Les Domaines de Carleson

MICHEL ZINSMEISTER

1. Introduction

Si Ω est un domaine simplement connexe du plan, soit $\Delta(\Omega)$ l'espace des *mesures de Carleson généralisées* sur Ω, c'est à dire l'ensemble des mesures μ définies sur Ω pour lesquelles

$$\|\mu\| = \sup_{z \in \partial\Omega,\, r>0} \frac{1}{r} |\mu|(D(z,r)) < +\infty$$

où $D(z,r)$ est le disque fermé de centre z et de rayon r (dans la suite nous noterons également $D = D(0,1)$).

Un célèbre théorème de Carleson [1] affirme que si $\mu \in \Delta(D)$, alors

$$\iint_D |f(z)|\, |d\mu(z)| \le C\|\mu\|\, \|f\|_1$$

pour toute fonction f appartenant à l'espace de Hardy $H^1(D)$. L'objet de cet article est l'analogue de ce théorème dans des domaines de Jordan généraux.

Examinons tout d'abord le cas d'un domaine de Jordan à bord rectifiable. Soit Ω un tel domaine et $\varphi : D \to \Omega$ une représentation conforme. On définit alors l'espace de Hardy

$$H^1(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbf{C};\, f\circ\varphi\varphi' \in H^1(D)\}.$$

Il est facile de voir que cette définition est indépendante de la représentation conforme choisie et l'on peut poser

$$\|f\|_1 = \|f\circ\varphi\varphi'\|_1 = \int_{\partial\Omega} |f(z)|\, |dz|.$$

L'espace $H^1(\Omega)$, muni de cette norme, est un espace de Banach [3]. On dira que Ω est un *domaine de Carleson* s'il existe $C>0$ telle que pour toute mesure $\mu \in \Delta(\Omega)$,

$$\iint_\Omega |f(z)|\, |d\mu(z)| \le C\|\mu\|\, \|f\|_1, \quad f \in H^1(\Omega).$$

Le changement de variable $z = \varphi(\zeta)$ donne

$$\iint_\Omega |f(z)|\, |d\mu(z)| = \iint_D |f\circ\varphi(\zeta)\varphi'(\zeta)|\, |d\nu(\zeta)|$$

Received July 8, 1988. Revision received October 24, 1988.
Michigan Math. J. 36 (1989).

où $\nu=|\varphi'|^{-1}\varphi^*\mu$, la mesure (image) $\varphi^*\mu$ étant définie par $\varphi^*\mu(A)=\mu(\varphi(A))$ pour $A\subset D$. On en déduit immédiatement, grâce au théorème de Carleson et à un argument de type "graphe fermé," que Ω est un domaine de Carleson si et seulement si

(*)

$$\exists C>0;\ \forall\mu\in\Delta(\Omega),\ \forall\varphi: D\to\Omega \text{ conforme},\ \|\nu\|\le C\|\mu\|,\ \text{où } \nu=|\varphi'|^{-1}\varphi^*\mu.$$

La propriété (*) étant indépendante de la rectifiabilité, c'est elle que nous adopterons désormais comme définition d'un domaine de Carleson pour les domaines de Jordan généraux.

Avant d'énoncer le résultat principal et afin de le motiver, donnons quelques exemples de propriétés des domaines de Carleson.

Suites d'interpolation. Rappelons que si Ω est un domaine de $\mathbf{C}$, une suite (ζ_j) de points de Ω est une suite d'interpolation pour $H^\infty(\Omega)$ (en abrégé suite d'interpolation) si pour toute suite $(a_j)\in l^\infty$, il existe une fonction $f\in H^\infty(\Omega)$ telle que pour tout j, $f(\zeta_j)=a_j$.

PROPOSITION 1. *Soit Ω un domaine (simplement connexe) de Carleson et (ζ_j) une suite de points de Ω vérifiant:*

(i) $\exists\alpha>0; \forall j\neq k,\ |\zeta_j-\zeta_k|\ge\alpha\,\mathrm{dist}(\zeta_j,\partial\Omega)$,

(ii) $\sum_{j\ge 0}\mathrm{dist}(\zeta_j,\partial\Omega)\delta_{\zeta_j}\in\Delta(\Omega)$ (δ_z *est la masse de Dirac en* z).

Alors (ζ_j) est une suite d'interpolation.

Preuve. Soit $\mu=\sum\mathrm{dist}(\zeta_j,\partial\Omega)\delta_{\zeta_j}$ et φ une représentation conforme de D sur Ω. Par le théorème de Koebe, $\nu=|\varphi'|^{-1}\varphi^*\mu\cong\sum(1-|z_j|)\delta_{z_j}$ où $z_j=\varphi^{-1}(\zeta_j)$ ($\mu\cong\nu$ signifie: $\exists C>0$, $C^{-1}\mu\le\nu\le C\nu$). On conclut alors en utilisant la caractérisation due à Carleson des suites d'interpolation du disque. □

Ensembles de niveau des fonctions univalentes. Un ensemble E du plan est dit Ahlfors-régulier si, Λ^1 désignant la mesure de Hausdorff linéaire,

$$(**)\qquad \exists C>0;\ \forall z\in\mathbf{C},\ \forall r>0,\ \Lambda^1(E\cap D(z,r))\le Cr.$$

Si Ω est un domaine simplement connexe, $\varphi: D\to\Omega$ sa représentation conforme et $E\subset\Omega$ un ensemble Ahlfors-régulier, alors $\nu=|\varphi'|^{-1}\varphi^*\mu=d\Lambda^1|\varphi^{-1}(E)$ si $\mu=d\Lambda^1|E$. Ce dernier fait, ajouté au théorème de Koebe, implique immédiatement

PROPOSITION 2. *Si Ω est un domaine de Carleson et si $E\subset\Omega$ est Ahlfors-régulier, alors $\varphi^{-1}(E)$ est également Ahlfors-régulier.*

La dualité H^1-BMO. Rappelons tout d'abord qu'une fonction $b:\mathbf{T}\to\mathbf{C}$ est dite appartenir à BMO(T) si

$$\|b\|_*=\sup\frac{1}{|I|}\int_I|b(t)-b_I|\,dt<+\infty,$$

b_I désignant la moyenne de b sur I, le sup étant pris sur les intervalles de $\mathbf{T}$. On définit alors BMOA(D) comme l'espace des fonctions f, holomorphes sur D, telles que

$$\|f\|_* = \sup_{r<1} \|f(re^{i\cdot})\|_* < +\infty.$$

La transformation de Hilbert étant bornée sur $\mathrm{BMO}(\mathbf{T})$, une norme équivalente est obtenue sur $\mathrm{BMOA}(D)$ en remplaçant, dans la définition de $\|f|_*$, f par Ref. Cette remarque nous servira au §2.

Si maintenant Ω est un domaine simplement connexe et $\varphi: D \to \Omega$ une représentation conforme, on définit

$$\mathrm{BMOA}(\Omega) = \{f: \Omega \to \mathbf{C}; f\circ\varphi \in \mathrm{BMOA}(D)\}.$$

L'espace $\mathrm{BMOA}(D)$ étant invariant par homographie, cette définition est indépendante de φ.

PROPOSITION 3. *Soit Ω un domaine de Carleson et $f: \Omega \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Si* $\operatorname{dist}(z, \partial\Omega)|f'(z)|^2\, dz\, d\bar{z} \in \Delta(\Omega)$, *alors* $f \in \mathrm{BMOA}(\Omega)$.

Preuve. Posons $\mu = \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)|f'(z)|^2\, dz\, d\bar{z}$. *Alors, Ω étant de Carleson,* $\nu \cong (1-|\zeta|)|f'\circ\varphi\varphi'|^2\, d\zeta\, d\bar{\zeta} \in \Delta(D)$ *et le résultat découle de* [4]. □

Le principal résultat de ce travail est une caractérisation des domaines de Carleson en termes de représentation conforme:

THÉORÈME 1. *Soit Ω un domaine simplement connexe du plan et $\varphi: D \to \Omega$ une représentation conforme. Alors Ω est un domaine de Carleson si et seulement si* $\operatorname{Log}\varphi' \in \mathrm{BMOA}(D)$.

Dans [11], il est démontré que $\operatorname{Log}\varphi' \in \mathrm{BMOA}(D)$ si $\partial\Omega$ est Ahlfors-régulier. Un tel domaine est donc de Carleson, et l'on retrouve un résultat de David [2], et ceci de façon élémentaire, sans faire usage d'estimations sur l'intégrale de Cauchy.

D'autre part, le Théorème 1 montre que tout domaine étoilé, spiralé ou presque convexe (voir [8]) est un domaine de Carleson. Enfin, le Théorème 1 précise le contre-exemple de [5], car il permet de construire des domaines rectifiables que ne sont pas de Carleson (par exemple, les domaines non-Smirnov [3]).

La démonstration du Théorème 1 occupera les paragraphes 2 et 3. Nous terminons cette introduction par une dernière remarque concernant les domaines à bord Ahlfors-régulier.

PROPOSITION 4. *Soit Ω un domaine simplement connexe tel que $\partial\Omega$ est Ahlfors-régulier, $\varphi: D \to \Omega$ une représentation conforme, et $\nu \in \Delta(D)$. Alors l'unique mesure μ sur Ω telle que $|\varphi'|^{-1}\varphi^*\mu = \nu$ appartient à $\Delta(\Omega)$.*

Preuve. Soit $z \in \mathbf{C}$ et $r > 0$. Par le théorème de Hayman–Wu [7], les composantes connexes de $\varphi^{-1}(\Omega \cap D(z, r))$ sont à bord Ahlfors-régulier avec une constante uniforme. Soient D_j ces composantes. Alors

$$\iint_{\Omega\cap D(z,r)} |d\mu| = \sum_j \iint_{D_j} |\varphi'|\, |d\nu| \le C \sum_j \Lambda^1(\varphi(\partial D_j)) \le C(\Lambda^1(\partial\Omega \cap D) + 2\pi r),$$

par le théorème 1. □

COROLLAIRE. *Pour un domaine Ω à bord Ahlfors-régulier, les Propositions 1, 2, et 3 deviennent des équivalences.*

En particulier, les images par la représentation conforme des cercles $|z| = r < 1$ sont uniformément Ahlfors-régulières.

L'auteur tient à remercier chaleureusement le referee dont les remarques ont permis de considérablement améliorer une première version de cet article.

2. Démonstration du Théorème 1: La Condition est Nécessaire

Soit φ une représentation conforme de D dans $\mathbf{C}$ telle que $\operatorname{Log}\varphi'$ n'appartient pas à $\mathrm{BMOA}(D)$. Il suffit, pour montrer la nécessité de la condition, d'exhiber une suite E_N d'ensembles uniformément Ahlfors-réguliers telle que la constante de régularité de $\varphi^{-1}(E_N)$ tende vers $+\infty$ avec N.

Avant de passer à la construction proprement dite, donnons quelques définitions qui nous serons utiles. Si I_n est un intervalle dyadique de la $n°$ génération de ∂D, posons:

$J_n = \{(1-|I|/2\pi)e^{it}; t \in I_n\}$,
$z_n =$ le centre de I_n,
$C_n = \{re^{it}; t \in I_n, 1-|I|/2\pi < r < 1\}$
$R_n = \{re^{it}; t \in I_n, 1-|I|/2\pi < r < 1-|I|/4\pi\}$,
$R_n^* = 11/10R_n$ (c'est à dire le transformé de R_n par l'homothétie de centre le centre de R_n et de rapport $11/10$).

Si $z \in \partial D$ est non-dyadique, il existe pour tout $n \geq 0$ un unique intervalle dyadique I_n de la $n°$ génération qui contient z, et z est limite non-tangentielle de la suite (z_n) correspondante. Enfin, si f est une fonction définie sur D on écrit, pour tout $z \in \partial D$ non dyadique, $f^*(z) = \sup_{n\geq 0}|f(z_n)|$.

Nous pouvons à présent commencer la construction des E_N: Puisque $\operatorname{Log}\varphi' \notin \mathrm{BMOA}(D)$, il existe $r \in (0,1)$ tel que $\|\operatorname{Log}|\varphi'(re^{i\cdot})|\|_* \geq N$. En conséquence (voir [6]), il existe un automorphisme Θ du disque $D(0,r)$ tel que, si l'on a posé $\psi = \varphi\circ\Theta$,

$$\int_0^{2\pi}\left|\operatorname{Log}\left(\frac{|\psi'(0)|}{|\psi'(re^{it})|}\right)\right| dt \geq N.$$

Comme $\operatorname{Log}|\psi'|$ est harmonique,

$$\int_0^{2\pi}\operatorname{Log}\left(\frac{|\psi'(0)|}{|\psi'(re^{it})|}\right) dt = 0,$$

et on a encore

$$\int_0^{2\pi}\operatorname{Log}^+\left(\frac{|\psi'(0)|}{|\psi'(re^{it})|}\right) \geq \frac{N}{2}.$$

Posons maintenant $\Psi(z) = \psi(rz)$, de sorte que Ψ est définie sur D. De plus, la régularité étant une notion invariante par homothétie, on peut supposer que $|\Psi'(0)| = 1$. Pour $n \geq 0$, posons alors

$$F_n = \{z \in \partial D;\ (\mathrm{Log}^+(1/|\Psi'|))^*(z) > n\}.$$

Si $z \in F_n$, il existe un plus petit entier $k = k(z)$ tel que $\mathrm{Log}|\Psi'(z_k)| \leq -n$. Soit I_k l'intervalle dyadique correspondant; F_n est alors réunion disjointe de tels intervalles, soit $F_n = \bigcup I_\lambda$. Posons $G_n = \bigcup J_\lambda$, $G = \bigcup G_n$, et $E = \Psi(G)$.

LEMME. *$\Lambda^1(G) \geq cN$, pour une constante c universelle.*

En effet, le fait que $\mathrm{Log}\,\Psi'$ appartienne à la classe de Bloch avec une norme ≤ 6 implique l'existence d'une constante M absolue telle que tout point ζ de D appartienne à au plus M ensembles G_n, ce qui implique:

$$\Lambda^1(G) \geq c \sum |F_n| \geq c \int_0^{2\pi} \mathrm{Log}^+\left(\frac{1}{|\Psi'(e^{it})|}\right) dt \geq cN. \qquad \square$$

LEMME. *E est Ahlfors-régulier avec une constante indépendante de N.*

Soit $D(z, r)$ un disque de $\mathbf{C}$ avec $z \in \Psi(D) = \Omega$ (il est clair qu'il suffit de tester la régularité sur ces disques).

Si $r < \frac{1}{2}\mathrm{dist}(z, \partial\Omega)$, le fait que $\Lambda^1(E \cap D(z, r)) \leq Cr$ découle du théorème de Koebe.

Si $r \geq \frac{1}{2}\mathrm{dist}(z, \partial\Omega)$, on envisage deux cas:

(1) $\Psi(0) \in D(z, r)$: Il existe alors une constante universelle $c > 0$ telle que $r \geq c$ et il suffit de vérifier que $\Lambda^1(E) < +\infty$ ce qui est immédiat car $\Lambda^1(E) \leq 2\pi \sum e^{-n}$.

(2) $\Psi(0) \notin D(z, r)$: Soient alors Ω_j les composantes connexes de $\Omega \cap D(z, r)$ et, pour tout j, γ_j l'unique intervalle de $\partial D(z, r)$ qui sépare $\Psi(0)$ de Ω_j. Posons $\Gamma_j = \Psi^{-1}(\gamma_j)$ et soit D_j la composante de $D \backslash \Gamma_j$ qui ne contient pas 0: alors,

$$\Lambda^1(E \cap \Omega_j) \leq \int_{G \cap D_j} |\Psi'|\, ds.$$

Soient R_p les rectangles dyadiques maximaux qui rencontrent Γ_j (voir le début de ce paragraphe pour la définition).

LEMME.

$$\int_{C_p \cap G} |\Psi'|\, ds \leq C|I_p|\,|\Psi'(z_p)|.$$

Soit k le plus petit entier tel que $G_k \cap C_p \neq \emptyset$. Alors, par définition des G_k, $|\Psi'(z_p)| \geq e^{-k}$, et l'on peut écrire, comme dans le premier cas,

$$\int_{C_p \cap G} |\Psi'|\, ds \leq |I_p| \sum_{\lambda \geq k} e^{-\lambda} \leq C|I_p| e^{-k} \leq C|I_p|\,|\Psi'(z_p)|.$$

Du lemme on déduit immédiatement que

$$\Lambda^1(E \cap \Omega_j) \leq C \sum |I_p|\,|\Psi'(z_p)|.$$

Mais $|I_p|\,|\Psi'(z_p)| \leq C\Lambda^1(\Psi(\Gamma_j \cap R_p^*))$ et, comme $\sum 1_{R_p^*} \leq 10$, on déduit

$$\Lambda^1(E \cap \Omega_j) \leq C\Lambda^1(\gamma_j)$$

et, finalement, $\Lambda^1(E \cap D(z, r)) \leq C \sum \Lambda^1(\gamma_j) \leq 2\pi Cr$. $\square$

On peut maintenant conclure. Soit $rG=\{rz; z\in G\}$ et $H=\Theta(rG)$. Alors $\varphi(H)=E$ et E est Ahlfors-régulier avec constante absolue tandis que $c(H)$, la constante de régularité de H, vérifie $c(H)\geq c\Lambda^1(\Theta^{-1}(H))\geq cN$.

3. Démonstration du Théorème 1: La Condition est Suffisante

Soit Ω un domaine simplement dont la représentation conforme $\varphi: D\to\Omega$ vérifie $\operatorname{Log}\varphi'\in \mathrm{BMOA}(D)$. Posons $M=\|\operatorname{Log}\varphi'\|_*$ et considérons $\mu\in\Delta(\Omega)$. Sil'on pose $\varphi_r(\zeta)=\varphi(r\zeta)$ il est clair que $\nu_r=|\varphi_r'|^{-1}\varphi_r^*\mu\in\Delta(D)$ et il suffit, grâce à un argument d'approximation, de montrer que $\|\nu_r\|$ est majoré indépendamment de r pour prouver le résultat. En d'autres termes, on peut supposer *à priori* que $\nu=|\varphi'|^{-1}\varphi^*\mu\in\Delta(D)$ et il nous faut trouver une majoration de $\|\nu\|$ ne dépendant que de $\|\mu\|$ et de M.

La démonstration commence par un lemme qui est certainement bien connu. Rappelons qu'un c-domaine de Lavrentiev est un domaine de Jordan Ω dont le bord, rectifiable, vérifie

$$\forall\zeta,\xi\in\partial\Omega,\ \ \Lambda^1(\gamma(\zeta,\xi))\leq c|\zeta-\xi|$$

où $\gamma(\zeta,\xi)$ désigne le plus petit sous-arc de $\partial\Omega$ d'extrémités ζ,ξ.

LEMME. *Si Ω est un c-domaine de Lavrentiev alors, si $\mu\in\Delta(\Omega)$, $\nu=|\varphi'|^{-1}\varphi'\mu\in\Delta(D)$ et $\|\nu\|\leq K(c)\|\mu\|$.*

Preuve. Soit $f\in H^1(D)$ avec $f(0)=0$ et $F=f\circ\psi\psi'$ $(\psi=\varphi^{-1})$. Alors $F\in H^1(\Omega)$ et $F(0)=0$ (on a supposé $0\in\Omega$, $\varphi(0)=0$). Par un théorème de Tukia [10], il existe un homéomorphisme bi-Lipschitzien B de constante ne dépendant que de c, de $\mathbf{C}$ sur lui-même, tel que $\Omega=B(D)$. Alors:

$$\iint_D |f|\ |d\nu|=\iint_\Omega |F|\ |d\mu|=\iint_D |F\circ B|\ dB^*|\mu|.$$

Soit $\tau=B^*\mu$. Puisque B est bi-Lipschitzien, $\tau\in\Delta(D)$, et $\|\tau\|\leq K(c)\|\mu\|$. Par le théorème de Carleson, si Mg désigne la fonction maximale non tangentielle,

$$\iint_D |F\circ B|\ d\tau\leq K(c)\|\mu\|\int_{\partial D} M(F\circ B)\ |dz|\leq K(c)\|\mu\|\int_{\partial\Omega} M(F)\ |dz|$$

(pour la définition et les propriétés de la fonction maximale non-tangentielle sur Ω, voir [11]). Mais il est bien connu [11] que $H^1(\Omega)$ est caractérisé par fonction maximale non tangentielle, et donc,

$$\iint_D |f|\ |d\nu|\leq K(c)\|\mu\|\,\|f\|_1.$$

On en déduit (voir [6]) que $|\nu|(D(z,r))\leq K(c)\|\mu\|r$ pour tout disque $D(z,r)$ tel que $z\in\partial D$, et donc le lemme. □

Pour $\alpha>0$ on définit alors $\varphi_\alpha(z)=\int_0^z \varphi'(u)^\alpha\,du$. Par [9], il existe $\epsilon,\kappa>0$ tels que φ_α soit une représentation conforme sur un κ-domaine de Lavrentiev si $\alpha\le\epsilon/(1+M)$.

La stratégie est alors la suivante: on fixe un $\alpha=\epsilon'/(1+M)$ où $\epsilon'\le\epsilon$ sera choisi plus tard, on considère la mesure μ_α sur $\varphi_\alpha(D)$ telle que $|\varphi'_\alpha|^{-1}\varphi^*_\alpha\mu_\alpha=\nu$ et l'on montre que $\mu_\alpha\in\Delta(\varphi_\alpha(D))$ avec $\|\mu_\alpha\|\le C\|\mu\|^\alpha\|\nu\|^{1-\alpha}$. On applique alors le lemme précédent pour obtenir $\|\nu\|\le C\|\mu\|^\alpha\|\nu\|^{1-\alpha}$, ce qui implique $\|\nu\|\le C\|\mu\|$, l'inégalité désirée.

Soit I un intervalle de ∂D et $C(I)=\{re^{it};\ t\in I \text{ et } r\in(1-|I|/2\pi,1)\}$. Soit également $z_I=(1-|I|/4\pi)e^{i\Theta_I}$ et $\zeta_I=(1-|I|/\pi)e^{i\Theta_I}$, où Θ_I désigne le centre de I.

LEMME.

$$\iint_{C(I)}|\varphi'|^\alpha\,|d\nu|\le C\|\mu\|^\alpha\|\nu\|^{1-\alpha}|I|\,|\varphi'(z_I)|^\alpha.$$

Preuve du lemme. Une variante facile du lemme de Prawitz montre qu'il existe $p>0$ tel que pour toute représentation conforme $\Theta: C(I)\to\mathbf{C}\setminus\{0\}$ et pour tout $q\le p$,

$$\int_{\partial C(I)}|\Theta|^q\,ds\le C_q|I|\,|\Theta(z_I)|^q.$$

On pose alors $\alpha=\epsilon'/(1+M)$ avec $\epsilon'\le\epsilon$ assez petit pour que $2\alpha/(1-\alpha)\le p$ et on écrit:

$$\begin{aligned}\iint_{C(I)}|\varphi'|^\alpha\,|d\nu|&=\iint_{C(I)}|\varphi'|^\alpha|\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_I)|^{-2\alpha}|\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_I)|^{2\alpha}\,|d\nu|\\
&\le\left(\iint_{C(I)}|\varphi'(\zeta)|\,|\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_I)|^{-2}\,|d\nu|\right)^\alpha\\
&\quad\times\left(\iint_{C(I)}|\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_I)|^{2\alpha/(1-\alpha)}\,|d\nu|\right)^{1-\alpha}\\
&=\left(\iint_{\varphi(C(I))}|z-\varphi(\zeta_I)|^{-2}\,|d\mu|\right)^\alpha\\
&\quad\times\left(\iint_{C(I)}|\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_I)|^{2\alpha/(1-\alpha)}\,|d\nu|\right)^{1-\alpha}\end{aligned}$$

Pour majorer la première intégrale on utilise le fait que $\mu\in\Delta(\Omega)$; si l'on note $d=\operatorname{dist}(\varphi(\zeta_I),\partial\varphi(C(I)))$,

$$\begin{aligned}\iint_{\varphi(C(I))}|z-\varphi(\zeta_I)|^{-2}\,|d\mu|&=\sum_{n\ge0}\iint_{2^nd\le|z-\varphi(\zeta_I)|<2^{n+1}d}|z-\varphi(\zeta_I)|^{-2}\,|d\mu|\\
&\le C\frac{\|\mu\|}{d},\end{aligned}$$

et l'on remarque que $d\ge c|I|\,|\varphi'(z_I)|$.

Pour majorer la deuxième intégrale on utilise tout d'abord le théorème de Carleson:

$$\iint_{C(I)} |\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_I)|^{2\alpha/(1-\alpha)}\,|d\nu| \leq C\|\nu\| \int_{\partial C(I)} |\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_I)|^{2\alpha/(1-\alpha)}\,|d\zeta|$$
$$\leq C\|\nu\|\,|I|\,|\varphi(z_I)-\varphi(\zeta_I)|^{2\alpha/(1-\alpha)}$$
$$\leq C\|\nu\|\,|I|\,(|I|\,|\varphi'(z_I)|)^{2\alpha/(1-\alpha)},$$

par le lemme de Prawitz. Le lemme en découle. □

On termine la preuve de la condition suffisante en remarquant que φ_α admet une extension K-quasi-conforme à $\mathbf{C}$ tout entier, K étant une constante numérique. Par des arguments standard, on montre alors que si $z \in \partial\Omega$ et $r > 0$, il existe un intervalle $I \subset \partial D$ tel que

$$\Omega \cap D(z, r) \subset \varphi_\alpha(C(I)) \quad \text{et} \quad |I|\,|\varphi'_\alpha(z_I) \leq c\,\mathrm{diam}(\varphi(C(I))) \leq Cr.$$

Références

1. L. Carleson, *An interpolation problem for bounded analytic functions,* Amer. J. Math. 80 (1958), 921-930.
2. G. David, Thèse d'état, Ecole polytechnique, 1986.
3. P. Duren, *Theory of Hardy spaces,* Academic Press, New York, 1970.
4. C. Fefferman et E. M. Stein, *Hardy spaces of several variables,* Acta Math. 129 (1972), 137-193.
5. J. Fernandez et M. Zinsmeister, *Ensembles de niveau des représentations conformes,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A 305 (1987), 449-452.
6. J. Garnett, *Bounded analytic functions,* Academic Press, New York, 1981.
7. W. Hayman et J. M. Wu, *Level sets of univalent functions,* Comment. Math. Helv. 56 (1981), 366-403.
8. C. Pommerenke, *Univalent functions,* Vandenhoeck et Ruprecht, Amsterdam, 1975.
9. ———, *Schlichte Funktionen und BMOA,* Comment. Math. Helv. 52 (1977), 591-602.
10. P. Tukia, *The planar Schönflies theorem for Lipschitz maps,* Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 5 (1980), 49-72.
11. M. Zinsmeister, *Domaines de Lavrentiev,* Publi. Math. Orsay, 1985.

UA 757 Analyse Harmonique
Université de Paris-Sud
Mathématiques (Bât. 425)
91405 ORSAY Cedex, France

et

Université de Rouen
Mathématiques
76130 MONT St AIGNAN Cedex