

HOMOGENE KOMPAKTE PROJEKTIVE EBENEN

HELMUT SALZMANN

For a compact connected topological projective plane \mathcal{P} , the following is shown: In the compact-open topology, the automorphism group Σ of \mathcal{P} is a locally compact transformation group with countable basis. If Σ is transitive on incident point-line pairs, or if $\dim \mathcal{P} \leq 16$ and Σ is point transitive, then \mathcal{P} is isomorphic to one of the four classical planes over an associative or alternative division ring.

Die Theorie der topologischen projektiven Ebenen mit kompakter zusammenhängender Punktmenge P hat für $d = \dim P \leq 4$ einen gewissen Abschluß erreicht. Insbesondere gilt: Die Geraden sind ein- oder zweidimensionale Sphären, und P ist homöomorph zur projektiven Ebene über dem Körper \mathbf{R} oder \mathbf{C} . Abgeschlossene Unterebenen sind wieder zusammenhängend. Die volle Kollineationsgruppe Γ ist in der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz eine höchstens $4d$ -dimensionale Liegruppe. Die stetigen Kollineationen (= Automorphismen) bilden eine separable offene Untergruppe von Γ , im Fall $d = 2$ ist jede Kollineation stetig. Eine separable punkttransitive Gruppe von Kollineationen enthält eine kompakte, einfache, fahnen-transitive Untergruppe. Aus der Existenz einer solchen Gruppe oder aus $\dim \Gamma > 2d$ folgt die Gültigkeit des Satzes von Desargues. Der Fall $\dim \Gamma = 2d = 8$ kommt nur bei Translationsebenen vor, die von Betten [3–6] im einzelnen beschrieben wurden. Für $d = 2$ sind alle Ebenen mit $\dim \Gamma \geq 3$ bekannt, die Moulton-Ebenen sind dabei durch $\dim \Gamma = 4$ gekennzeichnet, vergleiche [27], sowie [28; 30].

Im folgenden werden ähnliche Untersuchungen bei $d > 4$ begonnen. Bisher kennt man hier außer einigen Beispielen [21; 22] im wesentlichen nur Aussagen, die sich aus der Bestimmung aller lokal kompakten, zusammenhängenden Alternativ-Körper [24; 25] oder Fastkörper [12; 34] ergeben. $\mathcal{P} = (P, \mathcal{L}, \mathcal{F})$ bezeichne stets eine projektive Ebene mit dem Geradenraum \mathcal{L} und dem Fahnenraum $\mathcal{F} = \{(p, L) \in P \times \mathcal{L}; p \in L\}$. Die Frage, ob die Geraden (als Teilmengen von P) im allgemeinen wie bei $d \leq 4$ lokal euklidisch, d. h. topologische Mannigfaltigkeiten sein müssen, scheint mit den jetzigen Mitteln schwer angreifbar zu sein, und zwar auch dann, wenn P selbst eine Mannigfaltigkeit ist. Nach [27, §7] ist \mathcal{P} genau dann eine topologische Ebene mit lokal euklidischen Geraden, wenn sich \mathcal{P} über einem zu $\mathbf{R}^{d/2}$ homöomorphen topologischen Ternärkörper K darstellen läßt. Aus

einem Satz von Adams [1; 11, p. 201] folgt dann $d = 2^n$ mit $n \leq 4$. Breitsprecher [7] hat in diesen Fällen die Kohomologie-Ringe $H^*(P)$ und $H^*(\mathcal{P})$ berechnet und gefolgert, daß jede stetige Kollineation einen Fixpunkt und eine Fixgerade haben muß. Aber auch, wenn man nicht weiß, ob die Geraden Mannigfaltigkeiten sind, lassen sich einige Aussagen über das Homologieverhalten in \mathcal{P} machen. Für $L \in \mathfrak{U}$ und $q \leq 2$ gilt im Fall $d > 4$ für die Homotopiegruppen insbesondere

$$(0) \quad \pi_q(L) = \pi_q(P \setminus p) = \pi_q(P) = \pi_q(\mathcal{P}) = 0.$$

Entscheidend für alles weitere ist der folgende Satz, dessen Beweisidee ich Herrn Rainer Löwen verdanke:

(*) *Die volle Automorphismengruppe $\Sigma_{\mathcal{P}}$ einer kompakten, zusammenhängenden projektiven Ebene ist eine lokal kompakte topologische Transformationsgruppe mit abzählbarer Basis.*

Als Hauptergebnis wird hier gezeigt:

(I) *Eine transitive Automorphismengruppe einer höchstens 16-dimensionalen kompakten, zusammenhängenden projektiven Ebene \mathcal{P} enthält eine kompakte, fahnentransitive Untergruppe.*

(II) *Hat \mathcal{P} endliche Dimension, und ist $\Sigma_{\mathcal{P}}$ fahnentransitiv, so ist \mathcal{P} eine Moufang-Ebene, also isomorph zur Ebene über einem der 3 klassischen Körper oder den Oktaven.*

Auch wenn die Geraden lokal euklidisch sind, fehlen im Fall $d > 4$ eine Reihe von Hilfsmitteln, die sich bei den kleineren Dimensionen aus den besonderen topologischen Eigenschaften von \mathbf{R} und \mathbf{R}^2 ergeben. So folgt etwa aus dem in höheren Dimensionen nicht mehr gültigen Brouwerschen ebenen Translationssatz, daß es keine endlichen Unterebenen gibt, und weiter, daß geeignete Punktequintupel überall dichte Unterebenen erzeugen. Es ist ungeklärt, ob in projektiven Ebenen der Dimension $d > 4$ endliche oder kompakte nulldimensionale Unterebenen vorkommen können. In den niedrigeren Dimensionen kommt einem außerdem zugute, daß man über Transformationsgruppen auf Flächen sehr viel genauer Bescheid weiß, als bei höheren Dimensionen.

Weitere Bezeichnungen: Ist $e = (a, 0, \infty, e)$ ein Viereck, $L = 0 \cup \infty$ die "uneigentliche" Gerade, $K = L \setminus \{\infty\}$ der zugehörige Koordinatenbereich, so werden die Geraden der affinen Ebene $\mathcal{P} \setminus L$ durch Gleichungen $x = r$ oder $y = \tau(s, x, t)$ gegeben, und man hat $a = (0, 0)$, $e = (1, 1)$ und

$$\tau(0, x, t) = \tau(s, 0, t) = t, \quad \tau(1, x, 0) = \tau(x, 1, 0) = x.$$

Ferner setzt man

$$x \oplus t = \tau(l, x, t) \quad \text{und} \quad s \circ x = \tau(s, x, 0).$$

Näheres siehe [20; 27]. Das Geradenbüschel $\{L \in \mathcal{L}; a \in L\}$ wird mit $[a]$ bezeichnet. $\phi_{[a]}$ ist die Untergruppe derjenigen Kollineationen aus ϕ , die $[a]$ elementweise festlassen; dual bedeutet $\phi_{[L]}$ die Untergruppe der axialen Kollineationen mit der Achse L . An gruppentheoretischen Bezeichnungen wird $\langle \alpha \rangle$ für die von α erzeugte zyklische Gruppe verwendet, $\alpha \circ \beta = \alpha^{-1} \alpha^\beta = \alpha^{-1} \beta^{-1} \alpha \beta$, der Zentralisator von α ist $Z_{S_\phi}(\alpha) = \{\varphi \in \phi; \alpha\varphi = \varphi\alpha\}$. Weiter bedeutet $Z(\phi)$ das Zentrum, $\tilde{\phi}$ die einfach zusammenhängende Überlagerungsgruppe von ϕ und $\tilde{\phi} : \Xi$ den Restklassenraum. $SO(n)$ und $Spin(n) = SO(n)$ sind die reellen kompakten Formen der speziellen orthogonalen Gruppen, $SU(n, \mathbb{C})$ und $U(n, \mathbb{H})$ die kompakten speziellen unitären Gruppen über den komplexen Zahlen und den Quaternionen. Wie üblich werden die zugehörigen projektiven Formen (die Zentrumsfaktorgruppen) durch ein vorgesetztes P bezeichnet. \bar{A} ist die topologisch abgeschlossene Hülle von A . Schließlich steht $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ und S_n für die ganzen Zahlen, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, die reellen und komplexen Zahlen, Quaternionen, Oktaeden und die n -Sphäre.

1. Topologische Eigenschaften. Da jede höchstens 4-dimensionale kompakte, zusammenhängende projektive Ebene zur reellen oder komplexen Ebene homöomorph ist, betrachten wir jetzt nur kompakte Ebenen mit $d = \dim P > 4$, das sind Ebenen, die sich über einem lokal kompakten topologischen Ternärkörper K mit $\dim K > 2$ darstellen lassen [31].

(1) Für $p \notin L \in \mathcal{L}$ ist $\rho = (x \mapsto (p \cup x) \cap L) : P \setminus p \rightarrow L$ eine lokal triviale Faserung mit Faser K , und K ist ein lokal und global bogenweise zusammenhängender in sich zusammenziehbarer Raum von abzählbarer Basis. L ist homöomorph zur Einpunkt-Kompaktifizierung von K und besitzt eine 3-fach transitive Homöomorphismengruppe [27, 7.11, 16].

Die Exaktheit der zu ρ gehörigen Homotopie-Sequenz liefert

$$(2) \quad \pi_q(P \setminus p) \cong \pi_q(L) \quad \text{für alle } q.$$

In $L \setminus c$ sind je zwei Kurven von a nach b homotop (bei festgehaltenen Endpunkten). Daher ist jede stetige Abbildung $\alpha : S_1 \rightarrow L$ homotop zu einer stückweise injektiven Abbildung, die wegen $\dim K \neq 1$ nicht

surjektiv sein kann. Ähnliches gilt für P , und unter Beachtung der Exaktheit der zur Faserung $\mathcal{F} \rightarrow P$ gehörigen Homotopie-Sequenz folgt

$$(3) \quad \pi_1(L) = \pi_1(P \setminus p) = \pi_1(P) = \tau_1(\mathcal{F}) = 0.$$

Da die Fundamentalgruppe der topologischen Loop $K^\times = K \setminus 0$ kommutativ ist, ergibt sich aus der Mayer-Vietoris-Sequenz von $\{L \setminus 0, L \setminus \infty\}$ und dem Hurewiczschen Isomorphiesatz [33]

$$(4) \quad \pi_2(L) \cong H_2(L) \cong H_1(K \setminus 0) \cong \pi_1(K^\times).$$

Zur Berechnung von $\pi_1(K^\times)$ kann man sich nach dem vorher bemerkten unter Verwendung eines Kompaktheitsschlusses auf (stückweise) injektive Abbildungen $\varphi: S_1 \rightarrow K^\times \setminus 1$ beschränken. Durch $x \circ x^\gamma = 1$ wird ein Homöomorphismus γ von K^\times definiert. Es sei $C = S_1^\gamma$. Wegen $\dim K > 2$ ist dann $L \setminus C$ zusammenhängend; wäre nämlich $K \cup \{\infty\} = L = U \cup C \cup V$ eine disjunkte Vereinigung mit offenen U, V und etwa $0 \in U, \infty \in V$, so wäre $\text{rd } U \subseteq C$ höchstens eindimensional, und wegen der Zusammenziehbarkeit von K gäbe es eine Basis aus zu U homöomorphen Umgebungen, ein Widerspruch. Es gibt also eine Kurve $\delta: [0, 1] \rightarrow K \setminus C$ mit $\delta_0 = 0$ und $\delta_1 = 1$. Durch $(s, t) \mapsto \varphi_s \circ \delta_t$ wird dann eine 0-Homotopie von φ in $K \setminus 1$ gegeben. Nach Vertauschen von 0 und 1 erhält man

$$(5) \quad \pi_1(K^\times) = \pi_2(L) = 0.$$

Aus der Mayer-Vietoris-Sequenz und der Exaktheit der Homotopie-Sequenz zur Faserung $\mathcal{F} \rightarrow P$ folgt nun

$$(6) \quad \pi_2(P) \cong H_2(P) \cong H_1(P \setminus L \setminus p) = 0 = \pi_2(\mathcal{F}).$$

Bei lokal euklidischen Geraden kommen als Dimensionen $d > 4$ nur 8 und 16 vor; im allgemeinen ist aber zunächst jede Dimension denkbar. Da die affine Ebene homöomorph zu $K \times K$ ist und der Dimensionsdefekt bei Produktbildung eines Raumes mit sich selbst höchstens 1 beträgt [9], hat man

$$(7) \quad d \leq 2\dim L \leq d + 1 \quad \text{für } L \in \mathcal{L}.$$

Die Fixpunkteigenschaft von P ist nur bekannt, wenn die Geraden Mannigfaltigkeiten sind [7]. Für viele Anwendungen genügt es aber, etwas über die Fixstruktur \mathcal{F}_β einer Involution $\beta \in \Sigma$ zu wissen. Ist $x \neq x^\beta$, so ist $x \cup x^\beta$ Fixgerade. Daher besteht die Fixpunktmenge entweder aus den Punkten einer Geraden (der Achse) und höchstens

einem weiteren Punkt, oder \mathcal{F}_β ist eine nicht ausgeartete abgeschlossene sogenannte Baer-Unterebene [2; 29], d. h. eine Unterebene (B, \mathfrak{B}) , die jede Gerade trifft, und für die dual jeder Punkt aus P auf einer Geraden aus \mathfrak{B} liegt.

(8) *Ist β eine axiale Involution, so liegt das Zentrum von β nicht auf der Achse C , d.h. β ist eine Spiegelung.*

Die affine Ebene $A = P \setminus C$ ist nämlich homöomorph zu $K \times K$ und damit in sich zusammenziehbar, insbesondere azyklisch. Nach einem Satz von Smith [32] gibt es daher in A keinen fixpunktfreien Homöomorphismus von Primzahlpotenzordnung, und β kann keine Translation sein.

(9) *Ist (B, \mathfrak{B}) eine abgeschlossene Baer-Unterebene von \mathcal{P} , so ist die Abbildung $(L \mapsto L \cap B): \mathcal{L} \setminus \mathfrak{B} \rightarrow B$ stetig, und der Koordinatenbereich K von \mathcal{P} ist homöomorph zu einer affinen Unterebene von B .*

Beweis. Für $L_n \rightarrow L \notin \mathfrak{B}$ häufen sich die Punkte $L_n \cap B$ genau gegen $L \cap B$. Ist nun $z \notin B$ und $z \in C \in \mathfrak{B}$, so induziert $(p \mapsto p \cup z)$ einen Homöomorphismus von $B \setminus C$ auf das zu K homöomorphe Bündel $\{L \in \mathcal{L}; z \in L \neq C\}$.

Eine bemerkenswerte Folgerung ist

(10) *Besitzt die höchstens 8-dimensionale Ebene \mathcal{P} eine Baer-Unterebene, so sind die Geraden von \mathcal{P} lokal euklidisch, also homöomorph zu S_1 .*

Der letzte Teil des Beweises von (9) zeigt außerdem

(11) *Die Dimension einer echten abgeschlossenen Unterebene von \mathcal{P} ist stets höchstens gleich der Dimension einer Geraden $L \in \mathcal{L}$.*

2. Kollineationsgruppen. Es sei ρ irgendeine feste Metrik auf dem Punktraum P . Gemäß [28, 1.8] kann man etwa voraussetzen, daß jede Gerade bezüglich ρ den Durchmesser 1 hat. Die kompakt-offene Topologie der Automorphismengruppe Σ läßt sich dann durch die Supremumsmetrik

$$\rho(\alpha, \beta) = \sup_{x \in P} \rho(x^\alpha, x^\beta)$$

beschreiben. Um zu zeigen, daß $\psi_\epsilon = \{\sigma \in \Sigma; \rho(1, \sigma) \leq \epsilon\}$ für hinreichend kleine positive ϵ kompakt ist, genügt nach dem Satz von

Arzela-Ascoli [8, XII, 6.4] der Nachweis der gleichgradigen Stetigkeit der $\sigma \in \psi_\epsilon$. Dazu sei e ein festes Bezugsviereck und (K, τ) der zugehörige Ternärkörper. Man kann annehmen, daß alle Punktequadrupel in einer 4ϵ -Umgebung von e nicht ausgeartete Vierecke sind. Wäre ψ_ϵ nicht gleichgradig stetig, so gäbe es eine Punktfolge $p_n \rightarrow p_0$ und $\sigma_n \in \psi_\epsilon$ mit $p_{\sigma_n} \rightarrow p$ und $p_{\sigma_n} \rightarrow q \neq p$; durch Projektion auf die Koordinatengerade erhält man dann eine Folge von $a_n \in K$ mit

$$a_n \rightarrow 0, \quad 0^{\sigma_n} \rightarrow 0' \quad \text{und} \quad a_n^{\sigma_n} \rightarrow a' \neq 0'.$$

Bei Beschränkung auf eine geeignete Teilfolge kann man außerdem erreichen, daß die σ_n auf einer abzählbaren dichten Teilmenge konvergieren, die das Viereck e enthält. Dann gilt

(a) die Menge E aller Punkte, auf denen die Folge σ_n konvergiert, ist eine Unterebene von P , und $\lambda = (x \mapsto \lim_n x^{\sigma_n})$ ist eine injektive Kollineation von E auf eine in sich dichte Unterebene.

Ist nämlich (K', τ') der zu dem Viereck e^λ gehörige Ternärkörper und $A = \{a \in K; a^\lambda \in K'\}$, so hat man zunächst

(b) $\tau(a, b, c)^\lambda = \tau'(a^\lambda, b^\lambda, c^\lambda)$ für alle $a, b, c \in A$, und

(c) A ist eine additive Unterloop von K .

Aus $x \in E \cap K$ und $\rho(0, x) < \epsilon$ folgt wegen $\rho(1, \sigma_n) \leq \epsilon$ nun $\rho(0', x^\lambda) < 3\epsilon$, also $x^\lambda \neq \infty'$ und $x \in A$. Die Unterloop \bar{A} enthält daher eine volle Umgebung von 0 in K , ist also offen und damit auch abgeschlossen. Weil K zusammenhängend ist, erhält man

(d) A ist überall dicht in K .

Ist $0' \neq a \in A$, so gibt es ein $b \in A$ mit $a \circ b = c$ nahe bei 1 . Die c^{σ_n} häufen sich dann bei einem von $0'$ verschiedenen Element, und es gilt

$b^{\sigma_n} \rightarrow b^\lambda \neq \infty'$. Darum können sich die a^{σ_n} nicht bei $0'$ häufen, und

$a^\lambda \neq 0'$. Mit (c) folgt daraus die Injektivität von λ . Dann ist A aber auch gegenüber den Umkehrungen von τ abgeschlossen, also ein Unterternärkörper, und E ist die zugehörige projektive Ebene. Als unendliche Unterebene ist die Bildebene E^λ nicht diskret; wegen der Homogenität ist also jeder Punkt von E^λ Häufungselement der übrigen Punkte, und (a) ist bestätigt. Die vorher gemachte Annahme läßt sich nun auf einen Widerspruch führen: Es gibt in A ein Element $c \neq 0$, so daß das durch $a' \circ b' = c^\lambda$ bestimmte Element b' außerhalb einer 3ϵ -Umgebung von ∞' liegt. Definiert man jetzt b_n durch $a_n \circ b_n = c$, so konvergieren die b_n einerseits gegen ∞ , andererseits folgt

$b_n^{\sigma_n} \rightarrow b'$. Dies verstößt aber gegen $\rho(1, \sigma_n) \leq \epsilon$. Der Abschluß $\bar{\psi}_\epsilon$ im

Raum der stetigen Abbildungen von P ist also kompakt. Jedes $\sigma \in \bar{\psi}_e$ erhält die Kollinearität und bildet daher P homomorph auf eine nicht ausgeartete Unterebene ab. Da $\{x \in K; x^\sigma \neq \infty^\sigma\}$ eine offene Unterloop von K^\oplus ist, folgt die Injektivität von σ und weiter $\sigma \in \Sigma$, $\sigma \in \psi_e$. Die Existenz einer abzählbaren Basis von Σ ergibt sich unmittelbar aus [8, XII 5.2]. Damit ist (*) vollständig bewiesen.

Im Fall $d \leq 4$ konnte man mit Hilfe der besonderen topologischen Eigenschaften von \mathbf{R}^2 zeigen, daß Σ sogar eine Liegruppe ist; bei $d > 4$ gelingt dies wenigstens für transitive Gruppen:

(1) *Ist $\dim P < \infty$ und hat Σ eine offene Bahn a^Σ in P , so ist Σ eine Liegruppe und P eine Mannigfaltigkeit.*

Beweis. Nach dem Approximationssatz lokal kompakter Gruppen durch Liegruppen [13; 19, 172–177] hat Σ eine offene Untergruppe ψ , die projektiver Limes von Liegruppen ist. Da die Wirkung $(\sigma \mapsto a^\sigma)$ offen ist [10], hat auch ψ eine offene, also lokal kompakte und lokal zusammenhängende Bahn M endlicher Dimension. ψ ist effektiv auf M , denn jeder Punkt ist Schnittpunkt von Geraden, die M treffen. Nach [19, p. 243] ist nun ψ und damit auch Σ eine Liegruppe. Bahnen von Liegruppen sind aber Mannigfaltigkeiten, vergl. etwa [25, Satz 66]. Sehr nützlich ist das folgende Ergebnis von Montgomery [17]:

(2) *Operiert eine Liegruppe Σ transitiv auf einer kompakten, zusammenhängenden Mannigfaltigkeit mit endlicher Fundamentalgruppe, so enthält Σ eine kompakte, zusammenhängende, transitive Untergruppe ϕ .*

Zur Abschätzung der Dimension dient der folgende Satz [16]

(3) *Es sei ϕ eine kompakte, endlich-dimensionale, effektive Transformationsgruppe eines lokal kompakten, zusammenhängenden, n -dimensionalen Raumes X mit abzählbarer Basis. Dann gilt*

(a) *Gibt es einen Punkt a mit $\dim a^\phi = n$, so ist ϕ transitiv auf X .*

(b) *Ist ϕ transitiv, so ist $\dim \phi \cong \binom{n+1}{2}$.*

Von nun an sei ϕ stets eine kompakte, zusammenhängende, transitive Automorphismengruppe von \mathcal{P} und ϕ_a die Standuntergruppe auf einem Punkt. Aus der exakten Homotopie-Sequenz für die Wirkung von ϕ auf P erhält man

(4) *ϕ_a ist zusammenhängend und $\pi_1(\phi_a) \cong \pi_1(\phi)$.*

Da ϕ wegen der Bemerkung vor §1 (8) keine zentrale Involution enthalten kann, aber jede Involution in einer Standuntergruppe liegt, folgt $\dim Z(\phi) = 0$, $\phi_a \neq 1$, und mittels der Endlichkeit der Fundamentalgruppe weiter

(5) *Die kompakten Liegruppen ϕ und ϕ_a sind halbeinfach, und $\dim \phi_a \cong 3$.*

(6) *ϕ enthält keine Translation.*

Die von einer Translation $\tau \neq 1$ erzeugte Gruppe wirkt nämlich frei auf dem zu \mathbf{R}^d homöomorphen Komplement der Achse von τ ; nach [32] hat τ also unendliche Ordnung. Im Fall $\tau \in \phi$ wäre dann $\langle \tau \rangle$ ein aus lauter Translationen bestehender Torus in ϕ , was wegen §1 (8) unmöglich ist.

Da das Produkt zweier Spiegelungen mit dem gleichen Zentrum und verschiedenen Achsen eine Translation ist, kann also $\phi_{[a,L]}$ höchstens für eine Achse L positive Dimension haben. Mittels (3) folgt nun, weil eine kompakte Streckungsgruppe nicht transitiv sein kann

(7) $\dim \phi_{[a]} < \dim L$.

Um zu zeigen, daß die Liesche Ausnahmegruppe G_2 , das ist die Automorphismengruppe Γ der Oktaven-Algebra \mathbf{O} , nicht transitiv auf \mathcal{P} sein kann, benötigt man die folgenden Aussagen

(8) *Γ ist eine kompakte, einfach zusammenhängende Gruppe mit trivialem Zentrum, $\dim \Gamma = 14$, alle Involutionen von Γ sind konjugiert. Der Zentralisator Δ einer Involution ist eine maximale (abgeschlossene) Untergruppe von Γ , und $\Delta \cong SO(4)$.*

Die ersten Behauptungen findet man bei Tits [35]. Schreibt man die Oktaven als Paare von Quaternionen mit der Multiplikation

$$(a, b)(x, y) = (ax - y\bar{b}, xb + \bar{a}y),$$

so kann man unmittelbar nachrechnen, daß der Zentralisator der Involution $(x, y) \mapsto (x, -y)$ genau aus den Abbildungen $(x, y) \rightarrow (x^c, y^c s)$ mit $s\bar{s} = 1$ besteht. Eine Gruppe $\Xi > \Delta$ enthält keinen zentralen Torus und ist daher halbeinfach. Weil der Rang $rg \Xi \leq 2$ ist, käme außer Γ nur noch $\Xi \cong SO(5)$ in Frage, aber dann wäre der Zentralisator einer Involution nicht zusammenhängend.

3. Homogene 8-dimensionale Ebenen. Ist \mathcal{P} eine homogene Ebene mit $4 < d \leq 8$, so gibt es nach §2 (2) eine kompakte, zusammenhängende punktttransitive Liegruppe ϕ , und P ist eine

Mannigfaltigkeit. Es wird sich herausstellen, daß ϕ sogar transitiv auf \mathcal{F} sein muß und daher die Geraden homöomorph zu S_4 sind.

(1) *Die Gruppe ϕ hat kein Zentrum und ist darum direktes Produkt einfacher kompakter Lie-Gruppen.*

Es genügt zu zeigen, daß ein Element $\zeta \in Z(\phi)$ einen Fixpunkt c haben muß, da dann wegen $c^{\zeta^i} = c^{\zeta^i \phi} = c^{\phi^i}$ jeder Punkt fest bleibt. Es sei β eine Involution aus ϕ . Ist β eine Spiegelung mit dem Zentrum c , so gilt $c^\zeta = c$ wegen $\beta^\zeta = \beta$; andernfalls hat ζ einen Fixpunkt in der Baer-Unterebene \mathcal{F}_β . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man sogar annehmen

(2) *ϕ ist einfach.*

Enthält nämlich ein einfacher Faktor von ϕ eine Spiegelung, so ist schon dieser Faktor transitiv, da alle anderen Faktoren das Zentrum der Spiegelung fest lassen müssen. Angenommen, ϕ hätte mehrere einfache Faktoren ϕ_v , die alle nur Baer-Involutionen enthalten, dann gilt $3 < \dim \phi_v \leq 8$; denn eine größere kompakte Gruppe kann nicht auf einer Baer-Unterebene operieren [28, 5.2], wäre aber Δ der Zentralisator einer Involution $\beta \in \phi_v \cong SO(3)$ und $a \in \mathcal{F}_\beta$, so folgte $\dim \Delta > \dim \phi - 3$ und $\dim \Delta - 4 \leq \dim \Delta_a \leq \dim \phi - 8$, ein Widerspruch. Die Faktoren ϕ_v sind also alle isomorph zur elliptischen Bewegungsgruppe der komplexen Ebene und daher transitiv auf jeder Baer-Unterebene, die sie fest lassen [28, 5.2]. Dies führt nun ebenfalls auf einen Widerspruch: Vertauschbare Involutionen in ϕ , haben einen gemeinsamen Fixpunkt, also stimmen ihre Baer-Unterebenen als Bahnen von ϕ_2 überein. Da je zwei Involutionen aus PSU(3, C) mit einer geeigneten dritten vertauschbar sind, hätten alle Involutionen aus ϕ , die gleiche Fix-Unterebene, und ϕ wäre nicht transitiv.

Die sich unmittelbar aus §2 (3) ergebende Abschätzung $\dim \phi \leq 36$ läßt sich durch Betrachtung der Wirkung auf einem Geradenbüschel verschärfen zu

(3) $\dim \phi \leq 21$.

Zunächst ist stets $\dim \phi: \phi_a \leq d$. Ist ϕ_a transitiv auf dem Geradenbüschel $[a]$, so ist $\dim \phi_a / \phi_{[a]} \leq \binom{5}{2}$, und die Behauptung folgt wegen §2 (7). Sonst sei $m > 0$ die höchste Dimension einer Bahn \mathfrak{M} von ϕ_a auf $[a]$ und $M = \phi_{[\mathfrak{M}]}$ die Gruppe, die \mathfrak{M} elementweise fest läßt. Nach §2 (3) gilt dann $\dim \phi_a / M \leq \binom{m+1}{2}$. Ist $a \cup u \in \mathfrak{M}$, so

hat M_u auf den anderen Geraden aus \mathcal{M} höchstens m -dimensionale Bahnen. Daraus folgt $\dim M \leq 9$; denn \mathcal{M} erzeugt mit 3 Punkten auf Geraden aus \mathcal{M} eine mindestens $2m$ -dimensionale Unterebene, also zusammen mit $3 - m$ weiteren Punkten die ganze Ebene. Insgesamt ergibt sich $\dim \phi \leq 23$, und wegen (2) gilt die Behauptung.

Gibt es in ϕ Spiegelungen, so läßt ϕ_a wegen §2 (6) auch die Achse einer Spiegelung mit dem Zentrum a fest, und man hat $\dim M \leq 4$, auf Grund der Einfachheit von ϕ also sogar $\dim \phi \leq 15$, d. h.

(4) *Enthält ϕ Spiegelungen und ist $\dim \phi > 15$, so ist ϕ transitiv auf \mathcal{F} .*

Im Beweis von (3) wird die zu $\dim \phi: \phi_a = d$ äquivalente Transitivität von ϕ nicht benötigt:

(5) *Ist $d \leq 8$, so gilt für eine kompakte Gruppe $\psi \leq \Sigma_{\mathcal{P}}$ stets $\dim \psi < 23$.*

Es wird sich zeigen, daß von den 6 in Frage kommenden einfachen Liegruppen nur die unitäre Gruppe über dem Quaternionenkörper transitiv auf der Punktmenge von \mathcal{P} operieren kann:

(6) $\phi \cong \text{PU}(3, \mathbf{H})$.

Beweis. (a) Wäre $\phi \cong \text{PSU}(3, \mathbf{C})$, so wäre $\tilde{\phi}_a \cong \text{Spin}(3)$ und $\pi_1(\phi_a) \cong \pi_1(\phi) \cong \mathbf{Z}_3$ im Widerspruch zu §2 (4).

(b) Im Fall $\phi \cong \text{SO}(5)$ gäbe es eine Gruppe $\text{SO}(4)$ im Zentralisator einer Involution β . Wegen $d > 4$ kann β keine Spiegelung sein. Mittels §1 (10) folgt also $d = 8$, aber nach §2 (5) müßte $d < 8$ sein.

(c) Angenommen $\phi \cong G_2$. Nach §2 (8) ist dann der Zentralisator Δ einer Involution δ eine zu $\text{SO}(4)$ isomorphe maximale Untergruppe. Wäre δ eine Spiegelung mit dem Zentrum a , so hätte man $\Delta \leq \phi_a$, also $\phi_a = \Delta$, was wegen $\pi_1(\phi) = 1 \neq \pi_1(\Delta)$ unmöglich ist. Daher muß δ eine Baer-Involution sein, und die Geraden von \mathcal{P} sind homöomorph zu S_4 . Dies führt nun auf einen Widerspruch, und zwar ohne Benutzung der Transitivität: Würde Δ auf der zur komplexen Ebene homöomorphen Fixunterebene \mathcal{F}_δ die Gruppe $\text{SO}(3)^2$ induzieren, so müßten in \mathcal{F}_δ die Achsen jeder Spiegelung des einen Faktors durch das Zentrum jeder Spiegelung des anderen Faktors gehen [28, 1.11]. Das ist aber unmöglich, da $\text{SO}(3)$ vertauschbare Spiegelungen enthält und in \mathcal{F}_δ Spiegelungen durch Zentrum und Achse eindeutig bestimmt sind [28, 4.8]. Demnach hat Δ einen Normalteiler

$\theta \cong \text{Spin}(3)$, der auf \mathcal{F}_δ die Identität induziert und außerhalb frei operiert. Eine effektive Wirkung von θ auf der zu S_4 homöomorphen Verbindungsgeraden zweier Fixpunkte hätte aber nach Richardson [26] außer den beiden Fixpunkten nur 3-dimensionale Bahnen.

(d) Im Fall $\phi \cong \text{PSU}(4, \mathbf{C})$ wäre $\pi_1(\phi) \cong \mathbf{Z}_4$. Aber dann können die Aussagen (4) und (5) aus §2 nicht beide erfüllt sein, da die Fundamentalgruppen der kleineren einfachen Lie-Gruppen höchstens die Ordnung 3 haben.

(e) Sei schließlich $\phi \cong \text{SO}(7)$. Dann gibt es eine Gruppe $\Delta \cong \text{SO}(6)$ im Zentralisator einer Involution β . Wäre β eine Baer-Involution, so müßte Δ auf der 4-dimensionalen Ebene \mathcal{F}_β operieren, was nach [28, 5.2] unmöglich ist. Also muß β ein Zentrum c haben, und ϕ ist wegen (4) fahnen transitiv. Folglich ist $[c]$ homöomorph zu S_4 und $d = 8$. Dies widerspricht aber $\Delta \leq \phi_c$ und $\dim \phi: \Delta = 6$.

Damit ist (6) vollständig bewiesen. Enthielte ϕ keine Spiegelungen, so gäbe es im Widerspruch zu [28, 5.2] insbesondere eine Gruppe $\text{U}(2, \mathbf{H}) \cong \text{Spin}(5)$ im Zentralisator einer Baer-Involution. Wegen (4) folgt also

(7) ϕ ist sogar fahnen transitiv.

Für spätere Anwendung wird noch eine Folgerung aus (6c) gezogen:

(8) Ist $d \leq 8$, so enthält $\Sigma_\mathcal{P}$ keine Untergruppe $\Gamma \cong G_2$.

Es genügt zu zeigen, daß Γ punkttransitiv sein müßte. Auf Grund von (6c) kann der Zentralisator Δ einer Involution $\delta \in \Gamma$ keine Baer-Unterebene fest lassen, und δ ist eine Spiegelung. Ist a ihr Zentrum, so ist $\Delta = \Gamma_a$ und $\dim a^\Gamma = \dim \Gamma: \Delta = 8$, also $a^\Gamma = P$ nach §2 (3).

Um den Hauptsatz im Fall $d \leq 8$ zu beweisen, muß man auf Grund von (6) und (7) nur noch zeigen, daß jede Wirkung (\mathcal{P}, ϕ) zur gewöhnlichen Wirkung von $\text{PU}(3, \mathbf{H})$ auf der Quaternionen-Ebene isomorph ist. Dazu wird eine zu \mathcal{P} isomorphe Ebene \mathcal{H} angegeben, die sich rein gruppentheoretisch in ϕ beschreiben läßt und daher bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Als Punktmenge wie als Geradenmenge von \mathcal{H} dient der Raum

$$H = \{\alpha \in \phi; \alpha^2 = 1, \dim \text{Zs}(\alpha) = 13\}.$$

Inzidenz von $\alpha \neq \beta$ wird durch $\alpha \circ \beta = 1$ gegeben. H besteht genau aus den Spiegelungen von $\text{PU}(3, \mathbf{H})$ und ist eine volle Konjugiertenklasse von Involuntionen.

Wegen der Fahnen transitivität von ϕ induziert die 13-dimensionale Gruppe ϕ_a im Geradenbüschel $[a]$ die Gruppe $SO(5)$. Mittels §2 (4, 5) folgt daher $\tilde{\phi}_a \cong \text{Spin}(5) \times \text{Spin}(3)$ und $Z(\phi_a) = \langle \alpha \rangle$ mit $\alpha^2 = 1$. Da die Gruppe ϕ_a wegen der Transitivität auf $[a]$ keine Baer-Unterebene fest lassen kann, ist α eine Spiegelung von \mathcal{P} mit Zentrum a , und $\alpha \in H$; ferner gilt $Zs(\alpha) = \phi_a$. Weil alle Involutionen aus H in ϕ konjugiert sind, induziert H in \mathcal{P} lauter Spiegelungen, und die Abbildungen ρ und λ , die jeder Spiegelung aus H ihr Zentrum und ihre Achse in \mathcal{P} zuordnen, sind Bijektionen von H auf P und \mathcal{L} . Ist $\alpha \neq \beta$, so liegt das Zentrum von α genau dann auf der Achse von β , wenn $\alpha^\beta = \alpha$ ist. Damit ist (ρ, λ) ein Isomorphismus von \mathcal{H} auf \mathcal{P} :

(9) *Hat die kompakte, zusammenhängende, höchstens 8-dimensionale projektive Ebene \mathcal{P} eine punkttransitive Gruppe Δ von Automorphismen, so ist \mathcal{P} desarguessch und Δ enthält die elliptische Bewegungsgruppe.*

4. Homogene 16-dimensionale Ebenen. Die Beweise sind hier ähnlich denen in §3, aber etwas verwickelter, weil man etwa aus der Existenz einer Baer-Unterebene noch nicht schließen kann, daß die Geraden homöomorph zu S_8 sind, man also zunächst alle Möglichkeiten $8 < d \leq 16$ in Betracht ziehen muß. Es sei ϕ wieder eine kompakte, zusammenhängende, punkttransitive Untergruppe von Σ_φ . Dann enthält ϕ keine zentrale Involution, also auch keinen normalen Torus (vgl. §2 (5)):

(1) *ϕ ist halbeinfach.*

Um sogar die Einfachheit von ϕ zu beweisen, ist es zweckmäßig, zuerst die Dimension abzuschätzen:

(2) *Ist ϕ transitiv auf \mathcal{P} , so gilt $\dim \phi \leq 59$.*

Nach §2 ist nämlich $\dim \phi_a / \phi_{[a]} \leq \binom{9}{2}$ und $\dim \phi_{[a]} < 8$.

Sonst ist der ungünstigste Fall der, daß ϕ_a auf dem Geradenbüschel $[a]$ Bahnen der Dimension $m = 7$ hat. ϕ_a induziert dann auf einer solchen Bahn \mathcal{M} eine höchstens 28-dimensionale Gruppe. \mathcal{M} erzeugt mit 3 Punkten auf Geraden aus \mathcal{M} eine mindestens $2m$ -dimensionale Unterebene, also im Fall $m > 4$ ganz \mathcal{P} , sonst mit 1 oder 2 weiteren Punkten wenigstens eine Baer-Unterebene (Vgl. §1 (11)). Daher kann \mathcal{M} höchstens von einer 21-dimensionalen Gruppe elementweise fest gelassen werden und man hat insgesamt

(3) $\dim \phi \leq 65$.

Wie bei §3 (4) ergibt sich weiter

(4) *Enthält ϕ Spiegelungen und ist ϕ nicht fahnen transitiv, so gilt sogar $\dim \phi < 52$.*

Angenommen nun, es wäre $Z = Z(\phi) \neq 1$. Dann muß Z eine endliche Gruppe ungerader Ordnung sein, die frei auf P operiert, und ϕ enthält keine Spiegelungen. Die einfach zusammenhängende Überlagerungsgruppe $\tilde{\phi}$ hat also einen direkten Faktor A , dessen Zentrum keine 2-Gruppe ist. Aus [35] entnimmt man $A \cong \text{SU}(r, \mathbb{C})$, $\dim A = r^2 - 1$, $Z(A) = \mathbb{Z}_r$, $r = 3$ oder $5 \leq r \leq 7$. (Die Ausnahmegruppe E_6 hat zwar ein Zentrum der Ordnung 3, aber zu große Dimension.) Im Fall $r \geq 6$ gäbe es eine Gruppe $\text{SU}(5, \mathbb{C})$ im Zentralisator einer Baer-Involution β , aber diese Gruppe kann nach §3 (5) nicht auf \mathcal{F}_β wirken. In $\text{SU}(3, \mathbb{C})$ sind die Zentralisatoren der Involutionen 4-dimensional. Ist also $r = 3$ und $\Delta = \text{Zs}_\phi(\beta)$ für eine Involution $\beta \in A$, so ist $\dim \phi : \Delta = 4$, und mit $a^\beta = a$ folgt

$$\dim \Delta - \frac{d}{2} \leq \dim \Delta_a \leq \dim \phi_a \leq \dim \phi - d, \quad \text{also} \quad d \leq 8,$$

was ausgeschlossen war.

Da die 24-dimensionale Gruppe $\text{SU}(5, \mathbb{C})$ nach §3(5) nicht auf einer Baer-Unterebene wirken kann, könnte $r = 5$ höchstens bei quasi-einfachem $\phi = A$ vorkommen. Dann gibt es aber eine Gruppe $\Delta \cong \text{SU}(4, \mathbb{C})$ im Zentralisator einer Involution β , und $\Delta \times Z$ wirkt auf der Baer-Unterebene \mathcal{F}_β . Da Z keine Fixpunkte hat, kann Δ auf \mathcal{F}_β keine Spiegelungen induzieren. Es gibt also eine Kollineation $\alpha \in \Delta$, die in \mathcal{F}_β eine Baer-Involution bewirkt. Das Zentrum Z läßt nun die 4-dimensionale Unterebene $\mathcal{F}_{\beta, \alpha}$ invariant, hätte also dort doch einen Fixpunkt. Damit ist $Z \neq 1$ auf einen Widerspruch geführt:

(5) $Z(\phi) = 1$, und ϕ ist direktes Produkt einfacher Gruppen.

Wieder erhält man ohne Beschränkung der Allgemeinheit

(6) ϕ ist einfach.

Ein einfacher Faktor von ϕ , der eine Spiegelung enthält, muß nämlich selbst transitiv sein. Andererseits kann ϕ nicht Produkt mehrerer einfacher Faktoren ϕ_v sein, die nur Baer-Involutionen enthalten: Der oben bei $\text{SU}(3, \mathbb{C})$ durchgeführte Schluß zeigt zunächst, daß ϕ_v keine Baer-Involution β mit $\dim \phi_v : \text{Zs}(\beta) \leq 4$ enthalten kann. Damit folgt $14 \leq \dim \phi_v \leq 21$. Nach §3 (8) ist auch $\phi_v \cong G_2$ ausgeschlossen. Für

ϕ_i bleiben also nur die Möglichkeiten $\text{PSU}(4, \mathbf{C})$, $\text{SO}(7)$ oder $\text{PU}(3, \mathbf{H})$. In ϕ_i gibt es dann eine Involution β und eine zu $\text{SU}(3, \mathbf{C})$, $\text{SO}(6)$ oder $\text{U}(2, \mathbf{H})$ isomorphe Untergruppe Δ im Zentralisator von β . Wegen §3 (5) und $\dim \Delta \times \phi_2 \cong 23$ muß non Δ oder ϕ_2 auf der Baer-Unterebene \mathcal{F}_β die Identität induzieren und außerhalb frei operieren, was nicht möglich ist.

Aus Dimensionsgründen kommen für ϕ noch 16 Gruppen in Frage; unter ihnen ist die fahnentransitive elliptische Bewegungsgruppe der Oktaven-Ebene, d. h. die Ausnahmegruppe F_4 . Von allen übrigen läßt sich zeigen, daß sie nicht transitiv auf \mathcal{P} operieren können. Dem Beweis werden 3 Bemerkungen vorausgeschickt, wobei k die Dimension einer Geraden von \mathcal{P} bezeichne:

(7) *Ist ϕ nicht fahnentransitiv und ist θ eine quasi-einfache Untergruppe des Zentralisators einer Spiegelung, so ist $\dim \theta \cong \binom{k}{2}$ nach §2 (3).*

(8) *Zentralisiert die quasi-einfache Gruppe θ eine Baer-Involution, so ist $\dim \theta < 23$ nach §3 (5).*

(9) *Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:*

- | | |
|---|---|
| (α) $\phi_a \cong \text{Spin}(9)$ | (β) $\phi \cong F_4$ |
| (γ) ϕ ist transitiv auf \mathcal{P} | (δ) $\phi_a / \phi_{[a]} \cong \text{SO}(9)$. |

Aus (α) folgt $\dim \phi = 52$ und $\phi \cong F_4$ wegen (6). In der Standard-Wirkung von F_4 auf der Oktaven-Ebene gibt es eine Spiegelung σ mit $Z_s(\sigma) \cong \text{Spin}(9)$. Daher ergibt sich (γ) aus (β) mittels (8) und (4). Der Bestimmung der kompakten transitiven Gruppen auf Sphären [18; 23] entnimmt man, daß (δ) eine Folge von (γ) ist. Induziert ϕ_a im Geradenbüschel $[a]$ die Gruppe $\text{SO}(9)$, so sind für ϕ wegen (3) und (6) und §2 (7) nur die Dimensionen 52 und 55 möglich, für ϕ_a also nur 36 und 39. Daher ist $\tilde{\phi}_a$ isomorph zu $\text{Spin}(9)$ oder $\text{Spin}(9) \times \text{Spin}(3)$. Im zweiten Fall läßt der Faktor $\text{Spin}(3)$ jede Gerade durch a fest. Für einen Punkt b auf der Achse der Spiegelung aus ϕ_a erhält man nun $\tilde{\phi}_{a,b} \cong \text{Spin}(8) \times \text{Spin}(3)$. Der eindeutig bestimmte 3-dimensionale Faktor $\text{Spin}(3)$ müßte dann auch alle Geraden durch b fest lassen. Darum gilt $\dim \phi = 52$ und $\phi \cong F_4$, also $\pi_i(\phi) = \pi_i(\phi_a) = 1$ und damit (α).

Da die Gruppen $\text{PSU}(r+1)$ eine Untergruppe $\text{SU}(r)$ im Zentralisator einer Involution enthalten und ebenso die Gruppen $\text{SO}(2r+1)$ eine Untergruppe $\text{SO}(2r)$, scheiden für ϕ die Möglichkeiten $\text{PSU}(r, \mathbf{C})$ mit $r \geq 6$, $\text{PU}(5, \mathbf{H})$, $\text{SO}(11)$ und $\text{SO}(9)$ auf Grund der obigen Bemerkungen aus. Die Gruppen $\text{PSU}(r, \mathbf{C})$ mit $r < 6$ können nicht vorkommen, weil sie eine zu Z_r isomorphe Fundamentalgruppe haben, so daß

die Bedingung (4) aus §2 nicht erfüllt sein kann. Die verbleibenden 7 Gruppen werden einzeln betrachtet:

(a) Wäre $\phi \cong \text{PSO}(10)$, so gäbe es eine Untergruppe $\theta \cong \text{SO}(8)$ im Zentralisator einer Spiegelung mit Zentrum a . Es folgte $\theta < \phi_a$ und wegen der Halbeinfachheit $\dim \phi_a \geq 28 + 3$, also $d \leq 14$ und $k \leq 7$ im Widerspruch zu (7). Außerdem wäre $\pi_1(\phi_a) \not\cong \pi_1(\phi) \cong \mathbf{Z}_4$.

(b) Im Fall $\phi \cong \text{PU}(4, \mathbf{H})$ seien α und β die beiden durch die Diagonalmatrizen $(-1)^2 \times 1^2$ und $(-1) \times 1^3$ gegebenen Involutionen. Wegen $\text{U}(2, \mathbf{H}) \cong \text{Spin}(5)$ wird der Zentralisator von α von $\text{Spin}(5)^2$ überlagert. Wäre α eine Baer-Involution, so müßte $\text{Zs}(\alpha)$ auf \mathcal{F}_α die Gruppe $\text{SO}(5)^2$ induzieren, da ein Normalteiler, der alle Punkte von \mathcal{F}_α fest läßt, außerhalb von \mathcal{F}_α frei operiert und daher höchstens 8-dimensional ist. Die Gruppe $\text{SO}(5)^2$ kann aber nicht treu auf einer 8-dimensionalen Ebene wirken, da dann alle Involutionen Spiegelungen sein müßten und einen zu großen Zentralisator hätten. Also muß α eine Spiegelung von \mathcal{P} sein; dagegen ist β eine Baer-Involution: Der Zentralisator von β enthält nämlich eine Gruppe $\theta \cong \text{U}(3, \mathbf{H})$ und ist 24-dimensional. Wäre β eine Spiegelung mit Zentrum b , so müßte $d \leq 12$ sein, θ wäre wegen §2 (3) transitiv auf dem Geradenbüschel $[b]$ und dieses wäre homöomorph zu \mathbf{S}_6 , was unmöglich ist. α induziert nun eine Spiegelung in \mathcal{F}_β , und der gemeinsame Zentralisator von α und β enthält eine zu $\text{U}(2, \mathbf{H})$ isomorphe Gruppe, die das Zentrum a von α fest läßt und nach §2 (3) auf dem Büschel der durch a gehenden Geraden in \mathcal{F}_β transitiv sein muß. Folglich sind die Geraden von \mathcal{F}_β lokal euklidisch, \mathcal{F}_β ist eine Mannigfaltigkeit, und wegen §1 (9) hat \mathcal{P} zu \mathbf{S}_8 homöomorphe Geraden. Mittels §1 (2) ergibt sich nun $\pi_3(P) = \pi_4(P) = 0$. Weiter folgt $\dim \phi_a = \dim \phi - \dim P = 20$, also $\phi_a = \text{Zs}(\alpha)$ und $\tilde{\phi}_a \cong \text{U}(2, \mathbf{H})^2$. Die exakte Homotopie-Sequenz der Faserung $\tilde{\phi} \rightarrow P$ mit der Faser $\tilde{\phi}_a$ liefert jetzt $\pi_3(\tilde{\phi}_a) \cong \pi_3(\tilde{\phi})$ im Widerspruch zu $\pi_3(\text{U}(r, \mathbf{H})) \cong \mathbf{Z}$, vergleiche [11, 7.12.6; 14; 15, Th. 11.2].

(c) Es sei nun $\phi \cong \text{PSO}(8)$ und β die von der Diagonalmatrix $(-1)^2 \times 1^6$ induzierte Involution. β wird von einer Gruppe $\theta \cong \text{SO}(6)$ zentralisiert. Wäre β eine Spiegelung mit Zentrum a , so hätte die halbeinfache Standuntergruppe ϕ_a die Dimension 18, da sie wegen $\text{Zs}(\beta) \cong \phi_a$ den Rang 4 hat. Dann wäre aber $d = 10$, und θ müßte auf dem 5-dimensionalen Geradenbüschel $[a]$ transitiv operieren. Also ist β eine Baer-Involution. Die durch $1 \times (-1)^2 \times 1^5$ und $1^2 \times (-1)^2 \times 1^4$ gegebenen Involutionen β' und β'' sind zu β konjugiert und mit β vertauschbar. Hätten β und β' dieselbe Fixunterebene, so folgte $\mathcal{B} = \mathcal{F}_\beta = \mathcal{F}_{\beta'} = \mathcal{F}_{\beta''}$. Aber β ist die einzige Involution aus θ , die auf \mathcal{B} die Identität induziert, und $\beta'' \in \theta$. Deshalb bewirkt β' in \mathcal{B} eine

involutorische Kollineation α . Da der gemeinsame Zentralisator von β und β' eine Gruppe $\Delta \cong \text{SO}(5)$ enthält, die nicht auf einer 4-dimensionalen Unterebene von \mathcal{B} operieren kann, ist α eine Spiegelung von \mathcal{B} mit Zentrum a und Δ ist wegen §2 (3) transitiv auf dem Bündel der durch a gehenden Geraden von \mathcal{B} . Folglich ist \mathcal{B} eine Mannigfaltigkeit, die Geraden von \mathcal{P} sind homöomorph zu \mathbb{S}_8 , und $d = 16$. Dann wird aber die 12-dimensionale halbeinfache Gruppe ϕ_a von $\text{Spin}(3)^4$ überlagert im Widerspruch zu $\Delta \cong \phi_a$.

(d) Der Fall der 21-dimensionalen Gruppe $\phi \cong \text{SO}(7)$ läßt sich mit Hilfe der beiden konjugierten Baer-Involutionen $\beta = (-1)^6 \times 1$ und $\beta' = 1 \times (-1)^6$ ähnlich behandeln, da β' wieder eine Spiegelung in \mathcal{F}_β induziert. Eine Vereinfachung gegenüber (c) erhält man durch $\dim \phi_a \neq 5$ und $d < 16$.

(e) Für $\phi \cong \text{PU}(3, \mathbf{H})$ ergibt sich bei der Betrachtung des Zentralisators der durch die Diagonalmatrix $(-1)^2 \times 1$ gegebenen Involution β ein Widerspruch: Zunächst ist $\dim \text{Zs}(\beta) \geq 13$, so daß β keine Spiegelung sein kann. Aus §2 (5) folgt $\dim \phi_a \neq 5$ und damit $d < 16$. Die Untergruppe $\text{U}(2, \mathbf{H}) \times 1 \cong \text{Spin}(5)$ enthält β im Zentrum. Sie kann auf $\mathcal{B} = \mathcal{F}_\beta$ nicht trivial sein und induziert eine Kollineationsgruppe $\Delta \cong \text{SO}(5)$ auf der Ebene \mathcal{B} , die wegen $d < 16$ ihrerseits keine Baer-Unterebenen enthalten kann. Alle Involutionen aus Δ sind also Spiegelungen von \mathcal{B} . Wird insbesondere α durch $(-1) \times 1^2$ induziert, so läßt der 9-dimensionale Zentralisator von α und β das Zentrum a von α in \mathcal{B} fest, und man erhält sogar $d \leq 12$. Die Achse A von α in \mathcal{B} ist also 3-dimensional. Nun enthält $\text{Zs}_\Delta(\alpha)$ eine Untergruppe $\psi \cong \text{SO}(4)$. Da A keine Mannigfaltigkeit ist, kann ψ nicht transitiv auf A sein und hat eine 2-dimensionale Bahn M in A , die von einem 3-dimensionalen Normalteiler θ punktweise festgelassen wird. Für $u \in M$ kann θ auch nicht transitiv auf der Geraden $a \cup u$ von \mathcal{B} sein. Daher muß einerseits $\dim \theta_c > 0$ für alle $c \in a \cup u$ gelten. Andererseits erzeugen die Punkte von M zusammen mit a und c eine mindestens 4-dimensionale Unterebene, nach dem vorher Bemerkten also ganz \mathcal{B} , so daß $\theta_c = 1$ ist.

(f) Angenommen, $\phi \cong \text{G}_2$. Nach §2 (4, 5) folgt $\phi_a \cong \text{Spin}(3)$. Der Zentralisator der zentralen Involution β aus ϕ_a ist isomorph zu $\text{SO}(4)$. Daher ist β eine Baer-Involution, $\Xi = \text{Zs} \phi_a \cong \text{Spin}(3)$, und $\phi_a \cap \Xi = \langle \beta \rangle$. Wegen $a^\Xi \neq a$ induziert Ξ auf \mathcal{F}_β die einfache Gruppe $\text{SO}(3)$, und $\phi_{a^\xi} = \phi_a$ für alle $\xi \in \Xi$. Würde ϕ_a auf \mathcal{F}_β ebenfalls nicht trivial wirken, so müßte die zu $\text{SO}(3)$ homöomorphe Bahn a^Ξ auf der Achse jeder von einem $\alpha \in \phi_a$ in \mathcal{F}_β induzierten Spiegelung liegen. Wegen $d = 11$ und §1 (7, 9) ist \mathcal{F}_β eine 6-dimensionale Un-

terebene mit 3-dimensionalen Geraden; Ξ wäre also transitiv auf einer dieser Geraden, aber eine Gerade kann keine 3-Mannigfaltigkeit sein. Folglich induziert ϕ_a auf \mathcal{F}_β die Identität, d.h. ϕ_a ist genau die gemeinsame Standuntergruppe aller Punkte von \mathcal{F}_β . Induziert nun das Element $\xi \in \Xi$ eine Involution in \mathcal{F}_β , so hat ξ dort einen Fixpunkt x . Das ist ein Widerspruch gegen $\xi \notin \phi_a = \phi_x$.

(g) Schließlich ist $\phi \cong \text{SO}(5)$ wegen $\dim \phi_a \cong 3$ nicht möglich. Zusammenfassend hat man damit

(10) *Eine homogene kompakte projektive Ebene mit $8 < \dim P \leq 16$ besitzt eine fahnentransitive Gruppe $\phi \cong F_4$.*

Beachtet man noch, daß die Geraden einer fahnenhomogenen Ebene lokal euklidisch und damit höchstens 8-dimensional sind, so genügt es zum Beweis der beiden Sätze (I) und (II) zu zeigen, daß die Gruppe F_4 nur auf einer Moufang-Ebene fahnentransitiv operieren kann. Dies kann ähnlich wie in §3 mittels der Spiegelungen geschehen. Es ist aber einfacher, die Standuntergruppen zu benutzen. Nach (9) ist $\phi_x \cong \text{Spin}(9)$. Ist umgekehrt $\text{Spin}(9) \cong \psi < \phi$, so ist die zentrale Involution α aus ψ wegen §3 (5) eine Spiegelung mit Zentrum a , und $\psi = \phi_a$. Die Standgruppen der Punkte und ebenso der Geraden sind also genau die zu $\text{Spin}(9)$ isomorphen Untergruppen von ϕ , und diese sind alle untereinander konjugiert. Ferner gilt $p \in L$ genau, falls $\dim(\phi_p \cap \phi_L) = 28$ ist. Die Ebene \mathcal{P} ist also bis auf Isomorphie durch ϕ eindeutig bestimmt:

(11) *Hat die kompakte projektive Ebene \mathcal{P} mit $8 < \dim P \leq 16$ eine punkttransitive Gruppe Δ von Automorphismen, so ist \mathcal{P} isomorph zur Oktaven-Ebene und Δ enthält die elliptische Bewegungsgruppe F_4 .*

Homogene kompakte projektive Ebenen. Zusatz bei der Korrektur: Auf Grund von Theorem 4 einer inzwischen veröffentlichten Arbeit von J. Szenthe [On the topological characterization of transitive Lie group actions, Acta Scient. Math. Szeged 36 (1974), 323–344] ist wegen §1 (1) die Voraussetzung $\dim P < \infty$ in §2 (1) entbehrlich. Damit gilt auch Satz (II) ohne die Voraussetzung endlicher Dimension.

LITERATUR

1. J. F. Adams, *On the non-existence of elements of Hopf invariant one*, Bull. Amer. Soc., 64 (1958), 279–282; Ann. Math., 72 (1960), 20–104.
2. R. Baer, *Projectivities with fixed points on every line of the plane*, Bull. Amer. Math. Soc., 52 (1946), 273–286.
3. D. Betten, *4-dimensionale Translationsebenen*, Math. Zeitschr., 128 (1972), 129–151.

4. ———, *4-dimensionale Translationsebenen mit 8-dimensionaler Kolleationsgruppe*, Geom. Dedic., **2** (1973), 327–339.
5. ———, *4-dimensionale Translationsebenen mit irreduzibler Kollineationsgruppe*, Arch. Math., **24** (1973), 552–560.
6. ———, *Die komplex hyperbolische Ebene*, Math. Zeitschr., **132** (1973), 249–259.
7. S. Breitsprecher, *Projektive Ebenen, die Mannigfaltigkeiten sind*, Math. Zeitschr., **121** (1971), 157–174.
8. J. Dugundji, *Topology*, Boston 1966.
9. I. Fáry, *Dimension of the square of a space*, Bull. Amer. Math. Soc., **67** (1961), 135–137.
10. H. Freudenthal, *Einige Sätze über topologische Gruppen*, Ann. Math., **37** (1936), 46–56.
11. D. Husemoller, *Fibre Bundles*, McGraw-Hill 1966.
12. F. Kalscheuer, *Die Bestimmung aller stetigen Fastkörper*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **13** (1940), 413–435.
13. I. Kaplansky, *Lie algebras and locally compact groups*, Chicago 1971.
14. J. L. Koszul, *Sur le troisième nombre de Betti des espaces de groupes de Lie compacts*, C. R. Acad. Sci. Paris, **224** (1947), 251–253.
15. J. L. Koszul, *Homologie et cohomologie des algèbres de Lie*, Bull. Soc. Math. France, **78** (1950), 65–127.
16. L. N. Mann, *Dimensions of compact transformation groups*, Michigan. Math. J., **14** (1967), 433–444.
17. D. Montgomery, *Simply connected homogeneous spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **1** (1950), 467–469.
18. D. Montgomery and H. Samelson, *Transformation groups of spheres*, Ann. Math., **44** (1943), 454–470.
19. D. Montgomery and L. Zippin, *Topological transformation groups*, Interscience Publ. 1955.
20. G. Pickert, *Projektive Ebenen*, Springer 1955.
21. P. Plaumann and K. Strambach, *Zusammenhängende Quasikörper mit Zentrum*, Arch. Math., **21** (1970), 455–465.
22. ———, *Hurwitzsche Ternärkörper*, Arch. Math., **25** (1974), 129–134.
23. J. Poncet, *Groupes de Lie compacts de transformations de l'espace euclidien et les spheres comme espaces homogènes*, Comment. Math. Helv., **33** (1959), 109–120.
24. L. Pontrjagin, *Über stetige algebraische Körper*, Ann. Math., **33** (1932), 163–174.
25. L. S. Pontrjagin, *Topologische Gruppen*, Leipzig: Teubner 1957/58.
26. R. W. Richardson, *Groups acting on the 4-sphere*, Illinois J. Math., **5** (1961), 474–485.
27. H. Salzmann, *Topological planes*, Advances in Math., **2** (1967), 1–60.
28. ———, *Kollineationsgruppen kompakter, vier-dimensionaler Ebenen*, Math. Zeitschr., **117** (1970), 112–124.
29. ———, *Baer-Unterebenen 4-dimensionaler Ebenen*, Arch. Math., **23** (1972), 337–341.
30. ———, *Kompakte, vier-dimensionale projektive Ebenen mit 8-dimensionaler Kollineationsgruppe*, Math. Zeitschr., **130** (1973), 235–247.
31. L. A. Skornjakov, *Topological projective planes*, Trudy, Moskov. Mat. Obšč., **3** (1954), 347–373.
32. P. Smith, *Fixed-point theorems for periodic transformations*, Amer. J. Math., **63** (1941), 1–8.
33. E. H. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill 1966.
34. J. Tits, *Sur les groupes doublements transitifs continus: corrections et compléments*, Comment. Math. Helv., **30** (1956), 234–240.
35. ———, *Tabellen zu den einfachen Lie-Gruppen und ihren Darstellungen*, Lect. Notes in Math., **40**, Springer 1967.

Received January 25, 1974.