65. *Caracterisation des algèbres de Nelson par des egalités. II*

Par Diana BRIGNOLE et Antonio MONTEIRO

Instituto de Matemática, Universidad National der Sur, Bahia Blanca, Argentina

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., April 12, 1967)

Dans cette note, nous donnerons une caractérisation des algèbres de Nelson, au moyen des considérations préliminaires dans la première note.

4.3. Theorem[1] *Pour que le système* $(A, 1, \sim, \rightarrow, \wedge, \vee)$ *soit une algèbre de Nelson il faut et il suffit que les égalités suivantes*

N1) $x \vee 1 = x$

N2) $x \wedge (x \vee y) = x$

N3) $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (z \wedge y)$

N4) $\sim \sim x = x$

N5) $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$

N6) $x \wedge \sim x = (x \wedge \sim x) \wedge (y \vee \sim y)$

N7) $x \rightarrow x = 1$

N8) $(\sim x \vee y) \wedge (x \rightarrow y) = \sim x \vee y$

N9) $x \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge (\sim x \vee y)$

N10) $x \rightarrow (y \wedge z) = (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$

N11) $x \rightarrow (y \rightarrow z) = (x \wedge y) \rightarrow z$

soient vérifiées et que l'on pose par définition $\neg x = x \rightarrow 0$ (*où* $0 = \sim 1$).

On voit de suite que la notion d'algèbre de Boole est un cas particulier de celle d algèbre de Nelson.

Le choix des axiomes N7)–N10) a son origine dans le fait que les ensembles A réticulés inférieurement dans lesquels $a \Rightarrow b$ existe pour tout couple ordonné (a, b) d'éléments de A, peuvent être caractérisés [9] par les égalités:

A1) $x \Rightarrow x = y \Rightarrow y$

A2) $(x \Rightarrow y) \wedge y = y$

A3) $x \wedge (x \Rightarrow y) = x \wedge y$

A4) $x \Rightarrow (y \wedge z) = (x \Rightarrow z) \wedge (x \Rightarrow y)$

Il était alors indiqué de postuler les égalités N7–N10.

La démonstration du théorème 4.3 puise fortement sur les résultats indiqués dans [11], dans la démonstration desquels on a fait intervenir l'induction transfinie. Postérieurement à la rédaction de cette note, Diana Brignole a obtenu une démonstration de 4.3 que

---

1) Ce résultat a été présenté à l' Unión Matemática Argentina le 22 Septembre 1961 (Revista de la Unión Matemática Argentina, 19, no 5(1962), p. 361).

n'utilise pas ces résultats et qui sera publiée ailleurs.

Luiz Monteiro a démontré que l'axiome N1) est une conséquence de N2), N3), N7), et N9) et en outre que chacun des axiomes N2), N4), N7), N9), et N11) est indépendant des restants. A. Monteiro a démontré l'indépendance des axiomes N3) et N6). L'indépendance des axiomes N5), N8), N10) reste une question ouverte.

References

[1] Bialynicki-Birula (A.): Remarks on quasi-Boolean algebras. Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, classe III, **5**, 615-619 (1957).

[2] Bialynicki-Birula (A.) and Rasiowa (H.): On the representation of quasi-Boolean algebras. Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Classe III, **5**, 259-261 (1957).

[3] Birkhoff (Garrett): Lattice theory. Revised edition. Am. Math. Soc. Colloquium Publications, **25**, XIII p. 283 (1948).

[4] Kalman (J.A.): Lattices with involution. Trans. Am. Math. Soc., **87**, 485-491 (1958).

[5] Kleene (Stephen Cole): On notation for ordinal numbers. Journal of Symbolic Logic, **3**, 150-155 (1938).

[6] ——: Introduction to Metamathematics. North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1952).

[7] Moisil (Gr. C.): Recherches sur l'algèbre de la logique. Annales Scientifiques de l'université de Jassy, **22**, 1-117 (1935).

[8] Markov (A.A.): A constructive logic. Uspehi Matematiceskih Nauk (N.S.), **5**, 187-188 (1950).

[9] Monteiro (Antonio): Axiomes indépendants pour les algèbres de Brouwer. Revista de la Unión Matemática Argentina, **17**, 149-160 (1955).

[10] ——: Matrices de Morgan Caractéristiques pour le Calcul Propositionnel Classique. Anais da Academia Brasileira de Ciências, **52**, 1-7 (1960).

[11] ——: Construction des algèbres de Nelson finies. Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, **11**, 359-362 (1963).

[12] Nelson (David): Constructible falsity. Journal of Symbolic Logic, **14**, 16-26 (1949).

[13] Rasiowa (Helena): Algebraic Charakterisierung Intuitionistischen Logik mit Starker negation. Constructivity in Mathematics. (Proceedings of the Colloquium held at Amsterdam, 1957) edited by A. Heyting. Studies in Logic and the Foundation of Mathematics. Amsterdam (1959).

[14] ——: N-lattices and constructive logic with strong negation. Fundamenta Mathematicae, **46**, 61-80 (1958).

[15] Sholander (Marlow): Postulates for distributive lattices. Canad. J. Math., **3**, 28-30 (1951).

[16] Vorobiev (N.N.): A constructive propositional calculus with strong negation. Dokl. Akad. Nauk, S.S.S.R., **85**, 465-468 (1952).

[17] ——: The problem of deducibility in the constructive propositional calculus with strong negation. Dokl. Akad. Nauk, S.S.S.R., **85**, 689-692 (1952).