PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol 118, No 2, 1985

ÜBER EINE DIFFERENTIALUNGLEICHUNG m-TER ORDNUNG IM KOMPLEXEN

ERWIN MUES UND RAY REDHEFFER[1]

Herrn Professor Ernst Straus zum Gedächtnis gewidmet

Let L defined by $(Lf)(z) = p_m z^m f^{(m)}(z) + \cdots + p_1 zf'(z) + p_0 f(z)$ be an Euler-type differential operator with positive coefficients p_j and let A_0 denote the class of functions analytic in $|z| < 1$ which satisfy $f(0) = 0$. For example, the function $g(z) = cz$ belongs to A_0, if c is a constant. Clearly $(Lg)(z) = cz(p_1 + p_0)$ and hence, if $|(Lg)(z)| \leq 1$ for $|z| < 1$, we must have $|g(z)| \leq 1/\lambda$ for $|z| < 1$, where $\lambda = p_0 + p_1$. Here it is shown that the same result holds for all $f \in A_0$, provided $p_0 \leq 2p_2$, and that the latter condition is sharp. Our result solves, in sharpened and generalized form, a problem that has been open since 1978. An important aid in the proof is a recent theorem of Brown and Hewitt, which improves a well-known criterion of Vietoris for positivity of certain trigonometric sums.

1. Einleitung. Es sei A der Raum der in $|z| < 1$ holomorphen Funktionen und A_0 die Unterklasse von Funktionen $f \in A$ derart, dass $f(0) = 0$ ist. Ausgangspunkt für diese Arbeit ist das folgende von S. Miller in [**1**] formulierte

Problem. Es sei $f \in A_0$, $m \in \mathbf{N}$, und für $|z| < 1$

$$\left|z^m f^{(m)}(z) + z^{m-1} f^{(m-1)}(z) + \cdots + zf'(z) + f(z)\right| < 1.$$

Folgt daraus $|f(z)| < 1$ für $|z| < 1$?

Der Fall $m = 1$ ist trivial, und der Fall $m = 2$ ist in einer Arbeit von Miller und Mocanu [**3**] enthalten. Hier verallgemeinern wir das Problem auf Ungleichungen der Form

$$\left|p_m z^m f^{(m)}(z) + p_{m-1} z^{m-1} f^{(m-1)}(z) + \cdots + p_1 zf'(z) + p_0 f(z)\right| < 1$$

mit positiven Parametern p_j, $j = 0,\ldots,m$, und geben auf verschiedenen Wegen hinreichende Bedingungen für das Bestehen der Ungleichung $|f(z)| < 1/\lambda_1$ mit $\lambda_1 = p_0 + p_1$ an. Offenbar ist dieses Ergebnis optimal,

---

[1] z.Zt. als Gastprofessor an der Universität Karlsruhe mit Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft.

da $f(z) = z/\lambda_1$ zur Klasse A_0 gehört. Im Falle $p_j = 1$ erhält man $|f(z)| < 1/2$. Das zeigt, dass die Antwort auf die oben gestellte Frage positive ausfällt und dass $1/2$ (anstatt 1) die korrekte Schranke für $|f|$ ist. Bei $m = 2$ ergibt unser Ergebnis eine Verstärkung und Verallgemeinerung eines Satzes in [**3**].

2. Ergebnisse. Für $m \in \mathbf{N}$ und $p_j \in \mathbf{R}$ definieren wir einen Operator L: $A \to A$ bzw. L: $A_0 \to A_0$ durch

$$(Lf)(z) = p_m z^m f^{(m)}(z) + \cdots + p_1 z f'(z) + p_0 f(z). \tag{1}$$

Der folgende Satz wird bewiesen:

Satz 1. Für $j = 0, 1, \ldots, m$ sei $p_j > 0$, sei $\lambda_1 = p_0 + p_1$, sei $f \in A_0$, und falls $m \geq 3$ sei weiter $p_0 \leq 2p_2$. Dann gilt

$$|(Lf)(z)| < 1 \quad \text{für } |z| < 1 \Rightarrow \lambda_1 |f(z)| < 1 \quad \text{für } |z| < 1.$$

Im Falle $p_j > 0$, die hier vorausgesetzt wird, würde man natürlich erwarten, dass die Funktion $f(z) = z/\lambda_1$ sozugagen massgebend ist und die richtige Schranke für $f \in A_0$ bestimmt. Nach Satz 1 ist das zwar für $m \leq 2$ richtig, aber nach Satz 2 stimmt es für $m \geq 3$ im allgemeinen nicht:

Satz 2. Es sei $m \geq 3$ und p_j für $j \neq 3$ seien gegebene positive Zahlen. Gilt die Behauptung von Satz 1 für beliebig grosses p_3, so ist $p_0 \leq 2p_2$.

3. Der Fall $m \leq 2$. Wir benutzen den folgenden

HILFSSATZ 1 [**3**]. *Es sei f holomorph für $|z| < 1$, $f(z) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n z^n$, $p \geq 1$. Es sei $0 < r_0 < 1$ und $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ ein Punkt mit $|f(z_0)| = \max_{|z|=r_0} |f(z)|$. Dann ist*

$$\omega = z_0 \frac{f'(z_0)}{f(z_0)} \text{ reell und } \geq P, \qquad \operatorname{Re}\left(z_0 \frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} \right) \geq \omega - 1.$$

Aus der Voraussetzung von Satz 1 im Falle $m = 2$ folgt mit dem Schwarzschen Lemma für $z = z_0$

$$\left| p_2 z_0 \frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} z_0 \frac{f'(z_0)}{f(z_0)} + p_1 z_0 \frac{f'(z_0)}{f(z_0)} + p_0 \right| \leq \frac{|z_0|}{|f(z_0)|},$$

also wegen $\operatorname{Re}(Z) \leq |Z|$ mit Hilfssatz 1

$$p_2(\omega - 1)\omega + p_1 \omega + p_0 \leq \frac{|z_0|}{|f(z_0)|}.$$

Aus $\omega \geq 1$ folgt die Behauptung von Satz 1. Der Fall $m = 1$ ist noch einfacher; man setze $p_2 = 0$.

4. Zusammengang mit einer Kosinusreihe. Im folgenden sei

(2) $$R^k(n) = n(n-1)\cdots(n-k+1), \qquad k = 1,\ldots,n,\ n \in \mathbf{N}.$$

Bei gegebenem $p_0, p_1,\ldots,p_m \in \mathbf{R}$ sei weiter $\lambda_n = \lambda_n(p_0, p_1,\ldots,p_m)$ definiert durch

(3) $$\lambda_n = p_m R^m(n) + p_{m-1}R^{m-1}(n) + \cdots + p_1 R^1(n) + p_0, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Man beachte, dass die Funktionen $f_n(z) = z^n$, $n \in \mathbf{N}$, Eigenfunktionen von L mit den Eigenwerten λ_n sind, d.h.

(4) $$Lz^n = \lambda_n z^n, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Für $f(z) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n z^n \in A$ ist dann

$$(Lf)(z) = \sum_{n=p}^{\infty} \lambda_n a_n z^n, \qquad |z| < 1.$$

Unser Ziel ist, Bedingungen für die $p_0, p_1,\ldots,p_m$ aufzustellen, so dass aus

(5) $$f \in A, \qquad |(Lf)(z)| \leq |z|^p \quad \text{für } |z| < 1$$

die Abschätzung

(6) $$|f(z)| \leq \frac{|z|^p}{\lambda_p} \quad \text{für } |z| < 1$$

folgt. Wir werden uns dabei im wesentlichen auf den Fall $p = 1$ beschränken.

Hilfssatz 2. *Es sei $p \in \mathbf{N}$, $\lambda_n \in \mathbf{R}$, $\lambda_n \neq 0$ für $n \in \mathbf{N}$, und*

(7) $$\frac{1}{\lambda_p} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{\lambda_{n+p}} \geq 0 \quad \textit{für } 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Dann gilt (5) $\Rightarrow$ (6).

Im folgenden Beweis von Hilfssatz 2 setzen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraus, dass alle auftretenden Reihen absolut konvergent sind. Es sei für $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$F(\theta) = f(e^{i\theta}) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n e^{in\theta},$$

$$G(\theta) = (Lf)(e^{i\theta}) = \sum_{n=p}^{\infty} \lambda_n a_n e^{in\theta},$$

wobei $a_0 = a_1 = \cdots = a_{p-1} = 0$ aus der Voraussetzung $\lambda_n \neq 0$ folgt. Dann ist

$$a_n = \frac{1}{2\pi\lambda_n} \int_0^{2\pi} G(\theta) e^{-in\theta}\, d\theta$$

und daher

$$F(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(\varphi) G(\theta - \varphi)\, d\varphi,$$

wobei

$$H(\varphi) = \sum_{n=p}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{\lambda_n}$$

ist. F lässt sich auch schreiben als

$$F(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(\varphi) e^{-ip\varphi} e^{ip\varphi} G(\theta - \varphi)\, d\varphi. \tag{8}$$

Da

$$\int_0^{2\pi} e^{in\varphi} e^{ip\varphi} G(\theta - \varphi)\, d\varphi = 0 \qquad \text{für } n = -1, -2, -3, \ldots$$

ist, kann man zu $H(\varphi)e^{-ip\varphi}$ in (8) eine beliebige Funktion $I(\varphi)$ der Form

$$I(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-in\varphi}$$

addieren. Bezeichnet man die Klasse solcher Funktionen I mit J, so erhält man aus (8), wenn man die Voraussetzung $|G(\theta)| \leq 1$ beachtet,

$$|F(\theta)| \leq \inf_{I \in J} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |H(\varphi) e^{-ip\varphi} + I(\varphi)|\, d\varphi.$$

Wir wählen $c_n = 1/\lambda_{n+p}$, $n \in \mathbf{N}$, und erhalten mit dieser Funktion I

$$|F(\theta)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{\lambda_p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos n\varphi}{\lambda_{n+p}} \right| d\varphi.$$

Da die in den Betragsstrichen stehende Kosinusreihe nach Voraussetzung nichtnegativ ist, folgt

$$|F(\theta)| \leq \frac{1}{\lambda_p},$$

und das war die Behauptung.

Wir merken noch an: Wenn uber die λ_n ausser $\lambda_n \neq 0$ nichts vorausgesetzt wird, dann erhält man bei der Wahl $I(\varphi) \equiv 0$

$$|f(z)| \leq |z|^p \left(\sum_{n=p}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^2} \right)^{1/2}.$$

Hier brauchen die p_j nicht mehr reell zu sein, und auch die Voraussetzung $|(Lf)(z)| \leq |z|^p$ lässt sich abschwächen.

5. Hinreichende Bedingungen im Falle $m \geq 3$. Um explizite über die p_j formulierte hinreichende Bedingungen für die Positivät der Kosinusreihe

$$\frac{1}{\lambda_p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cos n\theta}{\lambda_{n+p}}$$

zu bekommen, wenden wir das folgende Kriterium von Brown und Hewitt an:

HILFSSATZ 3 [**2**]. *Ist* $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0$ *mit* $a_0 > 0$ *und*

$$a_{2k} \leq \frac{2k}{2k+1} a_{2k-1}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

so ist für $n \in \mathbf{N}$, $0 \leq \theta < \pi$,

$$a_0 + a_1 \cos \theta + a_2 \cos 2\theta + \cdots + a_n \cos n\theta > 0.$$

Dieses Ergebnis verschärft einen Satz von Vietoris [**5**], wobei die vorige Bedingung durch die stärkere Bedingung

$$a_{2k} \leq \frac{2k-1}{2k} a_{2k-1}$$

ersetzt ist. In der erste Fassung dieser Arbeit haben wir den Satz von Vietoris benutzt, aber dieser hat den Nachteil, dass ausser $p_0 \leq 2p_2$ noch $p_1 \leq 6p_3$ für den Beweis von Satz 1 erforderlich ist.

Um (7) mit Hilfssatz 3 im Falle $p = 1$ nachzuweisen, genügt es zu zeigen, dass ausser $\lambda_n > 0$ noch

$$2\lambda_1 \leq \lambda_2, \qquad \lambda_n \leq \lambda_{n+1} \quad (n \geq 2) \tag{9}$$

und

$$(n+1)\lambda_n \leq n\lambda_{n+1}, \qquad n = 2, 4, 6, \ldots \tag{10}$$

gilt. Aus

$$\lambda_1 = p_0 + p_1, \qquad \lambda_2 = p_0 + 2p_1 + 2p_2$$

folgt, dass die erste Ungleichung (9) mit $p_0 \leq 2p_2$ gleichbedeutend ist, und diese ist in der Voraussetzung von Satz 1 gegeben. Die zweite Ungleichung (9) folgt aus der Monotonie von $R^k(n)$ als Funktion von n, da $p_k \geq 0$ ist. Sie folgt auch aus (10) die, wie wir jetzt sehen, für alle $n \geq 1$ gültig ist.

Wird $R^k(n)$ für $k > n$ durch 0 ersetzt, so ist (10) mit

$$(n+1)\big(p_0 + p_1R^1(n) + p_2R^2(n) + \cdots\big)$$
$$\le n\big(p_0 + p_1R^1(n+1) + p_2R^2(n+1) + \cdots\big)$$

äquivalent. Mit dieser Verabredung ist für, n, $k \ge 1$

$$(n+1)R^k(n) = (n-k+1)R^k(n+1)$$

Daher ist für $k \ge 3$

$$(n+1)p_kR^k(n) = (n-k+1)p_kR^k(n+1) \le np_kR^k(n+1)$$

und wir müssen nur die Gleider in p_0, p_1, p_2 betrachten.

Die erwünschte Ungleichung gilt, wenn

$$p_0 \le p_2\big(nR^2(n+1) - (n+1)R^2(n)\big) = p_2n(n+1)$$

ist, und das ist wegen $p_0 \le 2p_2$ für $n \ge 1$ richtig. Zusammenfassend haben wir den folgenden:

HILFSSATZ 4. *Es sei $m \ge 3$ und $p_j > 0$ für $j = 0, 1, \ldots, m$. Weiter gelte*

$$p_0 \le 2p_2. \tag{11}$$

Die λ_n seien für $n \ge 1$ durch (3) *gegeben. Dann ist*

$$\frac{1}{\lambda_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos n\theta}{\lambda_{n+1}} \ge 0, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi. \tag{12}$$

Satz 1 folgt offenbar aus Hilfssatz 2 und Hilfssatz 4.

6. Eine notwendige Bedingung. Anstatt mit p_j zu arbeiten, setzen wir für den Augenblick

$$L\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j z^j\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j z^j,$$

wobei die linksstehende Reihe zur Klasse A_0 gehört und die λ_j reell sind. Der Operator L wird also durch die Folge $\{\lambda_j\}, j = 0, 1, \ldots, n$, bestimmt.

HILFSSATZ 5. *Es seien λ_j für $j = 1, 2, \ldots, n$ positiv mit λ_1 und λ_2 festegelegt, und es gelte für jedes Polynom f*

$$|(Lf)(z)| \le |z| \text{ für } |z| \le 1 \Rightarrow |f(z)| \le \frac{|z|}{\lambda_1} \text{ für } |z| \le 1. \tag{13}$$

Dabei seien $\lambda_3, \lambda_4, \ldots, \lambda_n$ beliebig; insbesondere sei erlaubt, dass diese λ_j beliebig gross sein dürfen. Dann ist $\lambda_2 \geq \sqrt{2}\lambda_1$ im Falle $n = 3$ und $\lambda_2 \geq 2\lambda_1$, ween sowohl n als auch die λ_j für $j \geq 3$ beliebig gross sein dürnfen.

Zum Beweis setzen wir $\lambda = \lambda_2/\lambda_1$ und

$$f(z) = \frac{c_1}{\lambda_1}z + \frac{c_2}{\lambda_1}z^2 + \eta_3 z^3 + \cdots + \eta_n z^n.$$

Die Bedingung (13) führt auf

$$\begin{aligned} &\left|c_1 + \lambda c_2 z + \lambda_3\eta_3 z^2 + \cdots + \lambda_n\eta_n z^{n-1}\right| \leq 1 \\ &\quad \Rightarrow \left|c_1 + c_2 z + \lambda_1\eta_3 z^2 + \cdots + \lambda_1\eta_n z^{n-1}\right| \leq 1, \end{aligned}$$

wobei beide Ungleichungen für $|z| \leq 1$ zu verstehen sind. Wegen des Maximumprinzips jedoch genügt es, statt dessen die Ungleichungen nur für $|z| = 1$ zu verlangen.

Wir setzen $\lambda_j\eta_j = c_j$ für $j \geq 3$ und erhalten bei $\eta_j \to 0$, $\lambda_j \to \infty$,

$$\sup_{|z|=1}\left|c_1 + \lambda c_2 z + c_3 z^2 + \cdots + c_n z^{n-1}\right| \leq 1 \Rightarrow |c_1| + |c_2| \leq 1.$$

Diese Bedingung ergibt insbesondere

$$|c_1| + |c_2| = 1 \Rightarrow \sup_{|z|=1}\left|c_1 + \lambda c_2 z + c_3 z^2 + \cdots + c_n z^{n-1}\right| \geq 1.$$

Für $0 < t < 1$ wählen wir nun $c_1 = 1 - t$, $c_2 = t$, $c_j = a_{j-1}t$ $(j \geq 3)$ und erhalten

$$\sup_{|z|=1}\left|1 - t + t\left(\lambda z + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1}z^{n-1}\right)\right|^2 \geq 1.$$

Hier ist das linksstehende Quadrat gleich

$$1 - 2t + 2t\,\mathrm{Re}\left(\lambda z + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1}z^{n-1}\right) + O(t^2),$$

und bei $t \to 0+$ ergibt sich die notwendige Bedingung

$$\sup_{|z|=1}\mathrm{Re}\left(\lambda z + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1}z^{n-1}\right) \geq 1. \tag{14}$$

Der Fall $n = 3$.

Wir wählen $a_2 = -1/2$ und erhalten

$$\sup_{|z|=1}\mathrm{Re}(2\lambda z - z^2) \geq 2.$$

Mit $z = e^{i\theta}$ und $x = \cos\theta$ ergibt sich

$$\sup_{|x|\leq 1} 2(\lambda x - x^2) \geq 1,$$

woraus $\lambda \geq \sqrt{2}$ unmittelbar folgt.

Der Fall n beliebig

Wir nehmen $a_j \in \mathbf{R}$,

$$g_n(\theta) = \lambda \cos \theta + a_2 \cos 2\theta + \cdots + a_{n-1} \cos(n-1)\theta$$

und merken an, dass $\sup g_n(\theta) \geq 1$ für alle a_j und alle $n \geq 3$ aus (14) folgt. Im Falle $\lambda < 2$, was jetzt vorausgesetzt, wird, wird ein Gegenbeispiel konstruiert. Zu diesem Zwecke sei $c > 0$ klein und

$$h(\theta) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \theta \leq \pi - c \\ \dfrac{c-\pi}{c}, & \pi - c < \theta \leq \pi. \end{cases}$$

Dann ist

$$h(\theta) \leq 1, \qquad \int_0^\pi h(\theta)\, d\theta = 0, \qquad \int_0^\pi h(\theta) \cos \theta\, d\theta = \pi \frac{\sin c}{c}.$$

Da $\lambda < 2$ ist, gilt bei kleinem $c > 0$

$$(15) \quad h(\theta) \leq 1, \qquad \int_0^\pi h(\theta)\, d\theta = 0, \qquad \frac{2}{\pi} \int_0^\pi h(\theta) \cos \theta\, d\theta > \lambda.$$

Wir wählen $c > 0$ so, dass (15) gilt, und finden dann eine glatte Approximation $g(\theta) \doteq h(\theta)$ derart, dass

$$\sup g(\theta) < 1, \qquad \int_0^\pi g(\theta)\, d\theta = 0, \qquad \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(\theta) \cos \theta\, d\theta = \lambda$$

ist. (Das geschieht wie folgt: Zuerst finden wir eine glatte Funktion h, für die (15) gilt. Dann setzen wir $g = \kappa h$ mit einer passenden Konstante κ, $0 < \kappa < 1$.) Wird nun

$$a_j = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(\theta) \cos j\theta\, d\theta \qquad (j = 2, 3, \ldots, n-1)$$

gesetzt, so ist $g_n(\theta) \to g(\theta)$ gleichmässig auf $[0, \pi]$. Daraus folgt $\sup g_n(\theta) < 1$ für grosses n, also ein Widerspruch.

9. Beweis von Satz 2. Sind p_j für $j \neq 3$ festgelegt dann ist λ_j eine Funktion von p_3 allein, $\lambda_j = \lambda_j(p_3)$. Aus $p_j > 0$ folgt

$$\lambda_j(p_3) \geq p_3 R^3(j) = p_3 j(j-1)(j-2), \qquad j \geq 3$$

und daraus folgt $\lambda_j(p_3) \to \infty$ für $p_3 \to \infty, j \geq 3$. Im Beweis von Hilfssatz 5 war diese Bedingung die einzige notwendige; die Tatsache, dass die λ_j nicht unabhängig gegen ∞ streben spielt keine Rolle. Daher folgt $\lambda_2 \geq 2\lambda_1$ aus der Voraussetzung von Satz 2, und dies ist mit $p_0 \leq 2p_2$ äquivalent. Der Fall $n = 3$ in Hilfsatz 5 bezieht sich auf Polynome f von Grad 3 in Satz 1, und der Fall $n \to \infty$ bezieht sich auf Polynome von Grad $n \to \infty$.

8. Schlussbemerkung. Im Falle $m \geq 3$, $p_j = 1$ kann man durch eine leichte Abschätzung direkt zeigen, dass die Kosinusreihe in Hilfsatz 2 positiv ist. Daraus gewinnt man eine Lösung zum Miller-Mocanu Problem (mit der verbesserten Konstante $1/2$) die durchaus kurz und elementar ist. Der Fall $p_j = 1$ lässt sich auch durch den Satz von Young [**6**] erledigen. Diese und weitere Ergebnisse über das hier behandelte Thema sind vom ersten Verfasser, Universität Hannover zu erhalten.

LITERATUR

[1] D. A., Brannan and J. G. Clunie (edts.), *Aspects of Contemporary Complex Analysis* (Proceedings of an instructional conference organized by the London Math. Soc. at the University of Durham). Academic Press, 1980, p. 61.

[2] Gavin Brown and Edwin Hewitt, *A class of positive trigonometric sums*, Math. Ann., **268** (1984), 91–122.

[3] S. Miller and P. Mocanu, *Second order differential inequalities in the complex plane*, J. Math. Anal. Appl., **65** (1978), 289–305.

[4] I. Schur, *Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind*, J. reine u. angew. Math., **148** (1918), 122–145.

[5] L. Vietoris, *Über das Vorzeichen gewisser trigonometrischer Summen*, Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss., **167** (1958), 125–135.

[6] A. Zygmund, *Trigonometric Series*. Vol. 1, Cambridge, 1959, p. 183.

Received November 17, 1983 and in revised form August 19, 1984.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
DER UNIVERSITÄT HANNOVER
WELFENGARTEN 1
D-3000 HANNOVER
W. GERMANY

AND

UNIVERSITY OF CALIFORNIA
LOS ANGELES, CALIFORNIA 90024
USA