

# DUALITÉ DE TANNAKA DES GROUPES ALGÈBRIQUES

EI-ICHI ABE

(Received December 23, 1959)

0. Dans ce mémoire, nous montrerons d'abord que se vérifie la dualité de Tannaka sur un groupe algébrique connexe si et seulement s'il est linéaire. En suite nous formulerons ce théorème sur les espaces homogènes des groupes algébriques connexes comme M. et M<sup>m</sup> Iwahori en ont fait sur les espaces homogènes compacts (cf. [3]).

1. Soit  $G$  un groupe algébrique connexe défini sur un corps  $k$ . On suppose donné un domaine universel  $K$  qui contient  $k$ . On désigne par  $K(G)$  le corps des fonctions rationnelles sur  $G$  et par  $k(G)$  le sous-corps de  $K(G)$  formé des fonctions définies sur  $k$ . Alors  $K(G) = K(k(G))$ . Pour un élément  $p$  de  $G$ , on désigne par  $R_p$  (resp.  $L_p$ ) la transformation à droite (resp. gauche) de  $G$  par  $p$  (resp. par  $p^{-1}$ ), et par  $R_p^*$  (resp.  $L_p^*$ ) le cohomomorphisme de  $R_p$  (resp.  $L_p$ ) qui est un  $K$ -automorphisme du corps  $K(G)$  défini par

$$R_p^*f(x) = f(xp); \quad L_p^*f(x) = f(p^{-1}x)$$

pour toute fonction  $f$  définie au point considéré. Si  $p$  est rationnel sur  $k$ ,  $R_p^*$  (resp.  $L_p^*$ ) induit un  $k$ -automorphisme du corps  $k(G)$ .

Soit  $H$  un sous-groupe  $k$ -fermé de  $G$ . Les opérateurs  $L_p$ ,  $p \in H$ , sont bi-rationnels et bi-réguliers partout sur  $G$ , donc on suppose que  $H$  est le groupe des opérateurs de  $G$ . Pour un élément  $x$  de  $G$ , on désigne par  $\bar{x}$  l'ensemble  $Hx$  des transformés de  $x$  par les opérateurs  $L_p$ ,  $p \in H$ . Soit  $V$  l'ensemble des  $\bar{x}$  pour tout  $x \in G$ , sur lequel il existe une structure de variété définie sur  $k$ , et lequel on appelle la variété de  $H$ -orbites de  $G$  (cf. [4] p.408). De plus, les opérateurs induits par  $R_p$ ,  $p \in G$ , sur  $V$  sont rationnel, transitifs et réguliers partout sur  $V$  et on les désigne par  $\bar{R}_p$ . Par suite sur la variété  $V$ , il se trouve une structure d'espace homogène de  $G$ . Dorénavant, nous considérons  $V$  avec cette structure.

Soit  $K(V)$  le corps des fonctions rationnelles sur  $V$ . Nous identiférons ce corps avec le sous-corps  $\mathfrak{F}(H)$  de  $K(G)$  formé de fonctions  $f$  telles que  $L_x^*f = f$  pour tout  $x \in H$  (cf. [4] Théorème 2). Si l'on note  $k(V) = K(V) \cap k(G)$ , on peut vérifier des propriétés suivantes :

- (1)  $k(V)$  contient le corps  $k$ ,

- (2)  $K(V)$  est stable par l'opérateur  $R_p^*$  pour un élément  $p$  quelconque de  $G$ ,
- (3) Tout élément de  $k(G)$  radiciel sur  $k(V)$  appartient à ce corps.

Dans [1], nous avons appelé  $(H)$ -corps tout sous-corps de  $k(G)$  où se vérifient ces conditions. Réciproquement, pour un  $(H)$ -corps  $\mathfrak{F}$  de  $k(G)$ , soit  $H(\mathfrak{F})$  le sous-groupe de  $G$  formé d'éléments  $x$  tels que  $L_x^*f = f$  pour toute  $f \in \mathfrak{F}$ . Alors  $H(\mathfrak{F})$  est  $k$ -fermé. Si  $k$  est algébriquement clos, on a que les correspondances  $H \rightarrow \mathfrak{F}(H)$  et  $\mathfrak{F} \rightarrow H(\mathfrak{F})$  sont les inverses l'un l'autre et bi-univoques entre les sous-groupes définis sur  $k$  de  $G$  et les  $(H)$ -corps de  $k(G)$  (cf. [1] Théorème).

Nous désignerons par  $\tilde{V}$  l'ensemble de toutes les  $K$ -automorphismes de  $K(V)$  commutant à tous les opérateurs  $R_p^*$ ,  $p \in G$ . Sur l'ensemble  $\tilde{V}$  il y a une structure de groupe bien déterminée par

$$(\sigma^* \tau^*)(f) = \sigma^*(\tau^*(f)) \quad \text{pour toute } f \in K(V); \sigma^*, \tau^* \in \tilde{V}.$$

Toute fonction régulière sur  $V$  se transforme par les éléments de  $\tilde{V}$  à une fonction régulière sur  $V$ . Nous démontrerons dans la section 4 le théorème suivant qui contient, comme cas particulier, la dualité de Tannaka des groupes algébriques linéaires.

**THÉORÈME.** *Le groupe  $\tilde{V}$  est isomorphe au groupe quotient de  $N(H)$  par  $H$ ,  $N(H)$  étant le normalisateur de  $H$  dans  $G$ .*

*En particulier, si  $H$  est un sous-groupe normale, alors  $\widetilde{G/H} = G/H$ , et si  $H$  est le sous-groupe formé du seul élément neutre, alors  $\tilde{G} = G$ .*

2. Soient  $G$  un groupe algébrique connexe et  $G^*$  l'ensemble de toutes les représentations rationnelles de dimensions finies de  $G$ . On appelle la représentation de  $G^*$  toute application  $D \rightarrow \mu(D)$ ,  $D \in G^*$ , telle que  $\mu(D)$  est une matrice qui opère sur l'espace de la représentation  $D$  satisfaisant aux conditions suivants :

$$(4) \quad \mu(D_1 + D_2) = \mu(D_1) + \mu(D_2) \quad (\text{somme direct})$$

$$(5) \quad \mu(D_1 \times D_2) = \mu(D_1) \times \mu(D_2) \quad (\text{produit tensoriel})$$

(6) Si  $PD_1P^{-1} = D_2$  pour une matrice  $P$  non-singulière à coefficients dans  $K$ , alors

$$P\mu(D_1)P^{-1} = \mu(D_2).$$

On désigne par  $G^{**}$  l'ensemble de toutes les représentations de  $G^*$  sur lequel il existe une structure du groupe bien déterminée par

$$(\mu_1 \mu_2)(D) = \mu_1(D) \mu_2(D); \mu_1, \mu_2 \in G^{**}, D \in G^*.$$

Alors, il existe un homomorphisme  $\tau$  de  $G$  dans  $G^{**}$  défini par

$$\tau(x)(D) = D(x) \quad \text{pour } x \in G, D \in G^*.$$

Lorsque  $\tau$  est un isomorphisme de  $G$  sur  $G^{**}$ , nous dirons que  $G$  vérifie la Dualité de Tannaka.

Soit  $N$  le sous-groupe normale fermé de  $G$ , tel que  $G/N$  est linéaire et que le noyau d'une représentation rationnelle quelconque de  $G$  contient  $N$  (cf. [4] Corollaire 3 au Théorème 12). On identifie  $K(L)$ ,  $L = G/N$ , avec le sous-corps de  $K(G)$ , et désigne par  $R(G)$  le sous-anneau de  $K(L)$  formé de fonctions de  $K(L)$  partout régulières sur  $G$ . Alors  $R(G)$  est l'anneau affine de  $K(L)$ , car  $L$  est affine, donc  $R(G)$  est de type fini. (N.B. On peut montrer que pour que la fonction  $f$  de  $K(G)$  appartienne à  $R(G)$ , il faut et il suffit que  $f$  soit partout définie sur  $G$  et que les fonctions  $R_x^* f, x \in G$ , engendrent l'espace linéaire de dimension finie sur  $K$ .)

LEMME 1. *Il existe une correspondance bi-univoque entre  $G^{**}$  et l'ensemble  $\text{Hom}(R(G), K)$  de tous les  $K$ -homomorphismes de  $R(G)$  dans  $K$ .*

En effet, soit  $\chi$  un élément quelconque de  $\text{Hom}(R(G), K)$ . Pour une représentation quelconque  $D': G \rightarrow L'$  de  $G$ , on a  $K(L') \subset K(L)$ . Donc  $D'_{ij} \in K(L)$ , désignant  $D'(x) = (D'_{ij}(x))$ . Si l'on pose  $\mu_\chi(D')$  la matrice dont les coefficients sont  $\chi(D'_{ij})$ , alors  $\mu_\chi$  est une représentation de  $G^*$ .  $\chi \rightarrow \mu_\chi$  est une correspondance bi-univoque. Nous montrerons qu'elle est surjective. Pour la représentation  $D: G \rightarrow L$ ,  $L = G/N$ , désignant  $D(x) = (D_{ij}(x))$ , on a  $D_{ij} \in R(G)$  et  $K(D_{ij}) = K(L)$ . Il est facile de montrer que l'application  $D_{ij} \rightarrow \mu(D_{ij})$ ,  $\mu(D_{ij})$  étant les coefficients de la matrice  $\mu(D)$ , est extensible au  $K$ -homomorphisme  $\chi_\mu$  défini sur  $R(G)$  et que cette application  $\mu \rightarrow \chi_\mu$  est l'inverse de  $\chi \rightarrow \mu_\chi$ .

N. B. Soit  $k$  un corps de définition des  $G, N$  et  $D$ . Si l'on pose  $R_k(G) = R(G) \cap k(G)$ , alors  $R(G)$  est l'extension scalaire de  $R_k(G)$  à  $K$ . Donc il existe une correspondance bi-univoque entre  $\text{Hom}(R(G), K)$  et l'ensemble  $\text{Hom}(R_k(G), K)$  de tous les  $k$ -homomorphismes de  $R_k(G)$  dans  $K$ .

LEMME 2. *Soient  $X$  une variété affine définie sur  $k$  et  $A_k(X)$  l'anneau de toute fonction régulière sur  $X$  et définie sur  $k$ . Pour un  $k$ -homomorphisme  $\chi$  quelconque de  $A_k(X)$  dans  $K$ , il existe un et seulement un élément  $x$  de  $X$  tel que  $\chi(f) = f(x)$  pour toute  $f \in A_k(X)$ .*

En effet, soit  $(x_1, \dots, x_n)$  un système de fonctions coordonnées de  $X$ , i. e. celui des fonctions telles que pour l'élément générique  $p = (p_1, \dots, p_n)$  sur  $k$  de  $X$ , on a  $x_i(p) = p_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ); ceux-ci ne dépendent pas du choix du point générique  $p$ . On appelle le sous-anneau  $k[x_1, \dots, x_n]$  de  $k(X)$  l'anneau

de coordonnées de  $X$  sur  $k$ , et on le désigne par  $\mathfrak{B}$ . Pour  $\chi \in \text{Hom}(A_k(X), K)$ , le point  $x = (\chi(x_1), \dots, \chi(x_n))$  est dans  $X$  et on a  $\chi(f) = f(x)$  pour toute  $f \in A_k(X)$  car  $\chi$  est  $k$ -homomorphisme.

PROPOSITION 1.  $G^{**}$  est isomorphe au groupe  $G/N$ .

En effet, soient  $V$  l'ensemble algébrique irréductible dans l'espace de  $(n \cdot n)$ -matrices ; tel que  $L = \{a = (a_{ij}) \in V; \det(a_{ij}) \neq 0\}$  et  $\mathfrak{B} = k[x_{ij}]$  l'anneau de coordonnées de  $V$ . Alors,

$$R_k(G) = k[x_{ij}, \det(x_{ij})^{-1}]$$

Nous montrerons qu'il existe une correspondance bi-univoque entre  $\text{Hom}(R_k(G), K)$  et  $L$ . Pour un élément quelconque  $\chi$  de  $\text{Hom}(R_k(G), K)$ , on a  $x = (\chi(x_{ij})) \in V$  (cf. Lemme 2). De plus  $x \in L$ , car  $\det(\chi(x_{ij})) \neq 0$ . Donc, en vertu des lemme 1, et N.B. de ce lemme il existe une correspondance bi-univoque entre  $G^{**}$  et  $G/N$ . Il est facile de montrer qu'elle est isomorphisme, et que l'homomorphisme  $\tau$  est le composé de l'homomorphisme canonique de  $G$  sur  $G/N$  et cet isomorphisme.

COROLLAIRE. Pour qu'un groupe algébrique connexe vérifie la Dualité de Tannaka il faut et il suffit qu'il soit linéaire.

3. Nous utiliserons les notations de la section 1 et supposons  $k$  soit le corps algébriquement clos. Pour  $x \in V$ , on désigne par  $\mathfrak{o}(x)$  l'ensemble des fonctions de  $k(V)$  qui sont définies à  $x$ , et on l'appelle l'anneau local de  $x$  sur  $V$ . Soit  $\mathfrak{H}_1$  l'ensemble des  $k$ -homomorphismes définis sur un anneau local sur  $V$  et à valeurs dans  $K$ ; on ordonne  $\mathfrak{H}_1$  par la relation de prolongement. On appellera l'homomorphisme de  $k(V)$  dans  $K$  tout élément maximal de  $\mathfrak{H}_1$ ; tout élément de  $\mathfrak{H}_1$  se prolonge en un élément maximal. On désigne par  $\text{Hom}(k(V), K)$  l'ensemble des homomorphismes de  $k(V)$  dans  $K$ . Pour  $\chi \in \text{Hom}(k(V), K)$  on désigne par  $\mathfrak{o}(\chi)$  l'anneau local sur lequel  $\chi$  est défini. Alors on a

LEMME 3. Pour un élément  $\chi$  quelconque de  $\text{Hom}(k(V), K)$ , il existe un et seul un élément  $x$  de  $V$  tel que  $\chi(f) = f(x)$  pour toute  $f \in \mathfrak{o}(\chi)$ .

Soit  $V$  la réunion finie d'ouvert affines  $\Omega_\alpha$  homéomorphes à  $V_\alpha - F_\alpha$ . Alors, il existe au moins un  $V_\alpha$  tel que  $A_k(V_\alpha) \subset \mathfrak{o}(\chi)$ . La restriction  $\chi_\alpha$  de  $\chi$  à  $A_k(V_\alpha)$  détermine un et seul un élément  $x$  de  $V_\alpha$  (cf. Lemme 2). Soit  $\mathfrak{p}$  le noyau de  $\chi_\alpha$  dans  $A_k(V_\alpha)$ . Alors  $\mathfrak{p}$  est l'idéal premier et l'anneau local

$$\mathfrak{o}(\chi_\alpha) = \{fg^{-1}; f, g \in A_k(V_\alpha), g \notin \mathfrak{p}\}$$

est contenu dans  $\mathfrak{o}(\chi)$ . Il est facile de montrer que  $\mathfrak{o}(\chi_\alpha) = \mathfrak{o}(\chi)$  et  $x \in V$ . Il suffit de démontrer que  $x$  ne dépend pas du choix du  $V_\alpha$ . Nous pouvons

formuler cette assertion par notre identification de manière suivante :

LEMME 4. *Soient  $x, y \in G$ ; si  $f(x) = f(y)$  pour toute fonction de  $\mathfrak{F}(H)$  définie aux points  $x$  et  $y$ , alors  $x \in Hy$ .*

Supposons  $x \notin Hy$ . Soit  $H_1$  le sous-groupe  $k$ -fermé de  $G$  engendré par  $xy^{-1}$  et  $H$ . Alors  $H_1 \not\equiv H$  par notre hypothèse. En vertu de la correspondance de Galois (cf. section 1), on a  $\mathfrak{F}(H_1) \not\equiv \mathfrak{F}(H)$ , d'où il y a une fonction  $f$  de  $\mathfrak{F}(H)$  qui n'est pas contenue à  $\mathfrak{F}(H_1)$ . Donc  $L_{xy^{-1}}^* f \neq f$ , autrement dit il y a  $z \in G$  tel que  $L_{xy^{-1}}^* f(z) \neq f(z)$ . Si l'on pose  $g = R_{y^{-1}z}^* f$ , alors  $g \in \mathfrak{F}(H)$  (cf. (2)) et on a  $g(x) \neq g(y)$ . C'est une contradiction de notre hypothèse, ce qui démontre le lemme 4.

PROPOSITION 2. *Pour un  $K$ -automorphisme  $\sigma^*$  quelconque de  $K(V)$ , il existe une application  $\sigma$  bi-rationnelle de  $V$  dans lui même dont le cohomomorphisme est  $\sigma^*$ . De plus si  $\sigma^*$  commute avec  $\overline{R}_p^*$ ,  $p \in G$ , alors  $\sigma$  commute avec  $\overline{R}_p$ .*

En effet, soient  $k$  le sous-corps de  $K$  tel que  $\sigma^*(k(V)) \subset k(V)$  et  $\chi$  l'élément de  $\text{Hom}(k(V), K)$  tel que  $f \rightarrow \sigma^* f(x)$  pour un élément  $x$  générique sur  $k$  de  $V$ , alors il y a un élément  $y$  de  $V$  tel que  $\chi$  est l'application  $f \rightarrow f(y)$  (cf. Lemme 3). Parce que  $\chi$  est un isomorphisme de  $k(V)$  dans  $K$ ,  $y$  est un élément générique sur  $k$ . On désigne par  $y = \sigma x$ , alors  $\sigma$  définit une application bi-rationnelle de  $V$  dans lui même définie sur  $k$  et  $\sigma^* f(x) = f(\sigma x)$  pour toute fonction définie au point  $\sigma x$ . Il est facile de montrer que la dernière assertion est vraie.

4. Pour démontrer le théorème de la section 1, nous démontrerons d'abord deux lemmes suivants :

LEMME 5. *Si une application bi-rationnelle  $\sigma$  de  $V$  dans lui même commute avec  $\overline{R}_x$  pour tout  $x \in G$ , alors  $\sigma$  est induite par  $L_a$  pour un élément  $a$  de  $G$ .*

En effet, si  $\sigma(\overline{1}) = \overline{a^{-1}}$ , alors  $\sigma(\overline{x}) = \overline{R}_x(\overline{1}) = \overline{a^{-1}x} = \overline{L_a(x)}$  pour tout  $\overline{x}$ .

LEMME 6. *Pour que  $L_a^*$  transforme  $K(V)$  dans lui même, il faut et il suffit que  $a$  est un élément du normalisateur  $N(H)$  de  $H$  dans  $G$ .*

En effet, soit  $a \in N(H)$ , alors pour  $h \in H$  il y a un élément  $h'$  tel que  $h'a = ah$ . Donc, pour  $f \in K(V)$ ,

$$L_h^* L_a^* f(x) = L_{ha}^* f(x) = L_{ah'}^* f(x) = L_a^* f(x)$$

et on a  $L_a^* f \in K(V)$ . Réciproquement, soit  $L_a^*(K(V)) \subset K(V)$ , alors  $L_h^* L_a^* f = L_a^* f$  pour tout  $h \in H$ . Donc  $L_{a^{-1}ha}^* f = f$  c'est-à-dire  $a^{-1}ha \in H$  pour tout

$h \in H$  et  $a \in N(H)$ .

On désigne par  $\bar{L}_a^*$  l'automorphisme de  $K(V)$  induit par  $L_a^*$ ,  $a \in N(H)$ . En vertu de lemmes 6 et 4, l'application  $a \rightarrow \bar{L}_a^*$  est un homomorphisme de  $N(H)$  dans  $\tilde{V}$  dont le noyau est  $H$ . Nous montrerons c'est surjective. Soit  $\sigma^* \in \tilde{V}$ , alors il y a une application bi-rationnelle de  $V$  dans lui même commutant à  $R_p^*$ ,  $p \in G$  (cf. Proposition 2). C'est induit par une  $L_a$ ,  $a \in G$  (cf. Lemme 5). Donc  $\sigma^* = \bar{L}_a^*$  et  $a \in N(H)$  (cf. Lemme 6). Ce qui démontre le théorème.

N.B. Si  $H$  est le sous-groupe normale  $N$  de  $G$  défini à la section 2, alors  $\widetilde{G/N}$  est isomorphe au groupe  $G^{**}$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. ABE ET T. KANNO, Some remarks on algebraic groups, Tohoku Math. J. Vol. 11 (1959) 376-384.
- [2] P. CARTIER, Dualité de Tannaka des groupes et algèbre de Lie, C.R. Paris 242 (1956) 322-324.
- [3] M. ET M<sup>me</sup> IWAHORI, An extention of Tannaka Duality theorem for homogeneous spaces, Scien. Papers of Coll. of Gen. Ed. Uni. of Tokyo, 8 (1958) 115-121.
- [4] M. ROSENBLICHT, On some basic theorems on algebraic groups, Amer. J. Math. 78 (1956) 401-443.
- [5] T. TANNAKA, Über den Dualitätssatz der nicht kommutativen topologischen Gruppen, Tohoku Math. J. 45 (1938) 1-12.

COLLÈGE MÉDICAL DE FUKUSHIMA.