SUR LA DÉRIVÉE DE LIE DE L'ÊTRE GÉOMÉTRIQUE ET SON GROUPE D'INVARIANCE[*]

PAR

YOSHIHIRO TASHIRO

Sur les déformations infinitésimales et sur les groupes de transformations dans un espace généralisé, les géomètres nous ont déjà donné beaucoup de résultats importants, qui sont exposés, par exemple, dans l'ouvrage récent de M. K. YANO.[1]

Dans la théorie des déformations infinitésimales, la déformation annulant la dérivée de LIE d'un être géométrique joue un rôle essentiel. Par exemple, le mouvement dans un espace de RIEMANN, la transformation conforme dans un espace de RIEMANN, la collinéation affine dans un espace à connexion affine et la collinéation projective dans un espace à connexion projective sont caractérisés respectivement par les équations $Xg_{\lambda\mu} = 0$, $XG_{\lambda\mu} = 0$, $X\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$ et $X\Pi^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$[2]. X étant l'opérateur de LIE.

Dans ce Mémoire, après avoir exposé, dans Paragraphe 1, la notion fondamentale de l'être géométrique, nous obtiendrons, dans Paragraphe 2, quelques formules sur la dérivée de LIE d'un être géométrique. Dans le Paragraphe suivant, nous étudierons la relation entre la dérivée de LIE d'un être géométrique de LIE et le groupe continu à r paramètres. Le quatrième Paragraphe est consacré à la recherche du groupe d'invariance d'un être géométrique. Dans Paragraphe 5, nous obtiendrons la formule concernant la dérivée de LIE d'un être géométrique d'ordre supérieur. Dans la première moitié du dernier Paragraphe, on trouvra les généralités sur le groupe étendu, dont on aura le besoin dans la dernière moitié consacrée à l'étude d'un tel être géométrique.

§ 1. L'être géométrique.

Nous nous plaçons d'abord dans un espace général X_n à n dimensions, dont les points sont désignés par ses coordonnées x^λ, et désignons les transfor-

---

*) Received February 8th, 1950.

1) K. YANO, The groups of transformations in generalized spaces, Tôkyô, 1949.

2) Voir, par exemple, K. YANO, déjà cité, p.30, p. 47, p.14 et p. 64 respectivement.

mations de coordonnées par les équations

$$(1.\ 1) \qquad x^{\lambda} = f^{\lambda}(x^1, \cdots, x^n) \qquad (\alpha, \lambda, \mu, \nu, \omega = 1, \cdots, n).$$

Un être qui possède des propriétés suivantes s'appelle un *être géométrique de classe* p:

i) Il a un système bien déterminé de N composantes Ω^A par rapport à chaque système de coordonnées (x^{λ});

ii) Quand on effectue une transformation de coordonnées (1. 1), ses composants $\bar{\Omega}^A(\bar{x})$ par rapport au nouveau système de coordonnées $(\bar{x}^{\lambda})$ peuvent être représentées par les fonctions bien déterminées dépendant des composantes anciennes $\Omega^A(x)$, des coordonnées anciennes x^{λ}, des fonctions $f^{\lambda}(x)$ de la transfomation et de leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre p, soit par les équations de la forme

$$(1.\ 2) \qquad \bar{\Omega}^A(\bar{x}) = F^A(\Omega^B, x^{\lambda}, f^{\lambda}, f^{\lambda}_{;\nu_1}, \cdots, f^{\lambda}_{;\nu_1, \dots, \nu_p}), \ (A, B, C = 1, \cdots, N),$$

où l'on a posé

$$f^{\lambda}_{;\nu_1, \dots, \nu_s} = \frac{\partial^s f^{\lambda}}{\partial x^{\nu_1} \cdots \partial x^{\nu_s}}, \qquad (s, t, u = 1, \cdots, p)$$

et, pour la simplicité,nous désingerons quelquefois le second membre de (1. 2) par $F^A(\Omega, x, \bar{x})$.

iii) Les fonctions $F^A(\Omega, x, \bar{x})$ ont des propriétés de groupe, soit elles satisfont aux relations suivantes;

$$(1.\ 3) \qquad \begin{aligned} &\text{a)} \quad F^A(F(\Omega, x, \bar{x},), \bar{x}, \bar{\bar{x}}) = F^A(\Omega, x, \bar{\bar{x}},), \\ &\text{b)} \quad F^A(\Omega, x, x) \equiv F^A(\Omega^B, x^{\lambda}, x^{\lambda}, \delta^{\lambda}_{\nu_1}, 0, \cdots, 0) = \Omega^A(x), \\ &\text{c)} \quad F^A(F(\Omega, x, \bar{x}), \bar{x}, x) = \Omega^A(x), \end{aligned}$$

où (x), $(\bar{x})$, $(\bar{\bar{x}})$ sont trois systèmes quelconques de coordonnées.

Un être géométrique, dont les fonctions $F^A(\Omega, x, \bar{x})$ de transformation ne contienent que Ω^A et les derivées partielles des f^{λ}, s'appelle un être géométrique *différentiel*.

Un être géométrique Ω^I $(I = 1, \cdots, N)$ s'appelle la *fonction* d'un être géométrique Ω^A, si les composantes Ω^I du premier se lient à celles du dernier par les équations

$$\Omega^I = \Phi^I(\Omega^A),$$

où les fonctions Φ^I ne dépendent pas de choix du système de coordonnées,

§ 2. La dérivée de LIE d'un être géométrique.

Considérons, dans l'espace général X^n, une déformation infinitséimale

$$\bar{x}^\lambda = x^\lambda + \xi^\lambda(x)\,\delta t, \tag{2.1}$$

qui déplace un point x^λ quelconque jusqu'à un point $\bar{x}^\lambda$ infiniment voision, où ξ^λ est un champ du vecteur contrevariant et δt une constante infinitésimale.

Etant donné un champ $\Omega^A(x)$ d'être géométrique, il a des composantes $\Omega^A(\bar{x})$ en le point $\bar{x}^\lambda$, et, d'autre part, si l'on regarde la déformation (2. 1) comme une transformation de coordonnées, il a, ce qu'on appelle, des composantes *entrainées* en le même point:

$$\bar{\Omega}^A(\bar{x}) = F^A(\Omega, x, x + \xi\delta t). \tag{2.2}$$

Alors, en désignant leur différence par

$$D\Omega^A = (X\Omega^A)\,\delta t = \Omega^A(\bar{x}) - \bar{\Omega}^A(\bar{x}),^{(1)} \tag{2.3}$$

$D\Omega^A$ et $X\Omega^A$ s'appellent respectivement la *différentielle* et la *dérivée de* LIE de l'être géométrique Ω^A.

Cela posé, le champ $\Omega^A(x)$ a des composantes

$$\Omega^A(\bar{x}) = \Omega^A(x) + \Omega^A{}_{,\lambda}\xi^\lambda\,\delta t \tag{2.4}$$

en le point $\bar{x}^\lambda = x^\lambda + \xi^\lambda\delta t$, la virgule désignant la dérivée partielle par rapport à la variable x^λ.

D'autre part, en tenant compte des formules

$$\begin{aligned} f^\lambda &= x^\lambda + \xi^\lambda\delta t, \\ f^\lambda{}_{,\nu_1} &= \delta^\lambda_{\nu_1} + \xi^\lambda{}_{,\nu_1}\delta t, \\ f^\lambda{}_{,\nu_1\cdots\nu_t} &= \xi^\lambda{}_{,\nu_1\cdots\nu_t}\,\delta t \qquad\qquad (t = 2, \cdots, p) \end{aligned}$$

et des relations (1. 3), nous avons

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}^A(\bar{x}) &= F^A(\Omega^B, x^\lambda, x^\lambda + \xi^\lambda\,\delta t, \delta^\lambda_{\nu_1} + \xi^\lambda{}_{,\nu_1}\delta t, \xi^\lambda{}_{,\nu_1\cdots\nu_t}\,\delta t) \\ &= \Omega^A(x) + \sum_{s=0}^{p} \xi^\lambda{}_{,\nu_1\cdots\nu_s} F^{A\nu_1\cdots\nu_s}_{\lambda}(\Omega, x), \end{aligned} \tag{2.5}$$

où

$$F^{A\nu_1\cdots\nu_s}_{\lambda}(\Omega, x) = \left[\frac{\partial F^A}{\partial f^\lambda{}_{,\nu_1\cdots\nu_s}}\right]_{\substack{f^\lambda = x^\lambda \\ f^\lambda{}_{,\nu_1} = \delta^\lambda_{\nu_1} \\ f^\lambda{}_{,\nu_1\cdots\nu_t} = 0}} \qquad \begin{pmatrix} s = 0, \cdots, p \\ t = 2, \cdots, p \end{pmatrix}$$

et $\xi^\lambda{}_{,\nu_0}$ et $F^{A\nu_0}_{\lambda}$ indiquent respectivement

$$\xi^\lambda{}_{,\nu_0} = \xi^\lambda \quad \text{et} \quad F^{A\nu_0}_{\lambda} = \left[\frac{\partial F^A}{\partial f^\lambda}\right]_{\substack{f^\lambda = x^\lambda,\ f^\lambda{}_{,\nu_1} = \delta^\lambda_{\nu_1} \\ f^\lambda{}_{,\nu_1\cdots\nu_t} = 0.}}$$

---

1) Voir, par exemple, K. YANO, déjà cité, p. 2.

De (2. 3), (2. 4) et (2. 5), nous obtenons donc les formules pour la dérivée de LIE de l'être géométrique général Ω^A:

$$D\Omega^A = (X\Omega^A)\,\delta t = \Big[\xi^\lambda\,\Omega^A{}_{,\lambda} - \sum_{s=0}^{p} \xi^\lambda{}_{,\nu_1\cdots\nu_s}\,F^{A\nu_1\cdots\nu_s}_{\lambda}(\Omega, x)\Big]\,\delta t. \tag{2. 6}$$

Il est à remarquer que les fonctions $F^{A\nu_1\cdots\nu_s}_{\lambda}(\Omega, x)$ ne dépendent que de Ω^A et de x^λ, et que si l'être est *différentiel*, elles ne dépendent que de Ω^A.

Maintenant, nous allons voir comment les composantes de la différentielle de LIE d'un être géométrique Ω^A se transforment vis-à-vis une transformation quelconque de coordonnées

$$\overline{x}^{\lambda'} = f^{\lambda'}(\overline{x}^1, \cdots, \overline{x}^n). \tag{2. 7}$$

Les composantes $\Omega^A(\overline{x})$ et $\bar{\Omega}^A(\overline{x})$ se transforment par

$$\Omega^{A'}(\overline{x}') = F^{A'}(\Omega(\overline{x}), \overline{x}, \overline{x}')$$

et

$$\bar{\Omega}^{A'}(\overline{x}') = F^{A'}(\bar{\Omega}(\overline{x}), \overline{x}, \overline{x}')$$

respectivement. Donc, sa différentielle de LIE a, par rapport au système $(\overline{x}')$, des composantes

$$D\Omega^{A'}(x') = \Omega^{A'}(\overline{x}') - \bar{\Omega}^{A'}(\overline{x}') = F^{A'}(\Omega(\overline{x}), \overline{x}, \overline{x}') - F^{A'}(\bar{\Omega}(\overline{x}), \overline{x}, \overline{x}').$$

En tenant compte des formules (2. 3) écrites sous la forme

$$\bar{\Omega}^A(\overline{x}) = \Omega^A(\overline{x}) - D\Omega^A(x),$$

nous obtennons enfin la loi de transformation pour $D\Omega^A$

$$D\Omega^{A'}(x') = \frac{\partial F^{A'}}{\partial \Omega^A}\, D\Omega^A(x). \tag{2. 8}$$

Par conséquent, la différentielle de LIE d'être géométrique n'est plus généralement elle-même un être géométrique, mais nous en pouvons établir le théorème suivant :

THÉORÈME I. *Pour que la dérivée de* LIE *d'un être géométrique soit elle-même un être géométrique, il faut et il suffit que les fonctions donnant sa loi de transformation soient linéaires en ses composantes* Ω^A, *c'est-à-dire, que les formules* (1. 2) *puissent être représentées sous la forme*

$$\bar{\Omega}^A(\overline{x}) = F^A_B(x, \overline{x})\,\Omega^B(x) + G^A(x, \overline{x}), \tag{2. 9}$$

où les fonctions F^A_B *et* G^A *ne contiennent pas* Ω^A. Un tel être s'appelle un *être géométrique linéaire*.

COROLLAIRE. *Si la premivée dérivée de* LIE *d'un être géométrique est géométrique, ses dérivées successives de* LIE *sont aussi géométriques.*

De plus, soit $\Omega^{\lambda}_{\cdot\,\mu\nu}$, par exemple, un être géométrique. Si sa dérivée de LIE $X\Omega^{\lambda}_{\cdot\,\mu\nu}$ est un tenseur de poid w, on doit avoir

(2. 8) $$\frac{\partial F^{\lambda'}_{\cdot\,\mu'\nu'}}{\partial \Omega^{\lambda}_{\cdot\,\mu\nu}} = \Delta^{w} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} \qquad \left(\Delta \equiv \det\left|\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\right|\right),$$

d'où on a

(2. 10) $$\Omega^{\lambda'}_{\cdot\,\mu'\nu'} = \Delta^{w} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} \Omega^{\lambda}_{\cdot\,\mu\nu} + G^{\lambda'}_{\cdot\,\mu'\nu'}(x, x').$$

Par conséquent, nous avons le théorème suivant ;

THÉORÈME II. *Pour que la dérivée de* LIE *d'un être géométrique* $\Omega^{\lambda}_{\cdot\,\mu\nu}$ *soit un tenseur, il faut et il suffit qu'il ait la loi de transformation de la forme* (2. 10) *pour la transformation de coordonnées.*

Si un être géométrique Ω^{I} est la fonction d'un être géométrique Ω^{A}, il est facile de voir que la dérivée de LIE du premier est liée à celle du dernier par les formales

(2. 11) $$X\Omega^{I} = \frac{\partial \Phi^{I}}{\partial \Omega^{A}} X\Omega^{A}.$$

En général, la dérivée $X\Omega^{I}$ est la fonction de l'être Ω^{A} et de sa dérivée $X\Omega^{A}$.

§3. Les dérivées de LIE et le groupe coutinu à r paramètres.

Dans ce Paragraphe, nous nous limitons à traiter des êtres géométriques linéaires, autrement dit, des êtres géométriques dont les formules de transformation s'écrivent

$$\bar{\Omega}^{A} = F^{A}_{B}(x, \bar{x})\,\Omega^{B} + G^{A}(x, \bar{x}).$$

Puisque l'être géométrique Ω^{A} possède la transitivité pour la transformation de coordonnées, les fonctions F^{A}_{B} et G^{A} doivent satisfaire aux équations

(3. 1a) $$F^{A}_{B}(\bar{x}, \bar{\bar{x}})\,F^{B}_{C}(x, \bar{x}) = F^{A}_{B}(x, \bar{\bar{x}}),$$

(3. 1b) $$F^{A}_{B}(\bar{x}, \bar{\bar{x}})\,G^{B}(x, \bar{x}) + G^{A}(\bar{x}, \bar{\bar{x}}) = G^{A}(x, \bar{\bar{x}}).$$

Maintenant, considérons deux transformations infinitésimales quelconques

(3. 2a) $$\bar{x}^{\lambda} = x^{\lambda} + \xi^{\lambda}\,\delta s,$$

(3. 2b) $$\bar{x}^{\lambda} = x^{\lambda} + \eta^{\lambda}\,\delta t.$$

Alors, d'une part le premier membre de (3. 1a) est égal à

$$
\begin{aligned}
&[\delta^A_B + \eta^\lambda{}_{,\nu_s}(\bar{x}) F^{A\nu_s}_{B\lambda}(\bar{x})\,\delta t + {}^1\!/_2\, \eta^\lambda{}_{,\nu_s}(\bar{x})\, \eta^\mu{}_{,\omega_t}(\bar{x})\, F^{A\nu_s\omega_t}_{B\lambda\mu}(\bar{x})\,\delta t^2] \\
&\qquad \times [\delta^B_C + \xi^\lambda{}_{,\nu_s} F^{B\nu_s}_{C\lambda}\,\delta s + {}^1\!/_2\, \xi^\lambda{}_{,\nu_s}\, \xi^\mu{}_{,\omega_t}\, F^{B\nu_s\omega_t}_{C\lambda\mu}\,\delta s^2] \\
&\qquad = [\delta^A_B + \{\eta^\lambda{}_{,\nu_s} + \eta^\lambda{}_{,\nu_s,\alpha}\, \xi^\alpha\,\delta s\}\{F^{A\nu_s}_{B\lambda} + F^{A\nu_s}_{B\lambda}{}_{,\beta}\, \xi^\beta\,\delta s\}\,\delta t \\
&\qquad\quad + {}^1\!/_2\, \eta^\lambda{}_{,\nu_s}\, \eta^\mu{}_{,\omega_t}\, F^{A\nu_s\omega_t}_{B\lambda\mu}\,\delta t\,] \\
&\qquad\quad \times [\delta^B_C + \xi^\lambda{}_{,\nu_s} F^{B\nu_s}_{C\lambda}\,\delta s + {}^1\!/_2\, \xi^\lambda{}_{,\nu_s}\, \xi^\mu{}_{,\omega_t}\, F^{B\nu_s\omega_t}_{C\lambda\mu}\,\delta s^2],
\end{aligned}
\tag{3. 3a}
$$

ou l'on a posé

$$
\xi^\lambda{}_{,\nu_s} F^{A\nu_s}_{B\lambda} = \sum_{s=0}^{p} \xi^\lambda{}_{,\nu_1\cdots\nu_s}\, F^{A\nu_1\ \ \nu_s}_{B\lambda}, \qquad (u = 2, \cdots, p)
$$

$$
\xi^\lambda{}_{,\nu_s}\, \xi^\mu{}_{,\omega_t}\, F^{A\nu_s\omega_t}_{B\lambda\mu} = \sum_{s=0}^{p}\sum_{t=0}^{p} \xi^\lambda{}_{,\nu_1\cdots\nu_s}\, \xi^\mu{}_{,\omega_1\cdots\omega_t} \left[\frac{\partial^2 F^A_B}{\partial f^\lambda{}_{,\nu_1\cdots\nu_s}\, \partial f^\mu{}_{,\omega_1\cdots\omega_t}}\right]_{\substack{f^\lambda = x^\lambda \\ f^\lambda{}_{,\nu_1} = \delta^\lambda_{\nu_1} \\ f^\lambda{}_{,\nu_1\cdots\nu_u} = 0}},
$$

et d'autre part, en tenant compte de

$$
\bar{\bar{x}}^\lambda = x^\lambda + \xi^\lambda\,\delta s + \eta^\lambda\,\delta t + \eta^\lambda{}_{,\alpha}\xi^\alpha\,\delta s\,\delta t,
$$

le deuxième membre de (3. 1a) est égal à

$$
\begin{aligned}
&\delta^A_C + \{\xi^\lambda{}_{,\nu_s}\,\delta s + \eta^\lambda{}_{,\nu_s}\,\delta t + (\eta^\lambda{}_{,\alpha}\xi^\alpha)_{,\nu_s}\,\delta t\,\delta s\}\, F^{A\nu_s}_{C\lambda} \\
&\quad + {}^1\!/_2\, \{\xi^\lambda{}_{,\nu_s}\,\delta s + \eta^\lambda{}_{,\nu_s}\,\delta t\}\, \{\xi^\mu{}_{,\omega_t}\,\delta s + \eta^\mu{}_{,\omega_t}\,\delta t\}\, F^{A\nu\ \omega_t}_{C\lambda\mu}.
\end{aligned}
\tag{3, 3b}
$$

En comparant les coefficients de δs et δt dans deux expressions (3. 3a, b), nous obtenons les identités

$$
\begin{aligned}
&\eta^\lambda{}_{,\nu_s,\alpha}\, \xi^\alpha\, F^{A\nu_s}_{C\lambda} + \eta^\lambda{}_{,\nu_s}\, \xi^\alpha\, F^{A\nu_s}_{C\lambda}{}_{,\alpha} + \eta^\mu{}_{,\omega_t}\, \xi^\lambda{}_{,\nu s}\, F^{A\omega_t}_{B\mu}\, F^{B\nu_s}_{C\lambda} \\
&\qquad = (\eta^\lambda{}_{,\alpha}\xi^\alpha)_{,\nu_s}\, F^{A\nu_s}_{C\lambda} + \eta^\mu{}_{,\omega_t}\, \xi^\lambda{}_{,\nu_s}\, F^{A\nu_s\omega_t}_{C\lambda\mu},
\end{aligned}
\tag{3. 4a}
$$

qui sont varables pour deux vecteurs quelconqnes ξ^λ et η^λ.

De la même manière, nous avons, de (3. 1b),

$$
\begin{aligned}
&\eta^\lambda{}_{,\nu_s,\alpha}\, \xi^\alpha\, G^{A\nu_s}_{\lambda} + \eta^\lambda{}_{,\nu_s}\, \xi^\alpha\, G^{A\nu_s}_{\lambda}{}_{,\alpha} + \eta^\mu{}_{,\omega_t}\, \xi^\lambda{}_{,\nu_s}\, F^{A\omega_t}_{B\mu}\, G^{B\nu_s}_{\lambda} \\
&\qquad = (\eta^\lambda{}_{,\alpha}\, \xi^\alpha)_{,\nu_s}\, G^{A\nu_s}_{\lambda} + \eta^\mu{}_{,\omega_t}\, \xi^\lambda{}_{,\nu_s}\, G^{A\nu_s\omega_t}_{\lambda\mu}.
\end{aligned}
\tag{3. 4b}
$$

Revenons à chercher des dérivées de Lie, et considérons r déformations infinitésimales

$$
T_a:\ \ \bar{x}^\lambda = x^\lambda + \underset{a}{\xi}{}^\lambda\,\delta t \qquad (a, b, c = 1, \cdots, r).
$$

Nous désignons par X_a l'opérateur de différentiation de Lie correspondant à T_a et par $\underset{bc}{\xi}{}^\lambda$ la dérivée de Lie d'un vecteur $\underset{c}{\xi}{}^\lambda$ par une déformation T_b, soit

$$
\underset{bc}{\xi}{}^\lambda = X_b\, \underset{c}{\xi}{}^\lambda = \underset{b}{\xi}{}^\mu\, \underset{c}{\xi}{}^\lambda{}_{,\mu} - \underset{b}{\xi}{}^\lambda{}_{,\mu}\, \underset{c}{\xi}{}^\mu.
\tag{3. 5}
$$

qui est un vecteur d'après Théorème II.

Il est bien connu[1] que la condition nécessaire et suffisante pour que les r déformations infinitésimales génèrent un groupe continu de Lie à r paramètres est qu'il existe les relations

$$(X_b\, X_c)f \equiv (X_b\, X_c - X_c\, X_b)f = C_{bc}^{\cdot\cdot a}\, X_a f \tag{3. 6}$$

pour le scalaire f quelconque, où les $C_{bc}^{\cdot\cdot a}$ sont les constantes de structure. Cette condition, représentée avec les vecteurs des déformations, est

$$X_b\, \underset{c}{\xi}^{\lambda} = \underset{bc}{\xi}^{\lambda} = C_{bc}^{\cdot\cdot a}\, \underset{a}{\xi}^{\lambda}. \tag{3. 7}$$

Cela posé, cherchons quel effet notre opérateur $(X_b\, X_c)$ à un être géométrique de Lie Ω^A.

La première dérivée de Lie de l'être envisagé Ω^A est

$$X_c\, \Omega^A = \underset{c}{\xi}^{\lambda}\, \Omega^A{}_{,\lambda} - \underset{c}{\xi}^{\lambda}{}_{,\nu_s}\, (F_{B\lambda}^{A\nu_s}\, \Omega^B + G_{\lambda}^{A\nu_s}),$$

et, la seconde dérivée de Lie se représente par

$$\begin{aligned}(X_b\, X_c\, \Omega^A) = \underset{b}{\xi}^{\mu}\, [&\underset{c}{\xi}^{\lambda}{}_{,\mu}\, \Omega^A{}_{,\lambda} + \underset{c}{\xi}^{\lambda}\, \Omega^A{}_{,\lambda\mu} - \underset{c}{\xi}^{\lambda}{}_{,\nu_s,\mu}\, (F_{B\lambda}^{A\nu_s}\, \Omega^B + G_{\lambda}^{A\nu_s})\\ &- \underset{c}{\xi}^{\lambda}{}_{,\nu_s}\, (F_{B\lambda,\mu}^{A\nu_s}\, \Omega^B + F_{B\lambda}^{A\nu_s}\, \Omega^B{}_{,\mu} + G_{\lambda}^{A\nu_s}{}_{,\mu})]\\ &- \underset{b}{\xi}^{\mu}{}_{,\omega_t}\, F_{B\mu}^{A\omega_t}\, [\underset{c}{\xi}^{\lambda}\, \Omega^B{}_{,\lambda} - \underset{c}{\xi}^{\lambda}{}_{,\nu_s}\, (F_{C\lambda}^{B\nu_s}\, \Omega^C + G_{\lambda}^{B\nu_s})].\end{aligned}$$

En tenant compte de (3.4 a,b) et (3. 5), nous avons enfin les formules

$$(X_b\, X_c)\, \Omega^A = (X_b\, \underset{c}{\xi}^{\lambda})\, \Omega^A{}_{,\lambda} - (X_b\, \underset{c}{\xi}^{\lambda}){}_{,\nu_s}\, (F_{B\lambda}^{A\nu_s}\, \Omega^B + G_{\lambda}^{A\nu_s}),$$

ce n'est pas autre chose que la dérivée de Lie de l'être Ω^A par rapport à la déformation infinitésimale par le vecteur $\underset{bc}{\xi}^{\lambda}$.

Nous arrivons ainsi au:

Théorème III. *Le résultat obtenu en appliquant l'opérateur* $(X_b\, X_c)$ *à un être géométrique* Ω^A *linéaire est égal à sa dérivée de* Lie *correspondante au vecteur* $\underset{bc}{\xi}^{\lambda} = X_b\, \underset{c}{\xi}^{\lambda}$. *De plus, si les déformations infinitésimales génèrent un groupe de* Lie, *il existe les formules*

$$(X_b\, X_c)\, \Omega^A = C_{bc}^{\cdot\cdot a}\, X_a\, \Omega^A \tag{3. 8}$$

avec les constantes $C_{bc}^{\cdot\cdot a}$ *de structure du groupe.*

Les formules obetnues en haut sont aussi vraies pour l'être Ω^I, qui est une fonction d'un être géométrique linéaire Ω^A.

En effet, de (2. 11), l'on a

---

1) Voir L. P. Eisenhart, Continuous groups of transformations, Princeton Univ. Press. 1933, p.25 (7.2) et p. 54, Theorem [15.1].

$$X_b X_c \Omega^I = \frac{\partial\Phi^I}{\partial\Omega^A} X_b X_c \Omega^A + \frac{\partial^2\Phi^I}{\partial\Omega^B\partial\Omega^C} X_b \Omega^B X_c \Omega^C,$$

et, d'après Théorème III,

$$(X_b X_c)\Omega^I = \frac{\partial\Phi^I}{\partial\Omega^A}(X_b X_c)\Omega^A = X_{bc}\,\Omega^I.$$

§ 4. Les groupe d'invariance d'un être géométrique.

La différentielle de LIE

$$D\Omega^A(x) = \Omega^A(\bar{x}) - \bar{\Omega}^A(\bar{x})$$

d'un être géométrique Ω^A, n'est pas autre chose que l'accroissement de l'être pendant la transformation infinitésimale (2. 1), qui est défini au point $\bar{x}^\lambda = x^\lambda + \xi^\lambda \delta t$. Par conséquent, $D\Omega^A$ au point x^λ est donnée par

$$-D\Omega^A(x) = \Omega^A(x) - \bar{\Omega}^A(x),$$

d'où

$$\bar{\Omega}^A(x) = \Omega^A(x) + D\Omega^A(x). \tag{4. 1}$$

Supposons que l'espace admette une déformation infinitésimale, qui annule la dérivée de LIE

$$X\Omega^A \equiv \xi^\lambda\, \Omega^A{}_{,\lambda} - \xi^\lambda{}_{,\nu_s}(F^{A\nu_s}_{B\lambda}\,\Omega^B + G^{A\nu_s}_{\lambda}) \qquad (s, t, u = 1, \cdots, p) \tag{4. 2}$$

d'un être géométrique *différentielle* linéaire. De (4. 1) une telle déformation infinitésimale laisse invariant l'être géométrique Ω^A, ce ne dépend pas du choix de coordonnées, grâce à $|F^A_B| \neq 0$. Or, nous pouvons prendre le système de coordonées, par rapport auquel le vecteur ξ^λ a des composantes[1)]

$$\xi^\lambda:\ (1, 0, \cdots, 0). \tag{4. 3}$$

Alors (4. 2) nous donne

$$\partial\Omega^A/\partial x^1 = 0, \tag{4. 4}$$

et, par conséquent, les composantes Ω^A rapportées à un tel système ne contiennent pas une x^1 des variables. Donc pour les transformations finies

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= x^1 + t, \\ \bar{x}^\lambda &= x^\lambda \qquad (\lambda = 2, \cdots, n) \end{aligned} \tag{4. 5}$$

1) Voir L. P. EISENHART. déjà cité, pp. 32-36.

générées par le vecteur $\xi^\lambda = \delta^\lambda_1$, on a facilement

$$\Omega^A(\bar{x}) = \bar{\Omega}^A(\bar{x}).$$

Ces transformations finies (4. 5) forment un groupe[1], qui s'appelle *le groupe d'invariance* de l'être géométrique différentiel Ω^A. Ainsi,

THÉORÈME IV. *Si l'espace admet une déformation infinitésimale laissant invariant un être géométrique différentiel, il admet aussi un groupe à un paramètre d'invariance de l'être, qui est généré par cette déformation infinitésimale.*

THÉORÈME V. *Pour que l'espace admette un groupe à un paramètre d'invariance d'un être géométrique différentiel Ω^A, il faut et il suffit qu'il existe un système de coordonnées par rapport auquel ses composantes ne contiennent pas une des variables.*

En considérant ensuite r transformations infinitésimales

$$T_a: \quad \bar{x}^\lambda = x^\lambda + \xi^\lambda_a \delta t$$

et en désignant par X_a l'opérateur infinitésimale correspondant à T_a, il est facile de démontrer les théorèmes suivants :

THÉORÈME VI. *Si ξ^λ_a définissent r groupes à un paramètre d'invariance d'un être géométrique différentiel Ω^A, une combinaison linéaire des vecteurs ξ^λ_a avec coefficients constants gênère aussi un groupe à un paramètre d'invariance de l'être Ω_A.*

THÉORÈME VII. *Si r opérateurs X_a d'un groupe à r paramètres génèrent individuellement r groupes à un paramètre d'ivariance d'un être géométrique différentiel Ω^A, chaque transformation du groupe à r paramètres laisse invariant l'être Ω^A.*

D'après Théorème III, on aura le

THÉORÈME VIII. *Si ξ^λ_a définissent r groupes à un paramètre d'invariance d'un être géométrique différentiel linéaire Ω^A, le vecteur $\xi^\lambda_{bc} = X_b \xi^\lambda_c$ définit aussi un groupe à un paramètre d'invariance de l'être Ω^A.*

THÉORÈME IX. *Si les opérateurs X_a sont ceux du système complet des groupes à un paremètre d'invariance d'un être géométrique différentiel linéaire Ω^A, les opérateurs X_a sont les générateurs d'un groupe à r paramètres d'invariance de l'être Ω^A.*

Proposons-nous maintenant le problème suivant ; Etant donné un groupe G_r à r paramètres dans la variété à n dimensions, se trouve-t-il un être géométrique Ω^A tel que le groupe donné G_r est le groupe d'invariance de l'être Ω^A, antrement dit, les équations différentielles

$$X_a \Omega^A \equiv \xi^\lambda_a \Omega^A{}_{,\lambda} - \xi^\lambda_{a\,\nu_s}(F^{A\nu_s}_{B\lambda}\Omega^B + G^A) = 0 \tag{4. 6}$$

sont-elles intégrables ?

La réponse est affirmative si $r \leqq n$.

En premier lieu, considérons le cas où le rang de la matrice de ξ^{λ}_{a} est égal à r. Dans ce cas, nous pouvons prendre un système de coordonnées par rapport auquel[1]

$$(4.7) \qquad \det|\xi^{e}_{a}| \neq 0, \qquad \xi^{\lambda}_{a} = 0 \qquad \begin{pmatrix} a, \cdots, f = 1, \cdots, r \\ \lambda = r+1, \cdots, n \end{pmatrix}.$$

Alor les équations (4. 6) deviennent

$$(4.8) \qquad X_a \Omega^A = \xi^{e}_{a}, \Omega^A{}_{,e} - \xi^{\lambda}{}_{,\nu_s}(F^{A\nu_s}_{B\lambda}\Omega^B + G^{A\nu_s}_{\lambda}) = 0.$$

Ces éqations sont soluvables par rapport aux $\Omega^A{}_{,e}$, et $\Omega^A{}_{,e}$ peuvent se représenter comme les fonctions $H^A_e(x, \Omega)$ de x^{λ} et des composantes Ω^A, et, par conséquent, (4. 6) reviennent aux équations

$$(4.9) \qquad X_a \Omega^A = \xi^{e}_{a}[\Omega^A{}_{,e} - H^A_e\,(x, \Omega)] = 0$$

ou

$$(4.10) \qquad \Omega^A{}_{,e} = H^A_e(x, \Omega).$$

D'autre part, puisque X_ι forment un groupe, nous avons les identités

$$(4.11) \qquad (X_b X_c)\Omega^A \equiv X_b X_c \Omega^A - X_c X_b \Omega^A = C_{bc}^{\cdot\cdot a} X_a \Omega^A,$$

d'où nous obtenons, en tenant compte des expressions (4. 9) de $X_c \Omega^A$,

$$\begin{aligned} &\xi^{\mu}_{b}\xi^{\lambda}_{c}(\Omega^A{}_{,\lambda\mu} - H^A_{\lambda\mu} - H^A_{\lambda B}\Omega^B{}_{,\mu}) + \xi^{\mu}_{b}\xi^{\lambda}_{c\,\mu}(\Omega^A{}_{,\lambda} - H^A_{\lambda}) - \xi^{\mu}_{b}{}_{,\omega_s} F^{A\omega_s}_{B\mu} X_c \Omega^B \\ &\quad - \xi^{\mu}_{c}\xi^{\lambda}_{b}(\Omega^A{}_{\lambda,\mu} - H^A_{\lambda,\mu} - H^A{}_{\lambda,B}\Omega^B{}_{,\mu}) - \xi^{\mu}_{c}\xi^{\lambda}_{b,\mu}(\Omega^A{}_{,\lambda} - H^A_{\lambda}) \\ &\quad - \xi^{\mu}_{c,\omega_s} F^{A\omega_s}_{B\mu} X_b \Omega^B = C_{bc}^{\cdot\cdot a} X_a \Omega^A \end{aligned}$$

et, en tenant compte de (4. 7), (4. 8) et (4. 9),

$$\xi^{f}_{b}\xi^{e}_{c}(H^A_{e,f} + H^A_{eB}H^B_f - H^A_{fe} - H^A_{fB}H^B_e) = 0$$

et enfin, grâce à $|\xi^{e}_{c}| \neq 0$, les identités

$$H^A_{ef} + H^A_{e,B}H^B_f - H^A_{fe} - H^A_{f,B}H^B_e = 0,$$

ce ne sont pas d'autres choses que la condition d'intégrabilité complète des équations différentielles (4. 10). Nous avons ainsi,

THÉORÈME X. *Etant donné un groupe G_r à r paramètres dans un espace à dimensions ($r \leqq n$), dont le range de $\|\xi^{a}_{\lambda}\|$ est égal à r, le groupe G_r peut être le*

---

1) Voir L. P. EISENHART. déjà cité, §21, pp. 71-76.

groupe d'invariance d'un être géométrique linéaire.

En second lieu, considérons le cas où le rang de $\| \xi^\lambda_a \|$ est égal à $q < r$. Nous pouvons choisir un système de coordonnées par rapport auquel

$$\det |\xi^i_j| \neq 0, \ \xi^\lambda_j = 0, \quad \xi^i_l = \varphi^j_l(x)\, \xi^i_j, \qquad \begin{pmatrix} i,j,k = 1, \cdots, q \\ l, m = q+1, \cdots, r \\ \lambda = q+1, \cdots, n \end{pmatrix} \tag{4. 12}$$

où $\varphi^i_l(x)$ sont des fonctions scalaires.

Par rapport à tel système, les équations (4. 6) se sépare en deux systèmes des équations

$$X_i\, \Omega^A = \xi^j_i\, \Omega^A{}_{,j} - \xi^\lambda{}_{,\nu s}(F^{A\nu_s}_{B\lambda}\, \Omega^B + G^{A\nu_s}_\lambda) = 0, \tag{4. 13a}$$

$$X_l\, \Omega^A = \varphi^i_l\, \xi^j_i\, \Omega^A{}_{,j} - (\varphi^i_l\, \xi^\lambda_i)_{,\nu_s}(F^{A\nu_s}_{B\lambda}\, \Omega^B + G^{A\nu_s}_\lambda) = 0. \tag{4. 13b}$$

Ces équations peuvent s'écrire

$$X_i\, \Omega^A = \xi^j_i[\Omega^A{}_{,j} - H^A_j(x, \Omega)] = 0, \tag{4. 14a}$$

$$X_l\, \Omega^A = K^A_l(x, \Omega) + \varphi^i_l\, X_i\, \Omega^A = 0, \tag{4. 14b}$$

où $H^A_j(x, \Omega)$ et $K^A_l(x, \Omega)$ ne contiennent pas de dérivées partielles de Ω^A.

Donc notre problème revient au problème d'intégrablité du système mixte

$$\Omega^A{}_{,j} = H^A_j(x, \Omega), \tag{4. 15a}$$

$$K^A_l(x, \Omega) = 0. \tag{4. 15b}$$

D'une part, les identités (4. 11) pour $b = j$, $c = k$ sont

$$\begin{aligned}(X_j\, X_k - X_k\, X_j)\, \Omega^A &= C_{jk}{}^i\, X_i\, \Omega^A + C_{jk}{}^l\, X_l\, \Omega^A \\ &= C_{jk}{}^i\, X_i\, \Omega^A + C_{jk}{}^l\, (K^A_l + \varphi^i_l\, X_i\, \Omega^A),\end{aligned}$$

d'où, en tenant compte de (3. 14), (4. 13), (4. 15) et (4. 12), nous avons facilement les identités

$$H^A_{j,k} + H^A_{j,B}\, H^B_k - H^A_{k,j} - H^A_{k,B}\, H^B_j = 0,$$

c'est précisément la condition d'intégrabilité complète de (4. 15a).

D'autre part, (4. 11) pour $b = j$, $c = l$ sont

$$(X_j\, X_l - X_l\, X_j)\, \Omega^A = C_{jl}{}^i\, X_i\, \Omega^A + C_{jl}{}^m\, [K^A_m + \varphi^i_m\, X_i\, \Omega^A];$$

d'où l'on a, de la même manière que la précédente,

$$X_j\, K^A_l = C_{jl}{}^m\, K^A_m$$

ou

$$\xi^i_j [K^A_{l,i} + K^A_{lB} H^B_i] - [\text{homogène et linéaire en } K^A_m] = C_{jl}{}^m K^A_m$$

ou enfin grâce à la première de (4. 12),

$$K^A_{lj} + K^A_{lB} H^B_i = [\text{homogène et linéaire en } K^A_m].$$

Donc, quand (4. 15b) sont satisfaites, le premier membre s'aunule aussi, et, par conséquent, si (4. 15b) sont satisfaites par les conditions initiales, elles aussi satisfaites par les solutions de (4. 15a), Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

THÉORÈME XI. *Si, étant donné un groupe G_r à r paramètres dans la variété à n dimensions ($r \leq n$), dont le rang de* $\| \xi^\lambda_a \|$ *est égal à $q < r$, nous choisissons un système de coordonnées par rapport auquel* (4. 12) *sont valables. Alors, s'il existent Ω^A qui satisfont aux équations* (5. 15b) *pour certaines valeurs données de variables x^λ, nous pouvons trouver un être géométrique linéaire Ω^A possédant G_r comme le groupe d'invariance de* LIE.

§ 5. L'être géométrique d'ordre *k* et sa dérivée de LIE.

Un être, dont les composantes dépendent non seulement de coordonnées x^λ mais encore de leurs différentielles jusqu'à l'ordre k,

$$x^\lambda_\sigma \equiv d^\sigma x^\lambda \qquad (\sigma, \tau, \pi = 0, 1, \cdots, k) \tag{5. 1}$$

et satisfont aux conditions ii) et iii) de Paragraphe 1, s'appelle un *être géométrique de la première espèce d'ordre k*.

D'autre part, considérons, dans l'espace X_n, un sous-espace à m dimensions X_m défini par les équations paramétriques

$$x^\lambda = x^\lambda (u^\alpha) \equiv x^\lambda (u^1, \cdots, u^m) \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, \cdots, m)$$

et désignons les dérivées partielles par

$$x^\lambda_{\alpha_\sigma} = \frac{\partial^\sigma x^\lambda}{\partial u^{\alpha_1} \cdots \partial u^{\alpha_\sigma}}.$$

Alors, un être géométrique, qui dépend des dérivées $x^\lambda_{\alpha_\sigma}$ au lieu des différentielles x^λ_σ, s'appelle un *être géométrique de la seconde espèce d'ordre k*.

Cela étant, quand on considère une déformation infinitésimale (2. 1), l'être géométrique Ω^A de la première espèce d'ordre k a des composantes

$$\Omega^A (\bar{x}) = \Omega^A (x) + \xi^\lambda_\sigma \Omega^{A\sigma}_{,\lambda} \qquad (\sigma = 0, 1, \cdots, k) \tag{5. 2}$$

en le point $\bar{x}^\lambda = x^\lambda + \xi^\lambda \delta t$, où l'on a posé

$$\xi^\lambda_\sigma = d\xi^\lambda_{\sigma-1} = \sum_{\tau=1}^{\sigma} \frac{\partial \xi^\lambda_{\sigma-1}}{\partial x^\lambda_{\tau-1}} x^\lambda_\tau \quad \text{et} \quad \Omega^A{}_{,\lambda}^{\sigma} = \frac{\partial \Omega^A}{\partial x^\lambda_\sigma}, \tag{5. 3}$$

ξ^λ_0 et $\Omega^{A0}_{,\lambda}$ signifiant respectivement $\xi^\lambda_0 = \xi^\lambda$ et $\Omega^A{}_{,\lambda}^{0} = \Omega^A{}_{,\lambda}$ et, d'autre part, l'on a

$$\bar{\Omega}^A(\bar{x}) = \Omega^A(x) + \xi^\lambda{}_{,\nu_s} F^{A\nu_s}_\lambda(\Omega, x).$$

Par conséquent, sa différentielle de Lie définie par les formules (2. 3) a des expressions

$$D\Omega^A = (X\Omega^A)\,\delta t = [\xi^\lambda_\sigma \Omega^A{}_{,\lambda}^{\sigma} - \xi^\lambda{}_{,\nu_s} F^{A\nu_s}_\lambda(\Omega, x)]\,\delta t. \tag{5, 4}$$

De même manière, la diffêntielle de Lie d'un être géométrique de la seconde espèce d'ordre k est donnée par les formules

$$D\Omega^A = (X\Omega^A)\,\delta t = [\xi^\lambda_{\alpha_\sigma} \Omega^A{}_{,\lambda}^{\alpha_\sigma} - \xi^\lambda{}_{,\nu_s} F^{A\nu_s}_\lambda(\Omega, x)]\,\delta t, \tag{5. 5}$$

où l'on a posé

$$\xi^\lambda_{\alpha_\sigma} = \xi^\lambda{}_{,\alpha_1\cdots\alpha_\sigma} = \sum_{\tau=1}^{\sigma} \frac{\partial \xi^\lambda_{\sigma-1}}{\partial x^\mu_{\beta_{\tau-1}}} x^\mu_{\beta_\tau}, \quad \Omega^{A\alpha_\sigma}_{,\lambda} = \frac{\partial \Omega^A}{\partial x^\lambda_{\alpha_\sigma}}. \tag{5. 6}$$

Théorèmes I et II sont aussi vrais pour deux espèce de tels êtres géométriques d'ordre k, et à cause de celà nous appelons encore un être géométrique d'ordre k, dont la dérivée de Lie est elle-même un être géométrique, un *être géométrique linéaire*,

§ 6. Le groupe étendu d'ordre k et la dérivée de LIE.[1]

Il résulte des équations finies du groupe G_r à r paramètres, soit

$$x^\lambda = f^\lambda(x, a), \tag{6. 1}$$

que, en employant les notations de Paragraphe précédent, la loi de transformation de x^λ_σ peut s'écrire sous la forme

$$\bar{x}^\lambda_\sigma = f^\lambda_\sigma(x, x_1, \cdots, x_\sigma\,;\, a), \qquad (\sigma = 0, 1, \cdots, k) \tag{6. 2}$$

où les fonctions f^λ_σ sont données par les formules de récurrence

$$f^\lambda_\sigma = \sum_{\tau=1}^{\sigma} \frac{\partial f^\lambda_{\sigma-1}}{\partial x^\mu_{\tau-1}} x^\mu_\tau. \qquad (\sigma = 1, \cdots, k) \tag{6. 3}$$

Les équations (6. 1) et (6. 2) définissent une transformation en $(k+1)n$

1) Dans la première moitié, voir L. P. Eisenhart, déjà cité, pp. 92-106.

variables x^λ_σ, et les valeurs a^a_0 des paramètres, pour lesquelles la transfomation (6. 1) de G_r se réduit à l'identité, fournissent aussi l'identité pour la transformation (6. 2). Il est facilement démontré par l'induction que l'ensemble des transformations (6. 1) et (6. 2) constitue un groupe G^k_r par rapport à $(k+1)n$ variables x^λ_σ, qui s'appelle le *groupe étendu* de la premiere espèce d'ordre k de G_r. En effet, nous avons les équations finies de

$$f^\lambda(f(x, a_1), a_2) = f^\lambda(x, a_3)$$

et nous supposons que les équations

$$f^\lambda_\sigma(f^\mu_\tau(x^\nu_\pi, a_1), a_2) = f^\lambda_\sigma(x^\nu_\pi, a_3) \qquad (\pi \leqq \tau \leqq \sigma)$$

soient établies pour $\sigma = 1, \cdots, k-1$. Il résulte que

$$\frac{\partial f^\lambda_{k-1}(\bar{x}, a_2)}{\partial \bar{x}^\mu_\tau} \frac{\partial \bar{x}^\mu_\tau}{\partial x^\nu_\pi} = \frac{\partial f^\lambda_{k-1}(\bar{x}, a_2)}{\partial \bar{x}^\mu_\tau} \frac{\partial f^\mu_\tau(x, a_1)}{\partial x^\nu_\pi} = \frac{\partial f^\lambda_{k-1}(x, a_3)}{\partial x^\pi_\nu},$$

d'où, en tenant compte de (6. 3), nous avons

$$\bar{\bar{x}}^\lambda_k = f^\lambda_k(\bar{x}, a_2) = f^\lambda_k(x, a_3),$$

qui établit la propriété de groupe étendu.

De plus, nous avons que les équations

$$\frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial a^e} = \xi^\lambda_a(\bar{x}) A^a_e(a) \tag{6. 4}$$

existent pour le groupe G_r, et nous supposons que les équations étendues

$$\frac{\partial \bar{x}^\lambda_\sigma}{\partial a^e} = \xi^\lambda_{a\sigma}(\bar{x}) A^a_e(a) \tag{6. 5}$$

existent pour $\sigma = 1, \cdots, k-1$. De ces équations, nous avons

$$\frac{\partial \bar{x}^\lambda_k}{\partial a^e} = \sum_{\tau=1}^{k} \frac{\partial^2 f^\lambda_{k-1}}{\partial a^e \, \partial x^\mu_{\tau-1}} x^\mu_\tau = \sum \frac{\partial \xi^\lambda_{k-1}}{\partial \bar{x}^\mu_{\tau-1}} \frac{\partial \bar{x}^\mu_{\tau-1}}{\partial x^\nu_{\pi-1}} x^\mu_{\pi-1} A^a_e(a)$$
$$= \sum \frac{\partial \xi^\lambda_{ak-1}}{\partial \bar{x}^\mu_{\tau-1}} \bar{x}^\mu_\tau A^a_e(a),$$

et, par conséquent, en tenant compte de (5. 3),

$$\frac{\partial \bar{x}^\lambda_k}{\partial a^e} = \xi^\lambda_{ka}(\bar{x}) A^a_e(a). \tag{6. 5'}$$

Pour le groupe étendu G^k_r, les équations (6. 5) étant encore valables pour

$\sigma = k$, jouent le rôle de (6. 4) pour le groupe G_r. Puisque A^a_e sont les mêmes pour le groupe original et le groupe étendu, nous avons le théorème bien connu: *Les constantes de structure du groupe étendu d'ordre k sont les mêmes que celles du groupe donné G_r*:

$$C_{bc}^{\cdot\cdot a} = A^e_b A^f_c \left(\frac{\partial A^a_e}{\partial a^f} - \frac{\partial A^a_f}{\partial a^e}\right). \tag{6. 6}$$

En remarquant que les équations (6. 5) doivent admettre des solutions $f^\lambda_\sigma(x, a)$ quelles que soient x^λ_σ, c'est-à-dire, elles doivent être complètement intégrables, nous pouvons vérifier les identités

$$\xi^\mu_{b\tau} \xi^\lambda_{\mu\sigma,\mu}{}^{\tau} - \xi^\mu_{c\tau} \xi^\lambda_{b\sigma,\mu}{}^{\tau} = C_{bc}^{\cdot\cdot a} \xi^\lambda_{a\sigma}, \qquad \begin{pmatrix} \sigma, \tau = 0, \cdots, k \\ \tau \leqq \sigma \end{pmatrix} \tag{6. 7}$$

lesquelles peuvent être réduites encore directement de (3. 5) et (3. 7) par l'induction concernant l'indice σ, en tenant compte de (6. 3).

En remplaçant les indices ρ, τ par les indices α_σ, β_τ $(= 1, \cdots, m)$ dans toutes les équations obtenues dans ce Paragraphe, on aura des équations, qui existent pour le groupe étendu de la seconde espèce d'ordre k.

Cela posé, considérons un être géométrique linéaire Ω^A d'ordre k. Sa loi de transformation par rapport à celle de coordonnées s'écrit

$$\bar{\Omega}^A(\bar{x}_\sigma) = F^A_B(x, \bar{x})\,\Omega^B(x_\sigma) + G^A(x, \bar{x}),$$

et sa première dérivée de Lie et seconde se représentent respectivement par

$$X_c\,\Omega^A = \xi^\lambda_{c\sigma}\,\Omega^A{}_{,\lambda}^{\sigma} - \xi^\lambda_{e,\nu_s}(F^{A\nu_s}_{B\lambda} + G^{A\nu_s}_{\lambda})$$

et

$$\begin{aligned} X_b X_c\,\Omega^A = {} & \xi^\mu_{b\tau}[\xi^\lambda_{c\sigma,\mu}{}^{\tau}\,\Omega^A{}_{,\lambda}^{\sigma} + \xi^\lambda_{c\sigma}\,\Omega^A{}_{,\lambda\mu}^{\sigma\tau} - \xi^\lambda_{c,\nu_s} F^{A\nu_s}_{B\lambda}\,\Omega^B{}_{,\mu}^{\tau}] \\ & - \xi^\mu_b[\xi^\lambda_{c,\nu s,\mu}(F^{A\nu_s}_{B\lambda}\,\Omega^B + G^{A\nu_s}_{\lambda}) + \xi^\lambda_{c,\nu s}(F^{A\nu_s}_{B\lambda}{}_{,\mu}\,\Omega^B + G^{A\nu_s}_{B\lambda}{}_{,\mu})] \\ & - \xi^\mu_{b,\omega_t} F^{A\omega_t}_{B\mu}[\xi^\lambda_{c\sigma}\,\Omega^B{}_{,\lambda}^{\sigma} - \xi^\lambda_{c,\nu_s}(F^{A\nu_s}_{B\lambda}\,\Omega^B + G^{B\nu_s}_{\lambda})], \end{aligned}$$

d'où, en tenant compte de (3. 4a,b), (3. 5) et (6. 7), nous obtenons les formnles

$$(X_b X_c)\,\Omega^A = C_{bc}^{\cdot\cdot a}[\xi^\lambda_{a\sigma}\,\Omega^A{}_{,\lambda}^{\sigma} - \xi^\lambda_{a,\nu_s}(F^{A\nu_s}_{B\lambda}\,\Omega^B + G^{A\nu_s}_{\lambda})]. \tag{6. 8}$$

Ces équations nous donnent le théorème suivent:

Théorème III'. *Pour un être géométrique linéaire Ω^A d'ordre k, il existe, sous le groupe G^k_r d'ordre k du groupe donné G_r, les formules*

$$(X_b X_c)\,\Omega^A = C_{bc}^{\cdot\cdot a} X_a\,\Omega^A \tag{6. 9}$$

où $C_{bc}^{\cdot\cdot a}$ *sont les constantes de structure du groupe original* G_r.

On verra facilement que *Théorèmes IV*, ⋯, *IX sont aussi vrais* pour l'être géomérique différentiel d'ordre k.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUE, UNIVERSITÉ D'OKAYAMA.