ROCKY MOUNTAIN
JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 37, Number 6, 2007

# QUELQUES PROPRIÉTÉS DES MÉTRIQUES D'EINSTEIN SUR LES GROUPES DE LIE RÉSOLUBLES

HAMID-REZA FANAÏ

ABSTRACT. Using the formula for the Ricci tensor of a standard solvmanifold, we prove some properties of the map which defines the semi-direct product between the abelian part and the nilpotent part when our manifold is Einstein.

**1. Introduction.** Nous étudions dans cette note certains aspects des métriques invariantes à gauche d'Einstein sur les groupes de Lie résolubles. On sait que tous les exemples connus de variétés homogènes d'Einstein non-compactes et non-plates sont isométriques aux solvariétés d'Einstein $(S, Q_0)$ où $S$ désigne un groupe de Lie résoluble simplement connexe muni d'une métrique invariante à gauche d'Einstein $Q_0$. Nous travaillons en fait, avec les algèbres de Lie résolubles métriques $(\mathfrak{s}, Q)$. Une telle algèbre de Lie métrique est appelée standard [**7**] si $[\mathfrak{s},\mathfrak{s}]^\perp$ est abélien. On note $\mathfrak{n} := [\mathfrak{s},\mathfrak{s}]$ (la partie nilpotente) et $\mathfrak{a} := \mathfrak{n}^\perp$. Soit $H_Q \in \mathfrak{s}$ le vecteur défini par $Q(H_Q, X) = \operatorname{tr}\operatorname{ad}_X$ pour tout $X \in \mathfrak{s}$.

Dans la formule de $\operatorname{ric}_Q$ (voir la partie suivante) l'application $\operatorname{ad}_{H_Q}$ apparaît de manière décisive. Nous étudions quelques propriétés de cette application. Dans la première partie nous présentons une propriété importante trouvée par Heber: soit $(\mathfrak{s}, [,])$ une algèbre de Lie non-unimodulaire résoluble munie d'une métrique d'Einstein standard $Q_0$. Alors d'après [**7**, Théorème 4.10] $D_{H_0}$ la partie symétrique de $\operatorname{ad}_{H_0} \in \operatorname{End}(\mathfrak{s})$ est aussi une dérivation (et définie positive sur $\mathfrak{n}$), où $H_0 = H_{Q_0}$ est non nul (par hypothèse de non-unimodularité). En d'autre terme, $(\mathfrak{s}, [,], Q_0)$ est isométrique à un espace de type Iwasawa. Ceci implique que $\operatorname{ad}_{H_0}$ est un opérateur normal de $(\mathfrak{s}, Q_0)$. La propriété qui nous intéresse est la suivante: pour une telle algèbre de Lie $(\mathfrak{s}, [,], Q_0)$, il existe un multiple positif unique $H_1 = \lambda H_0$ tel que l'opérateur normal $\operatorname{ad}_{H_1}|_{\mathfrak{n}}$ a des valeurs propres dont les parties réelles $\mu_1 < \cdots < \mu_m$ sont des entiers sans diviseur commun

2000 AMS *Mathematics subject classification.* Primary 53C25, 53C30.
*Keywords and phrases.* Einstein space, homogeneous space.
Received by the editors on May 4, 2004, and in revised form on July 16, 2005.

[**7**, Théorème 4.14]. Les $\mu_i$ sont les valeurs propres de $D_{H_1}|_{\mathfrak{n}}$. Si $d_i, i = 1, \dots, m$, désignent les multiplicités correspondantes, alors on appelle le $2m$-uplet

$$(\mu_1 < \cdots < \mu_m; d_1, \dots, d_m)$$

le type de valeur propre de solvariété d'Einstein standard associée [**7**].

Dans la première partie nous présentons la preuve de ce résultat de manière très simple. L'idée est bien sur celle de Heber, mais ici, nous donnons la preuve de façon plus condensée et rapide.

Dans la deuxième partie, nous supposerons que $\mathfrak{n}$ est nilpotente de rang deux et que $\dim \mathfrak{a} = 1$. L'application $\mathrm{ad}_{H_0}$ étant une dérivation, il est clair que celle-ci préserve $\mathfrak{c}$ le centre de $\mathfrak{n}$. Dans le chapitre 4 de [**8**], un premier théorème de réduction montre que cette application préserve aussi le supplémentaire orthogonal de $\mathfrak{c}$ dans $\mathfrak{n}$. Ceci résulte aussi du fait que $\mathrm{ad}_{H_0}$ est un opérateur normal. Par la suite dans le chapitre 7, un deuxième théorème de réduction montre que cet opérateur laisse invariants $\mathfrak{c}_1 = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ et $\mathfrak{c}_2$ son supplémentaire orthogonal dans $\mathfrak{c}$. Grâce à la formule de $\mathrm{ric}_Q$, nous donnons une preuve (inspirée par celle de Kass) de ces propriétés dans cette partie. Nous donnons également une preuve (plus rapide) du fait que les valeurs propres de $D_{H_0}|_{\mathfrak{n}}$ sont toutes positives en admettant que celle-ci soit une dérivation.

Nous étudions un problème de décomposabilité de $\mathfrak{n}$ dans la troisième partie lorsque $\dim \mathfrak{a} = 1$ (par exemple $\mathfrak{a} = \langle H \rangle$ avec $H$ de norme 1) et prouvons que si

$$(\langle H \rangle \oplus \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2, [,], Q_0)$$

est d'Einstein où les algèbres $\mathfrak{n}_1$ et $\mathfrak{n}_2$ sont orthogonales et $[\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2] = \{0\}$, alors $D_{H_0}$ préserve $\mathfrak{n}_1$ et $\mathfrak{n}_2$. Il en résulte que $(\langle H \rangle \oplus \mathfrak{n}_i, [,]_i, Q_0)$ pour $i = 1, 2$ est aussi d'Einstein où $[,]_1$ et $[,]_2$ sont obtenus à partir de $[,]$ en modifiant $\mathrm{ad}_{H_0}$.

**Théorème 1.1.** *Soit $(\langle H \rangle \oplus \mathfrak{n}, [,], Q_0)$ une algèbre de Lie résoluble non-unimodulaire d'Einstein. Supposons que $\mathfrak{n}$ se décompose orthogonalement en somme directe de deux sous-algèbres $\mathfrak{n}_1$ et $\mathfrak{n}_2$ avec $[\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2] = \{0\}$.*

*Alors $D_{H_0}$ préserve les sous-algèbres $\mathfrak{n}_i$. En particulier, les espaces $(\langle H \rangle \oplus \mathfrak{n}_i, [,]_i, Q_0)$ sont d'Einstein où $[,]_i$ sont obtenus à partir de $[,]$ en modifiant* $\mathrm{ad}_{H_0}$ *sur chaque $\mathfrak{n}_i$.*

Pour ce dernier nous appliquons les arguments de [**11**] que nous avons déjà utilisés dans [**4, 5, 6**].

**2. Type de valeur propre.** Soit $S$ un groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe. On note $\mathfrak{s}$ son algèbre de Lie et $B$ sa forme de Killing. On désigne par $\mathrm{Der}(\mathfrak{s}) \subset \mathrm{End}(\mathfrak{s})$ l'algèbre de Lie de toutes les dérivations de $\mathfrak{s}$.

Supposons que $\mathfrak{s}$ est munie d'un produit scalaire (défini positif) $Q$ qui induit la norme $|\cdot|$ et prenons $\{e_i\}$ une base orthonormée quelconque de $(\mathfrak{s}, Q)$. Comme nous avons défini auparavant, le vecteur $H_Q$ est déterminé par $Q(H_Q, X) = \mathrm{tr}\,\mathrm{ad}_X$ pour tout $X \in \mathfrak{s}$. Il est clair que $H_Q$ est perpendiculaire à l'algèbre dérivée $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$. Nous rappelons que $S$ (ou $\mathfrak{s}$) est appelé unimodulaire si $\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}_X = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{s}$, ou de manière équivalente si le vecteur $H_Q$ s'annule (pour tout $Q$).

Le produit scalaire $Q$ induit une métrique riemannienne invariante à gauche sur $S$ que l'on note toujours $Q$. Si le tenseur de courbure de Ricci $\mathrm{ric}(v, w) = \mathrm{tr}\, R\,(\cdot, v)w$ défini à partir de $R$, le tenseur de courbure de Riemann, est un multiple de la métrique $Q$, alors $Q$ est appelée d'Einstein. Si $Q_0$ est une métrique d'Einstein sur $(\mathfrak{s}, [\,,\,])$, la constante de proportionnalité est non-positive puisque $S$ est non-compact ([**2**]). De plus, si $\mathrm{ric}_{Q_0}$ s'annule alors $(S, Q_0)$ est une variété plate (voir par exemple [**1**]). Nous considérons donc le cas

$$\mathrm{ric}_{Q_0}(v, w) = -c \cdot Q_0(v, w)$$

avec $c > 0$. La courbure scalaire est alors égale à $sc(Q_0) = -c \cdot \dim S$. La formule de $\mathrm{ric}_Q$ dans le cas général est donnée dans la Section 2 de [**9**], comparer [**2**, avec 7.38]:

$$\begin{aligned}\mathrm{ric}_Q(X, X) = {} & -Q(\mathrm{ad}_{H_Q} X, X) - 1/2 B(X, X) \\ & - 1/2\, \mathrm{tr}\, \mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad} *_X + 1/4 \sum_{i,j} Q([e_i, e_j], X)^2\end{aligned}$$

où $^*$ désigne l'adjoint par rapport à $Q$. Si $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]^\perp$ (relatif à $Q$) est abélien, nous appelons $(\mathfrak{s}, Q)$ une algèbre de Lie standard [**7**].

Maintenant nous prouvons la propriété de rationnalité concernant les valeurs propres de $D_{H_0}$ mentionnée auparavant, dès qu'une métrique d'Einstein standard $Q_0$ est fixée. Donnons tout d'abord une preuve rapide du lemme crucial suivant (voir le Lemme 4.13 de [**7**]):

**Lemme 2.1.** *Avec les notations précédentes, si* $(\mathfrak{s}, [,], Q_0)$ *est une algèbre de Lie non-unimodulaire résoluble munie d'une métrique d'Einstein standard* $Q_0$*, alors pour toute dérivation symétrique* $A \in \mathrm{Der}(\mathfrak{s})$*, nous avons*

$$c \cdot \mathrm{tr}_{\mathfrak{n}} A = \mathrm{tr}_{\mathfrak{n}}(D_{H_0} \circ A).$$

*Remarque.* En fait $\mathrm{tr}_{\mathfrak{n}} A = \mathrm{tr}\, A$ car $A$ s'annule nécessairement sur $\mathfrak{a}$, [**7**].

**Démonstration.** Remarquons comme dans le Lemme 2.2 de [**7**] que pour tout $X \in \mathfrak{s}$, $\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}_{A(X)} = \mathrm{tr}[A, \mathrm{ad}_X] = 0$ ce qui implique que $A(X)$ est perpendiculaire à $H_0$ et donc $A(H_0) = 0$. Il en résulte que $A$ commute avec $\mathrm{ad}_{H_0}$ et sa partie symétrique $D_{H_0}$. Supposons que $\{e_i\}$ est une base orthonormée de $\mathfrak{s}$ formée par des vecteurs propres de $D_{H_0}$ et de $A$. Supposons que sur $\mathfrak{n}$: $D_{H_0}(e_i) = \mu_i e_i$ et $A(e_i) = \alpha_i e_i$. Nous utilisons la formule de $\mathrm{ric}_{Q_0}(e_i, e_i)$ pour $e_i \in \mathfrak{n}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{ric}_{Q_0}(e_i, e_i) = &-Q_0(D_{H_0}(e_i), e_i) - 1/2 B(e_i, e_i) \\ &- 1/2 \sum_j Q_0([e_i, e_j], [e_i, e_j]) \\ &+ 1/4 \sum_{j,k} Q_0([e_j, e_k], e_i)^2 \end{aligned}$$

et puisque $\mathfrak{n} \subset \ker(B)$ (voir [**3, 10**]) obtenons donc l'égalité suivante:

$$c - \mu_i = 1/2 \sum_{j,k} (c_{ij}^k)^2 - 1/4 \sum_{j,k} (c_{jk}^i)^2$$

où $c_{ij}^k = Q_0([e_i, e_j], e_k)$ pour tous $i, j, k$. Nous avons alors comme dans le Lemme 3.3 de [**7**]:

$$\begin{aligned} c \cdot \operatorname{tr}_{\mathfrak{n}} A - \operatorname{tr}_{\mathfrak{n}}(D_{H_0} \circ A) &= c \cdot \sum_i \alpha_i - \sum_i \mu_i \cdot \alpha_i \\ &= \sum_i \left\{ 1/2 \sum_{j,k} (c_{ij}^k)^2 - 1/4 \sum_{j,k} (c_{jk}^i)^2 \right\} \cdot \alpha_i \\ &= -1/4 \sum_{i,j,k} (\alpha_k - \alpha_i - \alpha_j) \cdot (c_{ij}^k)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

la dernière égalité vient du fait que $A$ est une dérivation car si $c_{ij}^k \neq 0$ alors $\alpha_k = \alpha_i + \alpha_j$. □

*Remarque.* La dérivation symétrique $D_{H_0}$ est caractérisée par cette propriété qui reste valable pour une dérivation quelconque $A$. Notons que le cas $A = D_{H_0}$ donne $c = \operatorname{tr} D_{H_0}^2 / \operatorname{tr} \operatorname{ad}_{H_0}$.

Maintenant, supposons que $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_m$ sont les valeurs propres distinctes de $D_{H_0}|_{\mathfrak{n}}$ de multiplicités $d_j = \dim \mathfrak{n}_j$ et $\mathfrak{n}_j$ les espaces propres associés dans $\mathfrak{n}$. Dans la partie suivante nous donnerons une preuve du fait que toutes les $\lambda_j$ sont bien positives lorsque $\mathfrak{n}$ est nilpotente de rang deux et $\dim \mathfrak{a} = 1$.

Soit $A : \mathfrak{n} \to \mathfrak{n}$ définie par $A|_{\mathfrak{n}_j} = \alpha_j \operatorname{Id}$ pour $1 \leq j \leq m$ avec $\alpha_i + \alpha_j = \alpha_k$ si $0 \neq [\mathfrak{n}_i, \mathfrak{n}_j] \subset \mathfrak{n}_k$. Il est clair que $A$ devient une dérivation symétrique de $\mathfrak{s}$ en posant $A|_{\mathfrak{a}} = 0$. D'après le lemme précédent, nous avons

$$\sum_{j=1}^{m} d_j \cdot (c - \lambda_j) \cdot \alpha_j = 0.$$

Soit $\ell$ le nombre de $\alpha_i$ qui peuvent être indépendants des autres. Soit $L = \{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_\ell}\}$ un tel choix. Alors en posant $X_j = \lambda_j / c$, nous obtenons

$$\sum_{s=1}^{\ell} P_{i_s}(X_{i_1}, \ldots, X_{i_\ell}) \cdot \alpha_{i_s} = 0$$

où $P_i$ est un polynôme de degré 1 de $\ell$ variables à coefficients rationnels. L'égalité ci-dessus étant valable pour toutes valeurs de $\alpha_{i_s}$, il en résulte que

$$P_{i_s}(X_{i_1}, \dots, X_{i_\ell}) = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \le s \le \ell.$$

Il est facile de vérifier que ce système nous donne une unique solution pour les $X_{i_s}$, d'après la remarque précédente. Ceci implique que les $\lambda_{i_s}/c$ sont toutes rationnelles ce qui prouve que toutes les $\lambda_i/c$ sont rationnelles. Nous avons donc montré le

**Theorem 2.2** (Heber). *Il existe une constante positive $\omega$, telle que les valeurs propres de $D_{H_0} : \mathfrak{n} \to \mathfrak{n}$ appartiennent à $\omega \cdot \mathbb{N}$.*

Ceci implique qu'il existe un multiple positif unique $H_1 = \lambda H_0$ tel que l'opérateur $\mathrm{ad}_{H_1}|_{\mathfrak{n}}$ a des valeurs propres dont les parties réelles $\mu_1 < \cdots < \mu_m$ sont des entiers positifs sans diviseur commun. Les $\mu_i$ sont les valeurs propres de $D_{H_1}|_{\mathfrak{n}}$. Si $d_i$ désignent les multiplicités correspondantes, alors on appelle le $2m$-uplet

$$(\mu_1 < \cdots < \mu_m; d_1, \dots, d_m)$$

le type de valeur propre de solvariété (non-unimodulaire) d'Einstein standard $(\mathfrak{s}, [,], Q_0)$. À l'aide du théorème précédent nous obtenons des obstructions à l'existence d'une telle métrique $Q_0$ sur $(\mathfrak{s}, [,])$ avec $\dim \mathfrak{a} = 1$, dès qu'un type de valeur propre est fixé.

**3. Deux théorèmes de réduction pour** $\mathrm{ad}_{H_0}$**.** Nous utilisons toujours les mêmes notations. Dans cette partie nous supposons que $\mathfrak{n}$ est nilpotente de rang deux et $\dim \mathfrak{a} = 1$. Soit $\{e_i\}$ une base orthonormée de $\mathfrak{s}$ formée par $\{H\}$ et une base de $\mathfrak{n}$ où $H = H_0/|H_0|$. Posons $f = \mathrm{ad}_H|_{\mathfrak{n}}$. Quitte à changer $H$ par $-H$, nous pouvons supposer que $\mathrm{tr}\, f > 0$. Il est clair que $f$ préserve $\mathfrak{c}$ le centre de $\mathfrak{n}$. Soit $\mathfrak{m}$ le supplémentaire orthogonal de $\mathfrak{c}$ dans $\mathfrak{n}$. La matrice de $f$ dans des bases orthonormées de $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{m}$ est la suivante

$$f = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Nous prouvons que $C = 0$. Ceci a déjà été démontré dans [**8**]. Nous donnons une preuve similaire en utilisant la formule de $\mathrm{ric}_{Q_0}$.

Réécrivons la formule

$$\begin{aligned}\mathrm{ric}_{Q_0}(X,Y) = {}& -Q_0(D_{H_0}X,Y) - 1/2B(X,Y) \\ & - 1/2\sum_i Q_0([X,e_i],[Y,e_i]) \\ & + 1/4\sum_{i,j} Q_0(X,[e_i,e_j])\cdot Q_0(Y,[e_i,e_j]).\end{aligned}$$

Appliquons cette formule pour $X \in \mathfrak{c}$ et $Y \in \mathfrak{m}$. Avec $\mathrm{ad}_{H_0} = (\mathrm{tr}\, f)f$, nous avons

$$\begin{aligned}0 = {}& -1/2(\mathrm{tr}\, f)Q_0((f+f^t)X,Y) - 1/2Q_0(f(X),f(Y)) \\ & + 1/2\sum_j Q_0(X,f(Y_j))\cdot Q_0(Y,f(Y_j))\end{aligned}$$

où $\{Y_j\}$ est la base orthonormée choisie de $\mathfrak{m}$. Nous obtenons alors

$$(\mathrm{tr}\, f)Q_0(f^tX,Y) + Q_0(f^tfX,Y) - \sum_j Q_0(f^tX,Y_j)\cdot Q_0(f^tY,Y_j) = 0$$

mais cette dernière somme étant égale à $Q_0(f^tX, f^tY)$, nous avons donc $(\mathrm{tr}\, f)C^t = DC^t - C^tA$ et en conséquence

$$(\mathrm{tr}\, f)\|C\|^2 = \mathrm{tr}(C^tCD - CC^tA).$$

Choisissons $\{Y_j\}$ et la base orthonormée $\{X_i\}$ de $\mathfrak{c}$ telles que $S_A$ et $S_D$ les parties symétriques de $A$ et $D$ soient diagonales. Posons $S_A = \mathrm{diag}(a_i)$ et $S_D = \mathrm{diag}(d_j)$. Nous montrons maintenant que $a_i \geq d_j$ pour tous $i,j$. Dans ce cas, l'inégalité $\mathrm{tr}\, C^tCD \leq \mathrm{tr}\, CC^tA$ entraîne $\|C\| = 0$. Nous utilisons la formule de $\mathrm{ric}_{Q_0}(Y,Y)$ avec $Y = Y_{j_0}$. Ce qui donne

$$\begin{aligned}-c = {}& -(\mathrm{tr}\, f)d_{j_0} - 1/2Q_0(f(Y),f(Y)) \\ & - 1/2\sum_j Q_0([Y,Y_j],[Y,Y_j]) \\ & + 1/2\sum_j Q_0(Y,f(Y_j))^2\end{aligned}$$

notons que $Q_0(f(Y),f(Y)) = \sum_j Q_0(Y,f(Y_j))^2 + R$ avec $R \geq 0$ car la partie symétrique de $D$ est diagonale. Nous obtenons donc

$(\operatorname{tr} f)d_{j_0} \leq c$. Maintenant nous utilisons la formule de $\operatorname{ric}_{Q_0}(X,X)$ avec $X = X_{i_0}$:

$$\begin{aligned} -c = &-(\operatorname{tr} f)a_{i_0} - 1/2Q_0(f(X), f(X)) \\ &+ 1/2\sum_k Q_0(X, f(e_k))^2 \\ &+ 1/4\sum_{j,j'} Q_0(X, [Y_j, Y_{j'}])^2 \end{aligned}$$

notons que $\sum_k Q_0(X, f(e_k))^2 = Q_0(f(X), f(X)) + L$ avec $L \geq 0$ car la partie symétrique de $A$ est diagonale. Nous obtenons donc $c \leq (\operatorname{tr} f)a_{i_0}$. En combinant les deux inégalités obtenues nous avons $d_{j_0} \leq a_{i_0}$ et nous terminons ainsi la preuve de $C = 0$.

Nous pouvons maintenant prouver que les $d_j$ sont positives. Si pour un $j_0$, $d_{j_0} < 0$, puisqu'il existe un $j_1$ tel que $[Y_{j_0}, Y_{j_1}] \neq 0$ nous obtenons que $d_{j_0} + d_{j_1} = a_{i_0}$ pour un $i_0$. Ce qui est impossible car $d_{j_1} \leq a_{i_0}$. Ceci montre que $d_j \geq 0$ pour tout $j$. Supposons que pour un $j_0$, $d_{j_0} = 0$. Dans ce cas $d_{j_1} = a_{i_0}$ pour un $j_1$ et un $i_0$, ce qui montre que nous sommes dans le cas d'égalité dans les inégalités $(\operatorname{tr} f)d_{j_1} \leq c \leq (\operatorname{tr} f)a_{i_0}$. Alors il est facile de voir que nous avons $\Omega_{X_{i_0}} = 0$ où pour tout $X \in \mathfrak{c}$ l'opérateur $\Omega_X : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ est défini de la manière suivante

$$Q_0(\Omega_X(Y), Y') = Q_0(X, [Y, Y']) \quad \text{pour tous} \quad Y, Y' \in \mathfrak{m}$$

ce qui implique $X_{i_0} \in [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]^\perp \cap \mathfrak{c}$ (voir le Chapitre 4 de [**8**]). Mais nous savons comment réduire l'étude du cas général au cas où $\mathfrak{c} = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ comme nous avons expliqué dans [**4**]. En effet, il suffit de modifier la norme de $H$ et éventuellement les valeurs propres de $D_{H_0}$ juste en multipliant celles-ci par des constantes convenables, ce qui laisse inchangé $d_{j_0} = 0$, d'où le résultat recherché.

Maintenant supposons que $\mathfrak{c}_1 = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ et $\mathfrak{c}_2$ le supplémentaire orthogonal de $\mathfrak{c}_1$ dans $\mathfrak{c}$. Il est clair que $f$ préserve $\mathfrak{c}_1$. Alors nous pouvons donner une preuve du fait que $f$ préserve aussi $\mathfrak{c}_2$, ce qui a été prouvé dans [**8**]. Ceci se fait exactement de la même manière que la preuve de $C = 0$, i.e., il suffit d'appliquer la formule de $\operatorname{ric}_{Q_0}$ pour les trois cas différents. Nous évitons d'écrire les détails. La matrice $A$ dans des bases orthonormées de $\mathfrak{c}_1$ et $\mathfrak{c}_2$ s'écrit donc de la manière suivante

$$A = \begin{bmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{bmatrix}$$

maintenant nous pouvons prouver également que la partie symétrique de $A''$ est un multiple de l'identité (comme c'est prouvé aussi dans [**8**]). Si $\{Z_j\}$ est une base orthonormée de $\mathfrak{c}_2$ pour laquelle la partie symétrique de $A''$ est diagonale, alors la formule de $\mathrm{ric}_{Q_0}$ implique facilement $c = Q_0(D_{H_0}Z_j, Z_j)$ d'où le résultat. Nous résumons tout cela en forme du théorème suivant.

**Théorème 3.1.** *Soit* $(\langle H\rangle \oplus \mathfrak{n}, [,], Q_0)$ *une algèbre de Lie résoluble non-unimodulaire d'Einstein avec* $\mathfrak{n}$ *nilpotente de rang deux. Soient* $\mathfrak{m}$ *le supplémentaire orthogonal de* $\mathfrak{c}$ *(le centre de* $\mathfrak{n}$*) dans* $\mathfrak{n}$ *et* $\mathfrak{c}_2$ *le supplémentaire orthogonal de* $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ *dans* $\mathfrak{c}$*.*

*Alors* $\mathrm{ad}_{H_0}$ *laisse invariants* $\mathfrak{m}$ *et* $\mathfrak{c}_2$*. La partie symétrique de* $\mathrm{ad}_{H_0}|_{\mathfrak{c}_2}$ *est un multiple de l'identité. Si nous admettons que* $D_{H_0}$ *est une dérivation de* $\mathfrak{s}$*, alors elle est définie positive sur* $(\mathfrak{n}, Q_0)$*.*

**4. Problème de décomposabilité.** Dans cette dernière partie nous considérons une algèbre de Lie non-unimodulaire résoluble d'Einstein $(\mathfrak{s}, [,], Q_0)$ avec $\dim \mathfrak{a} = 1$ et supposons que $\mathfrak{n} = [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$ est décomposable orthogonalement en somme directe de deux sous-algèbres $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2$ avec $[\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2] = \{0\}$. Nous examinons le problème de savoir si chaque composante $(\langle H\rangle \oplus \mathfrak{n}_i, [,]_i, Q_0)$ est d'Einstein où $[,]_i$ est obtenu à partir de $[,]$ en modifiant éventuellement $\mathrm{ad}_{H_0}$ sur $\mathfrak{n}_i$. Nous prouvons que $D_{H_0}$ préserve les $\mathfrak{n}_i$ et répondons donc affirmativement au problème.

Tout d'abord, nous pouvons supposer sans perdre de généralité que $\mathrm{ad}_{H_0}$ est une dérivation symétrique de $\mathfrak{s}$. Ceci est possible grâce [**7**, Théorème 4.10]. Soit $\{e_i\}$ une base orthonormée de $\mathfrak{s}$ formée par $\{H\}$ et des bases orthonormées de $\mathfrak{n}_1$ et $\mathfrak{n}_2$ (comme avant $H = H_0/|H_0|$). Supposons que $X \in \mathfrak{n}_1$ et $Y \in \mathfrak{n}_2$ sont deux vecteurs quelconques. Nous appliquons une nouvelle fois la formule de $\mathrm{ric}_{Q_0}(X, Y)$. Nous obtenons alors

$$Q_0(\mathrm{ad}_{H_0}X, Y) = -1/2 \sum_i Q_0([X, e_i], [Y, e_i]) + 1/4 \sum_{i,j} Q_0(X, [e_i, e_j]) \cdot Q_0(Y, [e_i, e_j])$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}Q_0(\mathrm{ad}_{H_0}X,Y) &= -1/2Q_0([H,X],[H,Y]) \\ &\quad + 1/2\sum_i Q_0([H,e_i],X)\cdot Q_0([H,e_i],Y).\end{aligned}$$

Posons $[H,X]=\sum_i \alpha_i e_i$ et $[H,Y]=\sum_j \beta_j e_j$. Nous avons alors

$$Q_0([H,X],[H,Y])=\sum_k \alpha_k\beta_k.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\sum_k Q_0([H,e_k],X)\cdot Q_0([H,e_k],Y) \\ &= \sum_k Q_0(e_k,[H,X])\cdot Q_0(e_k,[H,Y]) \\ &= \sum_k \alpha_k\beta_k\end{aligned}$$

et nous obtenons $Q_0(\mathrm{ad}_{H_0}X,Y)=0$. Ceci montre que $\mathrm{ad}_{H_0}(\mathfrak{n}_i)\subset\mathfrak{n}_i$ pour $i=1,2$. Le Lemme 1.4(3) de [**11**] montre que dans ce cas en modifiant $\mathrm{ad}_{H_0}$ sur chaque $\mathfrak{n}_i$, l'espace $(\langle H\rangle\oplus\mathfrak{n}_i,[,]_i,Q_0)$ devient d'Einstein où $[,]_i$ est le crochet de Lie modifié. Rappelons ce lemme.

**Lemme 4.1.** *Soit* $(\langle H\rangle\oplus\mathfrak{n},Q)$ *une algèbre de Lie résoluble métrique. Si* $\mathrm{ad}_{H_Q}$ *est symétrique, alors pour tout vecteur* $X\in\mathfrak{s}$

$$\mathrm{ric}_{\mathfrak{s}}(X,X)=\mathrm{ric}_{\mathfrak{n}}(X,X)-Q(\mathrm{ad}_{H_Q}X,X).$$

Grâce à ce lemme, sachant que la courbure de Ricci $\mathrm{ric}_{\mathfrak{n}}$ s'écrit comme la somme directe des $\mathrm{ric}_{\mathfrak{n}_i}$, il suffit de poser

$$[H_0,\cdot]_i:=\sqrt{\frac{\mathrm{tr}_{\mathfrak{n}}\mathrm{ad}_{H_0}}{\mathrm{tr}_{\mathfrak{n}_i}\mathrm{ad}_{H_0}}}\cdot\mathrm{ad}_{H_0}|_{\mathfrak{n}_i}$$

ce qui est possible car toutes les valeurs propres de $\mathrm{ad}_{H_0}$ sont positives. Nous avons donc terminé la preuve du théorème suivant.

**Théorème 4.2.** *Soit* $(\langle H\rangle \oplus \mathfrak{n}, [,], Q_0)$ *une algèbre de Lie résoluble non-unimodulaire d'Einstein. Supposons que* $\mathfrak{n}$ *se décompose orthogonalement en somme directe de deux sous-algèbres* $\mathfrak{n}_1$ *et* $\mathfrak{n}_2$ *avec* $[\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2] = \{0\}$.

*Alors* $D_{H_0}$ *préserve les sous-algèbres* $\mathfrak{n}_i$. *En particulier, les espaces* $(\langle H\rangle \oplus \mathfrak{n}_i, [,]_i, Q_0)$ *sont d'Einstein où* $[,]_i$ *sont obtenus à partir de* $[,]$ *en modifiant* $\mathrm{ad}_{H_0}$ *sur chaque* $\mathfrak{n}_i$.

**Remerciement.** Je remercie le Conseil de Recherches de l'Université Technologique Sharif de Téhéran, Iran, pour son soutien.

## REFERENCES

**1.** L. Bérard Bergery, *Sur la courbure des métriques riemanniennes invariantes des groupes de Lie et des espaces homogènes*, Ann. Scient. ł' Ecole Norm. Sup. **11** (1978), 543–576.

**2.** A.L. Besse, *Einstein manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

**3.** N. Bourbaki, *Elements of mathematics*: *Lie Groups and Lie algebras*, Springer, Berlin 1989.

**4.** H.-R. Fanaï, *Espaces homogènes d'Einstein non-compacts*, Geom. Dedicata **80** (2000), 187–200.

**5.** ———, *Variétés homogènes d'Einstein de courbure scalaire négative*: *Construction à l'aide de certains modules de Clifford*, Geom. Dedicata **93** (2002), 77–87.

**6.** ———, *Sur un type particulier de valeur propre des solvariétés d'Einstein*, Bull. Austral. Math. Soc. **68** (2003), 39–43.

**7.** J. Heber, *Noncompact homogeneous Einstein spaces*, Invent. Math. **133** (1998), 279–352.

**8.** D. Kass-Hengesch, *Exemples de variétés homogènes d'Einstein à courbure scalaire négative*, Thèse de Doctorat de l'Université Henri Poincaré-Nancy I, France, 1996.

**9.** I. Dotti Miatello, *Ricci curvature of left-invariant metrics on solvable unimodular Lie groups*, Math. Z. **180** (1982), 257–263.

**10.** A. Sagle et R. Walde, *Introduction to Lie groups and Lie algebras*, Academic Press, New York, 1973.

**11.** T. Wolter, *Einstein metrics on solvable groups*, Math. Z. **206** (1991), 457–471.

Department of Mathematical Sciences, Sharif University of Technology, P.O. Box 11365-9415, Tehran, Iran
**Email address: fanai@sharif.ac.ir**