50. *Sur les Opérations Analytiques des Fonctions.*

Par Motokiti KONDÔ.
L'Institut Mathématique, l'Université Impériale de Hokkaido, Sapporo.
(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., July 12, 1939.)

Grâce au développement récent de la théorie descriptive des ensembles, nous avons su qu'il existe les diverses opérations des ensembles et fonctions dans l'analyse mathématique, et qu'elles joueront dans le futur le rôle important dans la théorie descriptive des ensembles. De la recherche des ensembles projectifs, je suis venu à celle des opérations analytiques des fonctions, et j'ai obtenu quelques résultats sur ces opérations, c'est ce que j'écrirai dans la suite.

1. *Les définitions.* Nous poserons d'abord la définition des opérations analytiques des fonctions.

Définition. Soient R un espace métrique et $\Phi\big(F_n(x)\big)$ une opération des fonctions qui résulte d'une suite $\{F_n(x)\}$ $(n=1, 2, \dots)$ des fonctions réelles de R une fonction réelle de R. Quand la valeur $\Phi\big(F_n(x); x_0\big)$ à chaque point x_0 de R de la fonction obtenue par celle-là est determinée seulement par les valeurs $F_n(x_0)$ $(n=1, 2, \dots)$ au point x_0 des founctions $F_n(x)$ $(n=1, 2, \dots)$, nous dirons que $\Phi\big(F_n(x)\big)$ est une opération analytique définie sur R.

Par exemple, les opérations des fonctions $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, F_n(x)$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, F_n(x)$, $\underset{n}{\text{b. s.}}\, F_n(x)$, $\underset{n}{\text{b. i.}}\, F_n(x)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} F_n(x)$, $\prod\limits_{n=1}^{\infty} F_n(x)$ sont toutes analytiques.

L'opération analytique $\Phi\big(F_n(x)\big)$ est à chaque point x_0 de R une opération des nombres qui résulte de la suite $\{F_n(x_0)\}$ $(n=1, 2, \dots)$ des nombres un nombre réel $\Phi\big(F_n(x); x_0\big)$ et donc nous pouvons définir une opération $\Phi_{x_0}(y_n)$ des nombres de sorte qu'on ait

$$\Phi\big(F_n(x); x_0\big) = \Phi_{x_0}\big(F_n(x_0)\big) .$$

Pour la simplicité, nous désignons dans la suite par $\Phi\big(F_n(x_0)\big)$ la valeur $\Phi\big(F_n(x); x_0\big)$, quand il n'y a pas de confusion possible. Nous avons alors pour tout point x de l'espace R toutjours $\Phi\big(F_n(x)\big) = \Phi_x\big(F_n(x)\big)$. L'opération $\Phi_x\big(F_n(x)\big)$ est appelée l'opération locale au point x de $\Phi\big(F_n(x)\big)$. D'après la définition, une opération analytique des fonctions est determinée complètement par ses opérations locales et quand les opérations $\Phi_x(y_n)$ des nombres qui correspondent au point x de R sont données, il existe précisement une opération analytiques des fonctions dont l'opération locale au point x est $\Phi_x(y_n)$.

Nous pouvons ici distinguer les deux cas, l'un est que l'opération locale $\Phi_x(y_n)$ à un point x ne dépend pas du choix du point x, c'est-à-dire, nous avons toujours $\Phi_{x_1}(y_n) = \Phi_{x_2}(y_n)$ pour les deux points distincts

x_1 et x_2 de R et l'autre est ce qui n'est pas le premier cas. Nous dirons dans le premier cas que $\Phi(F_n(x))$ est homogène et désignons par $\Phi(y_n)$ son opérotion locale.

Remarque. L'idée des opérations analytiques des fonctions vient de celle-ci de M. M. L. Kantorovitch et E. Livenson[1] sur les opérations analytiques des ensembles. Cependant, les opérations analytiques des fonctions correspondent à leurs opérations quasi-analytiques des ensembles et celles homogènes correspondent à leurs opérations analytiques.

2. *La structure des opérations des nombres.* Les opérations analytiques des fonctions sont déterminées complètement par ses opérations locales et les opérations locales sont les opérations des nombres, et donc pour voir la structure des opérations analytiques des fonctions, il suffit de voir celle d'une opération $\Phi(y_n)$ des nombres qui résulte d'une suite $\{y_n\}$ $(n=1, 2, \dots)$ des nombres réels un nombre réel. Or, parmi les opérations des nombres, les opérations arithmétiques et celles topologiques sont fondamentales, celles-ci sont définies comme il suit. Les opérations arithmétiques sont les suivantes;

$1°$, $a+x$; $2°$, $a\times x$; $3°$, x_1+x_2; $4°$, x_1-x_2; $5°$, $x_1\times x_2$; $6°$, $x_1 \pm x_2$,

où a est un nombre constant. Les opérations topologiques $\Phi(y_n)$ sont celles qui remplissent les condition suivantes: 1°, quel que soit la fonction continue $\chi(t)$ croissante monotone et définie sur l'intervalle $-\infty \leqq t \leqq +\infty$, nous avons toujours

$$\chi\big(\Phi(y_n)\big) = \Phi\big(\chi(y_n)\big) .$$

et 2°, $\Phi(y_n)$ est définie sur toute suite $\{y_n\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ des nombres réels.

Par exemple, les opérations des nombres $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$, $\underset{n}{\text{b. s.}}\, y_n$, $\underset{n}{\text{b. i.}}\, y_n$ sont toutes topologiques.

Maintenant, nous considérerons la structure des opérations topologiques des nombres. Pour cela, nous poserons d'abord la définition.

Définition. Soit $\Phi(y_n)$ une opération des nombres définie sur toute suite $\{y_n\}$ $(n=1, 2, \dots)$ des nombres. Quand il existe un ensemble $\mathfrak{N}$ des nombres irrationnels $(n_1, n_2, \dots, n_k, \dots)$ de sorte qu'on ait pour toute suite $\{y_n\}$ $(n=1, 2, \dots)$ des nombres réels

$$\Phi(y_n) = \underset{(n_1, n_2, \dots)\in\mathfrak{N}}{\text{b. s.}} \{\underset{k}{\text{b. i.}}\ y_{n_k}\} ,$$

$\Phi(y_n)$ est appelée une opération de Hausdorff des nombres de la base $\mathfrak{N}$.

Remarque. L'idée de ces opérations des nombres vient de celle des opérations de Hausdorff des ensembles.

Nous avons alors le

Théorème 1. *Pour qu'une opération des nombres soit topologique, il faut et il suffit qu'elle soit celle de Hausdorff.*

Démonstration. D'après la définition, les opérations de Hausdorff

---

1) L. Kantorovitch and E. Livenson, Memoir on the analytical operations and pojective sets, (I), Fund. Math., t. **18** (1932) p. 214-279; (II), ibid., t. **20** (1933) p. 54-97.

des nombres sont topologiques. Puis, nous considérons une opération topologique $\Phi(y_n)$ des nombres. Nous désignons par $\mathfrak{N}$ l'ensemble de tous les nombres irrationnels $(n_1, n_2, \dots)$ qu'il existe une suite $\{y_n^{(0)}\}$ $(n=1, 2, \dots)$ des nombres réels et un nombre réel r tels qu'on ait $y_{n_k}^{(0)} > r$ $(k=1, 2, \dots)$, $y_n^{(0)} \leqq r$ $(n \neq n_k)$ et $\Phi(y_n^{(0)}) > r$. Nous pouvons voir sans peine que l'ensemble $\mathfrak{N}$ n'est pas vide. Maintenant, nous définirons une opération $\Psi(y_n)$ des nombres comme il suit ; étant donnée une suite $\{y_n\}$ $(n=1, 2, \dots)$ des nombres réels, quand il n'existe aucun nombre réel r tel qu'on ait $y_{n_k} > r$, $y_n \leqq r$ $(n \neq n_k)$, $(n_1 n_2, \dots) \in \mathfrak{N}$, nous posons $\Psi(y_n) = -\infty$, et sinon, nous posons

$$\Psi(y_n) = \underset{r}{\text{b. s.}} \{y_{n_k} > r, y_n \leqq r \ (n \neq n_k), \quad (n_1, n_2, \dots) \in \mathfrak{N}\} .$$

Nous avons alors $\Phi(y_n) = \Psi(y_n)$ pour toute suite des nombres. Or, quand $\mathfrak{N}$ contient un nombre irrationnel $(n_1, n_2, \dots)$, $\mathfrak{N}$ contient aussi tout nombre irrationnel $(m_1, m_2, \dots)$ tel que l'ensemble des chiffres $m_k (k=1, 2, \dots)$ contient tous les chiffres $n_k (k=1, 2, \dots)$ et par suite, l'opération $\Psi(y_n)$ des nombres peut être écrite sous la forme suivante

$$\Psi(y_n) = \underset{r}{\text{b. s.}} \{y_{n_k} > r \ (k=1, 2, \dots) , \quad (n_1, n_2, \dots) \in \mathfrak{N}\} .$$

Par conséquent, l'operation $\Psi(y_n) = \Phi(y_n)$ est de Hausdorff.

C. Q. F. D.

En vertu des définitions des opérations arithmétiques et des opérations topologiques, nous avons le théorème sur la structure des opérations des nombres.

Théorème 2. *Quelle que soit l'opération $\Phi(y_n)$ des nombres réels, il existe une opération $\Phi^*(y_n)$ des nombres réels qui remplit les conditions suivantes : 1°, l'opération $\Phi^*(y_n)$ est definie sur toute suite des nombres réels ; 2°, nous avons toujours $\Phi(y_n) = \Phi^*(y_n)$ sur toute suite des nombres réels sur laquelle l'opération $\Phi(y_n)$ est définie ; 3°, l'opération $\Phi(y_n)$ est obtenue en appliquant itérativement les opérations arithmétiques et les opérations topologiques sur les nombres y_n $(n=1, 2, \dots)$.*

Démonstration. Etant donnée une opération $\Phi(y_n)$ des nombres, nous définirons l'opération $\Phi^*(y_n)$ des nombres comme il suit. 1° $\Phi^*(y_n) = \Phi(y_n)$ pour toute suite $\{y_n\}$ $(n=1, 2, \dots)$ des nombres réels sur laquelle l'opération $\Phi(y_n)$ est définie ; 2°, $\Phi^*(y_n) = 0$ pour toute autre suite $\{y_n\}$ $(n=1, 2, \dots)$ des nombres réels. L'opération $\Phi^*(y_n)$ est alors une fonction définie sur l'ensemble $\mathfrak{R}$ de toutes les suites $\{y_n\}$ $(n=1, 2, \dots)$ des nombres réels. Or, toute fonction définie sur l'ensemble $\mathfrak{R}$ est obtenue en appliquant itérativement les opérations arithmétiques et les opérations topologiques sur les fonctions charactéristiques des sous-ensembles de l'ensemble $\mathfrak{R}$, et celles-ci sont aussi obtenues en applliquant itérativement les deux sortes de ces opérations sur les nombres réels y_n $(n=1, 2, \dots)$. Par conséquent, $\Phi^*(y_n)$ en-soi jouit de la même propriété.

C. Q. F .D.

3. *La structure des opérations analytiques des fonctions.* Nous posons d'abord quelques définitions sur les opérations analytiques des

fonctions. Nous entendrons par les opérations arithmétiques des fonctions definies sur un espace R les opérations analytiques suivantes;

$$1°,\ A(x)+F(x)\,;\quad 2°,\ A(x)\times F(x)\,;\quad 3°,\ F_1(x)+F_2(x)\,;$$
$$4°,\ F_1(x)-F_2(x)\,;\quad 5°,\ F_1(x)\times F_2(x)\,;\quad 6°,\ F_1(x)\div F_2(x)\,,$$

où $A(x)$ désigne une fonction fixée et définie sur R. De même, nous entendrons par les opérations topologiques des fonctions définies sur R les opérations analytiques dont toutes les opérations locales sont topologiques. Nous pouvons alors voir d'après le théorème 2 le

Théorème 3. *Soient R un espace métrique et $\Phi\big(F_n(x)\big)$ une opération analytique des fonctions définies sur R telle que ses opérations locales soient définies sur toutes les suites des nombres réels. L'opération $\Phi\big(F_n(x)\big)$ est obtenue alors en appliquant itérativement les opérations arithmétiques et les opérations topologiques sur les fonctions $F_n(x)$ $(n=1, 2, \dots)$.*

4. *La représentation des opérations analytiques des fonctions.* Étant donné un espace métrique J compact et indénombrable, nous considérons la famille $[J]$ de tous les sous-ensembles fermés de celui-là. Nous définirons la distance entre deux ensembles de la famille $[J]$ comme il suit, quand les deux ensembles E et F de la famille $[J]$ sont non-vides en même temps, nous posons d'après la définition de M. F. Hausdorff

$$\operatorname{dis}(E, F)= \underset{x\in E,\ y\in F}{\text{b. s.}} \{\operatorname{dis}(x, F)+\operatorname{dis}(E, y)\}\,,$$

et sinon, nous posons die $(E, F)=1$ ou 0 suivant qu'on a $E \neq F$ ou $E=F$. La famille $[J]$ est alors aussi un espace métrique compact. Puis, étant donné un espace métrique R, nous prenons une fonction θ définie sur l'espace produit $R\times[J]$. Pour un sous-ensemble fermé E de l'espace produit $R\times J$, nous désignons par $E^{(x)}$, où x est un point R, l'ensemble de tous les points de E dont les projections sur R sont précisement le point x. L'ensemble $E^{(x)}$ est alors fermé dans l'ensemble $(x)\times J$, et donc nous pouvons correspondre à x un nombre réel $\theta(E^{(x)})$, d'où nous avons une fonction définie sur l'espace R. Nous appelons E un crible fermé des fonctions, θ la base de crible, et la fonction ainsi obtenue celle criblée par rapport au crible fermé E de la base θ et nous désignons cette fonction par une des suivantes;

$$\Gamma(\theta, R, J; E)\,,\quad \Gamma(\theta, R; E),\quad \Gamma(\theta; E)\,.$$

Enfin, nous désignons par $\Gamma(\theta, R)$ la famille de toutes les fonctions criblées $\Gamma(\theta, E)$ obtenues lorsque E parcourt tous les sous-ensembles fermés de l'espace $R\times J$.

Soit $\Phi\big(F_n(x)\big)$ une opération analytique des fonctions définie sur l'espace R de sorte que toutes ses opérations locales sont définies sur toutes suites des nombres réels. En désignant par $\mathfrak{S}(R)$ $\big($et $\mathfrak{J}(R)\big)$ la famille de toutes les fonctions continues supérieurement (et inférieurement) sur R, nous désignons par $\Phi\big(\mathfrak{S}(R)\big)$ $\Big($et $\Phi\big(\mathfrak{J}(R)\big)\Big)$ la famille de toutes les fonctions $\Phi\big(F_n(x)\big)$ obtenues lorsque $F_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ parcourent toutes les fonctions de la famille $\mathfrak{S}(R)$ $\big($et $\mathfrak{J}(R)\big)$.

Nous avons alors un théorème sur la représentation des opérations analytiques des fonctions.

Théorème 4. *Soient R un espace métrique, J un espace métrique compact indénombrable et $\Phi\big(F_n(x)\big)$ une opération analytique des fonctions définie sur R telle que toutes ses opérations locales sont définies sur toutes suites des nombres réels. Il exists une base θ d'un crible fermé définie sur l'espace $R\times[J]$ telle qu'on ait*

$$\Gamma(\theta, R)=\Phi\big(\mathfrak{S}(R)\big) \ \Big(\text{ou } \Phi\big(\mathfrak{J}(R)\big)\Big).$$

Inversement, étant donnée une base θ d'un crible fermé des fonctions définie sur l'espace $R\times[J]$, il existe une opération analytique $\Phi\big(F_n(x)\big)$ des fonctions telle qu'on ait $\Gamma(\theta, R)=\Phi\big(\mathfrak{S}(R)\big)$ $\Big($ou $\Phi\big(\mathfrak{J}(R)\big)\Big)$.

5. *Les opérations analytiques des ensembles.* Enfin, nous ajouterons les quelques remarques sur les opérations analytiques des ensembles.[1] En faisant correspondre la définition des opérations analytiques des fonctions, nous modifirons celle des opérations analytiques des ensembles. Soient R un espace métrique et $\Phi\big(F_n(x)\big)$ une opération analytique des fonctions définie sur R telle qu'elle prend seulement les deux nombres réels 0 et 1 comme ses valeurs. Étant donnée une suite $\{E_n\}$ $(n=1, 2,\ldots)$ des sous-ensembles de R, nous considérons les fonctions caractéristiques $\chi_{E_n}(x)$ des ensembles E_n. Quand l'opération $\Phi\big(F_n(x)\big)$ est definie sur la suite $\{\chi_{E_n}(x)\}$ $(n=1,2,\ldots)$ des fonctions, la fonction $\Phi\big(\chi_{E_n}(x)\big)$ est alors celle caractéristique d'un sous-ensemble de R et donc nous avons une opération des ensembles qui résulte d'une suite $\{E_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$ des sous-ensembles de R un sous-ensemble de R dont la fonction caractéristique est précisement $\Phi\big(\chi_{E_n}(x)\big)$. Nous appelons celle-ci une opération analytique des ensembles. En particulier, quand l'opération $\Phi\big(F_n(x)\big)$ est homogène (ou topologique), nous dirons que l'opération analytique ainsi obtenue des ensembles est aussi homogène (ou topologique). Nous avons alors, d'après le théorème 3, un théorème sur la structure des opérations analytiques des ensembles. Pour cela, nous posons d'abord une définition. Nous entendrons par l'opération complémentaire sur R une opération analytique des ensembles qui résulte d'un sous-ensemble de R son complémentaire.

---

1) L. Kantorovitch et E. Livenson, loc. cit., M. Kondô, Sur les opérations analytiques dans la théorie des ensembles et quelques problèmes qui s'y rattachent, I. Jour. of the Fac. of Sc. Hokkaido Imp. Univ., Ser. I, t. 7 (1938) p. 1–34.

Nous avons alors

Théorème 5. *Soient R un espace métrique, et $\Phi(E_n)$ une opération analytique des ensembles définie sur toute suite des sous-ensembles de R. L'opération $\Phi(E_n)$ est obtenue en appliquant itérativement l'opération complementaire et les opérations topologiques des ensembles sur les ensembles E_n $(n=1, 2, \dots)$.*

6. *La représentation des opérations analytiques des ensembles.* Étant donné un espace métrique J compact et indénombrable, nous prenons un sous-ensemble $\mathfrak{R}$ de l'espace produit $R\times[J]$. Pour un sous-ensemble fermé E de l'espace $R\times J$, nous pouvons définir un sous-ensemble de tous les points x de R tel qu'on ait $E^{(x)}\in\mathfrak{R}$. Nous appelons E un crible fermé des ensembles, $\mathfrak{R}$ la base de celui-là, et l'ensemble ainsi obtenu celui criblé par rapport au crible fermé E de la base $\mathfrak{R}$, et nous désignons cet ensemble par une des suivantes;

$$\Gamma(\mathfrak{R}, R, J; E), \quad \Gamma(\mathfrak{R}, R; E) \text{ ou } \Gamma(\mathfrak{R}; E).$$

Nous désignons encore $\Gamma(\mathfrak{R}, R)$ la famille de tous les ensembles criblés $\Gamma(\mathfrak{R}; E)$ obtenus en parcourant E tous les sous-ensembles fermés de $R\times J$.

Soit $\Phi(E_n)$ une opération analytique des ensembles définie sur toute suite des sous-ensembles de R. En désignant par $\mathfrak{F}(R)$ $\big($ou $\mathfrak{G}(R)\big)$ la famille de tous les sous-ensembles fermés (ou ouverts) de R, nous désignons par $\Phi\big(\mathfrak{F}(R)\big)$ $\Big($ou $\Phi\big(\mathfrak{G}(R)\big)\Big)$ la famille de tous les ensembles $\Phi(E_n)$ obtenus en parcourant E_n $(n=1, 2, \dots)$ tous les ensembles de la famille $\mathfrak{F}(R)$ $\big($ou $\mathfrak{G}(R)\big)$.

Nous avons alors d'après le théorème 4 le

Théorème 6. *Soient R un espace métrique, J un espace métrique compact indénombrable, et $\Phi(E_n)$ une opération analytique des ensembles définie sur toute suite des sous-ensembles de R. Il existe une base $\mathfrak{R}$ d'un crible fermé définie sur $R\times[J]$ telle qu'on ait $\Phi\big(\mathfrak{F}(R)\big)$ $\Big($ou $\Phi\big(\mathfrak{G}(R)\big)\Big)=\Gamma(\mathfrak{R}, R)$.*

Inversement, étant donnée une base $\mathfrak{R}$ d'un crible fermé des ensembles définie sur $R\times[J]$, il existe une opération analytique $\Phi(E_n)$ des ensembles telle qu'on ait $\Gamma(\mathfrak{R}, R)=\Phi\big(\mathfrak{F}(R)\big)$ $\Big($ou $\Phi\big(\mathfrak{G}(R)\big)\Big)$.

7. *Une relation entre les opérations analytiques des ensembles et celles des fonctions.* Étant donné un ensemble M des nombres réels, nous désignons par $\mathrm{Ens}\Big(\Phi\big(\mathfrak{S}(R)\big)\in M\Big)$ $\Big($ou $\mathrm{Ens}\Big(\Phi\big(\mathfrak{J}(R)\big)\in M\Big)\Big)$ la famille de tous les sous-ensembles $\mathrm{Ens}\big(F(x)\in M\big)$ obtenus lorsque $F(x)$ parcourt toutes les fonctions de la famille $\Phi\big(\mathfrak{S}(R)\big)$ $\Big($ou $\Phi\big(\mathfrak{J}(R)\big)\Big)$. Nous avons alors d'après les théorèmes 4 et 6 une relation entre les opérations analytiques des ensembles et fonctions, c'est-à-dire

Théorème 7. *Soient R un espace métrique, $\Phi\big(F_n(x)\big)$ une opération analytique des fonctions définie sur R dont toutes les opération locales sont définies sur toutes suite des nombres réels, et M un ensemble des nombres réels. Il existe une opération analytique $\Phi(E_n)$ des ensembles telle qu'on ait* $Ens\left(\Phi\big(\mathfrak{S}(R)\big) \in M\right)$ $\left(ou\ Ens\Big(\Phi\big(\mathfrak{F}(R)\big) \in M\Big)\right)$ $=\Phi\big(\mathfrak{F}(R)\big)$ $\left(ou\ \Phi\big(\mathfrak{G}(R)\big)\right)$.