# 113. *Sur les anneaux des opérateurs, II.*

Par Masae ORIHARA.

L'institut mathématique, l'université impériale de Kyusyu, Fukuoka.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Oct. 12, 1944.)

**1.** Dans la note précédente[1], nous avons recherché des anneaux $\mathcal{M}$ des opérateurs linéaires et bornés sur l'espace $\mathfrak{H}$ hilbertien général et nous avons donné la trace sur les opérateurs et discuté ses propriétés quand $\mathcal{M}$ n'est pas le facteur. Dans cette note, nous considerons d'abord sur la relation entre l'équivalence par rapport à un opérateur unitaire défini dans la note précédente et celle par rapport à un opérateur isométrique partiellement de MM. F. J. Murray et J. v. Neumann. De plus, nous définissons un idéal pour un sous-ensemble de $\mathcal{M}$ et l'appelons maximal quand un idéal $\mathfrak{J}$ n'est pas contenu à autre idéal. Alors, chaque opérateur $A$ de $\mathcal{M}$ peut être représentée qui est comme une fonction $\varphi_A[\mathfrak{J}]$ définie sur l'ensemble $\mathfrak{F}$ de tous les idéaux $\mathfrak{J}$ maximaux et sa valeur à $\mathfrak{J}$ est un élément de la classe $\mathcal{M}(\mathfrak{J})$ residuelle. De plus, la classe $\mathcal{M}(\mathfrak{J})$ residuelle est irreducible. En particulier, quand $\mathcal{M}$ est du type fini, puisque les traces de la classe $\mathcal{M}(\mathfrak{J})$ residuelle sont unique, Il existe entre $\mathcal{M}^H$ et un sous-ensemble de l'espace de toutes les fonctions réels sur $\mathfrak{F}$ un homomorphism qui conserve la linearité et l'ordre des éléments. Et, nous pouvons conduire une topologie à $\mathfrak{F}$ de manière que ces fonctions réels sont continue sur $\mathfrak{F}$. Puis, pour un sous-espace linéaire et fermé tel que $\mathfrak{M}\eta\mathcal{M}$, nous pouvons définir la dimension $D(\mathfrak{M})$ comme la trace $T(P_{\mathfrak{M}})$ de la projection de $\mathfrak{M}$.

**2.** Soient $\mathfrak{H}$ l'espace hilbertien général, $\mathcal{B}$ l'ensemble tous les opérateurs linéaires et bornés sur $\mathfrak{H}$ et $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}$ un sous-anneau des opérateurs[2].

Nous posons $Z\eta\mathcal{M}$ pour un opérateur linéaire $Z$ de $\mathfrak{H}$, quand nous avons $UZU^*=Z$ pour tous les opérateurs unitaires $U$ de $\mathcal{M}'$. Alors, $Z\eta\mathcal{M}$ et $Z\in\mathcal{M}$ sont équivalents l'un l'autre pour tout élément Z de $\mathcal{B}$[3].

Puis, nous écrivons $\mathfrak{M}\eta\mathcal{M}$ quand un ensemble fermé et linéaire $\mathfrak{M}$ est invariant pour les opérateurs unitaires $U$ de $\mathcal{M}'$ ; c'est-à-dire $U\mathfrak{M}=\mathfrak{M}$. Alors, pour que nous ayons $\mathfrak{M}\eta\mathcal{M}$, il faut et il suffit que $P_{\mathfrak{M}}\in\mathcal{M}$.

**3.** Dans la note précédente, nous avons désigné par $A\cong B$ s'il y a pour $A$ et $B\in\mathcal{M}$ un opérateur $U$ de $\mathcal{M}^U$ tel que $UAU^*=B$. Cette relation est symétrique, réflexive et transitive, de plus $A\cong B$ entraine $\alpha A\cong\alpha B$ pour chaque nombre complexe $\alpha$. D'ailleurs, nous avons pour la relation entre l'additivité et la congruence des projections.

*Lemme 1.* $P_{\mathfrak{M}_i}, P_{\mathfrak{N}_i}\in\mathcal{M}$, $P_{\mathfrak{M}_i}\cong P_{\mathfrak{N}_i}$ $(i=1,2)$, $P_{\mathfrak{M}_1}\perp P_{\mathfrak{M}_2}$ et $P_{\mathfrak{N}_1}\perp P_{\mathfrak{N}_2}$ *entrainent* $P_{\mathfrak{M}_1}+P_{\mathfrak{M}_2}\cong P_{\mathfrak{N}_1}+P_{\mathfrak{N}_2}$.

---

1), 2) M. Orihara, Sur les anneaux des opérateurs, I. Proc. **20** (1944), 399.

3) F. J. Murray and J. v. Neumann, On Rings of Operators, Ann. of Math. **37** (1936), Lemma 4.2.1.

*Démonstration.* Soient $U_1P_{\mathfrak{M}_1}U_1^*=P_{\mathfrak{N}_1}$ et $U_2P_{\mathfrak{M}_2}U_2^*=P_{\mathfrak{N}_2}$ pour $U_1$ et $U_2$ de $\mathcal{M}^U$. Si nous posons $U=U_2P_{\mathfrak{M}_2}+U_1(I-P_{\mathfrak{M}_2})$, $U$ est alors un opérateur unitaire de $\mathcal{M}$ et $U(P_{\mathfrak{M}_1}+P_{\mathfrak{M}_2})U^*=P_{\mathfrak{N}_1}+P_{\mathfrak{N}_2}$. En effet, il est facile que le domaine de $U$ est $\mathfrak{H}$. Comme chaque élément $f$ de $\mathfrak{H}$ peut être écrit tout la forme $f=g+h$ où $g\in\mathfrak{M}_2$, $h\in\mathfrak{H}-\mathfrak{M}_2$, $U_2g$ et $U_1h$ appartiennent à $\mathfrak{N}_2$ et $\mathfrak{H}-\mathfrak{N}_2$ respectivement, et nous avons $Uf=U_2P_{\mathfrak{M}_2}g+U_1(I-P_{\mathfrak{M}_2})h=U_2g+U_1h$ et $\|Uf\|=\|U_2g\|+\|U_1h\|=\|g\|+\|h\|=\|f\|$. Par conséquent, $U$ est un opérateur isométrique sur $\mathfrak{H}$. Inversement, chaque élément $f'$ de $\mathfrak{H}$ peut être écrit encore à la forme $f'=g'+h'$ où $g'\in\mathfrak{N}_2$, $h'\in\mathfrak{H}-\mathfrak{N}_2$ et il existe deux éléments $g, h$ tels que $U_2g=g'$, $U_1h=h'$ où $g\in\mathfrak{M}_2$, $h\in\mathfrak{H}-\mathfrak{M}_2$. Nous avons alors $Uf=f'$ pour l'élément $f=g+h$ de $\mathfrak{H}$. Or, suivant que $f$ appartient à $\mathfrak{M}_1$ ou bien $\mathfrak{M}_2$, $Uf$ est un élément de $\mathfrak{N}_1$ ou bien $\mathfrak{N}_2$, et inversement. D'où, nous avons $P_{\mathfrak{M}_1}+P_{\mathfrak{M}_2}\cong P_{\mathfrak{N}_1}+P_{\mathfrak{N}_2}$. C. Q. F. D.

Nous avons en général

*Lemme 2.* $P_{\mathfrak{M}_\alpha}, P_{\mathfrak{N}_\alpha}\in\mathcal{M}$, $P_{\mathfrak{M}_\alpha}\cong P_{\mathfrak{N}_\alpha}$ $(\alpha<\Omega)$, $P_{\mathfrak{M}_\alpha}\perp P_{\mathfrak{M}_\beta}$, $P_{\mathfrak{N}_\alpha}\perp P_{\mathfrak{N}_\beta}$ $(\alpha\neq\beta)$ *entrainent* $\sum_{\alpha<\Omega}P_{\mathfrak{M}_\alpha}\cong\sum_{\alpha<\Omega}P_{\mathfrak{N}_\alpha}$.

*Démonstration.* Supposons que $U_\alpha P_{\mathfrak{M}_\alpha}U_\alpha^*=P_{\mathfrak{N}_\alpha}$ $(\alpha<\Omega)$ pour $U_\alpha\in\mathcal{M}^U$. Lorsque nous prenons $U=\sum_{\alpha\geq2}U_\alpha P_{\mathfrak{M}_\alpha}+U_1(I-\sum_{\alpha\geq2}P_{\mathfrak{M}_\alpha})$[4], il est un opérateur unitaire de $\mathcal{M}$, et nous avons $U(\sum P_{\mathfrak{M}_\alpha})U^*=\sum P_{\mathfrak{N}_\alpha}$.

De plus, nous pouvons démontrer de même le

*Lemme 3.* $P_{\mathfrak{M}_\alpha}, P_{\mathfrak{N}_\alpha}\in\mathcal{M}$, $P_{\mathfrak{M}_\alpha}\cong P_{\mathfrak{N}_\alpha}$ $(\alpha<\Omega)$, $P_{\mathfrak{M}_\alpha}\perp P_{\mathfrak{M}_\beta}$, $P_{\mathfrak{N}_\alpha}\perp P_{\mathfrak{N}_\beta}$ $(\alpha\neq\beta)$ et $a_\alpha$ *sont nombres réels, nous avons alors* $\sum_{\alpha<\Omega}a_\alpha P_{\mathfrak{M}_\alpha}\cong\sum_{\alpha<\Omega}a_\alpha P_{\mathfrak{N}_\alpha}$.

**4.** S'il existe pour deux ensembles $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}\eta\mathcal{M}$ un opérateur isométrique partiellement $V$ de $\mathcal{M}$ tel que $V\mathfrak{M}=\mathfrak{N}$, nous désignons ce fait par $\mathfrak{M}\sim\mathfrak{N}$ ou bien $P_{\mathfrak{M}}\sim P_{\mathfrak{N}}$[5]. •Cette relation est évidemment du congruence et symétrique, réflexive et transitive. De plus, si $V\mathfrak{M}=\mathfrak{N}$, nous avons $P_{\mathfrak{M}}=V^*V, P_{\mathfrak{N}}=VV^*$[6].

Si nous avons $E\sim E'\leqq F$ pour $E, F\in\mathcal{M}^P$, nous désignons ce fait $F\gtrsim E$ ou bien $E\lesssim F$. Alors, nous avons le

*Lemme 4.* (i) $E\sim F$ *entraine* $E\lesssim F$, (ii) $E\lesssim F$ *et* $F\lesssim E$ *entrainent* $E\sim F$, (iii) $E\lesssim F$ *et* $F\lesssim G$ *entrainent* $E\lesssim G$[7].

Nous posons $\mathfrak{Z}=(\mathcal{M}\cdot\mathcal{M}')^P$ et l'appelons le centre de $\mathcal{M}^P$. Il est évident une algèbre boolienne. D'ailleurs, pour un élément $A$ de $\mathcal{M}$, nous entendrons par la enveloppée centrale de $A$ la plus petite projection $E$ de $\mathfrak{Z}$ tel qu'on ait $AE=EA=A$, et nous la désignons par $A_z$. Alors, nous avons le suivant du à M. F. Maeda[8].

---

4) $U$ désigne un opérateur sur $\mathfrak{H}$ tel que $Uf$ soit la limite au sens de MM. E. H. Moore et H. L. Smith des éléments $(U_{\alpha_1}f+\cdots+U_{\alpha_n}f)+U_1(If-U_{\alpha_1}f-\cdots-U_{\alpha_n}f)$ $(2\leqq\alpha_k<\Omega)$.

5) F. J. Murray and J. v. Neumann, loc. cit. Chapter VI. Definition. 6.1.1.

6) F. J. Murray and J. v. Neumann, loc. cit. Lemma 4.3.1.

7) F. J. Murray and J. v. Neumann, loc. cit. Lemma 6.1.3 et Lemma 6.3,1.

8) F. Maeda, Relative Dimensionality in Operator Rings, Jour. Sci. Hiroshima Univ. **11** (1941), Lemma 2.5.

*Lemme 5. Pour $E, F \in \mathcal{M}^P$, il existe deux projections $E_1, F_1$ de $\mathcal{M}$ tels que $E_1 \leqq E$, $F_1 \leqq F$, $E_1 \sim F_1$ et $(E-E_1)_z(F-F_1)_z=0$.*

D'après le lemme 5, nous posons $E-E_1=E_2$, $F-F_1=F_2$, donc $E=E_1+E_2$, $F=F_1+F_2$, où $E_1E_2=F_1F_2=0$, $E_1 \sim F_1$ et $(E_2)_z(F_2)_z=0$, et si nous désignons par $(F_2)_z=P$, nous avons alors $PE=PE_1$, $PF=PF_1+F_2$, $PE_1 \sim PF_1$ et $(I-P)E=(I-P)E_1+(I-P)E_2=(I-P)E_1+E_2$, $(I-P)F=(I-P)F_1+(I-P)F_2=(I-P)F_1$, $(I-P)E_1 \sim (I-P)F_1$. Nous avons alors

*Lemme 6. Pour $E, F \in \mathcal{M}^P$, il existe une projection $P$ de $\mathfrak{Z}$ tel que $PE \precsim PF$, $(I-P)F \precsim (I-P)E$*[9].

Et, si nous avons $PE=0$, alors $0=PE=PE_1 \sim PF_1$ et $(I-P)F_1=F_1 \neq 0$. Par conséquent, $0 \neq (I-P)F_1 \sim (I-P)F$, d'où $(I-P)F \neq 0$. Nous avons inversement que $(I-P)F=0$ entraine $PE \neq 0$. Alors,

*Corollaire. Pour $E, F$ de $\mathcal{M}^P$, nous avons $E_1, F_1 \neq 0$ tels que $E_1 \sim F_1$, où $E_1 \leqq E$, $F_1 \leqq F$.*

**5.** Nous considerons sur la relation entre deux congruences $A \sim B$ et $A \cong B$.

*Théorème 1. Si $\mathcal{M}$ est du type fini et $E, F \in \mathcal{M}^P$, $E \sim F$ et $E \cong F$ sont équivalents l'un l'autre.*

*Démonstration.* Nous démontrons que si nous avons $E \sim F$, il existe un opérateur unitaire $U$ de $\mathcal{M}$ tel que $UEU^*=F$. L'enverse est facilement. D'abord, $E \sim F$ entraine $E_z=F_z$[10]. Or, d'après le corollaire au-dessus, il existe $E_1, F_1$ tels que $E_z-E \geqq E_1$, $F_z-F \geqq F_1$ et $E_1 \sim F_1$. Donc, nous pouvons donner par l'induction transfini les ensembles $\{E_\alpha\}$ et $\{F_\alpha\}$ comme il suit; Posons d'abord $E_0=E, F_0=F$. Puis, nous supposons que $E_\alpha$ et $F_\alpha$ $(\alpha<\beta)$ soient déjà défini. Si $\beta$ est un nombre isolé, il existe d'après le corollaire $E', F'$ tels que $E_z-E_{\beta-1} \geqq E'$, $F_z-F_{\beta-1} \geqq F'$ et $E' \sim F'$, et donc nous posons $E_\beta=E_{\beta-1}+E'$, $F_\beta=F_{\beta-1}+F'$, et si $\beta$ est un nombre limit, $E_\beta=\sum\limits_{\alpha<\beta} E_\alpha$, $F_\beta=\sum\limits_{\alpha<\beta} F_\alpha$. Après répéter quelques fois des procédes donnes au-dessus, nous arrivons $E_z=\sum E_\alpha$ et $F_z=\sum F_\alpha$. En effet, si $E_z>\sum E_\alpha$, $F_z>\sum F_\alpha$, nous avons les autres projections $E'$ et $F'$ de $\mathcal{M}^P$ tels que $E' \sim F'$, $E' \leqq E_z-\sum E_\alpha$, $F' \leqq F_z-F_\alpha$ et $E_\alpha \cdot E'=F_\alpha \cdot F'=0$, appliquer le corollaire à $E_z-\sum E_\alpha$ et $F_z-\sum F_\alpha$, c'est contradictoire avec la définition sur $E_\alpha$ et $F_\alpha$ Si $E_z=\sum E_\alpha$ et $F_z>\sum F_\alpha$, $E_z=\sum\limits_\alpha E_\alpha \cong \sum\limits_\alpha F_\alpha<F_z$, d'où $E_z \prec F_z$, c'est contradictoire avec la supposition sur $\mathcal{M}$. Nous avons donc $F_z=\sum F_\alpha$. C'est analogue pour que $E_z<\sum E_\alpha$ et $F_z=\sum F_\alpha$. Nous désignons par $V_\alpha$, $V_0$ des opérateurs partiellements qui les contre-domaine des $E_\alpha$, $E$ ont transformées aux ceux de $F_\alpha$, $F$ respectivement, nous avons $E_\alpha=V_\alpha^* V_\alpha$, $F_\alpha=V_\alpha V_\alpha^*$, $E=V_0^* V_0$ et $F=V_0 V_0^*$, et de plus $E_z=(\sum V_\alpha)^*(\sum V_z)$, $F_z=(\sum V_\alpha)(\sum V_\alpha)^*$. Par conséquent, quand nous posons $U=\sum V_\alpha+(I-E_z)$, il est un opérateur unitaire et $UEU^*=F$.

**6.** Nous discutrons les propriétés de congruence dans § 4 par notre congruence; c'est-à-dire, si nous avons $A \cong A' \leqq B$ pour $A, B \in \mathcal{M}^H$, nous désignons ce fait $A \gtrapprox B$ ou bien $B \lessapprox A$. Alors, nous avons le

9) 小平邦彦, 可換デナイ Operator Ring ノスペクトル分解ニツイテ. I. 全國紙上數學談話會 245 號, Lemma 2.3.

10) F. Maeda, loc. cit. Lemma 2.3.

*Lemme 7.* (i) $A \cong B$ *entraine* $A \lessapprox B$, (ii) $A \lessapprox B$ *et* $B \lessapprox A$ *entrainent* $A \cong B$, (iii) $A \lessapprox B$ *et* $B \lessapprox C$ *entrainent* $A \lessapprox C$, (iv) $A \lessapprox B$ *entraine* $aA \lessapprox aB$ *pour un nombre positif* $a$.

Nous avons la forme générale du lemme 5.

*Lemme 8. Si* $A \cong B$, *nous avons alors* $A_z = B_z$.

En effet, nous posons $A = U^*BU$ pour $U \in \mathcal{M}^U$. $AA_z = A_zA = A$ entraine $U^*BUA_z = A_zU^*BU = U^*BU$. Comme $A_z$ appartient à $\mathcal{M}'$, nous avons $U^*BA_zU = U^*A_zBU = U^*BU$. Alors, $BA_z = A_zB = B$. Par conséquent, $B_z \leqq A_z$. De même $A_z \leqq B_z$, alors $A_z = B_z$.

*Lemme 9. Si* $A_zB_z = 0$, *alors* $A_1 \leqq A$, $B_1 \leqq B$, $A_1 \cong B_1$ *entrainent* $A_1 = B_1 = 0$.

En effet, comme $(A_1)_z \leqq A_z$, $(B_1)_z \leqq B_z$, nous avons $(A_1)_z(B_1)_z = 0$. Or, $(A_1)_z = (B_1)_z$ d'après lemme-avant. Alors, $(A_1)_z = (B_1)_z = 0$, d'où $A_1 = B_1 = 0$.

*Lemme 10. Pour* $A, B \in \mathcal{M}^H$, *il existe deux éléments* $A_0, B_0$ *de* $\mathcal{M}^H$ *telsque* $A_0 \leqq A$, $B_0 \leqq B$, $A_0 \cong B_0$ *et* $(A - A_0)_z(B - B_0)_z = 0$.

*Démonstration.* Nous pouvons consider sans faire perdre la généralité que $A$, $B > 0$ en même temps car il existe un nombre positif $a$ tel que $A + aI > 0$ et $B + aI > 0$, et $U(A + aI)U^* = B + aI$ est équivalent à $UAU^* = B$.

Il suffit aussi de démontrer que si nous avons $A_zB_z \neq 0$, il y a $A_0$ et $B_0$ de manière que $A_0 \leqq A$, $B_0 \leqq B$ et $A_0 \cong B_0$.

Nous prenons $\{E(\lambda)\}$ la résolution d'unité de $A$: c'est-à-dire, $-c = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_{n-1} < \lambda_n = c$ $(\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1} \leqq \varepsilon,\ \nu = 1, 2, \ldots, n)$, $A^{K_\varepsilon} = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_{\nu-1}\big(E(\lambda_\nu) - E(\lambda_{\nu-1})\big)$ et $A^{K_\varepsilon} \leqq A$, nous avons alors $A = \lim_\varepsilon A^{K_\varepsilon} = \lim_\varepsilon \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_{\nu-1}\big(E(\lambda_\nu) - E(\lambda_{\nu-1})\big)$. Nous posons $E(\lambda_\nu) - E(\lambda_{\nu-1}) = E'(\lambda_\nu)$, alors $E'(\lambda_{\nu_1}) \cdot E'(\lambda_{\nu_2}) = 0$ $(\nu_1 \neq \nu_2)$. De même, nous posons $B = \lim_\varepsilon B^{K_\varepsilon} = \lim_\varepsilon \sum_{\nu=1}^{m} \mu_{\nu-1}\big(F'(\mu_\nu)\big)$.

D'abord, si $A_n$ convergent uniforme vers $A$ et $B_n$ convergent fort vers $B$, alors nous avons $A_nB_n$ convergent fort vers $AB$. En effet, si $A_n$ convergent uniforme vers $A$, il y a un nombre positif $c$ tel que $\|A_nf - Af\| \leqq c\|f\|$ pour chaque élément $f$. Alors, $\|A_nB_nf - ABf\| \leqq \|A_nB_nf - A_nBf\| + \|A_nBf - ABf\| \leqq c\|B_nf - Bf\| + \|(A_n - A)Bf\|$, c'est convergent vers 0. Or, dans la relation $A^{K_\varepsilon} \cdot A_z^{K_\varepsilon} = A_z^{K_\varepsilon}A^{K_\varepsilon} = A^{K_\varepsilon}$, puisque $A^{K_\varepsilon}$ convergent uniforme vers $A$ et $A_z^{K_\varepsilon}$ convergent fort vers une projection $E$, nous avons $AE = EA = A$ et $E \geqq A_z$. En autre part, comme $A_z^{K_\varepsilon} \leqq A_z$, nous avons $E = A_z$ et donc $A_z^{K_\varepsilon} = E$. C'est-à-dire, $A_z^{K_\varepsilon}$ convergent vers $A_z$. Si $\big(E'(\lambda_\nu)\big)_zB_z = 0$ pour chaque $\nu$ et $\varepsilon$, $A_z^{K_\varepsilon}B_z \leqq \big(\sum_\nu\big(E'(\lambda_\nu)\big)_z\big)B_z = \sum_\nu\big(\big(E'(\lambda_\nu)\big)_zB_z\big) = 0$, d'où $A_zB_z = 0$. C'est contradictoire. Ainsi, nous avons $\varepsilon = \varepsilon_1$ et $\nu = \nu_1$ tels que $\big(E(\lambda_{\nu_1})\big)_zB_z \neq 0$. De même, il y a $\varepsilon = \varepsilon_2$ et $\nu = \nu_2$ tels que $\big(E'(\lambda_{\nu_1})\big)_z\big(F'(\mu_{\nu_2})\big)_z \neq 0$.

Puis, nous avons $E_0, F_0 \in \mathcal{M}^P$ de manière que $E_0 \cong F_0$, $E_0 \leqq E'(\lambda_{\nu_1})$ et $F_0 \leqq F'(\mu_{\nu_2})$ d'après le lemme 5. Nous posons $\lambda$ le nombre minimum de $\lambda_{\nu_1}$ et $\mu_{\nu_2}$, nous avons alors $A_0 \cong B_0$ où $A_0 = \lambda E_0$ et $B_0 = \lambda F_0$.

C. Q. F. D.

**7.** Maintenant, nous définissons les idéaux de $\mathcal{M}$, c'est-à-dire, si un sous-ensemble $\mathfrak{J}$ de $\mathcal{M}$ jouit des propriétés

(1) Quelsque soient $A, B$ de $\mathfrak{J}$ et les nombres complexes $\alpha, \beta$, on a $\alpha A+\beta B\in\mathfrak{J}$,

(2) $A\in\mathfrak{J}$, $A_z\geqq B_z$ et $B\in\mathcal{M}$ entrainent $B\in\mathfrak{J}$,

(3) $A\in\mathfrak{J}$ entraine $A_z\in\mathfrak{J}$,

(4) $\mathfrak{J}$ est différent à $\mathcal{M}$,

nous l'appelons un *idéal*.

*Lemme 11. Lorsque nous avons $A-B\in\mathfrak{J}$, nous posons $A\equiv B(\mathfrak{J})$. Alors,* (i) $A\equiv A(\mathfrak{J})$, (ii) $A\equiv B(\mathfrak{J})$ *entraine* $B\equiv A(\mathfrak{J})$, (iii) $A\equiv B(\mathfrak{J})$ *et* $B\equiv C(\mathfrak{J})$ *entrainent* $A\equiv C(\mathfrak{J})$, (iv) $A_1\equiv B_1(\mathfrak{J})$ *et* $A_2\equiv B_2(\mathfrak{J})$ *entrainent* $A_1+A_2\equiv(B_1+B_2)(\mathfrak{J})$, (v) $A\equiv B(\mathfrak{J})$ *entraine* $\alpha A\equiv\alpha B(\mathfrak{J})$ *où $\alpha$ est un nombre complexe.*

Par conséquent, nous pouvons classifier les éléments de $\mathcal{M}$ en les classes residuelles par rapport à $\mathfrak{J}$, et donc nous désignons par $A(\mathfrak{J})$ celle qui contient $A$. D'après les propriétés (iv) et (v) du lemme 11, nous pouvons définir la addition de deux classes residuelles, la multiplication de ceux et la multiplication des nombres complexes aux classes residuelles, c'est-à-dire; $A(\mathfrak{J})+B(\mathfrak{J})=(A+B)(\mathfrak{J})$, $A(\mathfrak{J})B(\mathfrak{J})=AB(\mathfrak{J})$ et $\alpha\big(A(\mathfrak{J})\big)=(\alpha A)(\mathfrak{J})$ pour un nombre complexe $\alpha$. Alors,

( i ) $A(\mathfrak{J})+B(\mathfrak{J})=B(\mathfrak{J})+A(\mathfrak{J})$,

(ii) $A(\mathfrak{J})+\big(B(\mathfrak{J})+C(\mathfrak{J})\big)=\big(A(\mathfrak{J})+B(\mathfrak{J})\big)+C(\mathfrak{J})$,

(iii) $A\mathfrak{J})+0(\mathfrak{J})=A(\mathfrak{J})$ pour chaque classe $A(\mathfrak{J})$ residuelle.

(iv) $\alpha\big(\beta A(\mathfrak{J})\big)=(\alpha\cdot\beta)A(\mathfrak{J})$ où $\alpha, \beta$ sont nombres complexes,

( v ) $A(\mathfrak{J})I(\mathfrak{J})=A(\mathfrak{J})$ pour chaque classes $A(\mathfrak{J})$ residuelle.

Nous avons alors,

*Lemme 12. La classe $\mathcal{M}(\mathfrak{J})$ residuelle est un anneau par rapport aux nombres complexes.*

**8.** Puis, nous considerons $\mathcal{M}^H(\mathfrak{J})$ en particulier,

*Lemme 13. Pour un élément $A$ de $\mathcal{M}^H$, s'il existe $A'$ tel que $A\equiv A'(\mathfrak{J})$ et $A'\geqq 0$, nous écrivons $A\geqq 0(\mathfrak{J})$, et si $A-B\geqq 0(\mathfrak{J})$, nous posons $A\geqq B(\mathfrak{J})$. Nous avons alors*

( i ) $A\geqq A(\mathfrak{J})$

( ii ) $A\geqq B(\mathfrak{J})$ *et* $B\geqq A(\mathfrak{J})$ *entrainent* $A\equiv B(\mathfrak{J})$,

(iii) $A\geqq B(\mathfrak{J})$ *et* $B\geqq C(\mathfrak{J})$ *entroinent* $A\geqq C(\mathfrak{J})$,

(iv) $A\geqq B(\mathfrak{J})$ *entraine* $aA\geqq aB(\mathfrak{J})$ *pour un nombre positif $a$.*

*Démonstration.* (i) est clair. Puis, pour voir (ii) et (iv), il suffit les démontrer pour le cas où $B=0$. D'abord, $A\equiv A'(\mathfrak{J})$, $-A\equiv A''(\mathfrak{J})$, $A'\geqq 0$ et $A''\geqq 0$ entrainent $0\equiv A'+A''(\mathfrak{J})$ d'après (iv) du lemme 10, alors $A'+A''\in\mathfrak{J}$ et $A'+A''\geqq 0$. Or, comme nous avons $A'+A''\geqq A'$, $A''\geqq 0$, $A'$ et $A''$ appartiennent à $\mathfrak{J}$. Alors, nous avons $A\equiv 0(\mathfrak{J})$ c'est l'égalite (ii). Si $A\equiv A'(\mathfrak{J})$ et $A'\geqq 0$, nous avons $aA\equiv aA'(\mathfrak{J})$ et $aA'\geqq 0$ pour un nombre positif $a$. Alors, $aA\geqq 0(\mathfrak{J})$, et donc nous avons (iv). Si nous avons que $A\geqq 0(\mathfrak{J})$ et $B\geqq 0(\mathfrak{J})$ entrainent $A+B\geqq 0(\mathfrak{J})$, alors $A-B\geqq 0(\mathfrak{J})$ et $B-C\geqq 0(\mathfrak{J})$ entrainent $A-C\geqq 0(\mathfrak{J})$. Donc, il suffit démontrer au lieu de (iii) que $A\geqq 0(\mathfrak{J})$

et $B \geqq 0(\mathfrak{J})$ entrainent $A+B \geqq 0(\mathfrak{J})$. Puis, $A \equiv A'(\mathfrak{J})$, $A' \geqq 0$, $B \equiv B'(\mathfrak{J})$ et $B' \geqq 0$ entrainent $A+B \equiv B'+B'(\mathfrak{J})$ et $A'+B' \geqq 0$. Alors, $A+B \geqq 0(\mathfrak{J})$. C. Q. F. D.

D'après le lemme 13, nous définissons l'ordre des classes residuelles comme il suffit: s'il y a un élément $A'$ parmi $A(\mathfrak{J})$ tel $A' \geqq 0(\mathfrak{J})$, nous définissons $A(\mathfrak{J}) \geqq 0(\mathfrak{J})$ ou bien $0(\mathfrak{J}) \leqq A(\mathfrak{J})$, et si nous avons $A(\mathfrak{J}) \geqq 0(\mathfrak{J})$ et $A(\mathfrak{J}) \neq 0(\mathfrak{J})$, nous désignons par $A(\mathfrak{J}) > 0(\mathfrak{J})$. De plus, si nous avons $A(\mathfrak{J}) - B(\mathfrak{J}) \geqq 0(\mathfrak{J})$, nous posons $A(\mathfrak{J}) \geqq B(\mathfrak{J})$. Nous avons alors

(v) $A(\mathfrak{J}) \geqq 0(\mathfrak{J})$ et $-A(\mathfrak{J}) \geqq 0(\mathfrak{J})$ entrainent $A(\mathfrak{J}) = 0(\mathfrak{J})$,

(vi) $A(\mathfrak{J}) \geqq 0(\mathfrak{J})$ entraine $aA(\mathfrak{J}) \geqq 0(\mathfrak{J})$ pour un nombre positif $a$,

(vii) $A(\mathfrak{J}) \geqq 0(\mathfrak{J})$ et $B(\mathfrak{J}) \geqq 0(\mathfrak{J})$ entrainent $A(\mathfrak{J}) + B(\mathfrak{J}) \geqq 0(\mathfrak{J})$.

Pour chaque classe $A(\mathfrak{J})$ residuelle, il y a un nombre réel $a$ tel que $A(\mathfrak{J}) \leqq aI(\mathfrak{J})$. En effet, comme il y a un nombre $a$ pour un élément $A$ de $A(\mathfrak{J})$ tel $A \leqq aI$, nous avons pour cette nombre $A(\mathfrak{J}) \leqq aI(\mathfrak{J})$. Nous avons donc

*Lemme 14. La classe $\mathcal{M}^H(\mathfrak{J})$ residuelle de $\mathcal{M}^H$ par rapport à un idéal $\mathfrak{J}$ est un espace linéaire et demi-ordonné. Il existe l'élément zéro et l'élément d'unité au sens archmedien dans cet espace, et ils sont $0(\mathfrak{J})$, $I(\mathfrak{J})$ respectivement.*

**9.** Quand un idéal $\mathfrak{J}$ n'est pas contenu à autre idéal, nous l'appelons maximal. Soient $\mathfrak{F}$ l'ensemble de tous des idéaux maximaux de $\mathcal{M}$.

Quand nous faisons correspondre la classe $A(\mathfrak{J})$ residuelle par rapport à $\mathfrak{J}$ qui contient $A$ à chaque idéal $\mathfrak{J}$ maximal, nous avons une fonction $\varphi_A[\mathfrak{J}]$ tel qu'on ait $\varphi_A[\mathfrak{J}] = A(\mathfrak{J})$. $\mathcal{M}$ est isomorphe alors à l'espace des fonctions $\varphi_A[\mathfrak{J}]$ quand nous faisons correspondre la fonction $\varphi_A[\mathfrak{J}]$ à chaque $A$ de $\mathcal{M}$. En effet, $\varphi_A[\mathfrak{J}] + \varphi_B[\mathfrak{J}] = \varphi_{A+B}[\mathfrak{J}]$, $\varphi_A[\mathfrak{J}] \cdot \varphi_B[\mathfrak{J}] = \varphi_{AB}[\mathfrak{J}]$ et $a\varphi_A[\mathfrak{J}] = \varphi_{aA}[\mathfrak{J}]$ d'après le lemme 11, $A \geqq 0$ entraine $\varphi_A[\mathfrak{J}] \geqq 0$ d'après lemme 13, et $\varphi_I[\mathfrak{J}] = I(\mathfrak{J})$. Pour voir que cette correspondance est biunivoque, il suffit de démontre que il y a pour $A \neq 0$ un idéal $\mathfrak{J}$ maximal tel que $\varphi_A[\mathfrak{J}] \neq 0$. Nous prenons pour $A$ l'idéal $\mathfrak{J}$ maximal qui ne contient pas $A_z$. Nous avons alors $A_z \not\equiv 0(\mathfrak{J})$ et par conséquent $A \not\equiv 0(\mathfrak{J})$ d'après (3) de la définition de l'idéal. Il est clair alors $\varphi_A[\mathfrak{J}] \neq 0$. Nous avons donc

*Théorème 2. $\mathcal{M}$ est isomorphe avec un sous-anneau de l'anneau de toutes les fonctions sur $\mathfrak{F}$ dont les valeurs à chaque $\mathfrak{J}$ appartient à $\mathcal{M}(\mathfrak{J})$.*

De plus, nous avons le

*Théorème 3. La classe $\mathcal{M}(\mathfrak{J})$ residuelle de $\mathcal{M}$ par rapport à l'idéal $\mathfrak{J}$ maximal est irreducible.*

En effet, s'il existe deux éléments distincts du centre de $(\mathcal{M}(\mathfrak{J}))^P$ tels que $E_k \neq 0$ $(k=1,2)$, ce qui contradictoire avec la hypothèse que $\mathfrak{J}$ est maximal. Alors, nous avons $E(\mathfrak{J}) - E_1(\mathfrak{J}) = 0$ ou bien $F(\mathfrak{J}) - F_1(\mathfrak{J}) = 0$, appliquer le lemme 5 pour $E(\mathfrak{J})$ et $F(\mathfrak{J})$ de $(\mathcal{M}(\mathfrak{J}))^P$, alors quelsque projections de la classe $\mathcal{M}(\mathfrak{J})$ residuelle par rapport à l'idéal $\mathfrak{J}$ maximal sont comparable.

Par conséquent, nous avons d'après le lemme 10

*Théorème 4. Deux éléments de la classe $\mathcal{M}^H(\mathfrak{J})$ residuelle par rapport à un idéal $\mathfrak{J}$ maximal sont toujours comparable.*

**10.** Puis, nous considerons la trace du type fini $\mathcal{M}$.

Comme nous n'avons pas employé que $\mathcal{M}$ est faiblement fermé dans la démonstration de l'existence de la fonction $T(A)$, nous pouvons donner de même que la note précédente un nombre complexe $f[A(\mathfrak{J})]$ pour $A(\mathfrak{J})$—quand $\mathcal{M}$ est le type fini, nous l'appelons la trace de $A(\mathfrak{J})$—et il remplit les conditions suivantes pour chaque élément $A(\mathfrak{J})$ de $\mathcal{M}(\mathfrak{J})$,

(2′) $f[\alpha A(\mathfrak{J})]=\alpha f[A(\mathfrak{J})]$ pour un nombre complexe $\alpha$,
(3′) $f[A(\mathfrak{J})+B(\mathfrak{J})]=f[A(\mathfrak{J})]+f[B(\mathfrak{J})]$,
(4′) si $A(\mathfrak{J})\geqq 0(\mathfrak{J})$, nous avons $f[A(\mathfrak{J})]\geqq 0$,
(5′) $f[A(\mathfrak{J})^*]=\overline{f[A(\mathfrak{J})]}$,
(6′) $f[AB(\mathfrak{J})]=f[BA(\mathfrak{J})]$[11],
(7′) si $U\in\mathcal{M}^U$, nous avons $f[U(\mathfrak{J})^*A(\mathfrak{J})U(\mathfrak{J})]=f[A(\mathfrak{J})]$,

En particulier, quand $\mathcal{M}$ est le type fini, nous avons de plus

(1′) $f[I(\mathfrak{J})]=1$,
(8′) $f[A(\mathfrak{J})]$ est finie pour tout $A(\mathfrak{J})$ de $\mathcal{M}(\mathfrak{J})$.

Alors, nous avons le

*Théorème 5. Il existe une trace jouit des propriétés* (1′)-(8′) *au-dessus pour $\mathcal{M}(\mathfrak{J})$, quand $\mathcal{M}$ est du type fini.*

**11.** Quand $\mathcal{M}$ est le type fini, il correspond une fonction complexe—nous le désignons $f_A(\mathfrak{J})$—pour $A$ d'après le théorème 5. Maintenant, nous considerons cette fonction quand $\mathfrak{J}$ est un idéal maximal.

*Lemme 14. Quand $\mathcal{M}$ est irreducible, la trace $T(A)$ de $A$ est unique.*

*Démonstration.* Nous démontrons le lemme pour un élément $A$ de $\mathcal{M}^H$. S'il existe deux traces $T(A)\neq T'(A)$ $\big(T(A)>T'(A)\big)$ de $A$, nous posons $T(A)-T'(A)=\varepsilon$, et nous pouvons poser $A\cong n\left(\frac{1}{2}\varepsilon I\right)+A'$ où $n$ est un nombre positif ou bien négatif et $0\lesssim A'<\frac{1}{2}\varepsilon I$. Alors, nous avons $T(A)=\frac{1}{2}\varepsilon n+T(A')$, $T'(A)=\frac{1}{2}\varepsilon n+T'(A')$. Par conséquent, $T(A)-T'(A)=\varepsilon=T(A')-T'(A')\leqq\frac{1}{2}\varepsilon$. C'est contradictoire. D'où $T(A)=T'(A)$. C. Q. F. D.

Puisque $f_A(\mathfrak{J})$ est uniquement sur chaque idéal $\mathfrak{J}$ maximal d'après le lemme-avant, $f_A(\mathfrak{J})$ est déterminée uniquement pour $A$ sur $\mathfrak{J}$.

---

11) Dans la note précédente, nous avons démontré $T(AB)=T(BA)$ en employer la condition de fermé faiblement de $\mathcal{M}$, mais il est démontré sans cela voir F. J. Murray and J. v. Neumann, On Rings of Operator, II. Tran. Amer. Math. Soc. **41** (1937), 219,

Nous définissons un voisinage de $\mathfrak{J}_0$ comme suivant: quelsque soient $\varepsilon > 0$, $n > 0$ et des éléments $A_1, A_2, \dots, A_n$, nous posons $U(\mathfrak{J}_0) = [\mathfrak{J};\ |f_{A_i}(\mathfrak{J}) - f_{A_i}(\mathfrak{J}_0)| < \varepsilon,\ i=1,2,\dots,n]$. Alors, $f_A(\mathfrak{J})$ est une fonction continue par rapport à cette topologie. Et, $\mathfrak{F}$ est contenu dans un espace $\overline{\mathfrak{F}}$ bicompact par rapport à même topologie. Alors, nous avons le

*Théorème 6. $\mathcal{M}$, quand il est le type fini, est homomorphe à sous-enesmble de l'espace de toutes les fonctions continues sur un espace bicompact $\overline{\mathfrak{F}}$ au sens de conserve la linéairité et l'ordre que nous avons conduit dans l'espace $\mathcal{M}^H$.*

**12.** La trace des éléments de $\mathcal{M}$ est une fonctionnelle linéaire de $\mathcal{M}$, alors toute trace peut être représentée comme une fonctionnelle linéaire des fonctions continues sur $\overline{\mathfrak{F}}$. Par conséquent, quand nous introduisons une mesure $\mathfrak{m}(\mathfrak{J})$ borelienne appropriéte dans l'ensemble $\overline{\mathfrak{F}}$, nous pouvons écrit comme il suite;

$$T(A) = \int_{\overline{\mathfrak{F}}} f_A(\mathfrak{J})\, d\mathfrak{m}(\mathfrak{J}).$$

**13.** Nous démontrons une propriété par la continuité de la trace.

*Lemme 15. Quand $\mathcal{M}$ est irreducible et du type fini, si $A_i \in \mathcal{M}^H$, $A_i \leqq A_{i+1}$ ou bien $A_i \geqq A_{i+1}$ $(i=1,2,\dots)$ et $A_i$ convergent vers $A$ au sens de la topologie forte, alors nous avons $\lim_i T(A_i) = T(A)$.*

*Démonstration.* Il suffit de démontrer le cas où $A_1 \leqq A_2 \leqq \cdots$ et $A \geqq 0$. Nous avons alors $\lim_i T(A_i) \leqq T(A)$. Si cet inégalité n'est pas l'égalité, il existe un nombre $\varepsilon$ tel qu'on ait $T(A) - \lim_i T(A_i) > \varepsilon$, et nous avons un élément $B \eta \mathcal{M}$ tel que $0 < T(B) < \varepsilon$ d'après la convergence de $T(A_i)$. $T(A) - \lim_i T(A_i) = T(A - A_1) - \lim_i T(A_i - A_1) = \cdots = T(A - A_k) - \lim_i T(A_i - A_k)$. Lorsque $k$ est assez grand, nous avons $\lim_i T(A - A_k) \leqq T(B)$. Alors, nous supposons $T(A_i) \leqq T(B) < T(A) - \lim_i T(A_i) < T(A)$. Nous avons $B \lessapprox A$ et $A_i \gtrapprox B$ d'après la propriété de cas irreducible. Il existe alors $B_i$ $(i=1,2,\dots)$ tels que $B_1 \cong A_1$, $B_i \cong A_i - A_{i-1}$ et $B - (B_1 + \cdots + B_{i-1}) \geqq B_i$ $(i=2,\dots,k-1)$. En effet, nous supposons qu'il existe $B_i$ $(i=1,\dots,k-1)$ au-dessus, et lorsque nous posons $B - (B_1 + B_2 + \cdots + B_{k-1}) = B'$, alors $T(B') = T(B) - T(B_1 + \cdots + B_{k-1}) < T(A) - T(A_{k-1}) = T(A - A_{k-1})$. Par conséquent, $B' \lessapprox (A - A_{k-1})$ et $A_k - A_{k-1} \lessapprox B'$, alors nous avons un élément $B_k$ tel que $A_k - A_{k-1} \cong B_k \lessapprox B'$, $B \geqq B_1 + B_2 + \cdots \cong A_1 + (A_2 - A_1) + \cdots = A$. Alors, nous avons $T(B) \geqq T(A)$. C'est contradictoire avec la hypothèse. D'où $T(A) = \lim_i T(A_i)$.

**14.** Puis, nous introduisons une dimension numérique par un sous-espace fermé et linéaire. Si nous écrivons $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$ au lieu de $P_{\mathfrak{M}} \cong P_{\mathfrak{N}}$, nous avons d'après le lemme 2

*Lemme 16. Si $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{P}, \mathfrak{M}_\alpha$ et $\mathfrak{N}_\alpha \eta \mathcal{M}$ $(\alpha < \Omega)$, on a* (i) $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}$, (ii) $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$ *entraine* $\mathfrak{N} \cong \mathfrak{M}$, (iii) $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N} \cong \mathfrak{P}$ *entrainent* $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{P}$, (iv) $\mathfrak{M}_\alpha \cong \mathfrak{N}_\alpha$, $\mathfrak{M}_\alpha \perp \mathfrak{M}_\beta$ et $\mathfrak{N}_\alpha \perp \mathfrak{N}_\beta$ $(\alpha \neq \beta)$ *entrainent* $\bigcup \mathfrak{M}_\alpha \cong \bigcup \mathfrak{N}_\alpha$.

Quand une fonction $D(\mathfrak{M})$ définie sur tous les ensemble $\mathfrak{M}$ fermé et linéaires tels que $\mathfrak{M}\eta\mathcal{M}$ remplit les conditions suivantes,

(1) $D(\mathfrak{M})\geqq 0$,

(2) si $\mathfrak{M}=(0)$, on a $D(\mathfrak{M})=0$,

(3) $\mathfrak{M}\cong\mathfrak{N}$ entraine $D(\mathfrak{M})=D(\mathfrak{N})$,

(4) si $\mathfrak{M}_i$ sont orthogonal à l'un l'autre, ils sont $D(\bigvee_i \mathfrak{M}_i)=\sum_i D(\mathfrak{M}_i)$,

nous l'appelons une *dimension* de $\mathfrak{M}$.

Pour l'existence de la dimension, nous avons

*Théorème 6. Il existe une dimension suivante:*

*Quand $\mathcal{M}$ est le type fini,*

(5) $D(\mathfrak{M})\leqq 1$,

*Quand $\mathcal{M}$ est le type infini,*

(6) $-\infty < D(\mathfrak{M}) < +\infty$ *pour le type fini* $P_{\mathfrak{M}}$,

(7) $D(\mathfrak{M})=\infty$ *pour le type infini* $P_{\mathfrak{M}}$.

*Quand $\mathcal{M}$ est le type purement infini,*

(8) $D(\mathfrak{M})=0$ *ou bien* $D(\mathfrak{M})=\infty$.

*Démonstration.* Quand nous posons $D(\mathfrak{M})=T(P_{\mathfrak{M}})$, il est facile (1), (2), (3), (5), (6), (7) et (8) d'après la définition de la trace. Il suffit démontrer du type fini seulement pour voir (4). Or, la classe $\mathcal{M}(\mathfrak{Z})$ residuelle est un anneau des opérateurs dans espace hilbertien[12] et irreducible. Alors, nous connaissons que $f_{\sum_i P_{\mathfrak{M}_i}}(\mathfrak{Z})=\sum_i f_{P_{\mathfrak{M}_i}}(\mathfrak{Z})$ à chaque point. de $\mathfrak{Z}$ de la représentation du théorème 6 d'après le lemme 15. Par conséquent, $T(\sum_i P_{\mathfrak{M}_i})=\sum_i T(P_{\mathfrak{M}_i})$. C. Q. F. D.

12) M. Kondô, Sur la reductibilité des anneaux des opérateurs. Proc. **20** (1944), 432.