90. *Sur les coniques dans les espaces à connexion affine ou projective II.*

Par Kentaro YANO.
Institut Mathématique, Université Impériale de Tokyo.
Kazuo TAKANO.
Institut Mathématique, Université Impériale de Hokkaido, Sapporo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., July 12, 1944.)

§ 3. *Transformations des paramètres affines.*

Dans la Note I[1] portant le même titre, nous avons défini les coniques dans un espace à connexion affine comme étant des courbes planes dont les normales affines sont concourantes le long des courbes. Ses équations étaient

$$\frac{\delta^3 x^i}{ds^3}+k\frac{dx^i}{ds}=0, \tag{3.1}$$

où k est une constante et s un paramètre affine. Nous avons ensuite défini les coniques dans un espace à connexion projective par les équations différentielles

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d}{ds}\{t, s\}+\frac{da^0}{ds}+\Pi^0_{jk}a^j\frac{dx^k}{ds}=0, \\ &\frac{\delta^3 x^i}{ds^3}+[2\{t, s\}+a^0]\frac{dx^i}{ds}=0, \end{aligned}\right. \tag{3.2}$$

où t est un paramètre projectif. Ici le paramètre s a aussi un caractère affine, parce que, comme on le voit facilement, pendant une transformation affine du paramètre

$$\bar{s}=as+b,$$

deux équations ci-dessus restent invariantes. Mais, dans le cas de l'espace à connexion projective, on doit considérer en plus le changement de l'hyperplan à l'infini :

$$\bar{A}_0=A_0, \qquad \bar{A}_j=\varphi_j A_0+A_j, \tag{3.3}$$

d'après lequel les composantes de la connexion projective subissent les transformations

$$\left\{\begin{aligned} &\bar{p}_k=p_k-\varphi_k, \\ &\bar{\Pi}^i_{jk}=\Pi^i_{jk}+\varphi_{j,k}-\varphi_i\Pi^i_{jk}-\varphi_j\varphi_k, \\ &\bar{\Pi}^i_{jk}=\Pi^i_{jk}+\delta^i_j\varphi_k+\delta^i_k\varphi_j. \end{aligned}\right. \tag{3.4}$$

---

1) K. Yano et K. Takano: Sur les coniques dans les espaces à connexion affine ou projective I, Proc. **20** (1944), 410-417.

Il va sans dire que les équations des coniques projectives prennent, par rapport à ce nouveau repère semi-naturel, la même forme que celle de (3.2):

$$(3.5)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{d\bar{s}}\{t, \bar{s}\} + \dfrac{d\bar{a}^0}{d\bar{s}} + \bar{\Pi}^0_{jk}\bar{a}^j \dfrac{dx^k}{d\bar{s}} = 0\,, \\ \dfrac{\delta^3 x^i}{d\bar{s}^3} + [2\{t, \bar{s}\} + \bar{a}^0]\dfrac{dx^i}{d\bar{s}} = 0\,, \end{cases}$$

où

$$\bar{a}^0 = \bar{\Pi}^0_{jk}\frac{dx^j}{d\bar{s}}\frac{dx^k}{d\bar{s}}\,, \qquad \bar{a}^i = \frac{\delta^2 x^i}{d\bar{s}^2}\,,$$

et $\delta/d\bar{s}$ désigne la dérivée covariante le long de la courbe par rapport aux composantes de la connexion $\bar{\Pi}^i_{jk}$.

Le paramètre projectif t étant invariant par rapport au changement de l'hyperplan à l'infini. nous allons chercher dans la suite la loi de transformation du paramètre affine s.

En portant les relations

$$(3.6)\qquad \begin{cases} \{t, \bar{s}\} = \dfrac{\{t, s\} - \{\bar{s}, s\}}{\left(\dfrac{d\bar{s}}{ds}\right)^2}\,, \quad \dfrac{dx^i}{d\bar{s}} = \dfrac{\dfrac{dx^i}{ds}}{\dfrac{d\bar{s}}{ds}}\,, \\[2ex] \bar{a}^0 = \dfrac{a^0}{\left(\dfrac{d\bar{s}}{ds}\right)^2} + \dfrac{\varphi_{j\,;\,k}\dfrac{dx^j}{ds}\dfrac{dx^k}{ds} - \varphi_j\varphi_k\dfrac{dx^j}{ds}\dfrac{dx^k}{ds}}{\left(\dfrac{d\bar{s}}{ds}\right)^2}\,, \\[2ex] \bar{a}^i = \dfrac{a^i}{\left(\dfrac{d\bar{s}}{ds}\right)^2} + \left[\dfrac{2\varphi_j\dfrac{dx^j}{ds}}{\left(\dfrac{d\bar{s}}{ds}\right)^2} - \dfrac{\dfrac{d^2\bar{s}}{ds^2}}{\left(\dfrac{d\bar{s}}{ds}\right)^3}\right]\dfrac{dx^i}{ds}\,, \\[2ex] \dfrac{d\bar{a}^i}{d\bar{s}} + \bar{\Pi}^i_{jk}\bar{a}^j\dfrac{dx^k}{d\bar{s}} = \dfrac{\dfrac{da^i}{ds} + \Pi^i_{jk}a^j\dfrac{dx^k}{ds}}{\left(\dfrac{d\bar{s}}{ds}\right)^3} - 3\left[\dfrac{\dfrac{d^2\bar{s}}{ds^2}}{\left(\dfrac{d\bar{s}}{ds}\right)^4} - \dfrac{\varphi_j\dfrac{dx^j}{ds}}{\left(\dfrac{d\bar{s}}{ds}\right)^3}\right]a^i \\[2ex] \qquad + \left[\dfrac{3\varphi_j a^j + 2\varphi_{j\,;\,k}\dfrac{dx^j}{ds}\dfrac{dx^k}{ds} + 4\varphi_j\varphi_k\dfrac{dx^j}{ds}\dfrac{dx^k}{ds}}{\left(\dfrac{d\bar{s}}{ds}\right)^3}\right. \\[2ex] \qquad \left. - \dfrac{6\varphi_j\dfrac{dx^j}{ds}\dfrac{d^2\bar{s}}{ds^2}}{\left(\dfrac{d\bar{s}}{ds}\right)^4} - \dfrac{\dfrac{d^3\bar{s}}{ds^3}}{\left(\dfrac{d\bar{s}}{ds}\right)^4} + \dfrac{3\left(\dfrac{d^2\bar{s}}{ds^2}\right)^2}{\left(\dfrac{d\bar{s}}{ds}\right)^5}\right]\dfrac{dx^i}{ds}\,, \end{cases}$$

dans la deuxième équation de (3.5), on doit avoir la deuxième équation de (3.2) qui manque le terme de a^i. Donc, on voit que la fonction $\bar{s}(s)$ doit satisfaire à l'équation

$$\frac{\dfrac{d^2\bar{s}}{ds^2}}{\dfrac{d\bar{s}}{ds}}=\varphi_j\frac{dx^j}{ds}, \tag{3.7}$$

d'où

$$\frac{\dfrac{d^3\bar{s}}{ds^3}}{\dfrac{d\bar{s}}{ds}}-\frac{\left(\dfrac{d^2\bar{s}}{ds^2}\right)^2}{\left(\dfrac{d\bar{s}}{ds}\right)^2}=\varphi_{j\,;\,k}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}+\varphi_j a^j,$$

et par conséquent

$$\{\bar{s}, s\}=\varphi_{j\,;\,k}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}+\varphi_j a^j-\frac{1}{2}\varphi_j\varphi_k\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}, \tag{3.8}$$

où le point-virgule désigne la dérivée covariante par rapport à Π^i_{jk}.

En substituant ces équations dans (3.6), on obtient

$$\left\{\begin{aligned}
&\{t, \bar{s}\}=\frac{\{t, s\}-\{\bar{s}, s\}}{\left(\dfrac{d\bar{s}}{ds}\right)^2}, \quad \frac{dx^i}{d\bar{s}}=\frac{\dfrac{dx^i}{ds}}{\dfrac{d\bar{s}}{ds}},\\
&\bar{a}^0=\frac{a^0+\{\bar{s}, s\}-\varphi_j a^j-\dfrac{1}{2}\varphi_j\varphi_k\dfrac{dx^j}{ds}\dfrac{dx^k}{ds}}{\left(\dfrac{d\bar{s}}{ds}\right)^2},\\
&\bar{a}^i=\frac{a^i}{\left(\dfrac{d\bar{s}}{ds}\right)^2}+\frac{\dfrac{d^2\bar{s}}{ds^2}}{\left(\dfrac{d\bar{s}}{ds}\right)^3}\frac{dx^i}{ds},\\
&\frac{d\bar{a}^i}{d\bar{s}}+\Pi^i_{jk}\bar{a}^j\frac{dx^k}{d\bar{s}}=\frac{\dfrac{da^i}{ds}+\Pi^i_{jk}a^j\dfrac{dx^k}{ds}}{\left(\dfrac{d\bar{s}}{ds}\right)^3}\\
&\qquad+\left[\frac{2\{\bar{s}, s\}-(\varphi_{j\,;\,k}-\varphi_j\varphi_k)\dfrac{dx^j}{ds}\dfrac{dx^k}{ds}}{\left(\dfrac{d\bar{s}}{ds}\right)^3}\right]\frac{dx^i}{ds},
\end{aligned}\right. \tag{3.9}$$

donc, en substituant ces équations dans les premiers membres de (3.5), on trouve

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d}{d\bar{s}}\{t,\bar{s}\}+\frac{d\bar{a}^0}{d\bar{s}}+\bar{\Pi}^0_{jk}\bar{a}^j\frac{dx^k}{d\bar{s}}=\frac{1}{\left(\dfrac{d\bar{s}}{ds}\right)^2}\left[\frac{d}{ds}\{t,s\}+\frac{da^0}{ds}+\Pi^0_{jk}a^j\frac{dx^k}{ds}\right], \\ &\frac{d\bar{a}^i}{d\bar{s}}+\bar{\Pi}^i_{jk}\bar{a}^j\frac{dx^k}{d\bar{s}}+(2\{t,\bar{s}\}+\bar{a}^0)\frac{dx^i}{d\bar{s}} \\ &\qquad=\frac{1}{\left(\dfrac{d\bar{s}}{ds}\right)^3}\left[\frac{da^i}{ds}+\Pi^i_{jk}a^j\frac{dx^k}{ds}+(2\{t,s\}+a^0)\frac{dx^i}{ds}\right], \end{aligned}\right.$$

et par conséquent, on voit bien que les équations (3.5) sont invariantes par rapport aux transformations projectives à condition que l'on prend, comme paramètre affine, s défini par l'équation (3.7)

§ 4. *La condition pour laquelle les coniques affines et les coniques projectives coïncident.*

Dans un espace à connexion projective, les coniques projectives sont données par les équations différentielles

$$\text{(4.1)} \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{ds}\{t,s\}+\frac{da^0}{ds}+\Pi^0_{jk}\frac{\delta^2x^j}{ds^2}\frac{dx^k}{ds}=0\,, \\ &\frac{\delta^3x^i}{ds^3}+(2\{t,s\}+a^0)\frac{dx^i}{ds}=0\,. \end{aligned}\right.$$

Si l'on considère que Π^0_{jk} sont les composantes d'un tenseur affine et Π^i_{jk} les composantes d'une connexion affine, la deuxième équation de (4.1) montre que la courbe qu'il définit est une courbe plane. Donc, pour qu'il soit une conique affine, il faut et il suffit qu'on ait

$$2\{t,s\}+a^0=k\,,$$

où k est une constante. Donc la dérivation par rapport à s nous donne

$$2\frac{d\{t,s\}}{ds}+\frac{da^0}{ds}=0\,,$$

où

$$\frac{da^0}{ds}=\Pi^0_{jk;h}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^h}{ds}+\Pi^0_{jk}\frac{\delta^2x^j}{ds^2}\frac{dx^k}{ds}+\Pi^0_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{\delta^2x^k}{ds^2}\,.$$

En comparant cette équation avec la première équation de (4.1), on obtient

$$\Pi^0_{jk;h}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^h}{ds}+3\Pi^0_{jk}\frac{\delta^2x^j}{ds^2}\frac{dx^k}{ds}+\Pi^0_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{\delta^2x^k}{ds^2}=0\,.$$

Pour que cette équation soit valable pour n'importe quelle conique de l'espace, on doit avoir

$$\text{(4.2)} \qquad \Pi^0_{jk}=0\,,$$

ce qui montre que le groupe d'holonomie de l'espace à connexion projective fixe l'hyperplan $[A_1, A_2, \cdots, A_n]$, donc la connexion doit en réalité être affine.

Inversement, supposons que le groupe d'holonomie de l'espace fixe un hyperplan. Dans ce cas, nous prenons un repère semi-naturel

$$\bar{A}_0 = A_0 , \qquad \bar{A}_j = A_j + \varphi_j A_0 ,$$

pour lequel l'hyperplan invariant peut être représenté par $[\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n]$.

Alors, parmi les composantes de la connexion

$$\begin{cases} \bar{\Pi}^0_{jk} = \Pi^0_{jk} + \varphi_{j;k} - \varphi_j \varphi_k , \\ \bar{\Pi}^i_{jk} = \Pi^i_{jk} + \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \varphi_j , \end{cases}$$

les $\bar{\Pi}^0_{jk}$ doivent être nulles. Donc, les équations différentielles des coniques projectives

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\bar{s}}\{t, \bar{s}\} + \dfrac{d\bar{a}^0}{d\bar{s}} + \bar{\Pi}^0_{jk} \dfrac{\delta^2 x^j}{d\bar{s}^2} \dfrac{dx^k}{d\bar{s}} = 0 , \\ \dfrac{\delta^3 x^i}{d\bar{s}^3} + (2\{t, \bar{s}\} + \bar{a}^0) \dfrac{dx^i}{d\bar{s}} = 0 \end{cases}$$

deviennent

$$\begin{cases} \{t, \bar{s}\} = \dfrac{1}{2} k = \text{constante}, \\ \dfrac{\delta^3 x^i}{d\bar{s}^3} + k \dfrac{dx^i}{d\bar{s}} = 0 , \end{cases}$$

et donnent les équations des coniques affines. En définitive, nous avons donc le

Théorème : Pour que les coniques projectives deviennent les coniques affines, il faut et il suffit qu'il existe un vecteur covariant φ_j tel que

$$0 = \Pi^0_{jk} + \varphi_{j;k} - \varphi_j \varphi_k .$$

Alors, les coniques projectives sont les coniques affines par rapport aux composantes affines

$$\bar{\Pi}^i_{jk} = \Pi^i_{jk} + \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \varphi_j .$$

Partons cette fois d'un espace à connexion affine. En introduisant un tenseur affine Π^0_{jk}, on peut construire un espace à connexion projective dont les composantes sont Π^0_{jk} et Π^i_{jk}. Si l'on demande que les coniques affines

$$\frac{\delta^3 x^i}{ds^3} + k \frac{dx^i}{ds} = 0$$

deviennent les coniques projectives par rapport aux Π^0_{jk} et Π^i_{jk}, on doit avoir

$$k = 2\{t, s\} \quad \text{et} \quad \Pi^0_{jk} = 0 .$$

Donc, si la connexion projective ainsi construite était normale, les équations (2.10) montrent que le tenseur de courbure contracté doit être nul. Ce fait a été d'ailleurs déjà remarqué par MM. H. Hombu et M. Mikami[1)].

1) H. Hombu et M. Mikami: Conics in the projectively connected manifolds, déjà cité, §7.

§ 5. *Les transformations projectives qui changent coniques affines en coniques affines.*

Considérons une conique affine

$$\frac{\delta^3 x^i}{ds^3} + k\frac{dx^i}{ds} = 0\,, \tag{5.1}$$

les composantes de la connexion affine étant Π^i_{jk}. Si l'on effectue une transformation projective de la connexion affine

$$\bar{\Pi}^i_{jk} = \Pi^i_{jk} + \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \varphi_j\,, \tag{5.2}$$

la courbe définie par (5.1) n'est plus en général la conique affine par rapport à la connexion affine $\bar{\Pi}^i_{jk}$. Nous allons chercher la condition à laquelle le vecteur covariant φ_j doit satisfaire pour que la transformation projective de la connexion affine change les coniques affines par rapport à Π^i_{jk} en coniques affines par rapport à $\bar{\Pi}^i_{jk}$.

Pour cela, regardons la conique affine (5.1) comme étant une conique projective par rapport à la connexion projective dont les composantes de la connexion sont Π^0_{jk} et Π^i_{jk}. Si l'on effectue une transformation de l'hyperplan à l'infini, les composantes de la connexion projective subissent la transformation

$$\left\{\begin{aligned} \bar{\Pi}^0_{jk} &= \Pi^0_{jk} + \varphi_{j\,;\,k} - \varphi_j \varphi_k\,, \\ \bar{\Pi}^i_{jk} &= \Pi^i_{jk} + \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \varphi_j\,, \end{aligned}\right. \tag{5.3}$$

et la conique (5.1) regardée comme étant projective se transforme en une autre conique projective. Si l'on demande que cette conique projective soit une conique affine par rapport à $\bar{\Pi}^i_{jk}$, on obtient, d'après ce qui a été dit au paragraphe précédent, $\bar{\Pi}^0_{jk} = 0$. Donc, nous avons de la première équation de (5.3)

$$\varphi_{j\,;\,k} - \varphi_j \varphi_k = 0\,. \tag{5.4}$$

Inversement, nous allons montrer que la transformation projective (5.2) avec le φ_j satisfaisant à (5.4) change la conique affine (5.1) en conique affine

$$\frac{\delta^3 x^i}{d\bar{s}^3} + \bar{k}\frac{dx^i}{d\bar{s}} = 0\,. \tag{5.5}$$

En effet, nous avons de la dernière équation de (3.9)

$$\frac{\delta^3 x^i}{d\bar{s}^3} = \frac{1}{\left(\dfrac{d\bar{s}}{ds}\right)^3}\left[\frac{\delta^3 x^i}{ds^3} + 2\{\bar{s}, s\}\frac{dx^i}{ds}\right],$$

en vertu de (5.4). Donc, la transformation projective avec le φ_j satisfaisant à (5.4) change les équations (5.1) en (5.5), où

$$\bar{k} = \frac{k - 2\{\bar{s}, s\}}{\left(\dfrac{d\bar{s}}{ds}\right)^2}\,. \tag{5.6}$$

Nous allons montrer que $\bar{k}$ est une constante. La dérivation de (5.6) par rapport à s nous donne

$$\frac{d\bar{k}}{ds}=\frac{2(2\{\bar{s},s\}-k)\dfrac{d^2\bar{s}}{ds^2}}{\left(\dfrac{d\bar{s}}{ds}\right)^3}-\frac{2\dfrac{d\{\bar{s},s\}}{ds}}{\left(\dfrac{d\bar{s}}{ds}\right)^2}. \tag{5.7}$$

D'autre part, nous avons, de l'équation (3.8),

$$\{\bar{s},s\}=\frac{1}{2}\varphi_j\varphi_k\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}+\varphi_j a^j, \tag{5.8}$$

en vertu de (5.4). En dérivant cette équation par rapport à s, on trouve

$$\frac{d\{\bar{s},s\}}{ds}=\varphi_j\varphi_k\varphi_h\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^h}{ds}+2\varphi_j\varphi_k a^j\frac{dx^k}{ds}-k\varphi_j\frac{dx^j}{ds}, \tag{5.9}$$

en vertu de (5.1) et de (5.4).

En multipliant (5.8) par $2\dfrac{d^2\bar{s}}{ds^2}\Big/\dfrac{d\bar{s}}{ds}=2\varphi_h\dfrac{dx^h}{ds}$ et en le soustrayant de (5.9) on obtient

$$\frac{d\{\bar{s},s\}}{ds}-\frac{2\{\bar{s},s\}\dfrac{d^2\bar{s}}{ds^2}}{\dfrac{d\bar{s}}{ds}}=-k\varphi_j\frac{dx^j}{ds}\left(=-k\frac{\dfrac{d^2\bar{s}}{ds^2}}{\dfrac{d\bar{s}}{ds}}\right),$$

d'où

$$\frac{(2\{\bar{s},s\}-k)\dfrac{d^2\bar{s}}{ds^2}}{\dfrac{d\bar{s}}{ds}}-\frac{d\{\bar{s},s\}}{ds}=0.$$

Donc, nous avons de (5.7)

$$\frac{d\bar{k}}{ds}=0 \quad \text{d'où} \quad \bar{k}=\text{constante}.$$

Nous avons donc le

Théorème : La transformation projective

$$\bar{\Pi}^i_{jk}=\Pi^i_{jk}+\delta^i_j\varphi_k+\delta^i_k\varphi_j$$

avec le φ_j satisfaisant à

$$\varphi_{j;k}-\varphi_i\Pi^i_{jk}=\varphi_j\varphi_k$$

change la conique affine par rapport à Π^i_{jk} en une conique affine par rapport à $\bar{\Pi}^i_{jk}$.