197. *Remarque sur les espaces fonctionnels au noyau besselien*

Par Masayuki Itô
Institut Mathématique d'Université de Nagoya

(Comm. by Kinjirô Kunugi, M. J. A., June 12, 1971)

1. Soit R^n l'espace euclidien à n ($\geqq 2$) dimensions. Rappelons que le noyau besselien $G_{2\alpha}$ d'ordre 2α sur R^n est une fonction positive, continue au sens large dans R^n et dont la transformation de Fourier est de la forme

$$\hat{G}_{2\alpha}(x) = (1+|x|^2)^{-\alpha},$$

où α est un nombre positif (voir [1]). Il est caractérisé, d'autre part, par le noyau reproduit de l'espace fonctionnel $P^\alpha(R^n)$ sur R^n, qui est obtenu par la complété de $C_0^\infty(R^n)$ par la norme

$$\|u\|_{2\alpha} = \left(\int |\hat{u}(x)|^2(1+|x|^2)^\alpha dx\right)^{1/2}$$

(voir l'article cité ci-dessus). Notons $T_{2\alpha}$ la distribution sur R^n dont la transformation de Fourier est égale à $(1+|x|^2)^\alpha$. Alors $T_{2\alpha} * G_{2\alpha} = \varepsilon$, où ε est la mesure de Dirac à l'origine.

Pour un ouvert Ω de R^n, $C_0^\infty(\Omega)$ désigne l'espace de fonctions numériques, infiniment dérivables dans R^n et à support compact dans Ω. En complétant $C_0^\infty(\Omega)$ par la présente norme, on obtient l'espace fonctionnel régulier $P^\alpha(\Omega)$ sur Ω, qui s'appelle l'espace fonctionnel au noyau besselien d'ordre 2α sur Ω (voir [4]). On note $E_\alpha(\Omega)$ l'ensemble de mesures positives μ dans Ω, à support compact et avec $\iint G_{2\alpha}(x-y) d\mu(y)d\mu(x) < +\infty$. Alors, pour toute μ de $E_\alpha(\Omega)$, il existe le potentiel $U_{2\alpha}^\Omega \mu$ de μ dans $P^\alpha(\Omega)$.

On note

$$G_{2\alpha}^\Omega(x, y) = \int \cdots \int G_{2(\alpha-p)}^\Omega(x, z_1) G_2^\Omega(z_1, z_2) \cdots G_2^\Omega(z_p, y) dz_1 \cdots dz_p,$$

où p est un entier non-négatif tel que $0 < \alpha - p \leqq 1$ et $G_{2(\alpha-p)}^\Omega$ (resp. G_2^Ω) est la fonction greenienne dans Ω obtenue par le balayage relatif au noyau $G_{2(\alpha-p)}$ (resp. G_2). Alors $G_{2\alpha}^\Omega$ posséde les même propriétés que la fonction greenienne ordinaire.

I. Higuchi a montré, dans son article [4], que s'il existe un ouvert non-vide et borné Ω de R^n tel que $G_{2\alpha}^\Omega$ soit le noyau reproduit de $P^\alpha(\Omega)$, alors $0 < \alpha \leqq 1$.

Cela pourra être amélioré comme la proposition suivante:

Proposition. *Soit α un nombre positif. Alors les trois énoncés* *suivants sont équivalents:*

(a) *Il existe un ouvert borné Ω de R^n et une mesure non-zéro μ de $E_\alpha(\Omega)$ tels que $G_{2\alpha}^{\Omega}\mu$ appartienne à $P^\alpha(\Omega)$.*

(b) *α n'est pas entier $\geqq 2$, et il existe un ouvert borné Ω de R^n et une mesure positive $\mu(\neq 0)$ dans Ω, à support compact, tels que $G_{2\alpha}^{\Omega}\mu = \check{G}_{2\alpha}^{\Omega}\mu$.*

(c) $0<\alpha\leqq 1$.

On note $\check{G}_{2\alpha}^{\Omega}(x, y)=G_{2\alpha}^{\Omega}(y, x)$ et $G_{2\alpha}^{\Omega}\mu(x)=\int G_{2\alpha}^{\Omega}(x, y)d\mu(y)$. Cette proposition résultera immédiatement du théorème suivant:

Théorème. *Soient $0<\beta<\min\left(\frac{\alpha}{2}, 1\right)$ et Ω un ouvert borné de R^n. Si, pour une fonction u de $P^\alpha(\Omega)$, on a $T_{2\beta}*u\geqq 0$ au sens des distributions dans Ω, alors $u=0$.*

2. On connaît que l'on peut écrire, quelle que soit φ de $C_0^\infty(R^n)$,

$$T_{2\alpha}(\varphi)=\varphi(0)+\int(\varphi(0)-\varphi(x))s_{2\alpha}(x)dx \quad \text{et} \quad s_{2\alpha}(x)=C_{2\alpha}\frac{G_{2(\alpha+n)}(x)}{|x|^{2\alpha+n}}, \qquad (0<\alpha<1),$$

où $C_{2\alpha}$ est une constante positive (voir [2]).

Lemme. *Soient $0<\beta<2$ et Ω un ouvert borné et non-vide de R^n. Alors on a*

$$\iint f_\Omega(x)f_{C\Omega}(y)|x-y|^{-\beta-n}dydx=+\infty,$$

où f_Ω et $f_{C\Omega}$ sont respectivement les fonctions caractéristiques de Ω et de $C\Omega$.

On connaît bien qu'il existe une constante négative c_β telle que

$$c_\beta(pf.\ r^{-\beta-n})*r^{\beta-n}=\varepsilon$$

au sens des distributions dans R^n, où $r=|x|$ et la signe $pf.$ est la partie finie de l'intégrale. On pose

$$g_1(x)=\begin{cases}\int(1-f_\Omega(y))|x-y|^{-\beta-n}dy & x\in\Omega\\ 0 & x\in C\Omega\end{cases}$$

et

$$g_2(x)=\begin{cases}\int f_\Omega(y)|x-y|^{-\beta-n} & x\in C\Omega\\ 0 & x\in\Omega.\end{cases}$$

Si l'intégrale du lemme est finie, alors g_1 et g_2 sont non-négatives et sommables. On a, au sens des distributions,

$$(pf.\ r^{-\beta-n})*f_\Omega=-g_1+g_2$$

dans R^n. La fonction f_Ω étant à support compact, il existe une autre constante positive c'_β telle que

$$f_\Omega=c'_\beta r^{\beta-n}*(g_1-g_2)$$

presque partout sur R^n. La mesure g_2dx doit être la mesure balayée de g_1dx sur $C\Omega$ relativement au noyau de Riesz-Frostman $r^{\beta-n}$. La fonction g_1 étant localement bornée dans Ω, $r^{\beta-n}*(g_1-g_2)$ est finie et continue dans Ω et donc, la présente égalité a lieu partout dans Ω. Il existe, d'autre part, un point x_0 de la frontière de Ω tel que

$$\lim_{y\to x_0} r^{\beta-n}*(g_1-g_2)(y)=0,$$

d'où une contradiction.

Montrons notre théorème. On a $P^\alpha(\Omega)\subset P^\alpha(R^n)$ et $P^\gamma(\Omega)\subset P^\delta(\Omega)$ pour $0<\delta\leqq\gamma$. On peut donc supposer $0<\alpha<1+\beta$. D'après le résultat de [1], il existe une fonction f dans R^n dont le carré est sommable et telle que $u=G_\alpha*f$. On désigne respectivement par g_1 et par g_2 la restriction $G_{(\alpha-2\beta)}*f$ sur Ω et la restriction de $-G_{(\alpha-2\beta)}*f$ sur $C\Omega$. Alors, d'après notre hypothèse, $g_1\geqq 0$ et, d'après le principe de domination pour le noyau $G_{2\beta}$, on a $u\geqq 0$. Cela implique $g_2\geqq 0$. La mesure g_2dx doit être la mesure balayée de g_1dx sur $C\Omega$ relativement au noyau $G_{2\beta}$. En utilisant la théorie de l'espace de Dirichlet, on a

$$g_2(x)=\begin{cases}\displaystyle\int u(y)s_{2\beta}(x-y)dy & x\in C\Omega\\ 0 & x\in\Omega\end{cases}$$

(voir [3]). Si $u\neq 0$, g_2 est positive partout sur $C\Omega$ et, pour tout $r>0$, on a $\mathit{inf}\,\{g_2(x)\,;\,x\in C\Omega\cap\Omega_r\}>0$, où $\Omega_r=\{x\in R^n\,;\,\mathrm{dis}\,(x,\Omega)<r\}$. D'après le présent lemme, on a, quel que soit $\gamma>0$,

$$\iint f_\Omega(x)g_2(y)|x-y|^{-\gamma-n}dydx=+\infty.$$

D'autre part, on connaît bien que $G_{(\alpha-2\beta)}$ satisfait au principe d'enveloppe inférieure, car $0<\alpha-2\beta<2$. Il existe donc une mesure positive μ dans R^n telle que

$$G_{(\alpha-2\beta)}*\mu=\inf\,(G_{(\alpha-2\beta)}*f^+,\ G_{(\alpha-2\beta)}*f^-).$$

On utilise ici $\int|f|dx<+\infty$, qui résulte du fait que $0<\alpha<2$ et $G_\alpha*f$ est à support compact. On a donc

$$\begin{aligned}g_2&=(G_{(\alpha-2\beta)}*f)^-=G_{(\alpha-2\beta)}*f^--\inf\,(G_{(\alpha-2\beta)}*f^+,\ G_{(\alpha-2\beta)}*f^-)\\&=G_{(\alpha-2\beta)}*(f^--\mu).\end{aligned}$$

On prend une suite croissante (φ_m) des fonctions non-négatives de $C_0^\infty(\Omega)$ et qui converge vers f_Ω. Pour $0<\gamma<\alpha-2\beta$, on a

$$\begin{aligned}0<\iint\varphi_m(x)g_2(y)s_\gamma(x-y)dydx&=-\int\varphi_m(x)G_{(\alpha-2\beta-\gamma)}*(f^--\mu)dx\\&\leqq-\int_\Omega G_{(\alpha-2\beta-\gamma)}*(f^--\mu)(x)dx<+\infty,\end{aligned}$$

car $G_{(\alpha-2\beta-\gamma)}*(f^--\mu)\leqq 0$ dans Ω résulte de $g_2\geqq 0$ et $g_2=0$ dans Ω. En faisant $m\to+\infty$, on arrive à

$$\iint f_\Omega(x)g_2(y)s_\gamma(x-y)dydx<+\infty,$$

d'où

$$\iint f_\Omega(x) g_2(y) |x-y|^{-r-n} dy dx < +\infty.$$

Mais cela est une contradiction, et la démonstration est ainsi complète.

Remarque. Pour le cas où $0<\alpha<n$, on peut montrer, de la même manière, que le même théorème pour le noyau d'ordre α, $r^{\alpha-n}$, a lieu.

Pour notre proposition, il suffit de voir que (a) ou (b) implique (c). Supposons que (a) a lieu, et soit $\alpha>1$. Alors, pour l'entier positif avec $0<\alpha-p\leqq 1$,

$$T_{2(\alpha-p)} * G_{2\alpha}^{\Omega}\mu = G_{2p}^{\Omega}\mu$$

au sens des distributions dans Ω. Si $0<\alpha-p<\min\left(\frac{\alpha}{2}, 1\right)$, on arrive à une contradiction, d'où $0<\alpha\leqq 1$ ou $\alpha=2$.

D'après la discution de I. Higuchi, $\alpha\neq 2$ (cf. [4]), d'où (a)$\Rightarrow$(c).

Remarque. Pour μ de $E_\alpha(\Omega)$, $G_{2\alpha}^{\Omega}\mu = U_{2\alpha}^{\Omega}\mu$ dès que $G_{2\alpha}^{\Omega}\mu$ appartient à $P^\alpha(\Omega)$. Cela résulte de l'égalité

$$T_{2\alpha} * G_{2\alpha}^{\Omega}\mu = T_{2\alpha} * U_{2\alpha}^{\Omega}\mu = \mu$$

au sens des distributions dans Ω.

Supposons que (b) a lieu. Si $p>0$, on a, d'après la définition de $\check{G}_{2\alpha}^{\Omega}$,

$$\check{G}_{2\alpha}^{\Omega}\mu(x) = G_2 * G_{2(\alpha-1)}^{\Omega}\mu(x) - G_2 * \lambda'(x),$$

où λ' est la mesure balayée de $G_{2(\alpha-1)}\mu dx$ sur $C\Omega$ relativement au noyau G_2. Donc l'implication (b)$\Rightarrow$(c) résultera de la proposition suivante:

Proposition. *Soient $0<\alpha<\beta\leqq 1$ et Ω un ouvert borné de R^n. Si, pour une mesure positive μ dans Ω et à support compact, $T_{2\alpha} * G_{2\beta}^{\Omega}\mu \geqq 0$ au sens des distributions dans Ω, alors $\mu=0$.*

En effet on a

$$G_{2\beta}^{\Omega}\mu = G_{2\beta} * \mu - G_{2\beta} * \mu',$$

où μ' est la mesure balayée de μ sur $C\Omega$ relativement au noyau $G_{2\beta}$. Désignons respectivement par g_1 et par g_2 la restriction de $G_{2(\beta-\alpha)} * (\mu-\mu')$ sur Ω et la restriction de $G_{2(\beta-\alpha)} * (\mu'-\mu)$ sur $C\Omega$. Alors, de la même manière que dans le théorème, on arrive à $G_{2\beta}^{\Omega}\mu=0$, d'où $\mu=0$.

Corollaire. *Soient $\alpha>0$, $0<\beta\leqq 1$ et Ω un ouvert borné et non-vide de R^n. Alors les deux énoncés suivants sont équivalents.*

(a) *Il existe une mesure positive ν $(\neq 0)$ dans Ω et à support compact, telle que, quelle que soit μ une mesure positive de $E_\beta(\Omega)$,*

$$G_{2\beta}^{\Omega}\mu(x) \leqq G_{2\alpha}^{\Omega}\nu(x) \text{ sur } S(\mu) \Rightarrow G_{2\beta}^{\Omega}\mu(x) \leqq G_{2\alpha}^{\Omega}\nu(x) \text{ dans } \Omega,$$

où $S(\mu)$ désigne le support de μ.

(b) $\beta=\alpha-p$.

Le noyau $G_{2(\alpha-p)}^{\Omega}$ satisfait au principe de domination relatif au noyau $G_{2\alpha}^{\Omega}$; c'est-à-dire, quelles que soient μ de $E_{(\alpha-p)}(\Omega)$ et ν une mesure positive dans Ω et à support compact, $G_{2(\alpha-p)}^{\Omega}\mu(x) \leqq G_{2\alpha}^{\Omega}\nu(x)$ partout sur Ω dès que la même inégalité a lieu sur $S(\mu)$. Cela résulte du principe de domination pour $G^{\Omega}_{2(\alpha-p)}$ et de $G^{\Omega}_{2\alpha}\nu=G^{\Omega}_{2(\alpha-p)}(G^{\Omega}_{2p}\nu)$.

Supposons que (a) a lieu. On a $T_{2\beta}*G^{\Omega}_{2\alpha}\geqq 0$ au sens des distributions dans Ω, et donc, d'après la proposition, on a $\beta\geqq\alpha-p$. Si $\beta>\alpha-p$, il est évident que ν doit être égale à 0, d'où $\beta=\alpha-p$.

Références

[1] N. Aronszajn et K. T. Smith: Theory of Bessel potentials, Part 1. Ann. Inst. Fourier, **11** (1961).

[2] ——: Theory of Bessel potentials, Part 2. Ann. Inst. Fourier, **17**, 1–135 (1967).

[3] M. Itô: The singular measure of a Dirichlet space. Nagoya Math. J., **32**, 337–359 (1968).

[4] I. Higuchi: On the Bessel kernel for a domain. Proc. Japan Acad., **47**, 844–849 (1971).

[5] M. Riesz: Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels. Acta Sci. Math. Szeged, **9**, 1–42 (1938).