delta \cong \Delta' \times o''$, où $o''$ est l'éventail donné par l'origine dans $N''_{\mathbf{R}}$. Alors on a une décomposition

(0.C.1) $$(X_\Delta, \boldsymbol{T}) \cong (X_{\Delta'}, \boldsymbol{T}'_\Delta) \times X_{o''} =: (Y_\Delta, \boldsymbol{T}'_\Delta) \times \boldsymbol{T}''_\Delta$$

(souvent notée $X \cong Y \times \boldsymbol{T}''$). Dans le cas où $\Delta$ est engendré par un seul cône $\sigma$, on retrouve la décomposition $X_\sigma \cong Y_\sigma \times \boldsymbol{T}''_\sigma$ de (0.A.2); alors $\boldsymbol{T}'_\Delta$ est le groupe d'isotropie des points de l'orbite fermée $B_\sigma \cong \{y_\sigma\} \times \boldsymbol{T}''_\sigma$ de $X_\sigma$.

Plus généralement, considérons une factorisation équivariante

(0.C.2) $$(X, \boldsymbol{T}) \cong (Z, \boldsymbol{T}') \times \boldsymbol{T}''\,,$$

où $Z$ est une variété torique par rapport au tore $\boldsymbol{T}'$, non nécessairement non dégénérée, de dimension $d := \dim_{\mathbf{C}} Z \leq n$. Alors la formule de Künneth en homologie locale (voir [Bd: V. 13.1]) entraîne les isomorphismes de faisceaux d'homologie locale

(0.C.3) $${}_X\mathscr{H}_{2n-j} \cong \operatorname{pr}_1^*({}_Z\mathscr{H}_{2d-j}) \otimes \operatorname{pr}_2^*({}_{\boldsymbol{T}''}\mathscr{H}_{2n-2d}) \cong \operatorname{pr}_1^*({}_Z\mathscr{H}_{2d-j})\,,$$

donc, pour la fibre au point $(z, t)$, nous trouvons l'isomorphisme

(0.C.4) $${}_X\mathscr{H}_{2n-j,(z,t)} \cong {}_Z\mathscr{H}_{2d-j,z}\,.$$

Appliqué à la décomposition $(X_\sigma, B_\sigma) \cong (Y_\sigma, \{y_\sigma\}) \times T''_\sigma$ d'un ouvert affine et de son orbite fermée, on obtient à l'aide de (0.A.1) la description explicite du faisceau ${}_X\mathscr{H}_{2n-j}$ restreint à cette orbite:

(0.C.5) ${}_X\mathscr{H}_{2n-j}|_{B_\sigma}$ est le faisceau constant de fibre $H^{\mathrm{cld}}_{2d-j}(Y_\sigma)$.

**1. Diviseurs et homomorphisme de Poincaré: rappels et résultats de base.** Dans cette section, nous rappelons d'abord quelques résultats concernant la relation entre diviseurs et homomorphisme de Poincaré. Puis nous discutons le cas torique, et établissons les premiers résultats de base.

A. Diviseurs et homomorphisme de Poincaré $P_{2n-2}$ pour une variété normale: Soit $X$ une variété algébrique complexe normale de dimension $n$. Nous notons $\mathrm{Div}_{\mathrm{W}}(X)$ le groupe des *diviseurs de Weil*, $\mathrm{Div}_{\mathrm{C}}(X)$ le sous-groupe des diviseurs *de Cartier* (i.e. localement principaux) et $\mathrm{Div}_0(X)$ celui des diviseurs (globalement) *principaux*. On a un isomorphisme (cf. [Ha: II, Prop. 6.15])

(1.A.1) $$\mathrm{Cl}\,\mathrm{Div}_{\mathrm{C}}(X) := \mathrm{Div}_{\mathrm{C}}(X)/\mathrm{Div}_0(X) \cong \mathrm{Pic}(X)$$

entre le groupe des classes de diviseurs de Cartier et le groupe de Picard, i.e. le groupe des classes d'isomorphie de faisceaux inversibles, ou bien, ce qui revient au même, des classes d'isomorphie de fibrés en droites. Cet isomorphisme est induit par l'application $D \mapsto \mathcal{O}(D)$, la réciproque envoyant un faisceau inversible sur la classe du diviseur d'une section rationnelle globale non triviale.

Le lien naturel entre diviseurs et (co-)homologie est donné par les homomorphismes $c^1\colon \mathrm{Div}_{\mathrm{C}}(X) \to H^2(X)$, envoyant un diviseur de Cartier sur la classe de Chern du fibré en droites associé, et $\kappa\colon \mathrm{Div}_{\mathrm{W}}(X) \to H^{\mathrm{cld}}_{2n-2}(X)$, envoyant un diviseur de Weil sur sa classe d'homologie à supports fermés. Comme les diviseurs principaux sont envoyés sur la classe nulle, les homomorphismes $c^1$ et $\kappa$ induisent des homomorphismes, également notés $c^1$ et $\kappa$, au niveau des groupes de classes de diviseurs. D'autre part, on a encore une inclusion $\mathrm{Cl}\,\mathrm{Div}_{\mathrm{C}}(X) \hookrightarrow \mathrm{Cl}\,\mathrm{Div}_{\mathrm{W}}(X)$ au niveau de ces groupes. La relation de commutativité entre ces homomorphismes et l'homomorphisme de Poincaré $P_{2n-2}(X)\colon H^2(X) \to H_{2n-2}(X)$, cap-produit par la classe fondamentale de $[X]$, est explicitée par la commutativité du diagramme ci-dessous. Celle-ci est équivalente à la formule (I.2) de l'introduction et découle comme cas particulier d'une formule plus générale qu'on trouve dans [Fu$_1$: Prop. 19.1.2].

1.1. Remarque. On a un diagramme commutatif naturel:

(1.1.1)
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Cl\,Div_C}(X) & \xrightarrow{\subset} & \mathrm{Cl\,Div_W}(X) \\ \big\downarrow c^1 & & \big\downarrow \kappa \\ H^2(X) & \xrightarrow{P^{\mathrm{cld}}_{2n-2}(X)} & H^{\mathrm{cld}}_{2n-2}(X)\,, \end{array}$$

où $P^{\mathrm{cld}}_{2n-2}(X)$ est l'homomorphisme de dualité de Poincaré.

B. Diviseurs invariants dans une variété torique: Soit maintenant $X$ une variété torique. Nous notons $\mathrm{Div}^{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{W}}(X)$, $\mathrm{Div}^{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{C}}(X)=\mathrm{Div_C}(X)\cap\mathrm{Div}^{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{W}}(X)$ et $\mathrm{Div}^{\boldsymbol{T}}_{0}(X)=\mathrm{Div}_0(X)\cap \mathrm{Div}^{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{W}}(X)$ les groupes des diviseurs de Weil, de Cartier, et principaux, respectivement, qui sont invariants par rapport à l'opération du tore $\boldsymbol{T}$ dans $X$. Alors nous avons le diagramme commutatif:

(1.B.1)
$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Div}^{\boldsymbol{T}}_{0}(X) & \subset & \mathrm{Div}^{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{C}}(X) & \subset & \mathrm{Div}^{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{W}}(X) \\ \cap & & \cap & & \cap \\ \mathrm{Div}_0(X) & \subset & \mathrm{Div_C}(X) & \subset & \mathrm{Div_W}(X) \end{array}$$

qui induit des homomorphismes injectifs

$$\mathrm{Cl\,Div}^{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{C}}(X):=\mathrm{Div}^{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{C}}(X)/\mathrm{Div}^{\boldsymbol{T}}_{0}(X)\hookrightarrow \mathrm{Cl\,Div_C}(X) \qquad \text{et}$$
$$\mathrm{Cl\,Div}^{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{W}}(X):=\mathrm{Div}^{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{W}}(X)/\mathrm{Div}^{\boldsymbol{T}}_{0}(X)\hookrightarrow \mathrm{Cl\,Div_W}(X)$$

de groupes de classes de diviseurs. Or on sait que ce sont, en fait, des isomorphismes:

1.2. Proposition. *Tout diviseur $D$ de $X$ est linéairement équivalent à un diviseur invariant; en d'autres termes, au niveau des groupes de classes de diviseurs, nous avons des isomorphismes*

(1.2.1)
$$\mathrm{Cl\,Div}^{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{C}}(X)\cong \mathrm{Cl\,Div_C}(X) \quad \textit{et} \quad \mathrm{Cl\,Div}^{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{W}}(X)\cong \mathrm{Cl\,Div_W}(X)\,.$$

Ceci résulte aisément du fait que l'anneau de coordonnées de la « grosse» orbite est factoriel (c'est l'anneau $\boldsymbol{C}[z_1, z_1^{-1}, \ldots, z_n, z_n^{-1}]$ des polynômes de Laurent). Pour plus de détails, nous renvoyons à [$\mathrm{Fu}_2$: 3.4, Prop.] ou [Od: Prop. 2.4, (ii)], et pour un résultat plus général, à [FMSS: Thm. 1].

C. Description explicite des groupes $\mathrm{Div}^{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{W}}(X)$ et $\mathrm{Div}^{\boldsymbol{T}}_{0}(X)$: Comme les seuls diviseurs irréductibles (i.e. premiers) invariants sont les adhérences $D_i:=\bar{B}_i$ des orbites de codimension 1, tout diviseur invariant de Weil s'écrit d'une manière unique sous la forme $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i D_i$ et on a l'égalité

(1.C.1)
$$\mathrm{Div}^{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{W}}(X)=\bigoplus_{i=1}^{k}\boldsymbol{Z}D_i\cong \boldsymbol{Z}^P\,.$$

Pour la description du sous-groupe $\mathrm{Div}^{\boldsymbol{T}}_{0}(X)$, notons d'abord qu'on a une inclusion naturelle $M\hookrightarrow \mathcal{O}^*(\boldsymbol{T})$: Chaque caractère $\chi\in M=\mathrm{Hom}(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{C}^*)$ est une fonction régulière inversible dans le tore. D'autre part, une telle fonction $f \in \mathcal{O}^*(\boldsymbol{T})$ est un monôme de Laurent et donc, un multiple non nul d'un caractère $\chi$; autrement dit, le groupe $\mathcal{O}^*(\boldsymbol{T})$ s'identifie à $\boldsymbol{C}^* \cdot M$. Considérons $\chi$ comme fonction rationnelle dans $X$, alors son ordre le long de l'orbite $B_i$, déterminée par le vecteur $v_i \in P(\Delta)$, est égal à $\langle \chi, v_i \rangle$. On obtient ainsi un homomorphisme surjectif

$$\text{(1.C.2)} \qquad \operatorname{div}_0 : M \longrightarrow \operatorname{Div}_0^{\boldsymbol{T}}(X_\Delta)\,, \qquad \chi \longmapsto \operatorname{div}_0(\chi) := \sum_{i=1}^{k} \langle \chi, v_i \rangle D_i$$

dont le noyau est le groupe

$$N_\Delta^\perp = \{\chi \in M\,;\, \chi|_{\sigma \cap N} = 0 \text{ pour tout } \sigma \in \Delta\}\,,$$

orthogonal de $N_\Delta := N \cap \operatorname{lin} \Delta$. On en déduit alors un isomorphisme

$$\text{(1.C.3)} \qquad \operatorname{Div}_0^{\boldsymbol{T}}(X_\Delta) \cong M/N_\Delta^\perp\,.$$

D. Description explicite du groupe $\operatorname{Div}_{\mathrm{C}}^{\boldsymbol{T}}(X)$: Nous obtenons un diviseur invariant de Cartier $D$ dans $X$ en choisissant, d'une manière compatible, un caractère $\chi_\sigma$ pour tout cône maximal $\sigma$: deux diviseurs $\operatorname{div}_0(\chi_\sigma)$ et $\operatorname{div}_0(\chi_{\sigma'})$ doivent coïncider dans l'ouvert affine $X_\sigma \cap X_{\sigma'} = X_{\sigma \cap \sigma'}$. Evidemment, la restriction de $D$ à $X_\sigma$ ne dépend que de la classe résiduelle $\bar{\chi}_\sigma$ de $\chi_\sigma$ modulo le sous-groupe $N_\sigma^\perp$, et la condition de compatibilité équivaut à dire que la famille $(\bar{\chi}_\sigma)$ appartient au groupe abélien libre de rang fini

$$\text{(1.D.1)} \qquad M^{[\Delta]} := \left\{ (\bar{\chi}_\sigma)_{\sigma \in \Delta^{\max}} \in \bigoplus_{\sigma \in \Delta^{\max}} M/N_\sigma^\perp\,;\ \begin{array}{c} \chi_\sigma|_{\sigma \cap \sigma' \cap N} = \chi_{\sigma'}|_{\sigma \cap \sigma' \cap N} \\ \text{pour tous } \sigma, \sigma' \in \Delta^{\max} \end{array} \right\}.$$

Notons qu'on peut interpréter $M^{[\Delta]}$ de façon naturelle comme groupe des «*caractères par morceaux*»

$$\{h \colon N \to \boldsymbol{Z};\ \text{pour } \sigma \in \Delta^{(n)}, \text{ il existe } \chi_\sigma \in M \text{ tel que } h|_{\sigma \cap N} = \chi_\sigma|_{\sigma \cap N}\}\,.$$

Par extension de scalaires, on peut considérer chaque $h$ comme fonction (continue) $N_{\boldsymbol{R}} \to \boldsymbol{R}$ telle que $h(N) \subset \boldsymbol{Z}$ et telle que la restriction à tout cône $\sigma \in \Delta$ est linéaire; ainsi, le groupe $M^{[\Delta]}$ s'identifie avec le groupe $\mathrm{SF}(N, \Delta)$ des "*$\Delta$-linear support functions*" de [Od: §2.1].—Le sous-groupe

$$M_0^{[\Delta]} := \{(\bar{\chi})_{\sigma \in \Delta^{\max}}\,;\, \chi \in M\}$$

des familles « constantes» s'identifie aux groupes $\operatorname{Div}_0^{\boldsymbol{T}}(X_\Delta) \cong M/N_\Delta^\perp \cong \operatorname{Hom}(N_\Delta, \boldsymbol{Z})$. C'est un groupe abélien libre de rang $d(\Delta)$, isomorphe à $M$ dans le cas non-dégénéré, et même un facteur direct de $M^{[\Delta]}$ si $\Delta$ contient un cône de dimension $n$. Pour une famille $(\bar{\chi}_\sigma) \in M^{[\Delta]}$ et un vecteur primitif $v \in P$, nous posons

$$\langle (\bar{\chi}_\sigma), v \rangle := \langle \chi_\tau, v \rangle\,,$$

choisissant un cône maximal $\tau \in \Delta$ contenant $v$; par la condition de compatibilité de la famille $(\bar{\chi}_\sigma)$, cette valeur est bien définie. On a alors un homomorphisme injectif

(1.D.2) $$\operatorname{div}: M^{[\Delta]} \longrightarrow \operatorname{Div}_{\mathrm{C}}^{\boldsymbol{T}}(X) \subset \operatorname{Div}_{\mathrm{W}}^{\boldsymbol{T}}(X), \qquad (\bar{\chi}_\sigma) \longmapsto \sum_{i=1}^{k} \langle (\bar{\chi}_\sigma), v_i \rangle D_i .$$

Montrons qu'on obtient ainsi tous les diviseurs invariants de Cartier dans $X$, ou, en d'autres termes, que cet homomorphisme induit un isomorphisme

(1.D.3) $$\operatorname{div}: M^{[\Delta]} \xrightarrow{\cong} \operatorname{Div}_{\mathrm{C}}^{\boldsymbol{T}}(X) \quad \text{et donc} \quad M^{[\Delta]}/M_0^{[\Delta]} \cong \operatorname{Cl}\operatorname{Div}_{\mathrm{C}}^{\boldsymbol{T}}(X) .$$

Il suffit pour cela de savoir qu'un diviseur de Cartier invariant $D$ est toujours principal dans un ouvert affine invariant $X_\sigma$, c'est-à-dire qu'on a

(1.D.4) $$\operatorname{Div}_{\mathrm{C}}^{\boldsymbol{T}}(X_\sigma) = \operatorname{Div}_0^{\boldsymbol{T}}(X_\sigma) \cong M/N_\sigma^\perp$$

(cf. [Fu$_2$: p. 61] ou [Od: Prop. 2.4, (i)]). Or il revient au même de voir que le faisceau localement libre $\mathscr{L} := \mathscr{O}(D)$ associé à $D$, explicité dans (1.D.5), est trivial sur $X_\sigma$, i.e. qu'il admet une section régulière partout non nulle. Puisque $X_\sigma$ est affine, il existe une section $s \in \mathscr{L}(X_\sigma)$ qui ne s'annule pas au point « générique» $x$ de l'orbite fermée $B_\sigma$. Comme le diviseur $D$ est invariant, l'espace vectoriel $\mathscr{L}(X_\sigma)$, sous-espace de l'espace $\boldsymbol{C}(X_\sigma)$ des fonctions rationnelles dans $X_\sigma$, est invariant par l'opération linéaire naturelle du tore $\boldsymbol{T}$ dans $\boldsymbol{C}(X_\sigma)$. Il admet donc une décomposition induite en espaces « de poids», consistant en sections semi-invariantes. Nous pouvons supposer que la section $s$ appartient à l'un de ces sous-espaces; étant semi-invariante, elle est alors non nulle partout puisque le point $x$ est dans l'adhérence de toute orbite dans $X_\sigma$.

Nous avons ainsi montré le résultat suivant (cf. [Od: Prop. 2.4]):

1.4. Proposition. *Soit $X_\Delta$ une variété torique. Alors on a des isomorphismes*

$$M^{[\Delta]}/M_0^{[\Delta]} \cong \operatorname{Cl}\operatorname{Div}_{\mathrm{C}}^{\boldsymbol{T}}(X_\Delta) \cong \operatorname{Pic}(X_\Delta) ;$$

*par conséquent, ces groupes abéliens sont de rang* $\operatorname{rg} M^{[\Delta]} - d(\Delta)$, *et ils sont sans torsion si $\Delta$ contient un cône de dimension $d(\Delta)$.*

On peut donner une description directe de l'isomorphisme $M^{[\Delta]}/M_0^{[\Delta]} \cong \operatorname{Pic}(X_\Delta)$: pour une famille $(\bar{\chi}_\sigma)_{\sigma \in \Delta^{\max}} \in M^{[\Delta]}$, on considère les représentants $\chi_\sigma$ comme fonctions rationnelles dans $X$, et on utilise l'homomorphisme

(1.D.5) $$\chi_\sigma \longmapsto (\mathscr{O}|_{X_\sigma}) \cdot \chi_\sigma^{-1} \quad \text{pour tout} \quad \sigma \in \Delta^{\max},$$

définissant ainsi le faisceau inversible $\mathscr{L} := \mathscr{O}(D)$ de fonctions rationnelles associé au diviseur $D = \operatorname{div}(\bar{\chi}_\sigma)$.

E. «Formules de Künneth» pour les diviseurs invariants: Dans le cas d'une variété torique dégénérée $X = Z \times \boldsymbol{T}''$, chaque orbite $B_\tau$ est un produit $B'_\tau \times \boldsymbol{T}''$, où $B'_\tau$ est une orbite du tore $\boldsymbol{T}'$ opérant dans $Z$. Alors on a des «formules de Künneth» au niveau des diviseurs invariants, à savoir des isomorphismes:

(1.E.1) $$\operatorname{Div}_{\mathrm{W}}^{\boldsymbol{T}}(X) \cong \operatorname{Div}_{\mathrm{W}}^{\boldsymbol{T}'}(Z) \otimes \boldsymbol{Z}[\boldsymbol{T}''] \cong \operatorname{Div}_{\mathrm{W}}^{\boldsymbol{T}'}(Z) ,$$

donnés par $D = D' \times T'' \mapsto D' \otimes T'' \mapsto D'$. On a des isomorphismes analogues pour les diviseurs de Cartier et les diviseurs principaux, et donc, au niveau des classes de diviseurs, des isomorphismes analogues

$$\text{(1.E.2)} \qquad \mathrm{Cl\,Div}_{\mathrm{W}}^{\boldsymbol{T}}(X) \cong \mathrm{Cl\,Div}_{\mathrm{W}}^{\boldsymbol{T}'}(Z) \quad \text{et} \quad \mathrm{Cl\,Div}_{\mathrm{C}}^{\boldsymbol{T}}(X) \cong \mathrm{Cl\,Div}_{\mathrm{C}}^{\boldsymbol{T}'}(Z)\,.$$

F. Homomorphismes de Poincaré: Les homomorphismes de Poincaré

$$P_{2n-j}(X) \colon H^j(X) \longrightarrow H_{2n-j}^{\mathrm{cld}}(X)\,, \qquad \xi \longmapsto \xi \cap [X]$$

sont analysés systématiquement et en toute généralité dans [Kp$_1$] et [Kp$_2$]. En utilisant, en particulier, le fait qu'une variété torique $X$ est normale, et que son faisceau d'homologie locale $\mathscr{H}_{2n-1}$ s'annule (voir 2.6), on obtient:

- *Les homomorphismes $P_{2n-j}(X)$ sont des isomorphismes pour $j = 0, 1, 2n$,*
- *l'homomorphisme $P_1(X)$ est surjectif, et un isomorphisme modulo torsion,*
- *il existe une suite exacte contenant $P_{2n-2}$ et $P_{2n-3}$:*

$$\text{(1.F.1)} \quad 0 \longrightarrow H^2(X) \xrightarrow{P_{2n-2}} H_{2n-2}^{\mathrm{cld}}(X) \longrightarrow H^0(X, \mathscr{H}_{2n-2}) \longrightarrow H^3(X) \xrightarrow{P_{2n-3}} H_{2n-3}^{\mathrm{cld}}(X)$$

(cf. [Kp$_1$: 2.4]). En particulier, à l'aide de [Kp$_2$: 4.1] il vient:

- *L'homomorphisme $P_{2n-2}(X)$ est injectif et $P_2(X, \boldsymbol{Q})$ est surjectif,*

en outre, on sait que

- *tous les homomorphismes $P_{2k+1}(X, \boldsymbol{Q})$ s'annulent si $X$ est projectif.*

En effet, on a la factorisation $H^j(X) \xrightarrow{\alpha} IH_{2n-j}^{\mathrm{cld}}(X) \xrightarrow{\omega} H_{2n-j}^{\mathrm{cld}}(X)$ de $P_{2n-j}(X)$ par l'homologie d'intersection, d'où le résultat à l'aide de [Fi: Thm. 1.1, 1.2].—Notons qu'on a des résultats analogues à supports compacts.

**2. Le résultat principal.** Dans cette section, nous énonçons d'abord le Théorème principal pour des variétés toriques arbitraires et réduisons la preuve au cas non dégénéré, pour lequel le résultat est énoncé dans l'introduction. Nous donnons la démonstration de ce résultat, le point principal en étant la discussion des variétés toriques non dégénérées minimales. Notons que dans le cas des variétés toriques compactes lisses, le résultat provient du Théorème de Jurkiewicz-Danilov (cf. [Da: Thm. 10.8]). Pour le cas des variétés toriques singulières, on sait que la flèche $c^1 \colon \mathrm{Cl\,Div}_{\mathrm{C}}^{\boldsymbol{T}}(X) \to H^2(X)$ est un isomorphisme si l'adhérence de chaque orbite contient un point fixe (cf. [Fu$_2$: 3.4, Cor.]). En particulier, ce résultat est valable si $X$ est compacte; pour le cas projectif, voir [Ei$_2$: 4.3].

A. Enoncé du résultat et réduction au cas non dégénéré: Rappelons (0.C.1) qu'une variété torique éventuellement dégénérée se décompose en produit d'une variété torique non dégénérée et d'un tore.

2.1. Théorème principal (cas général). *Pour une variété torique $X = X_\Delta$, soit $\boldsymbol{T}'' = \boldsymbol{T}''_\Delta$ le facteur torique de dimension $n - d = n - d(\Delta)$ dans la décomposition $X_\Delta \cong Y_\Delta \times \boldsymbol{T}''$ de* (0.C.1). *Alors on a des isomorphismes*

(i) $$H^1(X) \cong H^{\mathrm{cld}}_{2n-1}(X) \cong H^1(\boldsymbol{T}'') \cong H^{\mathrm{cld}}_{2n-2d-1}(\boldsymbol{T}'') \cong \boldsymbol{Z}^{n-d};$$

*les homomorphismes $c^1$ et $\kappa$ de* (I.1) *sont injectifs, et on a des isomorphismes*

(ii) $$H^2(X) \cong \mathrm{Cl}\,\mathrm{Div}^{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{C}}(X) \oplus H^2(\boldsymbol{T}'') \cong \mathrm{Cl}\,\mathrm{Div}^{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{C}}(X) \oplus \boldsymbol{Z}^b;$$

(iii) $$H^{\mathrm{cld}}_{2n-2}(X) \cong \mathrm{Cl}\,\mathrm{Div}^{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{W}}(X) \oplus H^{\mathrm{cld}}_{2n-2d-2}(\boldsymbol{T}'') \cong \mathrm{Cl}\,\mathrm{Div}^{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{W}}(X) \oplus \boldsymbol{Z}^b$$

*avec* $b := \binom{n-d}{2}$, *qui rendent commutatif le diagramme suivant*:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Cl}\,\mathrm{Div}^{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{C}}(X) \oplus H^2(\boldsymbol{T}'') & \longrightarrow & \mathrm{Cl}\,\mathrm{Div}^{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{W}}(X) \oplus H^{\mathrm{cld}}_{2n-2d-2}(\boldsymbol{T}'') \\
{\scriptstyle c^1 \oplus \mathrm{pr}^*}\Big\downarrow{\scriptstyle \simeq} & & {\scriptstyle \kappa \oplus \mathrm{pr}^*}\Big\downarrow \\
H^2(X) & \xrightarrow{P_{2n-2}(X)} & H^{\mathrm{cld}}_{2n-2}(X).
\end{array}$$

*La flèche horizontale supérieure est somme directe de l'inclusion* $\mathrm{Cl}\,\mathrm{Div}^{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{C}}(X) \xrightarrow{\subset} \mathrm{Cl}\,\mathrm{Div}^{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{W}}(X)$ *et de l'isomorphisme de Poincaré* $H^2(\boldsymbol{T}'') \xrightarrow{\cong} H^{\mathrm{cld}}_{2n-2d-2}(\boldsymbol{T}'')$ *pour la variété lisse* $\boldsymbol{T}''$.

*On en déduit, en particulier, que l'homomorphisme de Poincaré $P_{2n-2}(X)$ est injectif.*

Notons qu'il résulte du théorème que les flèches $c^1$ et $\kappa$ sont des isomorphismes si et seulement si l'on a $d \geq n-1$.

La réduction au cas non dégénéré $d=n$ se fait comme suit:

Les formules (i), (ii) et (iii) sont une conséquence immédiate des formules de Künneth appliquées à la décomposition (0.C.1), de l'isomorphisme

$$H^j(\boldsymbol{T}'') \cong H^{\mathrm{cld}}_{2(n-d)-j}(\boldsymbol{T}'') \cong \boldsymbol{Z}^{b_j} \quad \text{avec} \quad b_j = \binom{n-d}{j}$$

et de la formule (1.E.2).

Puisque l'homomorphisme de Poincaré est défini par le « cap»-produit par la classe fondamentale $[X] = [Y] \times [\boldsymbol{T}'']$, sa décomposition résulte de la relation entre les produits $\cap$ et $\times$:

$$(\xi_1 \times \xi_2) \cap ([Y] \times [\boldsymbol{T}'']) = (\xi_1 \cap [Y]) \times (\xi_2 \cap [\boldsymbol{T}''])$$

pour des classes de cohomologie de degré pair $\xi_1 \in H^{2\bullet}(Y)$ et $\xi_2 \in H^{2\bullet}(\boldsymbol{T}'')$ comme indiqué dans [Sp: 5.6.21].

B. Variétés toriques non dégénérées « minimales»: La démonstration de notre résultat principal dans le cas non dégénéré est basée sur l'étude du cas particulier où l'éventail $\Delta$ est un objet *minimal*, en tant qu'éventail non dégénéré. Un tel éventail consiste donc eu $n$ rayons indépendants $\rho_1, \ldots, \rho_n$ et du cône trivial $o = \{0\}$. Or ces rayons engendrent un cône simplicial $\sigma$ de dimension $n$ dans $N_{\boldsymbol{R}}$—notons qu'un tel cône est bien un objet minimal en tant que cône non dégénéré—, et $X_\Delta$ s'identifie à l'ouvert invariant lisse $\bigcup_{j=1}^n X_{\rho_j}$, réunion des orbites de codimension $\leq 1$, de la variété torique affine $X_\sigma$. Le lemme suivant nous donne une description géométrique explicite de $X_\sigma$ qui nous sera utile dans l'étude de $X_\Delta$.

Nous noterons $\tilde{\boldsymbol{T}}$ le tore standard $(\boldsymbol{C}^*)^n$, plongé dans $\boldsymbol{C}^n$ en tant que grosse orbite de son opération naturelle comme sous-groupe des matrices diagonales dans $\mathrm{GL}_n(\boldsymbol{C})$. Rappelons qu'un sous-groupe $\Gamma$ de $\mathrm{GL}_n(\boldsymbol{C})$ est dit *petit* s'il ne contient pas de réflexions complexes, i.e. de transformations d'ordre fini admettant la valeur propre 1 avec multiplicité $n-1$.

2.2. LEMME. *Soit $\sigma \subset N_{\boldsymbol{R}}$ un cône simplicial de dimension (réelle) maximale n. Alors il existe un sous-groupe fini petit $\Gamma := \Gamma_\sigma$ du tore $\tilde{\boldsymbol{T}}$ et un homomorphisme surjectif de tores $\varphi\colon \tilde{\boldsymbol{T}} \to \boldsymbol{T}$, de noyau $\Gamma$, admettant un prolongement $\bar{\varphi}\colon \boldsymbol{C}^n \to X_\sigma$ ramifié au plus en codimension 2; celui-ci induit par passage au quotient un isomorphisme de variétés toriques*

$$\boldsymbol{C}^n/\Gamma \xrightarrow{\cong} X_\sigma\,,$$

*équivariant relativement à l'isomorphisme $\tilde{\boldsymbol{T}}/\Gamma \xrightarrow{\cong} \boldsymbol{T}$. Le groupe $\Gamma$ est unique à permutation de coordonnées près; il est isomorphe au quotient $N/N'$, où $N'$ désigne le sous-réseau de $N$ engendré par la «base» $P(\sigma)$ du cône $\sigma$.*

DÉMONSTRATION. Le fait qu'on ait une telle identification $X_\sigma \xrightarrow{\cong} \boldsymbol{C}^n/\Gamma$ pour un sous-groupe $\Gamma \cong N/N'$ du tore $\tilde{\boldsymbol{T}}$ est montré dans [Fu$_2$: §2.2]. Afin de voir que $\Gamma$ est un sous-groupe petit, nous en rappelons la construction: Soient $v_1, \ldots, v_n$ les vecteurs de la «base» $P(\sigma)$ de $\sigma$, et notons $e_1, \ldots, e_n$ la base standard du réseau $\tilde{N} := \mathrm{Hom}(\boldsymbol{C}^*, \tilde{\boldsymbol{T}})$ des sous-groupes à un paramètre du tore $\tilde{\boldsymbol{T}}$, canoniquement identifié à $\boldsymbol{Z}^n$. L'homomorphisme injectif de réseaux $\psi\colon \tilde{N} \to N$ donné par $e_i \mapsto v_i$ pour $i = 1, \ldots, n$ induit un homomorphisme surjectif de tores $\varphi\colon \tilde{\boldsymbol{T}} \to \boldsymbol{T}$, défini par $\varphi \circ e_i = v_i$ et dont le noyau $\Gamma := \ker \varphi$ peut être décrit de la façon suivante: Tout vecteur $v \in N$ s'écrit d'une façon unique comme combinaison linéaire rationnelle $v = \sum_{j=1}^n \lambda_j(v) v_j$. Alors $\Gamma$ est l'image de l'homomorphisme

$$\gamma\colon N \longrightarrow \tilde{\boldsymbol{T}}, \qquad v \longmapsto \begin{pmatrix} e^{2\pi i \lambda_1(v)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{2\pi i \lambda_n(v)} \end{pmatrix} \tag{2.2.1}$$

dont le noyau est le sous-réseau $N' := \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ de $N$. On a donc les isomorphismes

$$\Gamma \cong N/\langle v_1, \ldots, v_n \rangle \cong \operatorname{coker} \psi \cong \operatorname{coker} \psi^{\mathrm{tr}}\,, \tag{2.2.2}$$

où la flèche $\psi^{\mathrm{tr}}$ désigne le transposé de l'homomorphisme $\psi$. Le dernier isomorphisme provient du fait que $\psi$ et $\psi^{\mathrm{tr}}$, homomorphismes injectifs entre réseaux du même rang, ont les mêmes facteurs invariants, ce qui implique que leurs conoyaux sont des groupes de torsion isomorphes.

Le fait que $\Gamma$ est un groupe petit provient alors de l'observation suivante: Si les coefficients $\lambda_j := \lambda_j(v)$, pour $j \neq k$, d'un vecteur $v = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j \in N$ sont tous des entiers,—en d'autres termes, si au moins $n-1$ des éléments diagonaux $e^{2\pi i \lambda_j}$ de la matrice $\gamma(v)$ dans (2.2.1) sont égaux à 1—alors $\lambda_k v_k = v - \sum_{j \neq k} \lambda_j v_j$ est un vecteur du réseau $N$. Comme tous les vecteurs $v_j$ sont primitifs, le coefficient $\lambda_k$ est également un entier et par conséquent $\gamma(v)$ est la matrice unité. Ceci montre que $\Gamma$ est un groupe petit. Il en résulte—en fait, dans notre situation, on a même une équivalence—que $\Gamma$ opère librement dans l'ouvert $\tilde{\boldsymbol{T}}$-invariant

$$Z := \{z \in \boldsymbol{C}^n\,;\, z_i = 0 \text{ pour un indice } i \text{ au plus}\}\,. \tag{2.2.3}$$

Celui-ci est le complémentaire du fermé $\bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \{z \in \boldsymbol{C}^n\,;\, z_i = z_j = 0\}$ de codimension deux dans $\boldsymbol{C}^n$, et ce fermé continent donc le lieu de ramification de la projection $\boldsymbol{C}^n \to \boldsymbol{C}^n/\Gamma_\sigma = X_\sigma$.

L'unicité de $\Gamma$ comme groupe abélien abstrait est explicitée dans le corollaire 2.3 ci-dessous; l'égalité $\Gamma = \ker \varphi$ montre alors l'unicité de $\Gamma$ comme sous-groupe du tore $\tilde{\boldsymbol{T}}$. □

Les deux corollaires suivants du lemme 2.2 nous seront utiles. Bien que connus, nous n'en avons pas trouvé de référence appropriée. Etant donné que l'ouvert $Z$ de (2.2.3) est simplement connexe, la démonstration du premier est évidente, celle du second est explicitée puisque nous nous servirons de cette démonstration ultérieurement.

2.3. Corollaire. *Soit $\Delta$ l'éventail non dégénéré minimal donné par les rayons $\rho_i$ du cône $\sigma$. Alors la variété torique $X_\Delta$, ouvert invariant de $X_\sigma$, s'identifie au quotient $Z/\Gamma$ de l'ouvert invariant $Z$ de $\boldsymbol{C}^n$ défini en* (2.2.3), *et la projection $\bar{\varphi}|_Z : Z \to X_\Delta$ est le revêtement universel. En particulier, le groupe $\Gamma$ s'identifie au groupe fondamental $\pi_1(X_\Delta)$ (cf.* (0.B.1)).

2.4. Corollaire. *Si $\Delta$ est un éventail simplicial, alors la variété torique $X = X_\Delta$ est une variété d'homologie rationnelle; en particulier, tous les homomorphismes de Poincaré $P_j(X, \boldsymbol{Q})$ sont des isomorphismes.*

Démonstration. Pour un point arbitrairement choisi $x$ de $X$, soit $B_\sigma$ l'unique orbite qui contient $x$, et $Y_\sigma$ la variété affine «transversale» de dimension $d$ comme dans (0.A.2/3). Alors on a un isomorphisme $Y_\sigma \cong \boldsymbol{C}^d/\Gamma$, ce qui entraîne bien

$$\mathscr{H}^{\boldsymbol{Q}}_{2n-j,x} \cong H^{\mathrm{cld}}_{2d-j}(Y_\sigma, \boldsymbol{Q}) \cong H^{\mathrm{cld}}_{2d-j}(\boldsymbol{C}^d, \boldsymbol{Q})^\Gamma \cong \begin{cases} \boldsymbol{Q} & \text{pour } j=0\,, \\ 0 & \text{pour } j \neq 0 \end{cases}$$

à l'aide de (0.C.4), l'isomorphisme du milieu provenant de [Bd: Thm. II.19.1]. □

C. Preuve du théorème principal pour les variétés toriques non dégénérées: Nous traitons d'abord la partie homologique:

2.5. Proposition. *Soit $\Delta$ un éventail non dégénéré dans $N_{\boldsymbol{R}}$. Alors on a*

$$H^{\mathrm{cld}}_{2n-1}(X_\Delta) = 0\,,$$

*et l'homomorphisme naturel*

$$\kappa : \mathrm{Cl\,Div}^{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{W}}(X_\Delta) \longrightarrow H^{\mathrm{cld}}_{2n-2}(X_\Delta)$$

*est un isomorphisme.*

PREUVE. Nous commençons par le cas particulier où l'éventail non dégénéré $\Delta$ est *minimal*. La variété torique $X := X_\Delta$ correspondante est alors lisse, et par conséquent, les homomorphismes de Poincaré $P_{2n-\bullet} : H^\bullet(X) \to H^{\mathrm{cld}}_{2n-\bullet}(X)$ sont des isomorphismes. En particulier, l'annulation de $H^{\mathrm{cld}}_{2n-1}(X)$ vient de la remarque 0.1.

Afin de voir que $\kappa$ est un isomorphisme, montrons d'abord que son but $H^{\mathrm{cld}}_{2n-2}(X)$ est un groupe de torsion. Soit alors $\sigma$ le cône simplicial ayant les mêmes rayons que $\Delta$. Puisque le fermé $X_\sigma \setminus X_\Delta$ de $X_\sigma$ est de dimension $n-2$, la suite exacte

$$\cdots \to H^{\mathrm{cld}}_{2n-j}(X_\sigma \setminus X_\Delta) \to H^{\mathrm{cld}}_{2n-j}(X_\sigma) \to H^{\mathrm{cld}}_{2n-j}(X_\Delta) \to H^{\mathrm{cld}}_{2n-j-1}(X_\sigma \setminus X_\Delta) \to \cdots$$

associée à l'inclusion implique l'égalité

$$H^{\mathrm{cld}}_{2n-j}(X_\Delta) = H^{\mathrm{cld}}_{2n-j}(X_\sigma) \quad \text{pour} \quad j \leq 2\,;$$

d'autre part, nous venons de voir dans la preuve du corollaire 2.4 que l'homologie rationelle $H^{\mathrm{cld}}_{2n-j}(X_\sigma, \boldsymbol{Q})$ s'annule pour $j \geq 1$, ce qui implique alors que l'homologie entière $H^{\mathrm{cld}}_{2n-2}(X)$ est un groupe de torsion.

Montrons maintenant que $\kappa$ est surjectif. Pour cela, considérons le diagramme commutatif dont les lignes sont exactes:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Div}^{\boldsymbol{T}}(X) & \longrightarrow & \mathrm{Cl\,Div}^{\boldsymbol{T}}(X) & \longrightarrow & 0 \\
\Vert\wr & & \kappa\downarrow & & \\
H^{\mathrm{cld}}_{2n-2}(B) & \longrightarrow & H^{\mathrm{cld}}_{2n-2}(X) & \longrightarrow & H^{\mathrm{cld}}_{2n-2}(\boldsymbol{T})
\end{array}$$

avec $B := \bigcup_{j=1}^{u} D_j$. Puisque le groupe abélien $H^{\mathrm{cld}}_{2n-2}(X)$ est un groupe de torsion, et que $H^{\mathrm{cld}}_{2n-2}(\boldsymbol{T})$ est libre, la flèche $H^{\mathrm{cld}}_{2n-2}(X) \to H^{\mathrm{cld}}_{2n-2}(\boldsymbol{T})$ s'annule. On en déduit la surjectivité de la fièche $H^{\mathrm{cld}}_{2n-2}(B) \to H^{\mathrm{cld}}_{2n-2}(X)$ et donc la surjectivité de $\kappa$.

Comme le but de $\kappa$ est un groupe abélien fini, il suffit alors de montrer qu'il est isomorphe à la source comme groupe abstrait. Pour cela, notons d'abord qu'on a une suite d'isomorphismes

(2.5.1) $$H^{\mathrm{cld}}_{2n-2}(X) \cong H^2(X) \cong H_1(X) \cong \pi_1(X) \cong \Gamma \cong \operatorname{coker} \psi \cong \operatorname{coker} \psi^{\mathrm{tr}}\,,$$

dont le premier provient de la dualité de Poincaré (voir ci-dessus), le deuxième, du théorème des coefficients universels, le troisième, de ce que le groupe fondamental $\pi_1(X) = \Gamma$ (cf. 2.3) est abélien, enfin les deux derniers, de la formule (2.2.2), en utilisant les notations $\psi$ et $\psi^{\mathrm{tr}}$ de la preuve de 2.2. De la description du groupe de diviseurs invariants principaux donnée dans (0.C.4), il résulte que le dernier groupe abélien dans la suite

(2.5.2) $$\mathrm{Cl\,Div}^{\boldsymbol{T}}(X) = \mathrm{Div}^{\boldsymbol{T}}(X)/\mathrm{Div}^{\boldsymbol{T}}_0(X) = \left(\bigoplus_{j=1}^{n} \boldsymbol{Z} \cdot D_j\right) \Big/ \left\{ \sum_{j=1}^{n} \langle \chi, v_j \rangle D_j\,; \chi \in M \right\}$$

s'identifie à coker $\psi^{\mathrm{tr}}$, d'où le résultat.

Ayant ainsi achevé la preuve dans le cas minimal, le cas général s'en déduit comme suit: Choisissons des rayons indépendants $\rho_1, \ldots, \rho_n \in \Delta$, notons $\Delta' \subset \Delta$ le sous-éventail non dégénéré minimal correspondant, et posons $U := X_{\Delta'}$, ouvert invariant lisse de $X = X_\Delta$. On a donc $\dim_{\mathbf{C}}(X \setminus U) \leq n-1$, et la suite exacte longue en homologie à supports fermés associée à l'inclusion du fermé $X \setminus U$ dans $X$ donne en particulier

$$0 = H^{\mathrm{cld}}_{2n-1}(X \setminus U) \longrightarrow H^{\mathrm{cld}}_{2n-1}(X) \longrightarrow H^{\mathrm{cld}}_{2n-1}(U) = 0\,,$$

ce qui montre immédiatement l'annulation du groupe $H^{\mathrm{cld}}_{2n-1}(X)$. Le fait que $\kappa$ est un isomorphisme découle d'une verision minimale du «lemme des cinq» appliquée au diagramme suivant dont les lignes sont exactes:

$$\begin{tikzcd}
 & \bigoplus_{i=n+1}^{k} \mathbf{Z}B_i \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Cl}\,\mathrm{Div}^{\mathbf{T}}_{\mathrm{W}}(X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Cl}\,\mathrm{Div}^{\mathbf{T}}_{\mathrm{W}}(U) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 = H^{\mathrm{cld}}_{2n-1}(U) \arrow[r] & H^{\mathrm{cld}}_{2n-2}(X \setminus U) \arrow[r] & H^{\mathrm{cld}}_{2n-2}(X) \arrow[r] & H^{\mathrm{cld}}_{2n-2}(U)\,, &
\end{tikzcd}$$

où $B_{n+1}, \ldots, B_k$ sont les composantes irréductibles de $X \setminus U$ de codimension 1 dans $X$. □

Si l'éventail $\Delta$ est régulier, la variété torique $X_\Delta$ est lisse. Alors les notions de diviseurs de Cartier et de Weil coïncident, et les homomorphismes de Poincaré $P_{2n-j}$ sont des isomorphismes. Le théoréme principal est donc valable, et toutes les flèches dans le diagramme commutatif (DP) de l'introduction sont des isomorphismes.

Pour montrer la partie cohomologique du théorème principal dans le cas général, nous avons besoin des énoncés en homologie locale, analogues à ceux que nous venons de montrer:

2.6. Corollaire. *Le faisceau d'homologie locale $\mathscr{H}_{2n-1}$ d'une variété torique $X$ s'annule; le faisceau $\mathscr{H}_{2n-2}$ est constant le long de chaque orbite $B_\sigma$, sa fibre s'identifie au groupe* $\mathrm{Cl}\,\mathrm{Div}^{\mathbf{T}}_{\mathrm{W}}(X_\sigma)$, *où $X_\sigma$ est l'ouvert affine invariant contenant $B_\sigma$ comme orbite fermée, et on a*:

$$H^0(X_\sigma, \mathscr{H}_{2n-2}) \cong \mathrm{Cl}\,\mathrm{Div}^{\mathbf{T}}_{\mathrm{W}}(X_\sigma)\,.$$

Preuve. Nous utilisons les identifications $(X_\sigma, B_\sigma) \cong (Y_\sigma, \{y_\sigma\}) \times \mathbf{T}''_\sigma$ de (0.A.2/3). D'après (0.C.5), pour tout $j$, le faisceau $\mathscr{H}_{2n-j}$ est constant le long de $B_\sigma$, et de fibre $H^{\mathrm{cld}}_{2d-j}(Y_\sigma)$. Il suffit alors d'appliquer la proposition 2.5: Pour $j=1$, on en déduit que la fibre s'annule; pour $j=2$, elle s'identifie à $\mathrm{Cl}\,\mathrm{Div}^{\mathbf{T}'_\sigma}_{\mathrm{W}}(Y_\sigma)$ et donc, d'après (1.E.2), au groupe $\mathrm{Cl}\,\mathrm{Div}^{\mathbf{T}}_{\mathrm{W}}(X_\sigma)$.

Au niveau des sections globales, l'isomorphisme (0.C.3) fournit un isomorphisme entre $H^0(X_\sigma, {}_X\mathscr{H}_{2n-2})$ et $H^0(Y_\sigma, {}_{Y_\sigma}\mathscr{H}_{2d-2})$. Utilisant la formule (1.E.2), il suffit alors d'identifier le dernier groupe et $\mathrm{Cl}\,\mathrm{Div}^{\mathbf{T}'_\sigma}_{\mathrm{W}}(Y_\sigma)$, ce qui vient de la suite exacte (1.F.1), appliquée à la variété contractile $Y_\sigma$ au lieu de $X$, et de la proposition 2.5. □

Afin d'achever la preuve du théorème principal pour des variétés toriques non dégénérées, il reste à montrer la partie cohomologique. Or le groupe $H^1(X)$ s'annule si et seulement si l'éventail $\Delta$ est non dégénéré. Notons que, dans le cas compact, le fait que $c^1 : \mathrm{Cl}\,\mathrm{Div}_{\mathrm{C}}^{T}(X) \to H^2(X)$ soit un isomorphisme découle de résultats connus: l'isomorphisme $\mathrm{Cl}\,\mathrm{Div}_{\mathrm{C}}^{T}(X) \cong \mathrm{Pic}(X)$ se trouve dans [Od: Cor. 2.5]; l'annulation de $H^q(X, \mathcal{O}_X)$ pour $q > 0$ (voir [Od: Cor. 2.8]) et la version de GAGA pour les variétés complexes complètes (voir [Od: §2.2]) donnent alors l'isomorphisme $\mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\cong} H^2(X)$ par la suite exacte exponentielle ([Ha: App. B.5]). On trouvera dans [$\mathrm{Fu}_2$: 3.4, Cor.] une preuve dans le cas plus général où tous les cônes maximaux sont de dimension maximum $n$—en d'autres termes, l'adhérence de chaque orbite contient un point fixe. Nous obtenons le résultat en toute généralité, valable pour une variété torique non dégénérée arbitraire, comme conséquence de la proposition 2.5, utilisant la théorie de dualité de Poincaré dans le cas singulier (cf. 1.F).

2.7. Proposition. *Pour une variété torique non dégénérée, on a*

(i) $H^1(X) = 0$,

(ii) *l'homomorphisme* $c^1 : \mathrm{Cl}\,\mathrm{Div}_{\mathrm{C}}^{T}(X) \to H^2(X)$ *est un isomorphisme.*

Preuve. L'énoncé (i) vient de la remarque 0.1. Pour (ii), notons que la suite exacte (1.F.1) nous fournit le premier isomorphisme et l'égalité dans la suite:

$$H^2(X) \cong \mathrm{im}\, P_{2n-2} = \ker [H_{2n-2}^{\mathrm{cld}}(X) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{H}_{2n-2})]$$
$$\cong \ker [\vartheta : \mathrm{Cl}\,\mathrm{Div}_{\mathrm{W}}^{T}(X) \longrightarrow \bigoplus_{\sigma} \mathrm{Cl}\,\mathrm{Div}_{\mathrm{W}}^{T}(X_\sigma)] ;$$

le dernier vient de l'inclusion de $H^0(X, \mathcal{H}_{2n-2})$ dans le groupe $\bigoplus_\sigma H^0(X_\sigma, \mathcal{H}_{2n-2})$ qu'on identifie finalement à $\bigoplus_\sigma \mathrm{Cl}\,\mathrm{Div}_{\mathrm{W}}^{T}(X_\sigma)$ par le corollaire 2.6. Il reste à voir que le groupe $\ker \vartheta$ n'est rien d'autre que $\mathrm{Cl}\,\mathrm{Div}_{\mathrm{C}}^{T}(X)$. Soit $D \in \mathrm{Div}_{\mathrm{W}}^{T}(X)$ un représentant d'une classe dans $\ker \vartheta$, alors pour tout ouvert affine invariant $X_\sigma$, la restriction $D|_{X_\sigma}$ est un diviseur principal, et donc $D$, un diviseur de Cartier. L'inclusion dans l'autre sens vient immédiatement en utilisant la formule (1.D.4).

La preuve du théorème principal est ainsi achevée. □□

Nous notons une conséquence du théorème principal et de la suite exacte (1.F.1):

2.8. Corollaire. *Pour une variété torique $X$, on a une suite exacte*

$$0 \to \mathrm{Cl}\,\mathrm{Div}_{\mathrm{C}}^{T}(X) \to \mathrm{Cl}\,\mathrm{Div}_{\mathrm{W}}^{T}(X) \to H^0(X, \mathcal{H}_{2n-2}) \to H^3(X) \to H_{2n-3}^{\mathrm{cld}}(X) .$$

D. Application: Calcul explicite de l'homologie. Le théoréme principal permet le calcul explicite du groupe d'homologie $H_{2n-2}^{\mathrm{cld}}(X)$ d'une variété torique en termes des données de l'éventail correspondant. Nous précisons ce fait dans le cas non dégénéré, en remarquant que la formule de Künneth permet de conclure dans le cas dégénéré:

2.9. PROPOSITION. *Soit $X = X_\Delta$ une variété torique non dégénérée, alors on a un isomorphisme*

$$H^{\mathrm{cld}}_{2n-2}(X) \cong \operatorname{coker}[\boldsymbol{Z}^n \xrightarrow{(v_1, \ldots, v_k)^{\mathrm{tr}}} \boldsymbol{Z}^k] \cong \boldsymbol{Z}^{k-n} \oplus \boldsymbol{Z}/(d_1) \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{Z}/(d_{n-1}),$$

*où $k$ est le nombre de rayons de l'éventail qui définit $X$, les vecteurs primitifs $v_1, \ldots, v_k$ du réseau $N \cong \boldsymbol{Z}^n$ engendrent ces rayons, et $1 \mid d_1 \mid \cdots \mid d_{n-1}$ sont les facteurs invariants de la matrice $(v_1, \ldots, v_k) \in \boldsymbol{Z}^{(n \times k)}$.*

PREUVE. Par le théorème principal, le groupe d'homologie $H^{\mathrm{cld}}_{2n-2}(X)$ s'identifie à

$$\mathrm{Cl}\,\mathrm{Div}^{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{W}}(X) = \operatorname{coker}[M \xrightarrow{\mathrm{div}} \mathrm{Div}^{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{W}}(X)] .$$

Par la numérotation choisie des rayons et le choix d'une base du réseau $N$ et de la base duale du réseau $M$, on a des isomorphismes explicites

$$\mathrm{Div}^{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{W}}(X) \cong \boldsymbol{Z}^k \quad \text{et} \quad N \cong M \cong \boldsymbol{Z}^n .$$

Il est alors facile de voir que l'homomorphisme div est représenté par la matrice dont les lignes sont les coordonnés des vecteurs $v_i$ par rapport à la base choisie. Or on sait (cf. [Bb: Ch. 7, §4.5]) qu'il existe des bases des réseaux considérés et une suite d'entiers $d_0 \mid d_1 \mid \cdots \mid d_{n-1}$, appelés *facteurs invariants* ou *diviseurs élémentaires*, tels que l'homomorphisme soit donné par la matrice diagonale $\mathrm{diag}(d_0, d_1, \ldots, d_{n-1})$, élargie par $k-n$ colonnes nulles, matrice appelée aussi *forme normale de Smith.* (L'entier $d_0$ est le plus grand commun diviseur des coordonnées des vecteurs $v_i$, le produit $d_0 d_1$ celui des mineurs d'ordre 2, etc.) Puisque les vecteurs $v_i$ sont primitifs, $d_0$ prend la valeur 1. □

**3. Applications: Propriétés d'invariance de nombres de Betti et relèvement de la classe « anticanonique ».** Le rang du groupe de diviseurs de Weil invariants et le nombre de Betti $b^{\mathrm{cld}}_{2n-2}(X)$ d'une variété torique $X = X_\Delta$ s'expriment immédiatement en termes d'un éventail non dégénéré $\Delta$ par les formules $\mathrm{rg}\,\mathrm{Div}^{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{W}}(X_\Delta) = k(\Delta) = k$ et $\mathrm{rg}\, H^{\mathrm{cld}}_{2n-2}(X) = k-n$. Cependant, la détermination du rang du groupe $\mathrm{Div}^{\boldsymbol{T}}_{\mathrm{C}}(X)$ et donc du nombre de Betti $b_2(X)$ n'est pas si facile. Au début de cette section, nous explicitons une formule pour calculer ce nombre en termes de $\Delta$, et nous nous en servons pour étudier des propriétés d'invariance. Nous discutons un exemple, montrant que $b_2$ n'est pas un invariant du type combinatoire de l'éventail, même dans le cas complet. D'autre part, nous montrons que tous les nombres de Betti d'une variété torique sont des invariants du type linéaire de l'éventail. Nous explicitons ensuite la torsion du groupe d'homologie $H^{\mathrm{cld}}_{2n-2}(X)$. Finalement, nous discutons le problème du relèvement de la classe anticanonique en cohomologie. Par le théorème principal, ceci revient à chercher des conditions pour que le diviseur de Weil invariant qui représente cette classe soit de

Cartier. On retrouve ainsi la condition nécessaire et suffisante, due à Ishida, pour que les singularités d'une variété torique soient de Gorenstein. Nous considérons aussi le cas particulier d'un éventail simplicial, où l'on dispose d'une autre condition équivalente en termes de sous-groupes de $GL_n$, due à K. Watanabe.

A. Les nombres de Betti $b_{2n-2}^{\mathrm{cld}}(X)$ et $b_2(X)$: D'après les formules (1.C.1) et (1.C.3), nous avons $\operatorname{rg}\operatorname{Div}_{\mathrm{W}}^{\boldsymbol{T}}(X_\Delta)=k(\Delta)$ et $\operatorname{rg}\operatorname{Div}_0^{\boldsymbol{T}}(X_\Delta)=d(\Delta)$, ce qui, à l'aide du théorème fondamental 2.1, (iii), implique immédiatement la formule

$$b_{2n-2}^{\mathrm{cld}}(X_\Delta)=k(\Delta)-d(\Delta)+\binom{n-d(\Delta)}{2}. \tag{3.A.1}$$

Nous allons maintenant expliciter le nombre $b_2(X_\Delta)$ en termes de l'éventail $\Delta$. Grâce à la proposition 2.7 et la formule (1.C.3), il suffit de calculer le rang du groupe $\operatorname{Div}_{\mathrm{C}}^{\boldsymbol{T}}(X_\Delta)\cong M^{[\Delta]}$. Or, dans $\operatorname{Div}_{\mathrm{W}}^{\boldsymbol{T}}(X_\Delta)$, nous avons l'égalité

$$\operatorname{Div}_{\mathrm{C}}^{\boldsymbol{T}}(X_\Delta)=\bigcap_{\sigma\in\Delta^{\max}} G_\sigma\,, \quad \text{posant} \quad G_\sigma:=\{D\in\operatorname{Div}_{\mathrm{W}}^{\boldsymbol{T}}(X_\Delta)\,;\, D|_{X_\sigma}\in\operatorname{Div}_0^{\boldsymbol{T}}(X_\sigma)\}\,,$$

et utilisant la formule (1.D.4). Afin d'en déduire une formule de calcul du rang, il est commode de passer, dans le groupe abélien libre dual $\operatorname{Hom}(\operatorname{Div}_{\mathrm{W}}^{\boldsymbol{T}}(X_\Delta), \boldsymbol{Z})$, au sous-groupe orthogonal $\operatorname{Div}_{\mathrm{C}}^{\boldsymbol{T}}(X_\Delta)^\perp=\sum G_\sigma^\perp$. Par conséquent, on a

$$\operatorname{rg}\operatorname{Div}_{\mathrm{C}}^{\boldsymbol{T}}(X_\Delta)=k(\Delta)-\operatorname{rg}\Bigl(\sum_{\sigma\in\Delta^{\max}} G_\sigma^\perp\Bigr)\,,$$

résultat qui, à l'aide de la proposition 1.4 et de la formule (1.E.2), entraîne la formule suivante (cf. [Ew: V. 5.9]):

3.1. Proposition. *Avec les notations introduites ci-dessus, on a*

$$b_2(X_\Delta)=b_{2n-2}^{\mathrm{cld}}(X_\Delta)-\operatorname{rg}\Bigl(\sum_{\sigma\in\Delta^{\max}} G_\sigma^\perp\Bigr)\,.$$

3.2. Remarque. On peut calculer le rang du groupe abélien libre $\sum_{\sigma\in\Delta^{\max}} G_\sigma^\perp$ comme rang d'une matrice entière $R_\Delta$ dont les lignes représentent des relations linéaires entre les générateurs primitifs des cônes maximaux de $\Delta$. Pour cela, notons d'abord que chaque groupe $G_\sigma^\perp$ s'identifie au groupe de relations linéaires entre les éléments de la «base» $P(\sigma)$ comme suit: Par rapport à l'identification $\operatorname{Div}_{\mathrm{W}}^{\boldsymbol{T}}(X_\Delta)\cong\boldsymbol{Z}^P$ de (1.C.1), avec $P=P(\Delta)$, et grâce à (1.C.2) et (1.D.4), nous pouvons écrire

$$G_\sigma=\{(a_v)_{v\in P}\in\boldsymbol{Z}^P\,;\text{il existe }\chi\in M\text{ tel que }a_v=\langle\chi, v\rangle\text{ pour tout }v\in P(\sigma)\}\,.$$

En notant $(\varepsilon_v)_{v\in P}$ la base canonique du groupe abélien libre $\boldsymbol{Z}^P$, où $\varepsilon_v:=(\delta_{vw})_{w\in P}\in\boldsymbol{Z}^P$ est la fonction caractéristique de $v\in P$, montrons l'égalité suivante:

$$G_\sigma^\perp=\{l\in\operatorname{Hom}(\boldsymbol{Z}^P, \boldsymbol{Z})\,;\textstyle\sum_{v\in P(\sigma)} l(\varepsilon_v)v=0,\ l(\varepsilon_v)=0\text{ pour }v\in P\setminus\sigma\}\,. \tag{3.2.1}$$

En effet, le groupe $G_\sigma$ est engendré par les éléments $\varepsilon_v$ pour $v\in P\setminus\sigma$ et par les sommes

$\sum_{v\in P(\sigma)}\langle\chi, v\rangle\varepsilon_v$ pour $\chi\in M$. Pour une telle somme et pour une forme linéaire $l$, on a $l(\sum_v\langle\chi, v\rangle\varepsilon_v)=\langle\chi, \sum_v l(\varepsilon_v)v\rangle$, et cette expression est nulle pour tout caractère $\chi\in M$ si et seulement si l'on a $\sum_v l(\varepsilon_v)v=0$.

Afin d'obtenir une matrice «de relations» $R_\Delta$ avec $\operatorname{rg} R_\Delta=\operatorname{rg}(\sum G_\sigma^\perp)$, on parcourt l'ensemble des cônes maximaux de $\Delta$ en ordre fixé $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_s\}$, et pour chaque tel cône $\sigma_\nu$, on choisit d'abord $d:=d(\sigma_\nu)$ vecteurs $v_1^\nu, \ldots, v_d^\nu$ dans $P(\sigma_\nu)$ qui sont linéairement indépendants. Il reste donc $k(\sigma_\nu)-d(\sigma_\nu)$ vecteurs $v_i^\nu$ dans $P(\sigma_\nu)$. Pour chacun d'eux, on a une seule relation linéaire entière primitive (au signe près) $\sum_{j=1}^d a_{ij}^\nu v_j^\nu+a_{ii}^\nu v_i^\nu=0$. Posant $l_i^\nu(\varepsilon_v):=a_{ij}^\nu$ pour $v=v_j^\nu$ avec $j=1, \ldots, d, i$, et $l_i^\nu(\varepsilon_v):=0$ pour $v\in P(\Delta)\setminus\{v_1^\nu, \ldots, v_d^\nu, v_i^\nu\}$, on obtient ainisi une collection $\{l_i^\nu\}$ de formes linéaires $l_i^\nu: \boldsymbol{Z}^P\to\boldsymbol{Z}$. L'évaluation de ces formes linéaires sur les éléments $\varepsilon_{v_j}$ de la base canonique de $\boldsymbol{Z}^P$ fournit les éléments de la matrice de relations

$$R_\Delta:=(l_i^\nu(\varepsilon_{v_j})),$$

à $\sum_{\nu=1}^s(k(\sigma_\nu)-d(\sigma_\nu))$ lignes et $k(\Delta)$ colonnes.

Comme application de la proposition 3.1, nous discutons ci-dessous le problème de l'invariance de $b_2(X_\Delta)$ par rapport aux relations suivantes:

3.3. DÉFINITION. Etant donnés deux éventails $\Delta$ et $\Delta'$ dans $N_{\boldsymbol{R}}$, nous disons qu'ils ont

- le même *type combinatoire* s'ils sont isomorphes comme ensembles partiellement ordonnés (par l'inclusion de cônes),
- le même *type linéaire* s'il existe un automorphisme $\psi$ de l'espace vectoriel $N_{\boldsymbol{R}}$ tel que $\Delta'=\psi(\Delta):=\{\psi(\sigma); \sigma\in\Delta\}$.

Dans cette dernière définition, nous ne supposons pas que les réseaux $N$ et $\psi(N)$ dans $N_{\boldsymbol{R}}$ soient *commensurables*, c'est-à-dire que l'on ait $N\otimes_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{Q}=\psi(N)\otimes_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{Q}$.

B. Propriétés d'invariance de $b_2$ par rapport au type combinatoire: D'après la formule (3.A.1), le nombre de Betti $b_{2n-2}^{\mathrm{cld}}(X_\Delta)$ ne dépend que du nombre de rayons de $\Delta$ et de la dimension $d(\Delta)$ et donc, pour $d(\Delta)$ fixé, il est un invariant du type combinatoire de l'éventail $\Delta$. En général, ceci n'est pas vrai pour $b_2(X_\Delta)$, même dans le cas complet—voir l'exemple 3.5 ci-dessous. Cependant, on a le résultat suivant:

3.4. PROPOSITION. *Pour un éventail simplicial $\Delta$, on a $G_\sigma^\perp=\{0\}$ pour tout cône $\sigma$ et donc $b_2(X_\Delta)=b_{2n-2}^{\mathrm{cld}}(X_\Delta)$. Par conséquent, pour $d(\Delta)$ fixé, le nombre $b_2(X_\Delta)$ est un invariant du type combinatoire de l'éventail $\Delta$.*

PREUVE. En effet, d'après (3.2.1), on a toujours $G_\sigma^\perp=\{0\}$ pour un cône simplicial $\sigma$; la formule précédente pour $b_2$ est donc une conséquence immédiate de 3.1. □

Notons au passage que, dans le cas simplicial *complet*, on a la formule

$$b_{2s}(X_\Delta)=\sum_{i=s}^n(-1)^{i-s}\binom{i}{s}\operatorname{card}\Delta^{(n-i)}\quad\text{et}\quad b_{2s+1}(X_\Delta)=0$$

pour les nombres de Betti de $X_\Delta$, qui sont donc tous des invariants du type combinatoire de $\Delta$, voir [Da: Prop. 12.11]. En outre, notons qu'en dimension $n \leq 2$, tout éventail $\Delta$ est simplicial.

Pour $n \geq 3$, on a des éventails *complets* $\Delta$ et $\Delta'$ ayant le même type combinatoire, mais tels que $b_2(X_\Delta) \neq b_2(X_{\Delta'})$. Dans le cas $n=3$, un tel exemple avec deux variétés toriques projectives, l'une ayant $b_2=2$ et l'autre, $b_2=1$, a été donné par M. McConnell [MCo], en utilisant la suite spectrale de Danilov [Da: §12] pour le calcul de $b_2$. Dans une étude systématique de ce problème, M. Eikelberg a montré qu'on peut même obtenir deux variétés toriques compactes telle que pour l'une on ait $b_2=1$ et pour l'autre, $b_2=0$, ce qui montre que cette dernière est donc une variété non projective (voir [$\mathrm{Ei}_1$: Expl. 3.5]). Le fait que le nombre $k(\Delta)=6$ soit le plus petit possible pour une telle construction (cf. [$\mathrm{Ei}_2$: Cor. 3.9]), et l'unicité de son type combinatoire se voient par une estimation du rang de la matrice $R_\Delta$. Nous discutons ici un exemple de ce type:

3.5. Exemple. Dans le réseau $N \cong \boldsymbol{Z}^3$, considérons l'éventail $\Delta$ engendré par les faces du prisme triangulaire dont les sommets sont les vecteurs primitifs $v_1 := e_1+e_2+e_3$, $v_2 := -e_1+e_2+e_3$, $v_3 := -e_2+e_3$ et $v_i := v_{i-3}-2e_3$ pour $i=4$, 5, 6. Les cônes de dimension maximale de $\Delta$ ont les bases suivantes:

$$(v_1, v_2, v_3), \quad (v_1, v_2, v_4, v_5), \quad (v_2, v_3, v_5, v_6), \quad (v_3, v_1, v_6, v_4), \quad (v_4, v_5, v_6).$$

Notons $\Delta'$ l'éventail obtenu de la même façon en remplaçant $v_1$ par $v_1' := 2v_1 - v_2 = 3e_1+e_2+e_3$. En parcourant les bases dans cet ordre, on obtient les matrices de relations

$$R_\Delta = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R_{\Delta'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

pour lesquelles on a $\operatorname{rg} R_\Delta = 2$ et $\operatorname{rg} R_{\Delta'} = 3$, ce qui implique $b_2(X)=1$ et $b_2(X')=0$.

La remarque suivante nous donne les autres nombres de Betti de $X$ et de $X'$; en particulier, on trouve $b_3(X)=0$ et et $b_3(X')=1$:

3.6. Remarque. Pour une variété torique *compacte* $X$ de dimension 3, notant $f := \operatorname{card} \Delta^{(3)}$ le nombre de cônes de dimension trois dans $\Delta$, on a:

$$b_0 = b_6 = 1, \quad b_1 = b_5 = 0, \quad b_3 = b_2 - f + k - 1, \quad \text{et} \quad b_4 = k - 3.$$

Preuve. L'égalité $b_1 = b_5 = 0$ est une conséquence de ce que $P_5$ est un isomorphisme. Le seul nombre de Betti qui reste à déterminer est $b_3$, et celui-ci se calcule à l'aide de la caractéristique d'Euler-Poincaré topologique $e(X)$. Or on a toujours l'égalité

$$e(X) = e(X^{\boldsymbol{T}}),$$

où $X^{\boldsymbol{T}}$ est le sous-espace des points fixes, et les points fixes d'une variété torique correspondent biunivoquement aux cônes de dimension $n$ de l'éventail, d'où l'énoncé.

Pour une autre preuve de l'égalité $e(X)=f$, voir [Fu$_2$: 3.2. p. 59]. □

C. Invariance des nombres de Betti par rapport au type linéaire d'éventails: Dans ce paragraphe, nous montrons le résultat suivant:

3.7. PROPOSITION. *Tous les nombres de Betti $b_j(X_\Delta)$ et $b_j^{\text{cld}}(X_\Delta)$ d'une variété torique sont des invariants du type linéaire de l'éventail $\Delta$, ou bien, ce qui revient au même, des invariants par rapport aux revêtements ramifiés finis et équivariants relativement à des endomorphismes surjectifs du tore $\boldsymbol{T}$.*

DÉMONSTRATION. Afin de nous ramener au cas non dégénéré, notons que le nombre $d(\Delta)$ est évidemment un invariant du type linéaire de l'éventail $\Delta$. D'autre part, si $X=X_\Delta$ et $X'=X_{\Delta'}$ sont des variétés toriques, alors un revêtement ramifié fini $X\to X'$ et équivariant relativement à un endomorphisme surjectif du tore $\boldsymbol{T}$ est donné par un endomorphisme injectif $N\to N$ dont l'extension à un automorphisme $\psi$ de $N_{\boldsymbol{R}}$ envoie tout cône $\sigma$ de $\Delta$ dans un cône $\sigma'=\psi(\sigma)$ de $\Delta'$ (voir [Od: §1.5, Thm. 1.13, Cor. 1.16]), fournissant ainsi l'équivalence linéaire entre $\Delta$ et $\Delta'$. En outre, on en déduit directement que le revêtement $X\to X'$ respecte nécessairement les décompositions du type (0.C.1) des variétés toriques $X$ et $X'$. Nous venons donc de voir l'une des implications du résultat suivant:

3.8. LEMME. *Deux éventails non dégénérés $\Delta$ et $\Delta'$ dans $N_{\boldsymbol{R}}$ ont le même type linéaire si et seulement s'il existe des revêtements ramifiés finis $X_\Delta\to X_{\Delta'}$ et $X_{\Delta'}\to X_\Delta$ équivariants relativement à des endomorphismes surjectifs du tore $\boldsymbol{T}$.*

DÉMONSTRATION. Il reste à montrer que l'égalité du type linéaire implique l'existence d'un tel revêtement. Considérons un automorphisme $\psi$ de $N_{\boldsymbol{R}}$ qui réalise l'équivalence des types linéaires, i.e. avec $\psi(\Delta)=\Delta'$. Si $\psi$ provient d'un homomorphisme (injectif) $N\to N$, i.e. si $\psi(N)\subset N$, il existe un endomorphisme surjectif associé du tore $\boldsymbol{T}$ qui se prolonge au revêtement $X_\Delta\to X_{\Delta'}$ cherché. (En multipliant $\psi$ par un entier positif convenable, on peut se ramener à cette situation si les réseaux $N$ et $\psi(N)$ sont commensurables.) Il suffit donc de voir qu'on peut toujours remplacer $\psi$ par un isomorphisme $\tilde{\psi}\colon N_{\boldsymbol{R}}\to N_{\boldsymbol{R}}$, satisfaisant aux deux propriétés $\tilde{\psi}(\Delta)=\Delta'$ et $\tilde{\psi}(N)\subset N$.

On peut numéroter les collections $P(\Delta)=\{v_1,\dots,v_k\}$ et $P(\Delta')=\{w_1,\dots,w_k\}$ de vecteurs primitifs telles que l'on ait $\psi(v_i)=\lambda_i w_i$ avec des nombres réels positifs $\lambda_i$, et que les vecteurs $v_1,\dots,v_n$ soient linéairement indépendants. On définit alors une partition de l'ensemble $\{v_1,\dots,v_n\}$ par la condition que $v_i$ et $v_j$ appartiennent à la même partie si et seulement si l'on a $\lambda_i/\lambda_j\in\boldsymbol{Q}^*$. Cette partition fournit une décomposition en somme directe $N_{\boldsymbol{R}}=\bigoplus_{j=1}^s V_j$, où $V_j$ est le sous-espace engendré par la $j$-ième partie de $\{v_1,\dots,v_n\}$. Il est alors facile de voir que tout vecteur $v_m$ pour $m=n+1,\dots,k(\Delta)$ (s'il y en a) appartient à l'un des $V_j$: en appliquant l'isomorphisme $\psi$ à $v_m=\sum_{i=1}^n\alpha_{mi}v_i$, comparant les coefficients avec $w_m=\sum_{i=1}^n\beta_{mi}w_i$, et notant $\alpha_{mi},\beta_{mi}\in\boldsymbol{Q}$, on voit immédiatement les équivalences $\alpha_{mi}\neq 0\Leftrightarrow\beta_{mi}\neq 0\Leftrightarrow\lambda_m/\lambda_i\in\boldsymbol{Q}^*$. Par conséquent, tous les

$v_i$ avec $\alpha_{mi} \neq 0$, et donc aussi $v_m$, appartiennent au même sous-espace $V_j$.

Pour tout $j = 1, \ldots, s$, choisissons $\xi_j \in \boldsymbol{R}_{>0}$ tel que $\xi_j/\lambda_i \in \boldsymbol{Q}^*$ pour tout $v_i \in V_j$. Alors l'homomorphisme

$$\tilde{\psi} = \left( \bigoplus_{j=1}^{s} m\xi_j^{-1} \operatorname{Id}_{V_j} \right) \circ \psi ,$$

où $m$ est un entier positif convenable, jouit des propriétés exigées. $\square$

Nous pouvons maintenant terminer la preuve de la proposition 3.7 comme suit: Dans le cas d'un revêtement équivariant fini $X_\Delta \to X_{\Delta'}$ qui prolonge un endomorphisme de $\boldsymbol{T}$ de noyau fini $\Gamma \subset \boldsymbol{T}$, on a $X_{\Delta'} \cong X_\Delta/\Gamma$.

Or, si un groupe fini $\Gamma$ opère dans un espace topologique «raisonnable» $X$, alors on a une opération induite en homologie rationnelle $H^\Phi_\bullet(X, \boldsymbol{Q})$ à supports dans les familles des fermés $\Phi = \mathrm{cld}$ et des compacts $\Phi = c$, et l'homologie de l'espace d'orbites $H^\Phi_\bullet(X/\Gamma, \boldsymbol{Q})$ est isomorphe à l'homologie invariante $H^\Phi_\bullet(X, \boldsymbol{Q})^\Gamma$ (voir [Bd: II, Thm. 19.1]). Comme $\Gamma$ est un sous-groupe d'un groupe connexe, l'opération induite dans $H^\Phi_\bullet(X, \boldsymbol{Q})$, espace vectoriel rationnel de dimension finie, est triviale. On en déduit l'isomorphisme $H^\Phi_\bullet(X/\Gamma, \boldsymbol{Q}) \cong H^\Phi_\bullet(X, \boldsymbol{Q})$ et donc, l'égalité des nombres de Betti $b^\Phi_j$ de $X_\Delta$ et $X_{\Delta'}$. $\square\square$

D. La torsion de $H^{\mathrm{cld}}_{2n-2}(X)$: Dans ce paragraphe, nous montrons le résultat suivant:

3.9. Proposition. *Soit $\Delta$ un éventail et $X = X_\Delta$ la variété torique correspondante, alors le sous-groupe de torsion de $H^{\mathrm{cld}}_{2n-2}(X)$ est donné par*

(3.9.1) $$\operatorname{Tors} H^{\mathrm{cld}}_{2n-2}(X) \cong (N \cap \operatorname{lin} \Delta)/\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$$

*où $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle := \sum \boldsymbol{Z} v_i$ est le sous-groupe de $N \cap \operatorname{lin} \Delta$ engendré par les vecteurs primitifs $v_i \in P$.*

Démonstration. Notons d'abord qu'il suffit de considérer le cas non dégénéré. En outre, remplacer l'éventail $\Delta$ par son squelette $\Delta^{(\leq 1)}$ donné par les rayons ne change pas les deux termes de la formule (3.9.1). Comme dans la preuve de la proposition 2.5, nous avons alors un isomorphisme entre $\operatorname{Tors} H^{\mathrm{cld}}_{2n-2}(X)$ et le groupe fondamental $\pi_1(X_{\Delta^{(\leq 1)}})$, et l'énoncé découle de la formule (0.B.1).

3.10. Remarque. A l'aide de ce qui précède, on peut calculer explicitement le groupe $\operatorname{Tors} H^{\mathrm{cld}}_{2n-2}(X)$ à partir de l'éventail. Par exemple, on trouve que les deux variétés compactes $X$ et $X'$ de dimension 3 considérées dans 3.5 ont la même torsion $\operatorname{Tors} H_4(X) \cong \operatorname{Tors} H_4(X') \cong \boldsymbol{Z}/(2)$.

Dans sa thèse [Fs], Stephan Fischli a donné une méthode explicite pour calculer tous les nombres de Betti et tous les groupes de torsion d'une variété torique compacte de dimension 3, en utilisant la suite spectrale associée à la filtration «torique» canonique par les fermés invariants $\bigcup_{d(\sigma)=n-i} \bar{B}_\sigma$. Pour les deux exemples $X$ et $X'$ de 3.5, on trouve les autres groupes de torsion $\mathrm{Tors}\, H_2(X) \cong \boldsymbol{Z}/(2)$ et $\mathrm{Tors}\, H_2(X') \cong \boldsymbol{Z}/(2) \oplus \boldsymbol{Z}/(2)$, le groupe $H_3$ étant libre dans les deux cas.

E. Relèvement de la classe «anticanonique». Etant donnée l'importance des diviseurs (anti-)canoniques dans la théorie des variétés algébriques, il est naturel de rechercher des conditions pour qu'un tel diviseur de Weil soit de Cartier. Dans une variété torique, il en est ainsi si et seulement si toutes les singularités sont de *Gorenstein* (voir l'introduction de [Is]), c'est-à-dire si chacun des anneaux de coordonnées $\boldsymbol{C}[X_\sigma] = \boldsymbol{C}[M \cap \check{\sigma}]$ est un anneau de Gorenstein.

Du point de vue de la (co-)homologie, pour une variété singulière de dimension $n$, la classe de Chern $c_{n-1}(X)$ au sens de M.-H. Schwartz [Sc] et R. MacPherson [MPh] n'existe qu'en homologie, dans $H_{2n-2}^{\mathrm{cld}}(X)$, et la question naturelle est de savoir si elle se relève en cohomologie. Dans le cas torique, le théorème principal montre que cette question est équivalente à celle qui se pose du point de vue des diviseurs. Or la classe de Chern se décrit explicitement comme classe du diviseur de Weil invariant $\sum_{i=1}^{k} D_i$ (voir [BBF]). Ce diviseur est de Cartier si et seulement si chaque anneau $\boldsymbol{C}[X_\sigma] = \boldsymbol{C}[M \cap \check{\sigma}]$ est de Gorenstein. On retrouve ainsi, parmi les énoncés du théorème suivant, la caractérisation de tels anneaux donnée par M.-N. Ishida dans [Is: §7]:

3.11. Théorème ([Is] pour l'essentiel). *Etant donnée une variété torique $X$, alors les conditions suivantes sont équivalentes*:

(1) *La classe de Chern $c_{n-1}(X)$ est dans l'image de l'homomorphisme de Poincaré*;
(2) *le diviseur de Weil $\sum_{i=1}^{k(\Delta)} D_i$ est un diviseur de Cartier*;
(3) *pour tout cône $\sigma \in \Delta^{\max}$, il existe un caractère $\chi_\sigma \in M$ tel que la «base» $P(\sigma)$ soit contenue dans l'hyperplan affine $\{v \in N_{\boldsymbol{R}}\,;\, \langle \chi_\sigma, v \rangle = 1\}$ (en d'autres termes, pour tout vecteur $v_i \in P(\sigma)$, on a $\langle \chi_\sigma, v_i \rangle = 1$)*;
(4) *toutes les singularités sont de Gorenstein*,
(5) *le fibré «anticanonique» $\Lambda^n T(X_{\mathrm{rég}})$ de la partie lisse admet un prolongement, comme fibré en droites, à la variété $X$ tout entière.*

L'implication (2) $\Rightarrow$ (3) est un cas particulier de la remarque suivante, laquelle donne une caractérisation des classes d'homologie de $H_{2n-2}^{\mathrm{cld}}(X)$ dont un multiple non nul est dans l'image de l'homomorphisme de Poincaré:

3.12. Remarque. Etant donnée une classe de diviseurs de Weil invariants, soit $D = \sum_{i=1}^{k} a_i D_i$ un représentant dont tous les coefficients $a_i$ sont non nuls, situation à laquelle on peut toujours se ramener par l'addition d'un diviseur principal $\mathrm{div}(\chi) = \sum_{i=1}^{k} \langle \chi, v_i \rangle D_i$ convenable. Pour qu'un multiple $mD$ avec $m \neq 0$ soit un diviseur de Cartier, il faut et il suffit que, pour chaque cône $\sigma \in \Delta^{\max}$, les multiples rationnels $(1/a_i)v_i$ de tous les vecteurs $v_i \in P \cap \sigma$ soient situés dans un hyperplan affine de $N_{\boldsymbol{R}}$: les conditions $\langle \chi_\sigma, v_i \rangle = m a_i$ et $\langle \chi_\sigma, (1/a_i) v_i \rangle = m$ sont trivialement équivalentes (voir aussi [Ei: Lemma 2.2]).

Dans certaines situations, les conditions du théorème sont automatiquement remplies: il est bien connu que les singularités d'hypersurfaces, et plus généralement, les singularités d'intersections complètes, sont de Gorenstein. On a donc:

3.13. COROLLAIRE. *Si une variété torique $X$ n'a que des singularités d'intersections complètes, alors elle satisfait les conditions* (1) *à* (5) *du théorème* 3.11.

Les singularités toriques d'intersection complète en dimension trois admettent une belle caractérisation combinatoire en termes de polygones convexes entiers dans $\boldsymbol{R}^2$, explicitée dans l'article de Ishida [Is: §8].

Le cas d'une variété torique définie par un éventail simplicial est particulièment intéressant. Nous rappelons qu'une telle variété affine non dégénérée $X_\sigma$ est isomorphe à un quotient de $\boldsymbol{C}^n$ par un sous-groupe fini petit $\Gamma = \Gamma_\sigma$ de $GL_n(\boldsymbol{C})$; en d'autres termes, son anneau de coordonnées est l'anneau des polynômes invariants $\boldsymbol{C}[x_1, \ldots, x_n]^\Gamma$. Une caractérisation utile en termes du groupe $\Gamma$ pour qu'un tel anneau soit de Gorenstein est due à K. Watanabe:

3.14. PROPOSITION [Wa]. *Soit $\Gamma$ un sous-groupe fini petit de matrices diagonales dans $GL_n(\boldsymbol{C})$, alors l'anneau $\boldsymbol{C}[x_1, \ldots, x_n]^\Gamma$ est de Gorenstein si et seulement si $\Gamma$ est un sous-groupe de $SL_n(\boldsymbol{C})$.*

Ce résultat implique la spécialisation suivante du théorème 3.11:

3.15. COROLLAIRE. *Pour une variété torique $X$ définie par un éventail simplicial satisfaisant à $\Delta^{\max} = \Delta^{(n)}$, les conditions* (1) *à* (5) *du théorème* 3.11, *en particulier le fait que la classe de Chern $c_{n-1}(X)$ soit dans l'image de l'homomorphisme de Poincaré, sont équivalentes à la condition*:

(6) *Pour tout cône $\sigma$ de $\Delta^{\max}$, le sous-groupe fini petit $\Gamma_\sigma$ des matrices diagonales de $GL_n(\boldsymbol{C})$ tel que $X_\sigma \cong \boldsymbol{C}^n/\Gamma_\sigma$ est un sous-groupe de $SL_n(\boldsymbol{C})$.*

## RÉFÉRENCES


[BBF] G. BARTHEL, J.-P. BRASSELET ET K.-H. FIESELER, Classes de Chern des variétés toriques singulières. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 315, Série I (1992), 187–192.

[BBFK] G. BARTHEL, J.-P. BRASSELET, K.-H. FIESELER UND L. KAUP, Invariante Divisoren und Schnitthomologie von torischen Varietäten. Banach Center Publications, "Parameter Spaces", Vol. 36, Warszawa 1996, ed. P. Pragacz, pp. 9–23.

[Ba, Kp] G. BARTHEL ET L. KAUP, Topologie des surfaces complexes compactes singulières. Dans S. Kilambi, G. Barthel, L. Kaup: Sur la topologie des surfaces complexes compactes. Sém. Math. Sup. 80, Les Presses de l'Université de Montréal, 1982, pp. 61–297.

[Bd] G. BREDON, Sheaf Theory. MacGraw-Hill, New York etc., 1967.

[Bl] J. J. BRYLINSKI, Éventails et variétés toriques. Dans Séminaire sur les Singularités des Surfaces, Palaiseau 1976–1977, éd. par M. Demazure, H. Pinkham et B. Teissier. Lecture Notes in Math. 777, Springer-Verlag, Berlin etc., 1980., pp. 247–288.

[Da] V. I. DANILOV, The Geometry of Toric Varieties. Russian Math. Surveys 33:2 (1978), 97–154, transl. de Geometrija toričeskich mnogoobrazij. Usp. Mat. Nauk 33:2, 200 (1978), 85–134.

[Eh] F. EHLERS, Eine Klasse komplexer Mannigfaltigkeiten und die Auflösung einiger isolierter Singularitäten. Math. Annalen 218 (1975), 127–156.

[$Ei_1$] M. EIKELBERG, The Picard Group of a Compact Toric Variety. Results in Math. 22 (1992), 509–527.

[$Ei_2$] M. EIKELBERG, Picard Groups of Compact Toric Varieties and Combinatorial Classes of Fans. Results in Math. 23 (1993), 251–293.

[Ew] G. EWALD, Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry. To appear in Grad. Texts in Math., Springer-Verlag, New York etc.

[Fi] K.-H. FIESELER, Rational Intersection Cohomology of Projective Toric Varieties. Journ. reine angew. Math. (Crelle) 413 (1991), 88–98.

[Fs] St. FISCHLI, On Toric Varieties. Dissertation, Bern 1992.

[$Fu_1$] W. FULTON, Intersection Theory. Ergebn. Math. Grenzgeb. (3. Folge), Bd. 2, Springer-Verlag, Berlin etc., 1984.

[$Fu_2$] W. FULTON, Introduction to Toric Varieties. Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1993.

[FMSS] W. FULTON, R. MACPHERSON, F. SOTTILE AND B. STURMFELS, Intersection theory on spherical varieties. Journ. Algebr. Geometry 4 (1995), 181–193.

[Gr, Ha] Ph. GRIFFITHS AND J. HARRIS, Principles of Algebraic Geometry. Pure and Applied Math., Wiley, New York etc., 1978.

[Ha] R. HARTSHORNE, Algebraic Geometry. Graduate Texts in Math. 52, Springer-Verlag, New York etc., 1977.

[Is] M.-N. ISHIDA, Torus embeddings and dualizing complexes. Tôhoku Math. J. 32 (1980), 111–146.

[$Kp_1$] L. KAUP, Poincaré-Dualität für Räume mit Normalisierung. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci. 26, I (1972), 1–31.

[$Kp_2$] L. KAUP, Zur Homologie projektiv-algebraischer Varietäten. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci. 26, I (1972), 479–513.

[MCo] M. MCCONNELL, The Rational Homology of Toric Varieties is not a Combinatorial Invariant. Proc. Amer. Math. Soc. 105 (1989), 986–991.

[MPh] R. MACPHERSON, Chern Classes for Singular Algebraic Varieties. Annals of Math. 100 (1974), 423–432.

[Od] T. ODA, Convex Bodies and Algebraic Geometry. Ergebn. Math. Grenzgeb. (3. Folge), Bd. 15, Springer-Verlag, Berlin etc., 1988.

[Sc] M. H. SCHWARTZ, Classes caractéristiques définies par une stratification d'une variété analytique complexe. CRAS t. 260 (1965), 3262–3264 et 3535–3537.

[Sp] E. H. SPANIER, Algebraic Topology. McGraw-Hill, New York etc., 1966.

[Wa] K. WATANABE, Certain invariant subrings are Gorenstein I, II. Osaka J. Math. 11 (1974), 1–8, 379–388.

G. BARTHEL AND L. KAUP
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT KONSTANZ
POSTFACH 5560 D 203
D-78434 KONSTANZ
GERMANY

*E-mail address*: Gottfried.Barthel@uni-konstanz.de
Ludger.Kaup@uni-konstanz.de

J. P. BRASSELET
IML-CNRS
LUMINY CASE 930
F-13288 MARSEILLE CEDEX 9
FRANCE

*E-mail address*: jpb@iml.univ-mrs.fr

K.-H. Fieseler
Matematiska Institutionen
Uppsala Universitet
Box 480
S-751 06 Uppsala
Sweden

*E-mail address*: khf@math.uu.se