129. *Sur les espaces a connexion affine qui peuvent représenter les espaces projetifs des paths.*

Par Kentaro YANO.
Institut Mathématique, Université Impériale de Tokyo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Nov. 13, 1944.)

§ 1. M. O. Veblen[1] a défini la géométrie projective généralisée comme la théorie des invariants des fonctions $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}(x)$[2] satisfaisant aux conditions

$$(1.1)\qquad (a)\ \ \Pi^{\lambda}_{\mu\nu}=\Pi^{\lambda}_{\nu\mu}\,,\qquad (b)\ \ \Pi^{\lambda}_{\mu\nu,0}=0^{3)}\,,\qquad (c)\ \ \Pi^{\lambda}_{0\nu}=\delta^{\lambda}_{\nu}\,,$$

par rapport aux transformations de coordonnées de la forme

$$(1.2)\qquad \bar{x}^0=x^0+\log\rho\,(x^1,x^2,\dots,x^n)\,,\qquad \bar{x}^i=\bar{x}^i(x^1,x^2,\dots,x^n)\,,$$

la loi de transformations des fonctions $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$, pendant les transformations de coordonnées (1.2), étant

$$(1.3)\qquad \bar{\Pi}^{\lambda}_{\mu\nu}=\frac{\partial\bar{x}^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial\bar{x}^{\mu}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial\bar{x}^{\nu}}\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma}+\frac{\partial^2x^{\alpha}}{\partial\bar{x}^{\mu}\partial\bar{x}^{\nu}}\right).$$

En regardant les fonctions $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$ comme étant les composantes de la connexion d'un espace A_{n+1} à connexion affine à $(n+1)$ dimensions, M. J. H. C. Whitehead[4] a étudié les propriétés caractéristiques de l'espace A_{n+1} qui peut représenter l'espace P_n à connexion projective de M. O. Veblen.

Si l'on introduit, dans l'espace à connexion affine A_{n+1}, un champ de vecteur ξ^{λ} ayant les composantes

$$(1.4)\qquad \xi^{\lambda}=\delta^{\lambda}_0\,,$$

on voit facilement que ce vecteur a toujours les mêmes composantes dans tous les systèmes de coordonnées liés les uns aux autres par les transformations de la forme (1.2). En se servant de ce champ de vecteur, on peut mettre les conditions (1.1) sous les formes tensorielles suivantes :

$$(1.5)\qquad (a)\ \ S^{\cdot\cdot\lambda}_{\mu\nu}=\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}-\Pi^{\lambda}_{\nu\mu}=0\,,\qquad (b)\ \ \Pi^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}\xi^{\omega}=0\,,\qquad (c)\ \ \xi^{\lambda}_{;\nu}=\delta^{\lambda}_{\nu}\,,$$

---

1) O. Veblen: Generalized projective geometry. Journal of the London Math. Soc. **4** (1929), 140–160.

2) Les indices $\begin{cases}\alpha,\beta,\gamma,\dots,\lambda,\mu,\nu,\dots\\ i,j,k,\dots\dots\end{cases}$ prennent respectivement les valeurs $\begin{cases}0,1,2,\dots,n,\\ 1,2,\dots\dots,n.\end{cases}$

3) La virgule désigne la dérivée partielle ordinaire et le point-virgule la dérivée convariante.

4) J. H. C. Whitehead: The representation of projective spaces. Annals of Math. **32** (1931), 327–360. Voir aussi, K. Yano: Les espaces à connexion projective et la géométrie projective des paths, Annales Scientifiques de l'Université de Jassy, **24** (1938), 395–464.

où $\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}$ sont les composantes du tenseur de courbure formées avec les $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$:

$$\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}=\Pi^{\lambda}_{\mu\nu,\omega}-\Pi^{\lambda}_{\mu\omega,\nu}+\Pi^{\alpha}_{\mu\nu}\Pi^{\lambda}_{\alpha\omega}-\Pi^{\alpha}_{\mu\omega}\Pi^{\lambda}_{\alpha\nu}\,.$$

La condition (1.5) (a) montre que notre espace à connexion affine A_{n+1} est sans torsion. La condition (1.5) (b), qui peut être aussi écrite sous la forme

$$\xi^{\lambda}_{;\mu;\nu}+\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}\xi^{\omega}=0^{1)}$$

en tenant compte de (1.5) (c), dit que l'espace A_{n+1} admet une collinéation affine dans la direction ξ^{λ}. La dernière condition (1.5) (c) représente que ξ^{λ} est un champ de vecteur concourant[2].

Inversement, si un espace A_{n+1} à connexion affine à $(n+1)$ dimensions et un champ de vecteur ξ^{λ} dans A_{n+1} satisfont aux trois conditions (1.5) (a), (b), (c), l'espace A_{n+1} peut, comme on le voit facilement, représenter un espace à connexion projective à n dimensions pourvu qu'on prenne, dans A_{n+1}, un système de coordonnées dans lequel le champ de vecteur ξ^{λ} a ses composantes de la forme (1.4).

D'autre part, M. D. van Dantzig[3] a défini la géométrie projective généralisée comme la théorie des invariants des fonctions $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}(x)$ satisfaisant à la condition

$$\Pi^{\lambda}_{\mu\nu,\omega}x^{\omega}=-\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}\,, \tag{1.6}$$

par rapport aux transformations des coordonnées homogènes curvilinéaires x^{λ} de la forme

$$\bar{x}^{\lambda}=\bar{x}^{\lambda}(x)\,, \tag{1.7}$$

où les fonctions $\bar{x}^{\lambda}(x)$ sont homogènes de degré un par rapport aux variables x^{λ}, la loi de transformations des fonctions $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$ pendant les transformations de coordonnées (1.7) étant donnée par les mêmes équations que (1.3).

En regardant les fonctions $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$ comme étant les composantes de la connexion d'un espace A_{n+1} à connexion affine à $(n+1)$ dimensions, M. D. van Dantzig[4] a étudié les propriétés caratéristiques de l'espace A_{n+1} qui peut représenter son espace P_n à connexion projective.

Pour trouver les propriétés caractéristiques de A_{n+1}, remarquons d'abord que, si l'on introduit un champ de vecteur ξ^{λ} qui a ses composantes

$$\xi^{\lambda}=x^{\lambda}, \tag{1.8}$$

ξ^{λ} a toujours les composantes égales aux coordonnées homogènes elles-

1) L. P. Eisenhart: Non Riemannian geometry. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. VIII (1927), § 46.

2) K. Yano: Sur le parallélisme et la concourance dans l'espace de Riemann. Proc. **19** (1943), 189-197.

3) D. van Dantzig: Theorie des projektiven Zusammenhangs n-dimensionaler Räume. Math. Ann. **106** (1932) 400-454.

4) D. van Dantzig: Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie, I et II, Proc. Akad. Amsterdam, **35** (1932), 524-534, et 535-542.

mêmes dans tous les systèmes de coordonnées liés les uns aux autres par les transformations de la forme (1.7), puisqu'on s'est limité aux transformations de coordonnées $\bar{x}^\lambda=\bar{x}^\lambda(x)$ homogènes de degré un par rapport aux anciennes coordonnées x^λ et par conséquent

$$\bar{\xi}^\lambda=\frac{\partial\bar{x}^\lambda}{\partial x^\nu}\xi^\nu=\frac{\partial\bar{x}^\lambda}{\partial x^\nu}x^\nu=\bar{x}^\lambda\,.$$

La dérivée covariante de ξ^λ étant

$$\xi^\lambda_{;\mu}=x^\lambda_{;\mu}=\delta^\lambda_\mu+\Pi^{\lambda}_{\omega\mu}x^\omega=\delta^\lambda_\mu+\Pi^{\lambda}_{\mu\omega}x^\omega-S^{\cdot\lambda}_{\mu\omega}x^\omega\,, \tag{1.9}$$

on a

$$(\xi^\lambda_{;\mu}+S^{\cdot\lambda}_{\mu\omega}\xi^\omega)_{;\nu}=\Pi^{\lambda}_{\mu\omega,\nu}x^\omega+\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}+\Pi^{\alpha}_{\mu\omega}\Pi^{\lambda}_{\alpha\nu}x^\omega-\Pi^{\alpha}_{\mu\nu}\Pi^{\lambda}_{\alpha\omega}x^\omega\,,$$

donc, la condition (1.6) nous donne

$$\begin{aligned}\Pi^{\cdot\lambda}_{\mu\nu\omega}x^\omega&=(\Pi^{\lambda}_{\mu\nu,\omega}-\Pi^{\lambda}_{\mu\omega,\nu}+\Pi^{\alpha}_{\mu\nu}\Pi^{\lambda}_{\alpha\omega}-\Pi^{\alpha}_{\mu\omega}\Pi^{\lambda}_{\alpha\nu})x^\omega\\&=-(\xi^\lambda_{;\mu}+S^{\cdot\lambda}_{\mu\omega}\xi^\omega)_{;\nu}\,,\end{aligned}$$

d'où on a

$$(\xi^\lambda_{;\mu}+S^{\cdot\lambda}_{\mu\omega}\xi^\omega)_{;\nu}+\Pi^{\cdot\lambda}_{\mu\nu\omega}\xi^\omega=0\,, \tag{1.10}$$

ce qui montre aussi que l'espace A_{n+1} admet une collinéation affine dans la direction de ξ^λ.

Pour étudier la géométrie projective des paths au point de vue de M. D. van Dantzig, M. J. Haantjes[1] a considéré un espace P_n à connexion projective un peu plus spécial que le précédent. Il pose, sur les fonctions $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$, les trois conditions suivantes:

$$\text{(a)}\ \ \Pi^{\lambda}_{\mu\nu}=\Pi^{\lambda}_{\nu\mu}\,,\qquad \text{(b)}\ \ \Pi^{\lambda}_{\mu\nu,\omega}x^\omega=-\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}\,,\qquad \text{(c)}\ \ \Pi^{\lambda}_{\mu\nu}x^\nu=0\,. \tag{1.11}$$

La première condition (1.11) (a) montre que l'espace est sans torsion $S^{\cdot\lambda}_{\mu\nu}=\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}-\Pi^{\lambda}_{\nu\mu}=0$. Donc, la deuxième condition (1.11) (b) nous donne

$$\xi^\lambda_{;\mu;\nu}+\Pi^{\cdot\lambda}_{\mu\nu\omega}\xi^\omega=0\,,$$

ce qui montre que l'espace A_{n+1} à connexion affine sans torsion admet une collinéation affine dans la direction de ξ^λ. L'équation (1.9) et la dernière condition (1.11) (c) nous donnent

$$\xi^\lambda_{;\mu}=\delta^\lambda_\mu\,,$$

ce qui nous montre que le vecteur ξ^λ est un champ de vecteur concourant dans A_{n+1}. Inversement, si l'espace A_{n+1} à connexion affine sans torsion contient un champ de vecteur ξ^λ satisfaisant à ces conditions, il peut représenter un espace des paths P_n de M. D. van Dantzig pourvu qu'on prenne un système de coordonnées dans lequel le vecteur ξ^λ a ses composantes égales aux coordonnées elles-mêmes.

---

1) J. Haantjes: On the projective geometry of paths. Proc. Edinburgh Math. Soc. **5** (1937), 103–115.

§ 2. Dans l'espace projectif de M. O. Veblen, les paths sont définis par les équations différentielles

$$\frac{d^2x^\lambda}{dt^2}+\Pi^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}=0, \tag{2.1}$$

qui, en introduisant un para nètre affine s tel que

$$x^0=\frac{1}{2}\log\frac{dt}{ds},$$

peuvent être écrites

$$\{t, s\}=-2\Pi^0_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} \quad \text{et} \quad \frac{d^2x^i}{ds^2}+\Pi^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0^{1)}, \tag{2.2}$$

ce qui montre que le paramètre t est de caractère projectif et les courbes (2.1) de A_{n+1} représentent bien les paths de P_n.

M. J. H. C. Whitehead[2] a montré que les surfaces à deux dimensions générées par les rayons qui rencontrent les courbes (2.1) dans A_{n+1} sont totalement géodésiques, les rayons étant définis comme les courbes dont les tangentes sont toujours dans la direction de ξ^λ. Donc, on pourrait dire que les paths de P_n sont représentés par les courbes (2.1) ou par les surfaces à deux dimensions totalement géodésiques ou plus simplement par les plans de A_{n+1}.

Le présent auteur[3] a montré que les paths de P_n sont aussi représentés par les courbes

$$\frac{d^2x^\lambda}{dr^2}+\Pi^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dr}\frac{dx^\nu}{dr}=\alpha\frac{dx^\lambda}{dr}+\beta\xi^\lambda, \tag{2.3}$$

dont les plans osculateurs contiennent toujours la direction $\xi^\lambda=\delta^\lambda_0$. En effet, les surfaces à deux dimensions engendrées par les rayons rencontrant ces courbes étant aussi totalement géodésiques, elles peuvent représenter les paths de P_n.

Il se présente la même chose dans le cas de l'espace projectif de MM. D. van Dantzig et J. Haantjes.

Ils définissent les paths de P_n par les équations différentielles de la forme

$$\frac{d^2x^\lambda}{dr^2}+\Pi^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dr}\frac{dx^\nu}{dr}=\alpha\frac{dx^\lambda}{dr}+\beta x^\lambda. \tag{2.4}$$

Ces équations montrent que, si l'on les regarde comme étant les courbes dans A_{n+1}, son plan osculateur contient toujours le vecteur x^λ. On peut facilement montrer que la surface à deux dimensions engendrée par les rayons rencontrant une de ces courbes est totalement géodésique,

1) K. Yano: Projective parameters in projective and conformal geometries. Proc. **20** (1944), 45–53.

2) J. H. C. Whitehead: The representation of projective spaces, déjà cité.

3) K. Yano: Sur les équations des paths dans les espaces projectifs de M. O. Veblen, à apparaître dans les Proceedings of the Physico-Math. Soc. Japan.

soit qu'elle est un plan. En effet, on peut choisir un paramètre t et une fonction $\rho(t)$ de t de manière que les équations (2.4) prennent la forme[1]

$$\frac{d^2\rho x^\lambda}{dt^2}+\Pi^\lambda_{\mu\nu}(\rho x)\frac{d\rho x^\mu}{dt}\frac{d\rho x^\nu}{dt}=0\,, \tag{2.5}$$

ce qui montre qu'il existe au moins une géodésique sur la surface à deux dimensions engendrée par les rayons rancontrant une des courbes intégrales de (2.4). Donc, d'après ce qui a été déjà dit en haut, la surface est totalement géodésique.

§ 3. Dans les deux paragraphes préliminaires, nous avons esquissé ce qu'on connaît sur la représentation de l'espace projectif généralisé. Nous allons maintenant étudier, dans ce paragraphe, un problème inverse, soit, on se donne un espace à connexion affine à $(n+1)$ dimensions contenant un champ de vecteur, pour que cet espace puisse représenter un espace projectif des paths, quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doivent satisfaire les composantes $\Pi^\lambda_{\mu\nu}$ de la connexion affine et le champ de vecteur ξ^λ ?

Pour qu'un espace A_{n+1} à connexion affine à $(n+1)$ dimensions puisse représenter, dans le sens expliqué plus haut, un espace projectif P_n des paths, il faut et il suffit que toutes les surfaces à deux dimensions S_2 engendrées par les rayons rencontrant un même path de A_{n+1} soient totalement géodésiques, les rayons étant définis comme les courbes dont les tangentes sont toujours dans la direction définie par ξ^λ. Donc, notre problème s'énonce encore ainsi : Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doivent satisfaire les composantes $\Pi^\lambda_{\mu\nu}$ de la connexion affine et les composantes ξ^λ du champ de vecteur pour que toutes les surfaces à deux dimensions engendrées par les rayons rencontrant tous un même path de A_{n+1} soient totalement géodésiques ?

Pour résoudre ce problème, nous choisissons un système de coordonnées de manière que le vecteur ξ^λ ait, dans ce système de coordonnées, les composantes de la forme

$$\xi^\lambda=\delta^\lambda_0\,. \tag{3.1}$$

Les équations différentielles des paths de A_{n+1} étant

$$\frac{d^2x^\lambda}{dt^2}+\Pi^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}=0\,, \tag{3.2}$$

soit

$$x^\lambda=f^\lambda(t) \tag{3.3}$$

une solution de ces équations. Alors les équations des rayons étant

$$x^\lambda=x^\lambda_0+\sigma\delta^\lambda_0\,, \tag{3.4}$$

1) K. Yano : Projective parameters on paths in D. van Dantzig's projective space, Proc. **20** (1944), 210–215.

les équations de la surface à deux dimensions engendrée par les rayons rencontrant le path (3.3) sont

$$x^\lambda = f^\lambda(t) + \sigma\delta_0^\lambda . \tag{3.5}$$

Pour que cette surface soit totalement géodésique, les fonctions x^λ données par (3.5) doivent satisfaire aux équations de la forme

$$\frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial u^b \partial u^c} + \Pi^\lambda_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial u^b} \frac{\partial x^\nu}{\partial u^c} = \Gamma^a_{bc} \frac{\partial x^\lambda}{\partial u^a} \text{ [1]}, \tag{3.6}$$

où nous avons posé

$$t = u^0, \qquad \sigma = u^1 . \tag{3.7}$$

En substituant les valeurs de x^λ données par (3.5) dans les équations (3.6), on obtient

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{(a)} & f''^\lambda + \Pi^\lambda_{\mu\nu}(f^\alpha + \sigma\delta_0^\alpha) f'^\mu f'^\nu & = \Gamma^0_{00} f'^\lambda + \Gamma^1_{00}\delta_0^\lambda , \\ \text{(b)} & \Pi^\lambda_{\mu 0}(f^\alpha + \sigma\delta_0^\alpha) f'^\mu & = \Gamma^0_{01} f'^\lambda + \Gamma^1_{01}\delta_0^\lambda , \\ \text{(c)} & \Pi^\lambda_{00}(f^\alpha + \sigma\delta_0^\alpha) & = \Gamma^0_{11} f'^\lambda + \Gamma^1_{11}\delta_0^\lambda , \end{array}\right. \tag{3.8}$$

la prime représentant la dérivée par rapport à t.

En supposant que le paramètre σ soit infinitésimal et prenant seulement les termes du premier ordre en σ, on a, en tenant compte de (3.2), des équations (3.8),

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{(a)} & (\Pi^\lambda_{\mu\nu,0}) f'^\mu f'^\nu & = \alpha f'^\lambda + \beta\delta_0^\lambda , \\ \text{(b)} & \Pi^\lambda_{\mu 0} f'^\mu & = p f'^\lambda + q\delta_0^\lambda , \\ \text{(c)} & \Pi^\lambda_{00} & = l f'^\lambda + m\delta_0^\lambda . \end{array}\right. \tag{3.9}$$

Ces équations devant être satisfaites pour n'importe quel point f^λ et pour n'importe quelle direction f'^λ, on trouve de la première équation de (3.9)

$$\Pi^\lambda_{\mu\nu,0} = \delta^\lambda_\mu \varphi_\nu + \delta^\lambda_\nu \varphi_\mu + \varphi_{\mu\nu}\delta_0^\lambda , \tag{3.10}$$

et, de la deuxième équation de (3.9),

$$\Pi^\lambda_{\mu 0} = p\delta^\lambda_\mu + q_\mu \delta_0^\lambda , \tag{3.11}$$

dont la troisième équation de (3.9) est une conséquence.

Inversement, supposons que les composantes $\Pi^\lambda_{\mu\nu}$ de la connexion affine de A_{n+1} satisfassent aux conditions (3.10) et (3.11). Alors, nous allons montrer que les surfaces à deux dimensions engendrées par les rayons rencontrant les paths sont totalement géodésiques, les rayons ayant les équations

$$x^\lambda = x_0^\lambda + \sigma\delta_0^\lambda .$$

Pour cela, remarquons d'abord que les équations (3.10) nous donnent encore

1) Les indices a, b, c,......prennent les valeurs 0 et 1.

$$\Pi^{\lambda}_{\mu\nu,0,0}=\delta^{\lambda}_{\mu}\varphi_{\nu,0}+\delta^{\lambda}_{\nu}\varphi_{\mu,0}+\varphi_{\mu\nu,0}\delta^{\lambda}_{0},$$
$$\Pi^{\lambda}_{\mu\nu,0,0,0}=\delta^{\lambda}_{\mu}\varphi_{\nu,0,0}+\delta^{\lambda}_{\nu}\varphi_{\mu,0,0}+\varphi_{\mu\nu,0,0}\delta^{\lambda}_{0},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

donc,

$$\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}(x^a+\sigma\delta^a_0)=\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}(x^a)+\delta^{\lambda}_{\mu}\psi_{\nu}(x^a+\sigma\delta^a_0)+\delta^{\lambda}_{\nu}\psi_{\mu}(x^a+\sigma\delta^a_0)+\psi_{\mu\nu}(x^a+\sigma\delta^a_0)\delta^{\lambda}_{0}, \tag{3.12}$$

où

$$\psi_{\nu}(x^a+\sigma\delta^a_0)=\int_0^{\sigma}\varphi_{\nu}(x^a+\sigma\delta^a_0)d\sigma,$$

$$\psi_{\mu\nu}(x^a+\sigma\delta^a_0)=\int_0^{\sigma}\varphi_{\mu\nu}(x^a+\sigma\delta^a_0)d\sigma.$$

Cela étant, considérons un path arbitraire

$$x^{\lambda}=f^{\lambda}(t), \tag{3.13}$$

soit, les fonctions $f^{\lambda}(t)$ satisfaisant aux équations différentielles

$$f''^{\lambda}(t)+\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}(f)f'^{\mu}f'^{\nu}=0. \tag{3.14}$$

Les équations de la surface engendrée par les rayons rencontrant le path (3.13) étant

$$x^{\lambda}=f^{\lambda}(t)+\sigma\delta^{\lambda}_0, \tag{3.15}$$

nous avons, en tenant compte de (3.11), de (3.12) et de (3.13),

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2x^{\lambda}}{\partial t^2}+\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}(x)\frac{\partial x^{\mu}}{\partial t}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial t}&=f''^{\lambda}+\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}(f^a+\sigma\delta^a_0)f'^{\mu}f^{\nu}\\&=2\psi_{\nu}(x^a+\sigma\delta^a_0)f'^{\nu}f'^{\lambda}+\psi_{\mu\nu}(x^a+\sigma\delta^a_0)f'^{\mu}f'^{\nu}\delta^{\lambda}_0,\\ \frac{\partial^2x^{\lambda}}{\partial t\partial\sigma}+\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}(x)\frac{\partial x^{\mu}}{\partial t}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial\sigma}&=\Pi^{\lambda}_{\mu0}(f^a+\sigma\delta^a_0)f'^{\mu}\\&=p(f^a+\sigma\delta^a_0)f'^{\lambda}+q_{\mu}(f^a+\sigma\delta^a_0)f'^{\mu}\delta^{\lambda}_0,\\ \frac{\partial^2x^{\lambda}}{\partial\sigma^2}+\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}(x)\frac{\partial x^{\mu}}{\partial\sigma}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial\sigma}&=\Pi^{\lambda}_{00}(f^a+\sigma\delta^a_0)\\&=[p(f^a+\sigma\delta^a_0)+q_0(f^a+\sigma\delta^a_0)]\delta^{\lambda}_0.\end{aligned}$$

Ces équations montrent bien que la surface (3.15) est totalement géodésique, soit, un plan, Donc, nous avons le

Théorème: Dans l'espace à connexion affine, pour que toutes les surfaces à deux dimensions engendrées par les rayons, définis par le champ de vecteur δ^{λ}_0 et rencontrant un path, soient totalement géodésiques, il faut et il suffit que les composantes $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$ de la connexion affine satisfassent aux conditions (3.10) *et* (3.11).

§ 4. Les équations (3.10) et (3.11) ne sont pas de la forme tensorielle, nous allons les transformer dans une forme tensorielle.

Pour cela, calculons d'abord

$$\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}\xi^{\omega}=(\Pi^{\lambda}_{\mu\nu,\omega}-\Pi^{\lambda}_{\mu\omega,\nu}+\Pi^{\alpha}_{\mu\nu}\Pi^{\lambda}_{\alpha\omega}-\Pi^{\alpha}_{\mu\omega}\Pi^{\lambda}_{\alpha\nu})\delta^{\omega}_{0}$$
$$=\Pi^{\lambda}_{\mu\nu,0}-(\Pi^{\lambda}_{\mu0,\nu}+\Pi^{\alpha}_{\mu0}\Pi^{\lambda}_{\alpha\nu}-\Pi^{\lambda}_{\alpha0}\Pi^{\alpha}_{\mu\nu}) .$$

D'autre part, $\Pi^{\lambda}_{\mu0}$ étant dérivée covariante de ξ^{λ}:

$$\Pi^{\lambda}_{\mu0}=\frac{\partial\delta^{\lambda}_{0}}{\partial x^{\mu}}+\Pi^{\lambda}_{\alpha\mu}\delta^{\alpha}_{0}=\xi^{\lambda}_{;\mu} ,$$

le deuxième terme dans le deuxième membre de l'équation ci-dessus est la dérivée covariante du tenseur $\xi^{\lambda}_{;\mu}$, donc, nous en avons

$$\xi^{\lambda}_{;\mu;\nu}+\Pi^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}\xi^{\omega}=\delta^{\lambda}_{\mu}\varphi_{\nu}+\delta^{\lambda}_{\nu}\varphi_{\mu}+\varphi_{\mu\nu}\xi^{\lambda} . \tag{4.1}$$

D'après la remarque déjà faite, on a de (3.11)

$$\xi^{\lambda}_{;\mu}=p\delta^{\lambda}_{\mu}+q_{\mu}\xi^{\lambda} \text{[1]} . \tag{4.2}$$

Ainsi, avons nous transformé les équations (3.10) et (3.11) dans une forme tensorielle. Inversement, si l'on a un champ de vecteur ξ^{λ} satisfaisant aux conditions tensorielles (4.1) et (4.2) dans un espace à connexion affine à $n+1$ dimensions, il est évident qu'on retrouve, en choisissant un système de coordonnées dans lequel on a $\xi^{\lambda}=\delta^{\lambda}_{0}$, les conditions (3.10) et (3.11). Donc, nous avons le

Théorème : Pour qu'un espace à connexion affine à $(n+1)$ *dimensions puisse représenter un espace projectif des paths à n dimensions, il faut et il suffit qu'il existe un champ de vecteur* ξ^{λ} *dans l'espace à connexion affine tel que les conditions tensorielles* (4.1) *et* (4.2) *soient valables.*

§ 5. Nous avons jusqu'ici traité notre problème en utilisant un système de coordonnées dans lequel on a $\xi^{\lambda}=\delta^{\lambda}_{0}$. Nous allons maintenant voir ce qui se passe quand on prend un système de coordonnées dans lequel on a $\xi^{\lambda}=x^{\lambda}$.

En posant $\xi^{\lambda}=x^{\lambda}$, on a

$$\xi^{\lambda}_{;\mu}=\delta^{\lambda}_{\mu}+\Pi^{\lambda}_{\omega\mu}x^{\omega} ,$$
$$\xi^{\lambda}_{;\mu;\nu}=\Pi^{\lambda}_{\omega\mu,\nu}x^{\omega}+\Pi^{\lambda}_{\nu\mu}+(\delta^{\alpha}_{\mu}+\Pi^{\alpha}_{\omega\mu}x^{\omega})\Pi^{\lambda}_{\alpha\nu}-(\delta^{\lambda}_{\alpha}+\Pi^{\lambda}_{\omega\alpha}x^{\omega})\Pi^{\alpha}_{\mu\nu}$$
$$=\Pi^{\lambda}_{\omega\mu,\nu}x^{\omega}+\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}+\Pi^{\alpha}_{\omega\mu}\Pi^{\lambda}_{\alpha\nu}x^{\omega}-\Pi^{\alpha}_{\mu\nu}\Pi^{\lambda}_{\alpha\omega}x^{\omega} .$$

En substituant ces équations dans (4.1) et (4.2), nous avons respectivement

$$\Pi^{\lambda}_{\mu\nu,\omega}x^{\omega}+\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}=\delta^{\lambda}_{\mu}\varphi_{\nu}+\delta^{\lambda}_{\nu}\varphi_{\mu}+\varphi_{\mu\nu}x^{\lambda} , \tag{5.1}$$

et

---

1) Cette équation montre que le champ de vecteur ξ^{λ} est "torsenbildend" ou "torse-forming." Voir K. Yano: Über eine geometrische Deutung der projektiven Transformationen nicht-symmetrischer affiner Übertragungen. Proc. **20** (1944), 284–287. K. Yano: On the torse-forming directions in Riemannian spaces. Proc. **20** (1944) 340–345.

$$\Pi_{\mu\nu}^{\lambda} x^{\mu} = (p-1)\delta_{\nu}^{\lambda} + q_{\nu} x^{\lambda} . \tag{5.2}$$

Ces conditions sont un peu plus générales que celles que MM. J. A. Schouten,[1] D. van Dantzig et J. Haantjes ont posé pour étudier leur géométrie projective généralisée.

1) Voir par example, J. A. Schouten et J. Haantjes: Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie. Comp. Math. **3** (1936) 1–51.