LA REPRÉSENTATION DES FONCTIONS VECTORIELLES PAR DES INTÉGRALES DE LAPLACE-STIELTJES (II)

SAMUEL ZAIDMAN

(Received August 16, 1959)

Introduction. Le présent travail a le but d'approfondir et de compléter les résultants de mon ouvrage précédent [14]. J'ai donné là bas des conditions nécessaires et suffisantes pour la représentation des fonctions vectorielles $\vec{f}(s)$, définies pour $s > 0$ et à valeurs dans un espace de Banach X, par une intégrale de Laplace-Stieltjes, $\vec{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, d\vec{\alpha}(t)$, où $\vec{\alpha}(t)$ est une fonction vectorielle à valeurs dans X et définie pour $t \geqq 0$, appartenant à une des classes de fonctions vectorielles à variation bornée, V_f^{I+}, V_r^{I+}, V_G^{I+} qui ont été définies dans [14]. (Des conditions nécessaires et suffisantes pour la représentation des fonctions vectorielles par des intégrales de Laplace ont été données par P. G. Rooney [11] et I. Miyadera [9]). Notre but principal dans [14] était de montrer que si $\vec{f}(s)$ est indéfiniment fortement dérivable et si on a

$$\int_0^\infty \|L_{k.u}[\vec{f}(.)]\|\, du \leqq M, \qquad k = 1, 2, \ldots\ldots$$

—(nous avons dit qu'une telle fonction vérifie la condition $(\vec{A})$)—alors, si en plus *X est un espace de Banach réflexif*, il existe une fonction $\vec{\alpha}(t) \in V_r^{I+}$ (à variation forte bornée sur $[0, \infty] \equiv I^+$), telle que

$$\vec{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, d\vec{\alpha}(t), \qquad s > 0 \qquad (1).$$

On prouvait ainsi une assertion de E.Hille ([5]-fin du § 1, Ch. X).

Dans le présent ouvrage on montre que:

a) On peut remplacer la restriction que X est réflexif par la restriction moins forte que X est faiblement complet par des suites.

b) Si la condition $(\vec{A})$ serait suffisant pour avoir (1) dans l'espace $C[0, 1]$, elle serait asssi suffisante pour avoir (1) dans tout espaces de Banach, sans exception.

Puis, dans les espaces de Banach *arbitraires*, on donne une condition nécessaire et suffisante pour que toute fonction $\vec{f}(s)$ qui la vérifie soit représentable comme transformation de Laplace-Stieltjes d'une fonction $\vec{\alpha}(t)$ de V_r^{I+}.

Cette condition est obtenue en réunissant la condition $(\vec{A})$ avec une condition suplémentaire de compacité faible, que je préciserai dans la suite.

Enfin, dans le présent ouvrage on s'occupe encore d'une question déjà partiellement traitée dans [14] et qui demandait des améliorations et précisions. À savoir:

Obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour représenter la fonction $\vec{f}(s)$ comme transformation de Laplace-Stieltjes d'une fonction $\vec{\alpha}(t) \in V_f^{I^+}$ (à variation faible bornée sur $[0, \infty] \equiv I^+$).

Cette question était résolue dans [14], pour les espaces de Banach réflexifs, par la condition que nous avons appellée $(\vec{A}_1')$. Ici nous introduisons la condition $(\vec{A}_f)$, qui est la plus naturelle dans ce problème ; à savoir, une fonction $\vec{f}(s)$ vérifie la condition $(\vec{A}_f)$ si pour tout $x' \in X'$ la fonction scalaire $<x', \vec{f}(s)>$ vérifie la condition (A) de Widder ([13]-pag. 306)

La condition $(\vec{A}_f)$ est nécessaire, comme nous verons, dans tout espace de Banach, pour que la fonction $\vec{f}(s)$ soit la transformation de Laplace-Stieltjes d'une fonction $\vec{\alpha}(t)$ de V_f^{I+}, et elle est suffisante pour avoir cette représentation dans les espaces faiblement complets par des suites ou duals d'espaces de Banach.

Dans cet ordre d'idées on montre aussi qu'il y a des espaces de Banach dans lesquels la condition $(\vec{A}_f)$ n'est plus suffisante pour avoir la représentation voulue, et on établit à cette ocasion une étroite liaison avec les théorèmes de représentation des opération des opérateurs linéaires et bornés de $C[0, \infty]$ à l'espace de Banach X, par des intégrales de Stieltjes abstraites.

Ces sont les questions principales que je traite dans ce travail. J'ai annoncé les principaux résultats dans deux Notes aux Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, Paris: [15] et [16].

Chaptre I.

Nous allons commencer par la question qui a été traitée la dernière dans l'introduction, car elle a aussi un caractère préparatoire aux autres questions.

1. Soit X un espace de Banach réel ou complexe ; soit $\vec{\alpha}(t) \in V_f^{I+}(X)$ (nous allons dès maintenant adopter cette notation au lieu de V_f^{I+} qui n'est pas assez complète). Alors, si $\vec{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\vec{\alpha}(t)$, on a pour tout $x' \in X'$:

$<x', \vec{f}(s)> = \int_0^\infty e^{-st}\, d\alpha_{x'}(t),\ s > 0\ ;\ \alpha_{x'}(t) = <x', \vec{\alpha}(t)> \in V^{I+}$. En appliquant le th. 12. *a* Ch. VII de [13] on obtient que $\vec{f}(s)$ vérifie $(\vec{A}_f)$ dans tout espace de Banach. Dans les espaces faiblement complets par des suites ou duals on a aussi le:

THÉORÈME I. 1. 1-*a*. *Soit X un espace de Banach faiblement complet par des suites. Alors, pour toute fonction $\vec{f}(s)$, $s > 0$, $\vec{f}(s) \in X$, vérifiant $(\vec{A}_f)$, il existe une fonction $\vec{\alpha}(t) \in V_f^{I+}(X)$, telle que $\vec{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\vec{\alpha}(t)$, $s>0$.*

DÉMONSTRATION. Si $x' \in X'$, la fonction $f_{x'}(s) = <x', \vec{f}(s)>$ vérifie la condition (A) de Widder; d'après le Th. 12. *a* Ch. VII de [13] (valable aussi pour les $f(s)$ à valeurs complexes, comme pour celle à valeurs réelles), on a que $f_{x'}(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\alpha_{x'}(t)$, $s > 0$ où $\alpha_{x'}(t)$ est une fonction normalisée de V^{I+}. On sait que $f_{x'}(s)$ est indéfiniment dérivable, pour tout $x' \in X'$. En appliquant un lemme de Grothendieck et Schwartz ([12]-pag. 145-147), il résulte que $\vec{f}(s)$ est aussi indéfiniment fortement dérivable. L'opération $L_{k.t}[\vec{f}(.)]$ est donc bien définie, et on a: $\int_\epsilon^t L_{k,u}[f_{x'}(.)]\, du = <x', \int_\epsilon^t L_{k,u}[\vec{f}(.)]\, du>$. Comme la limite $\lim_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^t L_{k,u}$ $[f_{x'}(.)]du$ existe pour tout $x' \in X'$, il résulte l'existence de la limite:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\ <x', \int_\epsilon^t L_{k,u}[\vec{f}(.)]du>$$

pour tout $x' \in X'$. Désignons par $\int_{0+}^t L_{k,u}[\vec{f}(.)]\, du$ l'élément de X qui est la limite faible de $\int_\epsilon^t L_{k\,u}[\vec{f}(.)]\, du$ pour $\varepsilon \to 0$. On a $<x', \int_{0+}^t L_{k,u}[\vec{f}(.)]\, du> =$ $\int_{0+}^t L_{k,u}[f_{x'}(.)]\, du$. Si on applique le Théorème d'inversion de Widder [13-Th. 7. à Ch. VII] on obtient

$$\alpha_{x'}(t) - \alpha_{x'}(0+) = \lim_{k\to\infty} \int_{0+}^t L_{k,u}[f_{x'}(.)]\, du = \lim_{k\to\infty}\ <x', \int_{0+}^t L_{k,u}[\vec{f}_{x'}(.)]du>.$$

Mais on sait que $\alpha_{x'}(0+) = f_{x'}(\infty) = \lim_{k\to\infty} <x', \vec{f}(k)>$ et on a donc:

$\alpha_{x'}(t) = \lim_{k\to\infty}\ <x', \int_{0+}^t L_{k,u}[\vec{f}(.)]\, du + \vec{f}(k)>$, pour tout $t > 0$. Soit $\vec{\alpha}(t)$, pour chaque $t > 0$, l'élément de X qui est la limite faible pour $k \to \infty$ de la suite

$$\int_{0+}^t L_{k,u}[\vec{f}(.)]\, du + f(k).$$

On a $<x', \vec{\alpha}(t)> = \lim_{k\to\infty} <x', \int_{0+}^{t} L_{k,u}[\vec{f}(.)]\, du + \vec{f}(k)> = \alpha_{x'}(t)$ pour tout $t > 0$. Si on pose $\vec{\alpha}(0) = \theta$, on a que $<x', \vec{\alpha}(t)> = \alpha_{x'}(t)$ pour tout $t \geqq 0$. Alors $\vec{\alpha}(t) \in V_f^{I+}(X)$ et comme on voit aisément on a

$$\vec{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\vec{\alpha}(t), \ s > 0. \tag{2}$$

OBSERVATION. Vu que X est faiblement complet par des suites et $\vec{\alpha}(t) \in V_f^{I+}(X)$, on obtient en utilisant [F] que les limites fortes $\vec{\alpha}(0+)$, $\vec{\alpha}(t+)$, $\vec{\alpha}(t-)$, $\vec{\alpha}(+\infty)$ existent pour chaque $t > 0$. Comme $\alpha_{x'}(t)$ est normalisée pour chaque x', on obtient que $\vec{\alpha}(t)$ est aussi normalisée. Elle est l'unique fonction normalisée vérifiant (2) comme on voit en utilisant le théorème d'unicité scalaire.

THÉORÈME I. 1. 1.-*b*. *Soit X un espace de Banach dual. Alors, pour toute fonction $\vec{f}(s)$ vérifiant $(\vec{A}_f)$ il existe une fonction $\vec{\alpha}(t) \in V_f^{I+}(X)$, telle que $\vec{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\vec{\alpha}(t)$, $s > 0$*

DÉMONSTRATION. Soit $X = Y'$. Alors, pour tout $y \in Y$, la fonction scalaire $f_y(s) = <\vec{f}(s), y>$ satisfait à la condition (A) de Widder. Puis, la démonstration est assez analogue à celle du Th. I. 1. 1-a. On utilise le fait que X est complet dans son Y-topologie (topologie faible étoilée de X)

OBSERVATION. Dans les espaces duals les limites fortes $\vec{\alpha}(t\pm)$ n'existent plus toujours pour chaque fonction $\vec{\alpha}(t) \in V_f^{I+}(X)$. Mais, pour chaque $y \in Y$ existe la limite $\lim_{t\to t\pm 0} <\vec{\alpha}(t), y>$ et il existe des éléments $\vec{\alpha}(t\pm)$ dans X tels que

$$<\vec{\alpha}(t\pm), y> = \lim_{t\to t\pm 0} <\vec{\alpha}(t), y>.$$

Ainsi, la fonction $\vec{\alpha}(t)$ obtenue dans le Th. I. 1. 1-b est normalisée dans le sens que $\vec{\alpha}(t) = \frac{1}{2}[\vec{\alpha}(t+) + \vec{\alpha}(t-)]$. Elle est l'unique fonction normalisée qui vérifie la relation $\vec{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\vec{\alpha}(t)$, $s > 0$.

2. Dans ce paragraphe nous allons faire la comparation entre la condition $(\vec{A}_f)$ et la condition $(\vec{A}_1')$ de [14]. Premièrement nous donneront une forme équivalente de la condition $(\vec{A}_f)$; à savoir, nous dirons que la fonction $\vec{f}(s)$,

$s > 0$, $\vec{f}(s) \in X$, vérifie la condition $(\vec{A}'_f)$ si :

a) elle est indéfiniment fortement dérivable

b) l'ensemble $\vec{V}[\vec{f}(.)]$ des éléments de X de la forme $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{i.k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} L_{k,u}[\vec{f}(.)]du$,

$n = 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots$, $\varepsilon_{i.k} = \pm 1$, pour tout système fini $0 < t_1 < t_2 \cdots < t_{n+1} < \infty$, est borné dans X.

Les conditions $(\vec{A}_f)$ et $(\vec{A}'_f)$ sont équivalentes. En effet :

i) Si $\vec{f}(s)$ vérifie $(\vec{A}_f)$ elle est indéfiniment fortement dérivable [12] et pour tout $x' \in X'$ on a

$$\left| < x', \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{i,k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} L_{k,u}[\vec{f}(.)]\, du > \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{i,k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} L_{k,u}[f_{x'}(.)]\, du \right|$$

$\leqq \int_0^{\infty} |L_{k,u}[f_{x'}(.)]\, du \leqq M(x')$; il résulte que l'ensemble $\vec{V}[\vec{f}(.)]$ est faiblement borné et donc est fortement borné.

ii) Si $\vec{f}(s)$ vérifie $(\vec{A}'_f)$ alors, pour tout $x' \in X'$ l'ensemble des nombres de la forme $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{i,k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} L_{k,u}[f_{x'}(.)]\, du$ (ensemble $V[f_{x'}(.)]$) est borné ; il existe donc un nombre $M(x')$ tel que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{i,k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} L_{k,u}[\text{Reel } f_{x'}(.)\, du + i \text{ Im } f_{x'}(.)]\, du \right| \leqq M(x'),$$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{i,k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} L_{k,u}[\text{Reel } f_{x'}(.)]\, du \right| \leqq M(x'),$$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{i,k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} L_{k,u}[\text{Im } f_{x'}(.)]\, du \right| \leqq M(x').$$

Le théorème de la moyenne donne :

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{i,k}(t_{i+1} - t_i)\, L_{k,\xi_i}[\text{Reel } f_{x'}(.)] \right| \leqq M(x') ;$$

en prenant $\varepsilon_{i,k} = \text{sgn}\, L_{k,\xi_i}[\text{Reel } f_{x'}(.)]$ on a que

$$\sum_{i=1}^{n} (t_{i+1} - t_i)\, |L_{k,\xi_i}[\text{Reel } f_{x'}(.)]| \leqq M(x')$$

et don caussi

$$\int_{t_1}^{t_{n+1}} |L_{k,u}[\text{Reel } f_{x'}(.)]|\, du \leqq M(x')$$

et enfin

$\int_0^{\infty} |L_{k,u}[\text{Reel } f_{x'}(.)]|\, du \leqq M(x')$. D'une manière analogue on obtient que

$$\int_0^\infty |L_{k,u}[\mathrm{Im}\ f_{x'}(.)]|du \leqq M(x') \text{ et donc} \int_0^\infty |L_{k,u}[f_{x'}(.)]|\ du \leqq 2\ M(x')$$

Q. E. D.

Nous avons maintenant la possibilité de comparer la condition $(\vec{A}_f)\equiv(\vec{A}'_f)$ avec la condition $(\vec{A}'_1)$ de [14]. On voit que la seule différence est la suivante : Dans $(\vec{A}'_1)$ *on suppose* l'existence de l'intégrale $\int_{0+}^t L_{k,u}[\vec{f}(.)]\ du$ comme limite forte des intégrales $\int_{\epsilon}^t L_{k,u}[\vec{f}(.)]\ du$, ce qui n'est plus le cas dans la condition $(\vec{A}'_f)$. Nous précisons la relation entre ces deux conditions dans la suivante.

PROPOSITION. I. 2. 1. *Les conditions* $(\vec{A}_f)$ *et* $(\vec{A}'_1)$ *coïncident dans les espaces de Banach faiblement complets par des suites ; dans les espaces de Banach généraux, la condition* $(\vec{A}'_1)$ *est plus restrictive que la condition* $(\vec{A}_f)$.

DÉMONSTRATION. i) Si X est faiblement complet par des suites et la fonction $\vec{f}(s)$ vérifie $(\vec{A}_f)$ alors, en vertu du Th. I. 1. 1-a il existe une fonction $\vec{\alpha}(t) \in V_f^{I+}(X)$ telle que $\vec{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\ d\vec{\alpha}(t)$. On voit immédiatement que le lemme 6 de [14] est valable aussi dans les espaces X faiblement complets par des suites et donc l'existence de l'intégrale $\int_{0+}^t L_{k,u}[\vec{f}(.)]\ du$ comme limite forte est assurée.

ii) Il y a des espaces de Banach X et des fonctions $\vec{f}(s)$ à valeurs dans ces espaces, vérifiant $(\vec{A}_f)$ mais non et $(\vec{A}'_1)$. Voilà un exemple :

Soit $X \equiv M[0, \infty] \equiv L_\infty[0, \infty]$ (dual fort de $L_1[0, \infty]$).

Soit la fonction à valeurs dans X qui est définie pour $t \geqq 0$ par la relation

$$\vec{\alpha}(t) \equiv K(\tau, t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } \tau > t, \\ 1 \text{ pour } 0 \leqq \tau \leqq t. \end{cases}$$

On voit aisément que la fonction $\vec{\alpha}(t)$ appartienne à la classe $V_f^{I+}(X)$. Soit $\vec{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\ d\vec{\alpha}(t)$, $s > 0$. Elle vérifie $(\vec{A}_f)$; dans ce qui suit nous montrons qu'elle ne vérifie pas $(\vec{A}'_1)$.

Premièrement on voit que $\vec{f}(s) \equiv G(s, \tau) \equiv e^{-s\tau}$. En effet, pour toute fonction $h(.) \in L_1[0, \infty]$ on a

$$< \int_0^\infty e^{-st}\, d\vec{\alpha}(t),\, h(.)> = \int_0^\infty e^{-st}\, d<\vec{\alpha}(t),\, h(.)> =$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\, d\int_0^t h(\tau)d\tau = \int_0^\infty e^{-st}\, h(t)dt = <G(s,\bullet),\, h(.)>$$

On montre après que l'intégrale de Riemann-Graves $\int_\epsilon^t L_{k,u}[\vec{f}(.)]\, du$ peut être calculée comme l'intégrale de Riemann par rapport à la variable u: $\int_\epsilon^t \frac{1}{k!}\left(\frac{k}{u}\right)^{k+1} \tau^k e^{-\frac{k}{u}\tau}\, du$

Pour cela, observons que la fonction de τ qui est définie par cette intégrale appartienne à $M[0, \infty]$ car on a

$$\int_\epsilon^t \frac{1}{k!}\left(\frac{k}{u}\right)^{k+1} \tau^k e^{-\frac{k}{u}\tau}\, du = \int_{\frac{k}{t}\tau}^{\frac{k}{\epsilon}\tau} \frac{1}{(k-1)!} v^{k-1}e^{-v}\, dv$$

$$\max_{0\leqq\tau\leqq\infty} \left| \int_{\frac{k}{t}\tau}^{\frac{k}{\epsilon}\tau} \frac{1}{(k-1)!} v^{k-1}e^{-v}\, dv \right| \leqq \frac{1}{(k-1)!}\int_0^\infty v^{k-1}e^{-v}\, dv = 1$$

Puis, il faut montrer que pour toute fonction $h(\tau) \in L_1[0, \infty]$ on a l'égalité: $\int_\epsilon^t L_{k,u}\left[\int_0^\infty e^{-u\tau}\, h(\tau)d\tau\right]du = \int_0^\infty h(\tau)\left[\int_\epsilon^t \frac{1}{k!}\left(\frac{k}{u}\right)^{k+1} \tau^k e^{-\frac{k}{u}\tau}\, du\right]d\tau$

c'est à dire l'égalité

$$\int_\epsilon^t \left[\int_0^\infty \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{k}{u}\right)^{k+1} (-\tau)^k e^{-\frac{k}{u}\tau}\, h(\tau)d\tau\right]du$$

$$= \int_0^\infty h(\tau)\left[\int_\epsilon^t \frac{1}{k!}\left(\frac{k}{u}\right)^{k+1} \tau^k e^{-\frac{k}{u}\tau}\, du\right]d\tau$$

qui est immédiate.

Maintenant nous pouvont démontrer que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^t L_{k,u}[\vec{f}(.)]\, du = \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^t \frac{1}{k!}\left(\frac{k}{u}\right)^{k+1} \tau^k e^{-\frac{k}{u}\tau}\, du$$

n'existe pas dans la métrique de $M[0, \infty]$ (c'est à dire uniformément par rapport à $\tau \in [0, \infty]$). En effet on a:

$$\int_\epsilon^t \frac{1}{k!}\left(\frac{k}{u}\right)^{k+1} \tau^k e^{-\frac{k}{u}\tau}\, du = \int_{\frac{k\tau}{t}}^{\frac{k\tau}{\epsilon}} \frac{1}{(k-1)!} e^{-v} v^{k-1}\, dv$$

tend vers $\int_{\frac{k\tau}{t}}^\infty \frac{1}{(k-1)!} e^{-v} v^{k-1}\, dv$ quand $\varepsilon \to 0$, pour chaque τ fixé de $[0, \infty]$.

Mais cette convergence n'est pas uniforme par rapport à $\tau \in [0, \infty]$ car si on considère la différence,

$$\int_{\frac{k\tau}{t}}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} e^{-v} v^{k-1}\, dv - \int_{\frac{k\tau}{t}}^{\frac{k\tau}{\epsilon}} \frac{1}{(k-1)!} e^{-v} v^{k-1}\, dv = \int_{\frac{k\tau}{\epsilon}}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} e^{-v} v^{k-1}\, dv,$$

on a la relation

$\sup\limits_{0 \leqq \tau \leqq \infty} \left| \int_{\frac{k\tau}{\epsilon}}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} e^{-v} v^{k-1}\, dv \right| \geqq \int_{k}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} e^{-v} v^{k-1}\, dv$, qui ne tend vers 0 avec ε. Q. E. D.

3. Soit $C_\infty[0, \infty]$ l'espace des fonctions continues sur $[0, \infty]$ et s'annulant à l'infini.

Dans ce paragraphe nous établirons une liaison entre les théorèmes sur la représentation des fonctions vectorielles par des intégrales de Laplace-Stieltjes et certains théorèmes de représentation des opérations linéaires et continues de $C_\infty[0, \infty]$ à X par des intégrales de Stieltjes abstraites.

À cette ocasion nous allons montrer que la condition $(\vec{A}_f)$ *n'est pas suffisante* dans tout espace de Banach pour que la fonction $\vec{f}(s)$ la vérifiant soit représentable comme transformation de Laplace-Stieltjes d'une fonction $\vec{\alpha}(t)$ de $V_J^{I+}(X)$. Premièrement on a le

THÉOREMÈ I. 3. 1. *Soit X un espace de Banach tel que, pour chaque fonction $\vec{f}(s)$ vérifiant la condition $(\vec{A}_f)$ il existe une fonction $\vec{\alpha}(t) \in V_J^{I+}(X)$ telle que*

$$\vec{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, d\vec{\alpha}(t),\ s > 0.$$

Dans ce cas, pour toute opération linéaire et continue T de $C_\infty[0, \infty]$ à X, il existe une fonction $\vec{\alpha}(t) \in V_J^{I+}(X)$ telle que

$$Tg(.) = \int_0^\infty g(t)\, d\vec{\alpha}(t),\ \textit{pour toute}\ g(t) \in C_\infty[0, \infty].$$

OBSERVATION 1. L'intégrale $\int^\infty g(t)\, d\vec{\alpha}(t)$ définie comme limite forte des intégrales $\int_0^R g(t)\, d\vec{\alpha}(t)$ existe pour chaque fonction $g(t)$ de $C_\infty[0, \infty]$ et $\vec{\alpha}(t) \in V_J^{I+}(X)$; cela résulte en modifiant légèrement le raisonnement dans le lemme 2 de [14].

OBSERVATION 2. Ce théorème a été sugéré à l'auteur par la preuve que Hildebrandt et Schönberg donnèrent au théorème de Riesz sur les fonctionnelles linéaires dans l'espace $C[0, 1]$ (voir [13] pag. 105).

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. Considérons la fonction vectorielle à valeurs dans $C_\infty[0, \infty]$ définie pour $s > 0$ par $\vec{\varphi}(s) \equiv G(s, t) \equiv e^{-st}$; considérons aussi la fonction vectorielle à valeurs dans X qui est définie pour $s > 0$ par

$$\vec{f}(s) = T[\vec{\varphi}(s)].$$

Nous allons montrer que la fonction $\vec{f}(s)$ vérifie la condition $(\vec{A}_f)$. En effet, pour tout $x' \in X'$ on a

$$<x', \vec{f}(s)> = <x', T[\vec{\varphi}(s)]> = <T'x', \vec{\varphi}(s)> = <y', \vec{\varphi}(s)>$$

$= \int_0^\infty e^{-st}\, d\alpha_{x'}(t)$ où $\alpha_{x'}(t) \in V^{I+}$. (voir par ex. [8] Ch. V. § 5. II)

Donc $\vec{f}(s)$ vérifie $(\vec{A}_f)$ et par l'hypothèse du théorème, il existe une fonction $\vec{\alpha}(t) \in V_f^{I+}(X)$ telle que

$$\vec{f}(s) = T[\vec{\varphi}(s)] = \int_0^\infty e^{-st}\, d\vec{\alpha}(t),\ s > 0.$$

Soit maintenant l'opération U de $C_\infty[0, \infty]$ à X donnée par l'égalité $Ug(.) = \int_0^\infty g(t)\, d\vec{\alpha}(t)$, $g(t) \in C_\infty[0, \infty]$. Elle existe, est linéaire et bornée, et coïncide avec T sur l'ensemble des fonctions $\{e^{-nt}\}_{n=1}^\infty$ qui est fondamental dans $C_\infty[0, \infty]$. Il résulte d'ici que T coïncide avec U sur l'entier $C_\infty[0, \infty]$ et donc $Tg = \int_0^\infty g(t)\, d\vec{\alpha}(t)$ pour toute fonction $g(t) \in C_\infty[0, \infty]$. Le théorème est démontré.

COROLLAIRE 1. *Soit X un espace de Banach faiblement complet par des suites ou dual. Alors, pour toute opération linéaire et bornée de $C_\infty[0, \infty]$ à X, T, il existe une fonction $\vec{\alpha}(t) \in V_f^{I+}(X)$ telle que*

$$Tg(.) = \int_0^\infty g(t)\, d\vec{\alpha}(t),\ \textit{pour toute } g(t) \in C_\infty[0, \infty].$$

Résulte des th. I. 1. 1-a, I. 1. 1-b et I. 3. 1. Le résultat n'est pas nouveau.

COROLLAIRE 2. *Dans l'espace $X \equiv C_\infty[0, \infty]$ il y a des fonctions $\vec{f}(s)$, $s > 0$, $\vec{f}(s) \in X$ qui vérifient la condition $(\vec{A}_f)$ et qui ne sont pas représentables par l'intégrale*

$$\vec{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, d\vec{\alpha}(t),\ s > 0 \text{ où } \alpha(t) \in V_J^{I+}(X).$$

DÉMONSTRATION. En vertu du Th. I. 3. 1 il sera suffisant de montrer qu'il existent des opérations linéaires et continues de $X \equiv C_\infty[0, \infty]$ en soi même qui n'admettent pas une représentation de la forme $Tg = \int_0^\infty g(t)\, d\vec{\alpha}(t)$ avec $\vec{\alpha}(t) \in V_J^{I+}(X)$. Nous allons montrer que l'opération identique de $C_\infty[0, \infty]$ en soi même est une telle opération. Pour l'espace $C[a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, un tel résultat a été énoncé par R. S. Phillips dans [10], mais la démonstration qu'il a donnée là bas nous semble incomplète. Pour ce motif, nous donnerons dans notre cas une démonstration qui est due essentiellement à S.Sandor,

Supposons par l'absurde qu'il existe une fonction $\vec{\alpha}(t) \in V_J^{I^+}(C_\infty[0, \infty])$, tell qu'on a

$$Ig(.) = g(.) = \int_0^\infty g(t)\, d\vec{\alpha}(t), \text{ pour toute } g(t) \in C_\infty[0, \infty]$$

Dans ce cas $\vec{\alpha}(t) \equiv K(s, t)$ où :

i) $K(s, t)$ est continue par rapport à $s \in I^+$ pour chaque $t \geqq 0$ fixé, et $K(s, t) \to 0$ quand $s \to \infty$

ii) Il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\overset{\infty}{\underset{0}{V_t}}[K(s,.)] \leqq M, \text{ pour tout } s \in I^+$$

iii) On a $g(s) = \int_0^\infty g(t)\, dK(s, t)$ pour chaque $g(t) \in C_\infty[0, \infty]$ (l'intégrale existe comme limite uniforme par rapport à $s \in I^+$ quand $R \to \infty$ des intégrales $\int_0^R g(t)\, dK(s, t)$; ces intégrales sont à leur tour des limites uniformes sur $s \in I^+$ des sommes de Riemann-Stieltjes).

Nous allons montrer que les propriétés i), ii), iii) sont contradictoires.

Soit D_s l'ensemble au plus dénombrable des discontinuités de la fonction $K(s, t)$ par rapport à t, pour chaque $s \in I^+$ fixé. Soit C_s l'ensemble complémentaire de D_s ; il est partout dense dans I^+. On a, en utilisant iii), et en prenant la suite

$$g_n(t) = \begin{cases} 1,\ 0 \leqq t \leqq \tau - \dfrac{1}{n} \\ 0,\ t \geqq \tau \\ \text{linéaire entre } \tau - \dfrac{1}{n} \text{ et } \tau \end{cases}$$

les suivantes égalités :

a) Pour $\tau \in C_s$ et $\tau < s$

$$0 = g_n(s) = \int_0^{\tau-\frac{1}{n}} d_t K(s, t) + \int_{\tau-\frac{1}{n}}^{\tau} g_n(t)\, d_t K(s, t)$$

$$= K\left(s, \tau - \frac{1}{n}\right) - K(s, 0) + \int_{\tau-\frac{1}{n}}^{\tau} g_n(t)\, d_t K(s, t).$$

Si $n \to \infty$, $K\left(s, \tau - \frac{1}{n}\right) \to K(s, \tau)$ et $\int_{\tau-\frac{1}{n}}^{\tau} g_n(t)\, d_t K(s, t) \to 0$ et il résulte que : $K(s, \tau) = K(s, 0)$, pour $\tau \in C_s$, $\tau < s$.

b) Si $\tau \in C_s$ et $\tau > s$, en prenant n suffisamment grand pour que $\tau - \frac{1}{n} > s$, on obtient d'une manière analogue :

$$K(s, \tau) = K(s, 0) + 1, \text{ pour } \tau > s \text{ et } \tau \in C_s.$$

En désignant par $c(s) = K(s, 0)$, nous avons obtenu donc :

$$K(s, \tau) = \begin{cases} c(s) + 1, & \text{si } \tau > s \text{ et } \tau \in C_s \\ c(s), & \text{si } \tau < s \text{ et } \tau \in C_s. \end{cases}$$

De i), en prenant $t = 0$ il résulte que $c(s) \in C_\infty[0, \infty]$. Observons maintenant que pour tout $s \in I^+$ fixé et $\varepsilon > 0$ le nombre n des points t où l'oscillation $\omega_t[K(s, t)]$ est plus grande que ε, ne dépasse pas le nombre $\frac{M}{\varepsilon}$. Car si on aurait $n > \frac{M}{\varepsilon}$, alors $\overset{\infty}{\underset{0}{V_t}}[K(s,.)] > n\varepsilon > M$ ce qui contredit ii). Soit maintenant R l'ensemble des nombres rationnelles $(r_1, r_2, \ldots\ldots, r_k \ldots)$. Soit $(t_k^1, t_k^2, \ldots\ldots, t_k^{p_k})$ l'ensemble des $p_k \leqq \frac{M}{\varepsilon}$ points où $\omega_t[K(r_k, t)] > \varepsilon$ et $T = \bigcup_{k=1}^{\infty} (t_k^1, \ldots, t_k^{p_k})$, T est un ensemble au plus dénombrable et si $t \notin T$ alors $\omega_t[K(r_k, t)] \leqq \varepsilon$ pour tout $k = 1, 2, \ldots\ldots$

Soit $0 < \varepsilon < \frac{1}{10}$, et $t_0 \notin T$. En utilisant i) on obtient qu'il existe un $\delta_{t_0,\epsilon}$ tel que $|K(s, t_0) - K(s_0, t_0)| < \varepsilon$ si $|s - t_0| < \delta_{t_0,\epsilon}$. Puis, pour $|\bar{s} - \bar{\bar{s}}|$ assez petit, $\bar{s} \in [t_0 - \delta, t_0] \cap R$, $\bar{\bar{s}} \in [t_0, t_0 + \delta] \cap R$, on a $|c(\bar{s}) - c(\bar{\bar{s}})| < \varepsilon$. Comme l'ensemble $C_{\bar{s}}$ et l'ensemble $C_{\bar{\bar{s}}}$ sont partout denses dans I^+, on trouve $\bar{t} \in C_{\bar{s}} \cap [\bar{s}, t_0]$, $\bar{\bar{t}} \in C_{\bar{\bar{s}}} \cap [t_0, \bar{\bar{s}}]$ et en plus $|\bar{t} - t_0|$ et $|\bar{\bar{t}} - t_0|$ assez petits, pour déduire de $\omega_{t_0}[K(r_k, t_0)] < \varepsilon$, les relations

$$|K(\bar{s}, t_0) - K(\bar{s}, \bar{t})| < 2\,\varepsilon, \quad |K(\bar{\bar{s}}, t_0) - K(\bar{\bar{s}}, \bar{\bar{t}})| < 2\,\varepsilon.$$

On obtient : $[c(\bar{\bar{s}}) - c(\bar{s})] = K(\bar{\bar{s}}, \bar{\bar{t}}) - K(\bar{s}, \bar{t}) + 1 = 1 - \{[K(\bar{s}, \bar{t}) - K(\bar{s}, t_0)] + [K(\bar{s}, t_0) - K(t_0, t_0)] + [K(t_0, t_0) - K(\bar{\bar{s}}, t_0)] + [K(\bar{\bar{s}}, t_0) - K(\bar{\bar{s}}, \bar{\bar{t}})]\}$. Il résulte alors que :
$\varepsilon > |c(\bar{\bar{s}}) - c(\bar{s})| \geqq 1 - 2\varepsilon - \varepsilon - \varepsilon - 2\varepsilon = 1 - 6\varepsilon$, et $\varepsilon \geqq 1/7$, $\varepsilon < 1/10$, absurde. Le corollaire 2 est démontré.

Chapitre II.

1. Dans ce chapitre nous prouvons les points a) et b) de l'introduction. Premièrement, nous avons le

THÉORÈME II. 1. 1. *Soit X un espace de Banach faiblement complet par des suites. Alors, une fonction $\vec{f}(s)$, $s > 0$, $\vec{f}(s) \in X$, peut être représentée comme transformation de Laplace-Stieltjes :*

$$\vec{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, d\vec{\alpha}(t), \qquad s > 0$$

où $\vec{\alpha}(t) \in V_r^{I+}(X)$, si et seulement si :

i) *elle est indéfiniment fortement dérivable,*

ii) *il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$\int_0^\infty \|L_{k,u}[\vec{f}(.)]\|\, du \leqq M, \qquad k = 1, 2, \ldots\ldots$$

(*condition* $(\vec{A})$).

DÉMONSTRATION. Il faut maintenant de prouver seulement la suffisance des conditions i) et ii), leur necessité étant connue.

Pour cela observons que si $\vec{f}(s)$ vérifie i) et ii) elle vérifie aussi $(\vec{A}_f)$; du théorème I. 1. 1.-a il résulte alors l'existence d'une fonction $\vec{\alpha}(t) \in V_f^{I+}(X)$ telle que $\vec{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, d\vec{\alpha}(t)$, $s > 0$. Puis, pour démontrer que $\vec{\alpha}(t)$ appartienne aussi à $V_r^{I+}(X)$, on utilise le lemme 6 de [14]—qui est valable évidémment dans les espaces faiblement complets par des suites—, comme on a fait dans [14], le Th. 2.

On ne sait pas si l'hypothèse que X est faiblement complet par des suites, peut être ou non éliminée. En tout cas on a le :

THÉORÈME II. 1. 2. *Si dans l'espace $X \equiv C[0, 1]$ la condition $(\vec{A})$ est suffisante pour que toute fonction $\vec{f}(s)$ la vérifiant soit représentable par $\vec{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, d\vec{\alpha}(t)$, $s > 0$, $\vec{\alpha}(t) \in V_r^{I+}(X)$, alors elle est suffisante pour avoir* *cette représentation dans tout espace de Banach.*

DÉMONSTRATION. Soit X un espace de Banach arbitraire et $\vec{f}(s)$, $s>0$, $\vec{f}(s) \in X$, une fonction vérifiant $(\vec{A})$; elle est continue pour tout $s > 0$, et alors l'ensemble de valeurs de $\vec{f}(s)$ est séparable. Soit $X_1 \subset X$ le sous-espace linéaire fermé minimal qui contient l'ensemble des valeurs de $\vec{f}(s)$, $s > 0$. X_1 est un espace séparable ; il est donc isomorphe et isométrique à un sous-espace linéaire fermé de $C[0, 1]$, $C_1 \subset C[0, 1]$. Soit $\vec{f}_{c1}(s)$ la fonction définie pour $s > 0$ et à valeurs dans C_1 qui corresponde à $\vec{f}(s)$.; vu l'isométrie, $\vec{f}_{c1}(s)$ vérifie elle aussi la condition $(\vec{A})$. Alors, de l'hypothèse, il résulte l'éxistence d'une fonction $\vec{\alpha}_c(t) \in V_r^{I+}(C[0, 1])$, qu'on peut supposer normalisée, telle que

$$\vec{f}_{c1}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, d\vec{\alpha}_c(t),\ s > 0.$$

En utilisant un théorème d'inversion de E.Hille ([6]-T. 6. 3. 5) on obtient que

$$\vec{\alpha}_c(t) - \vec{\alpha}_c(0+) = \lim_{k\to\infty} \int_0^t L_{k,u}[\vec{f}_{c1}(.)]\, du,$$

la limite forte. Mais on sait que $\vec{\alpha}_c(0+) = \vec{f}_{c1}(\infty) \in C_1$ et aussi, pour chaque $t > 0$ fixé la limite forte $\lim\limits_{k\to\infty} \int_0^t L_{k,u}[\vec{f}_{c1}(.)]\, du$ est dans C_1.

Donc $\vec{\alpha}_c(t)$ apprtienne même à C_1 et non simplement à $C[0, 1]$. En considérant les fonctions correspondantes dans X on a la relation voulue

$$\vec{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, d\vec{\alpha}(t),\ \vec{\alpha}(t) \in V_r^{I+}(X_1).$$

Chapitre III.

1. Dans ce dernier chapitre nous considérons la question d'obtenir une condition qui soit nécessaire et suffisante dans tout espace de Banach X pour représenter une fonction $\vec{f}(s)$, définie pour $s > 0$ et à valeurs dans cet espace comme transformation de Laplace-Stieltjes d'une fonction $\vec{\alpha}(t)$ de $V_r^{I+}(X)$.

Nous avons besoin pour cela de considérer une nouvelle classe de fonctions vectorielles à variation bornée, la classe $V_s^{I+}(X)$ des fonctions de Sirvint.

On dit que la fonction $\vec{\alpha}(t)$, $t \geqq 0$, $\vec{\alpha}(t) \in X$ appartienne à la classe $V_s^{I^+}(X)$ si l'ensemble $\vec{V}[\vec{\alpha}(.)]$ des éléments de X de la forme $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i[\vec{\alpha}(t_{i+1}) - \vec{\alpha}(t_i)]$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $n = 1, 2, \ldots\ldots$ pour tous les systèmes finis $t_1 < t_2 \ldots\ldots < t_{n+1}$ dans I^+, est relativement compact dans la topologie faible (X'-topologie) de X.

Ces fonctions ont été étudiées par D. A. Edwards qui a montré dans [4] que les limites $\vec{\alpha}(0+)$, $\vec{\alpha}(t+)$, $\vec{\alpha}(t-)$, $\vec{\alpha}(+\infty)$ existent pour tout $t > 0$ dans la topologie forte de X, $\vec{\alpha}(t+) = \vec{\alpha}(t-)$ sauf peut-être sur un ensemble au plus dénombrable de $t \in I^+$, et l'ensemble des valeurs de $\vec{\alpha}(t)$, $t \in I^+$ est séparable dans X. On peut normaliser une fonction $\vec{\alpha}(t)$ de $V_s^{I^+}(X)$ en posant $\vec{\alpha}(t) = \frac{1}{2}[\vec{\alpha}(t+) + \vec{\alpha}(t-)]$; ainsi modifiée elle reste dans $V_s^{I^+}(X)$ comme on voit aisément en utilisant le théorème de Eberlein (voir T. V. 6. 1 de [3]). L'intégrale $\int_0^\infty g(t)\, d\vec{\alpha}(t)$ définie comme limite forte des intégrales de Riemann-Stieltjes $\int_0^R g(t)\, d\vec{\alpha}(t)$ existe pour toute fonction $g(t) \in C[0, \infty]$ (voir le lemme 2 de [14]). L'analogue du lemme 6. 1 de [14] a lieu aussi si on remplace $V_G^{I^+}(X)$ par $V_S^{I^+}(X)$. On a aussi l'analogue du lemme vectoriel de Helly (lemme 8 de [14]) pour des suites $\vec{\alpha}_k(t)$ de $V_S^{I^+}(X)$, si on remplace la convergence forte par la convergence faible et la compacité par la compacité faible (relative).

La démonstration et assez prôche de celle donnée dans [14] pour le lemme 8. Comme nous n'auront pas besoin ici d'aucune extension vectorielle du théorème de Helly, nous n'insistons plus davantage.

Enfin, on peut montrer, comme Edwards dans [4], que l'opération T de $C[0, \infty]$ à X donnée par $Tg = \int_0^\infty g(t)\, d\vec{\alpha}(t)$ est linéaire, bornée et faiblement compacte, si $\vec{\alpha}(t) \in V_S^{I^+}(X)$.

Nous dirons que la fonction $\vec{f}(s)$, $s > 0$, $\vec{f}(s) \in X$ vérifie la condition $(\vec{A}_4')$ si elle est indéfiniment fortement dérivable et si l'ensemble $\vec{V}[\vec{f}(.)]$ des éléments de X de la forme $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{i,k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} L_{k,u}[\vec{f}(.)]\, du$ où $n = 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots$, $\varepsilon_{i,k} = \pm 1$, $0 < t_1 < t_2 < \ldots < \; < t_{n+1} < \infty$, est relativement compact dans la topologie faible de X.

On a alors le suivant résultat, analogue du théorème 3 de [14]:

THÉORÈME III. 1. 1. *Soit X un espace de Banach arbitraire. Alors la condition $(\vec{A}_4')$ est nécessaire et suffisante pour l'existence d'une fonction* *normalisée* $\vec{\alpha}(t) \in V_S^{I^+}(X)$, *telle que*: $\vec{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, d\vec{\alpha}(t),\ s > 0.$

La démonstration de la nécessité est entièrement analogue à la démonstration corréspondante dans le théorème 3 de [14] en utilisant les remarques faites au commencement de ce chapitre. Mais pour démontrer *la suffisance* nous utilisons une méthode qui diffère de celle utilisée dans le *T.* 3 de [14] en ça qu'elle n'utilise plus du théorème de Helly vectoriel.

Si $\vec{f}(s)$ vérifie la condition $(\vec{A}_4')$ alors pour toute $x' \in X'$ la fonction scalaire $f_{x'}(s) = <x', \vec{f}(s)>$ vérifie la condition (A) de Widder comme on voit sans peine. Il existe donc une fonction normalisée, $\alpha_{x'}(t) \in V^{I+}$ telle que

$$<x', \vec{f}(s)> = \int_0^\infty e^{-st}\, d\alpha_{x'}(t),\ s > 0.$$

Maintenant, pour tout $x' \in X'$ il existe la limite

$$\lim_{\epsilon\to 0} <x', \int_\epsilon^t L_{k,u}[\vec{f}(.)]\, du> = \lim_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^t L_{k,u}[f_{x'}(.)]\, du.$$

On a supposé que l'ensemble $\vec{V}[\vec{f}(.)]$ est relativement faiblement compact ; il résulte en particulier que l'ensemble des éléments $\int_\epsilon^t L_{k,u}[\vec{f}(.)]\, du$ où $t > 0$ est fixé et $\varepsilon > 0$ est variable, est relativement faiblement compact dans X. Comme de plus la "suite" $\int_\epsilon^t L_{k\,u}[\vec{f}(.)]\, du$ est faiblement convergente, il existe un élément de X, que nous allons désigner par $\int_{0+}^t L_{k,u}[\vec{f}(.)]\, du$ qui est la limite faible de $\int_\epsilon^t L_{k\,u}[\vec{f}(.)]\, du$ pour $\varepsilon \to 0$. Pour $k = 1$, on obtient que la limite faible de $\vec{f}(t)$, pour $t \to \infty$, $\vec{f}(\infty)$, existe et appartienne à X. On a évidémment:

$$<x', \int_{0+}^t L_{k,u}[\vec{f}(.)]\, du> = \lim_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^t L_{k,u}[\vec{f}(.)]\, du.$$

$$<x', \vec{f}(\infty)> = f_{x'}(\infty).$$

Si nous appliquons maintenant le théorème d'inversion de Widder ([13]-Th. 7. à Ch. VII) on a que:

$$\alpha_{x'}(t) = \lim_{k\to\infty}\left[\int_{0+}^t L_{k,u}[f_{x'}(.)]\, du + f_{x'}(k)\right]$$

$$= \lim_{k\to\infty} <x', \int_{0+}^t L_{k,u}[\vec{f}(.)]\, du + \vec{f}(k)>.$$

Mais l'ensemble des éléments de X de la forme $\int_{0+}^{t} L_{k,u}[\vec{f}(.)]\, du$, $k = 1, 2, \ldots\ldots$ $t > 0$, appartienne à l'adhérence faible de l'enselmbe $\vec{V}[\vec{f}(.)]$.

Celui-ci est relativement compact et en conséquence la même chose est vraie pour l'ensemble considéré. Puis, en utilisant le théorème de Eberlein (T. V. 6. 1 de [3]) on obtient que l'ensemble des éléments de la forme

$$\int_{0+}^{t} L_{k,u}[\vec{f}(.)]\, du + \vec{f}(k),\ k = 1, 2, \ldots\ldots t > 0,$$

est aussi relativement faiblement compact dans X. Comme en plus la suite $\int_{0+}^{t} L_{k,u}[\vec{f}(.)]\, du + \vec{f}(k)$ est faiblement convergente pour $k \to \infty$, il résulte l'existence d'une fonction $\vec{\alpha}(t)$ à valeurs dans X, qui est définie pour chaque $t > 0$ comme limite faible de la suite $\int_{0+}^{t} L_{k,u}[\vec{f}(.)]\, du + \vec{f}(k)$. Si on pose aussi $\vec{\alpha}(0) = \theta$, on a $\alpha_{x'}(t) = \langle x', \vec{\alpha}(t)\rangle$, $t \geqq 0$.

Enfin, il faut montrer que $\vec{\alpha}(t) \in V_S^{I+}(X)$. Or, pour tout élément $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i[\vec{\alpha}(t_{i+1}) - \vec{\alpha}(t_i)]$ de $\vec{V}[\vec{\alpha}(.)]$ on a

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i[\vec{\alpha}(t_{i+1}) - \vec{\alpha}(t_i)] = \lim_{k\to\infty} \text{faible} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} L_{k,u}[\vec{f}(.)]\, du$$

et donc l'ensemble $\vec{V}[\vec{\alpha}(.)]$ est contenu dans l'adhérence faible de l'ensemble $\vec{V}[\vec{f}(.)]$ qui est relativement faiblement compact ; on obtient donc que $\vec{\alpha}(t) \in V_S^{I+}(X)$. Comme $\vec{\alpha}(t+)$, $\vec{\alpha}(t-)$ existent fortement, et $\vec{\alpha}_{x'}(t)$ est normalisée pour tout $x' \in X'$ on obtient que $\vec{\alpha}(t)$ est normalisée.

Enfin, on a $\langle x', \vec{f}(s)\rangle = f_{x'}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, d\alpha_{x'}(t)$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\, d\langle x', \vec{\alpha}(t)\rangle = \langle x', \int_0^\infty e^{-st}\, d\vec{\alpha}(t)\rangle\ ;$$

$$\vec{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, d\vec{\alpha}(t),\ s > 0.$$

Le théorème est démontré.

OBSERVATION. On peut donner une autre forme de la condition $(\vec{A}_4')$ qui soit complètement analogue à la condition $(\vec{A}_2')$ de [14]. À savoir, nous dirons que $\vec{f}(s)$ vérifie la condition $(\vec{A}_4'')$ si elle est indéfiniment fortement dérivable, les intégrales $\int_{0+}^{t} L_{k,u}[\vec{f}(.)]\, du$ existent *comme limite forte*, et l'ensemble $\vec{V}[\vec{f}(.)]$ est relativement faiblement compact dans X.

Les conditions $(\vec{A}_4')$ et $(\vec{A}_4'')$ sont équivalentes car une fonction $\vec{f}(s)$ vérifiant $(\vec{A}_4')$ est représentable par

$$\vec{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, d\vec{\alpha}(t),\ \vec{\alpha}(t) \in V_S^{I+}(X)$$

et du lemme analogue au lemme 6. 1 de [14] il résulte l'éxistence des intégrales $\int_{0+}^{t} L_{k,u}[\vec{f}(.)]\, du$ comme limite forte.

Cela étant nous pouvons énoncer le résultat essentiel de ce Chapitre, a savoir, le

THÉORÈME III. 1. 2. *Soit X un espace de Banach arbitraire. La fonction $\vec{f}(s)$, $s > 0$, $\vec{f}(s) \in X$, peut être représentée par*

$$\vec{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, d\vec{\alpha}(t),\ s > 0,\ \textit{où}\ \vec{\alpha}(t) \in V_r^{I+}(X)$$

si et seulement si

a) *elle est indéfiniment fortement dérivable*

b) *on a* $\int_0^\infty \|L_{k,u}[\vec{f}(.)]\|\, du \leqq M,\ k = 1, 2, \ldots\ldots$

c) *l'ensemble $\vec{V}[\vec{f}(.)]$ est relativement faiblement compact dans X.*

DÉMONSTRATION DE LA SUFFISANCE. Comme $\vec{f}(s)$ vérifie a) et c) du théorème II. 1. 1 il résulte l'existence d'une fonction

$$\vec{\alpha}(t) \in V_S^{I+}(X) \text{ telle que } \vec{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, d\vec{\alpha}(t),\ s > 0.$$

Puis, à l'aide du lemme d'inversion, analogue du lemme 6. 1 de [14], on obtient que $\vec{\alpha}(t) - \vec{\alpha}(0+) = \lim_{k\to\infty} \int_{0+}^{t} L_{k,u}[\vec{f}(.)]\, du$ (la limite forte) ; maintenant, en utilisant la condition b) il résulte que $\vec{\alpha}(t)$ est la limite forte ponctuelle d'une suite de fonctions $\vec{\alpha}_k(t) \in V_r^{I+}(X)$, à variation forte également bornée par M. Donc $\vec{\alpha}(t) \in V_r^{I+}(X)$. Q. E. D.

DÉMONSTRATION DE LA NÉCESSITÉ. La nécessité des conditions a) et

b) étant immédiate, tout ce qu'il reste à démontrer est la nécessité de la condition c). Mais cela résultera du théorème III. 1. 1 dès que nous aurions démontré que toute fonction $\vec{\alpha}(t)$ de $V_r^{I+}(X)$ appartienne aussi à la classe $V_S^{I+}(X)$, c'est à dire l'inclusion $V_r^{I+}(X) \subset V_s^{I+}(X)$.

Ce fait, sugéré à l'auteur par M. N. Dinculeanu peut se démontrer en utilisant le méthode suivant (voir [2]).

Soit T l'opération de $C[0, \infty]$ à X qui est définie par la formule $Tg(.) = \int_0^\infty g(t)\, d\vec{\alpha}(t)$, où $\vec{\alpha}(t)$ est une fonction normalisée de $V_r^{I+}(X)$. On a alors

$$\|Tg(.)\| \leqq \int_0^\infty |g(t)|\, d\alpha_*(t), \alpha_*(t) = V_0^t[\vec{\alpha}(.)],$$

$\alpha_*(t)$ est une fonction croissante et bornée sur $[0, \infty]$. Soit la fonctionelle qui est définie sur $C[0, \infty]$ par la formule $F(g) = \int_0^\infty g(t)\; d\alpha_*(t)$; elle est linéaire est bornée. Du théorème de Riesz (voir [3]-T. IV. 6. 3) il résulte l'existence d'une mesure bornée μ, définie sur les ensembles boréliens de $[0, \infty]$, régulière est dénombrablement additive, telle qu'on a $F(g) = \int_0^\infty g(t)\; \mu(dt)$, $g(.) \in C[0, \infty]$. Toute fonction $g(t)$ de $C[0, \infty]$ est intégrable par rapport a μ et on a : $|F(g)| \leqq \int_0^\infty |g(t)|\, \mu(dt)$ (car μ est une mesure positive, vu que $\alpha_*(t)$ est croissante). On a obenu donc que : $\|Tg(.)\| \leqq F[|g|] = \int_0^\infty |g(t)|\, \mu(dt)$ c'est à dire (voir [2]) que T est une opération majorée. Soit $L_1 \equiv L_1([0, \infty]\,;\, B, \mu)$ l'espace des fonctions intégrables par rapport à la mesure μ. La relation précédente montre qu'on a $\|Tg\|_X \leqq \|g\|_{L_1}$; vu que l'ensemble des fonctions continues $g(t) \in C[0, \infty]$ est dense dans $L_1\,([0, \infty]\,;\, B, \mu)$ il résulte que T est une opération bornée de L_1 à X, définie sur un ensemble partout dense. Elle peut être donc prolongée par continuité à tout l'espace L_1. Si $x_E(t)$ est la fonction caractéristique d'un ensemble borélien E, elle appartienne à L_1. Soit la fonction vectorielle définie sur les ensembles boréliens de $[0.\infty]$ par la relation : $\vec{\mu}(E) = T[x_E(.)]$. On montre que pour tout $x' \in X'$ la fonction scalaire $\langle x', \vec{\mu}(E)\rangle$ est une mesure régulière et dénombrablement aditive sur les ensembles boréliens de $[0, \infty]$. Il résulte ainsi que $\vec{\mu}$ est une mesure vectorielle au sens de Bartle, Dunford, Schwartz, (voir [3]-IV-10)]. Puis on a que $T[x_E] = \int_0^\infty x_E(t)\, \vec{\mu}(dt)$ et il résulte d'ici qu'on a $Tg = \int_0^\infty g(t)\; \vec{\mu}(dt)$ pour toute fonction $g(t) \in C[0, \infty]$

(l'intégrale de Bartle, Dunford, Schwartz, [3]-IV-10).

Si on applique le Th. VI. 7. 3 de [3], il résulte que T est une opération de $C[0, \infty]$ à X, faiblement compacte. Ce fait est déjà suffisant, comme on voit sans peine, pour finir la démonstration de la nécessité. Pour démontrer aussi que $\alpha(t) \in V_S^{I+}(X)$ on raisonne ainsi :

Soit $\vec{\alpha}_1(t) = \vec{\mu}[0, t]$, $\vec{\alpha}(0) = \theta$, il résulte d'un théorème de Bartle, Dunford, Schwartz [1], affirmant que l'ensemble des valeurs d'une mesure vectorielle est relativement faiblement compact, que $\vec{\alpha}_1(t) \in V_S^{I+}(X)$. On voit aussi sans peine que $\int_0^\infty g(t)\, \vec{\mu}(dt) = \int_0^\infty g(t)\, d\vec{\alpha}_1(t)$, $g(t) \in C[0, \infty]$. On a obtenu donc $Tg = \int_0^\infty g(t)\, d\vec{\alpha}(t) = \int_0^\infty g(t)\, d\vec{\alpha}_1(t)$, ou on peut supposer que pour tout $t > 0$, $\vec{\alpha}_1(t) = \frac{1}{2}[\vec{\alpha}(t+) + \vec{\alpha}(t-)]$, il résulte $\vec{\alpha}(t) = \vec{\alpha}_1(t) \in V_S^{I+}(X)$. Q. E. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. G. BARTLE, N. DUNFORD AND J. SCHWARTZ, Weak compactness and vector measures, Canad, J. Math. 7(1955), 289–305.

[2] N. DINCULEANU, Mésures vectorielles et opérations linéaires, Comptes Rendus des Séances de l'Académie de Sciences, Paris, 246(1958), 2328.

[3] N. DUNFORD AND J. SCHWARTZ, Linear Operators, Part I : General Theory, Interscience Publishers, Inc. New-York, 1958.

[4] D. A. EDWARDS, On the continuity properties of functions satisfying a condition of Sirvint's, Quart. J. Math., Oxford, 8(1957), 58–67.

[5] E. HILLE, Functional analysis and semi-groups, New-York, 1948.

[6] E. HILLE AND R. S. PHILLIPS, Functional analysis and semi-groups, (second revised edition), Amer. Math. Soc. Coll. Publ., 1957.

[7] D. G. KENDALL AND J. E. MOYALL, On the continuity properties of vector-valued functions of bounded variation, Quart. J. Math. Oxford, 8(1957), 54–57.

[8] S. MANDELBROJT, Séries adhérentes, Régularisation des suites, Applications, Paris, 1952.

[9] I. MIYADERA, On the representation theorem by the Laplace-transformation of vector-valued functions, Tôhoku Math. J., 8(1956), 170–180.

[10] R. S. PHILLIPS, On linear transformations, Trans. Amer. Math. Soc.., 48(1940), 516–541.

[11] P. G. ROONEY, An inversion and representation theory for the Laplace-integral of abstract valued functions, Canad. J. Math. 5(1954), 190–209.

[12] L. SCHWARTZ, Espaces de fonctions defférentiables a valeurs vectorielles, Journal d'Analyse Mathématique, 4(1954–55), 88–148.

[13] D. V. WIDDER, The Laplace Transform, Princeton University Press, 1946.

[14] S. ZAIDMAN, La représentation des fonctions vectorielles par des intégrales de Laplace-Stieltjes, Ann. Math., 68(1958), 260–277.

[15] S. ZAIDMAN, Sur la représentation des fonctions vectorielles par des intégrales de Laplace-Stieltjes, Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, 247(1958), 905.

[16] S. ZAIDMAN, Représentation des fonctions vectorielles par des intégrales de Laplace-Stieltjes et compacité faible, Compte Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, 248(1959), 1915.

BUCAREST, ROUMANIE.