37. *Sur une séparation des ensembles analytiques plans par une courbe mesurable (B).*

Par Hideaki WATANABE.

Institut Mathématique, Université de Tôhoku, Sendai.

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., July 12, 1950.)

N. Lusin a établit le théorème suivant qui est fondamental dans la théorie des ensembles analytiques.[1]

Théorème de N. Lusin. *Si E est un ensemble analytique dans le plan OXY et uniforme par rapport à l'axe OX, il existe une courbe mesurable (B) telle que l'ensemble E est situé sur cette courbe.*[2]

Sa démonstration se base à l'effet: deux ensembles analytiques disjoints sont toujours séparables (B)—ce qui est encore un théorème fondamental dans cette théorie.

L'objet de cette note est d'étudier une séparation de deux ensembles analytiques plans dont l'un est situé au-dessous de l'autre par une courbe mesurable (B), et de prouver, comme son application, le théorème précédent.

1. Notations et définitions.[3] Soit E un ensemble situé dans le plan OXY. Désignons par $\updownarrow E$ l'ensemble des points situés sur les droites parallèles à l'axe OY qui sont menées par tous les points de E. Soit P_x la droite parallèle à l'axe OY qui est menée par le point $(x, 0)$, et considérons le point ζ_x dont l'abscisse est x et dont l'ordonnée est la borne supérieure des ordonnées des points de $P_x E$, si $P_x E \neq 0$.[4] Désignons par ζE l'ensemble des points ζ_x. Il est très aisé de voir que l'ensemble ζE est uniforme par rapport à l'axe OX. Le point ζ_x' sera défini en remplaçant dans la définition de ζ_x le mot "supérieure" par "inférieure", et désignons par $\zeta' E$ l'ensemble des points ζ_x'. Soit $\delta E\,[\delta' E]$ la somme de $\zeta E\,[\zeta' E]$ et l'ensemble des points situés au-dessus [au-dessous] de $\zeta E\,[\zeta' E]$.

Désignons enfin par $(a < y < b)$ la partie du plan OXY dont le point a une ordonnée $> a$ et $< b$. La partie $(a \leq y \leq b)$ sera définie d'une façon analogue, et $(y = a)$ est la droite parallèle à l'axe OX menée par le point $(0, a)$.

---

1) Cf., N. Lusin: Leçons sur les ensembles analytiques etc., (1930) p. 234.

2) Un ensemble plan E est dit *uniforme* [*semi-uniforme*] par rapport à l'axe OX, si toute droite parallèle à l'axe OY coupe E en un point [en un nombre dénombrable de points] au plus. Un ensemble plan est appelé courbe, s'il est uniforme par rapport à l'axe OX et sa projection sur cette axe est lui identique.

3) Cf., H. Watanabe: Sur un problème de N. Lusin concernant la séparabilité des ensembles plans (paraître dans Tôhoku Math. Journ.).

4) Evidemment $\zeta_x \in E$ ou non.

2. Théorème. *Pour deux ensembles analytiques plans M et N tels que*

$$(1) \qquad N \subset \delta M, \qquad \updownarrow M = \updownarrow N,$$

il existe une courbe W qui est mesurable (B) et telle que

$$(2) \qquad M \subset \delta' W, \qquad N \subset \delta W.$$

Démonstration. Nous pouvons supposer que les ensembles M et N sont situés dans la partie $(-1 < y < 1)$. Soit, en effet, φ une transformation homéomorphe du plan OXY à la partie $(-1 < y' < 1)$:

$$x' = x, \qquad y' = y/(1 + |y|),$$

et posons $\varphi(M) = M'$, $\varphi(N) = N'$. Evidement M' et N' sont des ensembles analytiques et jouissent des conditions

$$N' \subset \delta M' \quad \text{et} \quad \updownarrow M' = \updownarrow N'.$$

S'il existe une courbe W' qui est mesurable (B) telle que

$$M' \subset \delta' W', \qquad N' \subset \delta W',$$

nous désignons par W'' la somme de l'ensemble $W' \cdot (-1 < y' < 1)$ et la projection sur la droite $(y' = 0)$ d'ensemble $W' - (-1 < y' < 1)$ qui est mesurable (B) et uniforme. L'ensemble W'' est alors une courbe mesurable (B) située dans $(-1 < y' < 1)$. En posant $W = \varphi^{-1}(W'')$, il est évident que W est une courbe cherchée pour deux ensembles M et N.

Supposons donc que M et N sont contenus dans $(-1 < y < 1)$. Nous observons deux cas: cas où $M \cdot N = 0$ et cas général.

Cas où $M \cdot N = 0$. Soient

$$x = f_1(s), \qquad y = f_2(s);$$

et

$$x = g_1(t), \qquad y = g_2(t)$$

des représentations paramétriques des ensembles M et N respectivement, c.-à-d., f_1, f_2 sont des fonctions continues définies dans $\mathfrak{J}_s$ et g_1, g_2 dans $\mathfrak{J}_t$.[5] Pour tout entier positif $k = 1, 2, \ldots,$ soient $G_{m_1, \ldots, m_k}$ et $H_{n_1, \ldots, n_k}$ des intervalles de Baire d'orde k de $\mathfrak{J}_s$ et $\mathfrak{J}_t$ respectivement, et supposons que

$$G_{m_1, \ldots, m_k} \supset G_{m_1, \ldots, m_k, m_{k+1}}; \; H_{n_1, \ldots, n_k} \supset H_{n_1, \ldots, n_k, n_{k+1}}$$
$$(k; \, m_1, \ldots, m_{k+1}; \, n_1, \ldots, n_{k+1} = 1, 2, \ldots).$$

Soient $M_{m_1, \ldots, m_k}$ et $N_{n_1, \ldots, n_k}$ les images de $G_{m_1, \ldots, m_k}$ et $H_{n_1, \ldots, n_k}$ par f_1, f_2 et g_1, g_2 respectivement.

Supposons, par impossible, que notre assertion n'est pas vraie. Il existe alors un couple d'entiers positifs $(m_1^\circ; n_1^\circ)$ tel que pour $M_{m_1^\circ}$ et $N_{n_1^\circ}$, il n'existe pas de courbe W qui est mesurable (B) et telle que $M_{m_1^\circ} \subset \delta' W$, $N_{n_1^\circ} \subset \delta W$. Si, en effet, pour tout couple

5) $\mathfrak{J}_s$, $\mathfrak{J}_t$ sont des domaines fondamentaux qui sont constitués par tous les points irrationnels dans $(0, 1)$.

$(m_1; n_1)$, il existe une courbe $W_{m_1; n_1}$ qui est mesurable (B) et telle que $M_{m_1} \subset \delta' W_{m_1; n_1}$ et $N_{n_1} \subset \delta W_{m_1; n_1}$, comme on peut supposer que $W_{m_1; n_1} \subset (-1 \leqq y \leqq 1)$,[6] l'ensemble

$$W = \zeta \sum_{m_1=1}^{\infty} (\zeta' \sum_{n_1=1}^{\infty} W_{m_1; n_1})$$

est une courbe mesurable (B)[7] qui jouit de la condition (2) — une contradiction.

Il existe donc un tel couple $(m_1^\circ; n_1^\circ)$. D'une même considération on a une suite

(3) $(m_1^\circ; n_1^\circ), (m_1^\circ, m_2^\circ; n_1^\circ, n_2^\circ), \ldots, (m_1^\circ, \ldots, m_k^\circ; n_1^\circ, \ldots, n_k^\circ), \ldots,$

où pour les ensembles $M_{m_1^\circ, \ldots, m_k^\circ}$ et $N_{n_1^\circ, \ldots, n_k^\circ}$, il n'existe pas de courbe W qui est mesurable (B) et telle que

$$M_{m_1^\circ, \ldots, m_k^\circ} \subset \delta' W \quad \text{et} \quad N_{n_1^\circ, \ldots, n_k^\circ} \subset \delta W .$$

Les suites des intervalles de Baire $\{G_{m_1^\circ, \ldots, m_k^\circ}\}$ et $\{H_{n_1^\circ, \ldots, n_k^\circ}\}$ étant décroissantes, elles déterminent deux points s° et t° respectivement. Posons

$$p^\circ = (f_1(s^\circ), f_2(s^\circ)), \qquad q^\circ = (g_1(t^\circ), g_2(t^\circ)) .$$

Evidemment $p^\circ \in M$, $q^\circ \in N$ et $p^\circ \neq q^\circ$ puisque $M \cdot N \neq 0$. Il en suit que $q^\circ \bar{\in} \delta'(p^\circ)$ comme $N \subset \delta M$. Il existe donc deux cirques C_{p°, C_{q° et une courbe W qui est mesurable (B), tels que

$$p^\circ \in C_{p^\circ}, \ q^\circ \in C_{q^\circ}, \ C_{p^\circ} \subset \delta' W, \ C_{q^\circ} \subset \delta W .$$

Pour tout entier positif k qui est suffisamment grand, on a

$$G_{m_1^\circ, \ldots, m_k^\circ} \subset C_{p^\circ}, \qquad H_{n_1^\circ, \ldots, n_k^\circ} \subset C_{q^\circ},$$

donc a fortiori

$$G_{m_1^\circ, \ldots, m_k^\circ} \subset \delta' W, \qquad H_{n_1^\circ, \ldots, n_k^\circ} \subset \delta W .$$

Ces dernières relations contredirent la propriété de la suite (3).

Cas général.[8] Soit M_k l'ensemble qui est obtenu en deplaçant l'ensemble M parallèlement à l'axe OY par ordonnée$-1/k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. L'ensemble M_k est un ensemble analytique tel que $N \subset \delta M_k$, $\updownarrow M_k = \updownarrow N$ et $M_k \cdot N = 0$. Donc, par ce qui vient d'établir, il existe une courbe W_k qui est mesurable (B) et telle que $M_k \subset \delta' W_k$, $N \subset \delta W_k$. On peut supposer que $W_k \subset (-1 \leqq y \leqq 1)$. En posant $W = \zeta \sum_{k=1}^{\infty} W_k$, on voit facilement que W est une courbe mesurable (B) et satisfait à (2), c.q.f.d.

---

6) Si non, il suffit, au lieu de $W_{m_1; n_1}$, de tenir la courbe $\zeta\ [\zeta' \{W_{m_1; n_1} + (y = 1)\} + (y = -1)]$ qui est mesurable (B).

7) Si E un ensemble mesurable (B) plan et semi-uniforme, ζE est un ensemble mesurable (B). Cf., ma note, loc. cit.

8) Ce cas sera réduit au cas précédent. En effet, en employant des notations dans ma note loc. cit., on a d'après (1)

$$\beta' M, \ \beta M \in (A), \ \beta N \supset \delta \beta' M, \ \updownarrow \beta' M = \updownarrow \beta N \text{ et } \beta' M \cdot \beta N = 0.$$

Et il suffit de considérer $\beta' M$ et βN au lieu de M et N.

3. Maintenant, nous prouverons le théorème de Lusin. Soit E un ensemble analytique plan et uniforme par rapport à l'axe OX. Désignons par M et N les ensembles des points situés au-dessous et au-dessus de E respectivement. Comme on sait bien, M et N sont des ensembles analytiques et satisfont à la condition (1). Donc, par notre théorème, il existe une courbe W qui est mesurable (B) et satisfait à (2). Enfin il est évident que l'ensemble E est situé sur cette courbe W. c.q.f.d.