36. *Charakteristische Eigenschaften des Ellipsoids.*

Von Wilhelm Süss.

Koto Gakko, Kagoshima.

(Rec. Feb. 6, 1926. Comm. by Matsusaburô Fujiwara, M.I.A., Feb. 12, 1926.)

In einer in den Mathematischen Annalen erscheinenden Arbeit beweise ich den

Satz 1: Die Ellipsoide sind die einzigen Eiflächen konstanter Affinbreite.

Unter der Affinbreite in einer Richtung verstehen wir dabei die Affinentfernung[1] eines Punktes A der Eifläche von demjenigen Flächenpunkt B, dessen Tangentenebene zu derjenigen in A parallel ist. Wie hier ein affingeometrisches Analogon der Eiflächen konstanter Breite nur auf eine spezielle Flächenklasse führt, so sollen in der vorliegenden Mitteilung einige ähnliche Vorkommnisse aufgezählt werden, die gleichfalls zur affingeometrischen Kennzeichnung der Ellipsoide dienen.

Zunächst bemerken wir, dass auch bei einer anderen Verallgemeinerung der Breite einer Eifläche Satz 1 bestehen bleibt: Die Punkte einer Eifläche seien zu Paaren mit parallelen Affinnormalen geordnet; wir bezeichnen die Affinentfernung des einen vom andern als „zweite Affinbreite" in der Richtung der Affinnormale der zweiten; dann gilt.

Satz 2: Die Ellipsoide sind die einzigen Eiflächen mit konstanter zweiter Affinbreite.

Für ein solches Punktepaar $\mathfrak{x}$, $\bar{}$ gilt nämlich

$$\mathfrak{y}+\rho(u, v)\ \bar{\mathfrak{y}} = 0, \quad (\bar{\mathfrak{x}}-\mathfrak{x}, X) = \lambda\ (\bar{\mathfrak{x}}-\mathfrak{x}, \bar{\xi}) = c = \text{const.}$$

Für jeden stationären Wert ρ_0 von ρ $(\rho_u = \rho_v = 0)$ ergibt sich hiernach $\xi_0+\bar{\xi}_0 = 0$. Dann aber verifiziert man das Bestehen der Beziehung

$$\bar{\mathfrak{x}}_0-\mathfrak{x}_0 = c\mathfrak{y}_0 = -c\bar{\mathfrak{y}}_0\,;$$

also ist jeder extreme Wert $\rho_0 = 1$, d.h. $\rho = \text{constant} = 1$. Dann aber gilt wiederum überall $\xi+\bar{\xi} = 0$ und wir haben das neue Problem auf Satz 1 zurückgeführt.

---

1) Vergleiche z.B.W. Blaschke: Vorlesungen über Differentialgeometrie II, (Berlin 1923), 110. Wir schliessen uns in den Bezeichnungen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{X}$, ξ, y........ diesem Buche an.

Satz 3: Die Ellipsoide sind die einzigen Eiflächen, für welche die Mittelpunkte der beiden sog. Lie-F_2 in Punkten mit parallelen Tangentenebenen zusammenfallen.

Bedeutet H die mittlere Affinkrümmung, so gilt für den Mittelpunkt $(\mathfrak{y})$ der Lie-F_2 in $(\mathfrak{x})$: $\mathfrak{y} = \mathfrak{x} + H$. Aus den Voraussetzungen errechnet man

$$(*) \quad \left(\frac{1}{H}\right)_u \mathfrak{y} = \left(\frac{1}{\bar{H}}\right)_u \bar{\mathfrak{y}}$$

also ist entweder $H = \text{const.}$, wonach die Eifläche bekanntlich ein Ellipsoid ist, oder es ist

$$\bar{\mathfrak{y}} = 9\,(u,\ v)\ \mathfrak{y}.$$

Dann aber folgt aus $\xi + \bar{\xi} = 0$, dass hierin $q = \text{const.}$ ist, somit wegen der Geschlossenheit der Fläche $q = -1$. Dann muss $\bar{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x} = \frac{2y}{H} = -\frac{2\mathfrak{y}}{\bar{H}}$, also $H = \bar{H}$, somit wegen (*) wieder $H = \text{const.}$ sein, w.z.b.w.

Es sei bemerkt, dass ein zu Satz 3 analoger besteht, wenn wir die Voraussetzung des Parallelismus der Tangentenebenen durch die des Parallelismus der Affinnormalen ersetzen.

Die elementargeometrische Charakterisierung des Ellipsoids sei folgendermassen übertragen: Die Eifläche E besitze eine Sehne s derart, dass in jedem durch s gehenden Schnittovale auf s zwei solche Punkte existieren, dass die Summe der Affinentfernungen dieser Punkte auf s von einem Randpunkte eines Ovals für jedes Schnittoval konstant ist: dann nenne ich E ein Affinellipsoid. Es gilt

Satz 4: Die Affinellipsoide sind mit den Ellipsoiden identisch. Den Beweis erbringe ich a.a.O.

Es sei einer Eifläche $\mathfrak{x}\ (u, v)$ eine zweite ¯ (u, v) zugeordnet derart, dass die beiden Affinnormalen in einander entsprechenden Punkten in die Verbindung der beiden Punkte fallen und die Tangentenebenen einander dort parallel sind:

$$(**) \quad \bar{\xi} = \xi, \quad \bar{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x} = p(u,v)\mathfrak{y} = \bar{p}(u,\ v)\ \bar{\mathfrak{y}},$$

wobei p und $\bar{p}$ gewisse skalare Funktionen bedeuten. Wir können die Fläche $\mathfrak{x}\ (u, v)$ als „spezielle Affinparallelfläche" von $\mathfrak{x}\ (u, v)$ bezeichnen. Dann gilt der

Satz 5: Die einzigen Eiflächen, welche spezielle Affinparallelflächen besitzen, sind die Ellipsoide.

Es folgt durch Differentiation der Definitionsgleichung $p = \text{const.}$ und $\bar{p} = \text{const.}$ Die Punkte $\bar{\mathfrak{x}}$ (u, v) haben dann von $\mathfrak{x}$ (u, v) die konstante Affinentfernung p, woraus folgt, dass die Gaussischen Krümmungen K und $\bar{K}$ durch die Beziehung $p^4 \bar{K} = P^4 K$ miteinander verbunden sind. Nach einem bekannten Satz von Minkowski geht deshalb die Fläche $\bar{\mathfrak{x}}$ aus $\mathfrak{x}$ durch eine Ähnlichkeitstransformation nebst einer Parallelverschiebung hervor. Hieraus schliesst man dann nach (**), dass für die Affinkrümmungsradien $r_1 = r_2$ sein muss, die Fläche also eine Affinsphäre und als Eifläche ein Ellipsoid ist.

Eine zweite Verallgemeinerung der Parallelflächen sei so definiert: Die Flächen $\mathfrak{x}$ (u, v) und $\bar{\mathfrak{x}}$ (u, v) mögen in entsprechenden Punkten (gleicher Parameterwerte u, v) parallele und gleichgerichtete Normalen besitzen, ferner sei die Affinentfernung von $\bar{\mathfrak{x}}$ (u,v) nach $\mathfrak{x}$ (u, v) konstant. Dann gilt

Satz 6: Zwei Eiflächen sind nur dann auf diese zweite Art einander affinparallel, wenn sie beide einander ähnlich und zu einander ähnlich gelegene Ellipsoide sind.

Wie im vorhergehenden Beweis schliesst man, dass $\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{a} + \rho\mathfrak{x}$ mit konstanten $\mathfrak{a}$ und ρ sein muss, und berechnet aus den neuen Definitionsgleichungen $\bar{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x} = p\mathfrak{y}$, worin p der konstante Wert der Affinentfernung $(\bar{\mathfrak{x}} \rightarrow \mathfrak{x})$ ist. Aus beiden Gleichungen folgt wieder $r_1 = r_2$ wie zuvor.

Eine Beweisführung für die genannten Sätze bei n-dimensionalen Ellipsoiden bleibt einer anderen Veröffentlichung vorbehalten.