Quelques remarques sur la structure projective d'espace fibré

Par

Jōyō KANITANI, Seizi TAKIZAWA

(Reçu le 21 Décembre, 1959)

Dans un mémoire précédent [1] nous avons démontré qu'il existe, au dessus d'une variété différentiable paracompacte à deux dimensions, un champ de tenseurs non-triviaux covariants symétriques du troisième ordre qui est apolaire au champ de tenseurs fondamentaux (covariants symétriques définis positifs du second ordre). Nous démontrerons, dans cet article, ce fait pour la variété différentiable paracompacte M à n dimensions, et d'ailleurs que nous pouvons choisir un tel champ de la manière qu'il ne s'annule pas dans la variété M toute entière, et ensuite que, si $n=2$ et si la variété M est compacte, il existe un tel champ qui n'admet que des points singulier de nombre fini.

En prenant ensuite le cas où $n=3$, nous introduisons une structure géométrique relative la variété M , qui peut être regardée come une généralisation de la directrice de Wilczynski d'une surface dans un espace projectif.

1. Soit M une variété différentiable paracompacte à n dimensions. Prenons un point $x \in M$. Soient $U \ni x$ le domaine d'un système de coordonnées locales $u^1, \dots, u^n$, T^* l'espace de covecteurs tangents à M en x , σ le champ de tenseurs fondamentaux. Supposons que ce champ s'exprime, dans U , par

$$\sigma = a_{ij}(x) du^i \otimes du^j.$$

Soit $Y_x = \{y_{ijk} du^i \otimes du^j \otimes du^k\}$ l'espace vectoriel formé par les éléments symétriques de $T_x^* \otimes T_x^* \otimes T_x^*$. Envisageons l'application linéaire $\varphi: Y_x \rightarrow T_x^*$ défini par

$$\varphi(y_{ijk} du^i \otimes du^j \otimes du^k) = y_{im} a^{im} du^i \quad ((a^{ji}) = (a_{ij})^{-1}).$$

Etant donné un covecteur $v_i du^i \in T_x^*$, si l'on pose

$$y_{ijk} = \frac{1}{n+2}(v_i a_{jk} + v_j a_{ik} + v_k a_{ij}),$$

il vient $y_{s_{ti}} a^{st} = v_i$. C'est-à-dire que l'application φ est une surjection. Ainsi, $W_x = \ker \varphi$ est un espace vectoriel tel que

$$\dim Y_x - \dim W_x = \dim T_x^*,$$

ou bien

$$N = \dim W_x = \binom{n}{3} + n^2 - n.$$

2. Si l'on pose

$$\theta^{ijk} = Sdu^i \otimes du^j \otimes du^k \quad (S: \text{symétrisation})$$

$$\tilde{\theta}^{ijk} = \theta^{ijk} - \frac{1}{3}(a^{ij}\delta_1^k + a^{jk}\delta_1^i + a^{ik}\delta_1^j) \frac{\theta^{111}}{a^{11}}$$

.....

$$- \frac{1}{3}(a^{ij}\delta_n^k + a^{jk}\delta_n^i + a^{ik}\delta_n^j) \frac{\theta^{nnn}}{a^{nn}},$$

il vient

$$\tilde{\theta}^{111} = 0, \tilde{\theta}^{222} = 0, \dots, \tilde{\theta}^{nnn} = 0,$$

et les autres $\tilde{\theta}^{ijk}$ que nous désignerons par $\tilde{\theta}^{i'j'k'}$ se font un système de base de l'espace vectoriel W_x .

Si $x \in U \cap U'$, on a

$$\begin{aligned} \sum W_{i'j'k'} \tilde{\theta}^{i'j'k'} &= W_{ijk} \theta^{ijk} \quad (a^{ij} W_{ijk} = 0) \\ &= W_{ijk} Q_r^i Q_s^j Q_t^k \theta^{rst} = \sum W_{ijk} Q_{r'}^i Q_{s'}^j Q_{t'}^k \tilde{\theta}^{r's't'} \\ &\quad \left(Q_j^i = \frac{\partial u^i}{\partial u'^j} \right). \end{aligned}$$

Nous pouvons donc définir une représentation linéaire $\mathcal{R}$ du groupe linéaire $L_n = (Q_j^i)$ sur l'espace vectoriel W_x par

$$\begin{aligned} W_{r's't'} &= \sum \left[Q_{r'}^i Q_{s'}^j Q_{t'}^k - \frac{1}{3}(a^{i'j'}\delta_1^{k'} + a^{j'k'}\delta_1^{i'} + a^{i'k'}\delta_1^{j'}) \frac{Q_{r'}^1 Q_{s'}^1 Q_{t'}^1}{a^{11}} \right. \\ &\quad \dots \dots \dots \\ &\quad \left. - \frac{1}{3}(a^{i'j'}\delta_n^{k'} + a^{j'k'}\delta_n^{i'} + a^{i'k'}\delta_n^{j'}) \frac{Q_{r'}^n Q_{s'}^n Q_{t'}^n}{a^{nn}} \right] W_{i'j'k'}. \end{aligned}$$

Nous pouvons donner à la réunion

$$E = \bigcup_{x \in M} W_x$$

une structure d'espace fibré, de base M , de fibre-type un espace vectoriel W à N dimensions, de groupe structural L_n dont l'opération sur W se fait la représentation linéaire $\mathcal{R}$.

Une section locale arbitrairement donnée de $E(M, W, L_n)$ au dessus d'un voisinage peut être étendue pour la variété M toute entière ([2], p. 54). La section ainsi obtenue s'exprime, dans U , par

$$\sum \tilde{b}_{i'j'k'}(x) \tilde{\theta}^{i'j'k'} = b_{ijk} \theta^{ijk} \quad (a^{st} b_{sti} = 0).$$

Nous voyons ainsi qu'il existe un champ τ de tenseurs covariants symétriques non-triviaux du troisième ordre, qui est apolaire au champ σ de tenseurs fondamentaux.

3. Nous allons maintenant démontrer que nous pouvons choisir le champ de tenseurs τ de telle sorte qu'il ne s'annule pas dans M . Soit Z_x l'ensemble des éléments symétriques définis positifs de $W_x^* \otimes W_x^*$. Envisageons la section de l'espace fibré qui s'obtient par la donation à la réunion

$$\bigcup_{x \in M} Z_x$$

une structure d'espace fibré de la même manière que nous avons introduit le champ de tenseurs fondamentaux σ . Portons dans W_x la métrique définie au moyen de cette section et considérons $(N-1)$ -sphère

$$S_x = \{y \in W_x, \text{ longueur } |y| = 1\}.$$

Donnons à la réunion

$$B = \bigcup_{x \in M} S_x$$

la structure d'espace fibré $B(M, S^{N-1}, O_N)$ où O_N est le groupe orthogonal. La recherche du champ de tenseurs τ qui ne s'annule pas dans M se ramène à celle de la section de $B(M, S^{N-1}, O_N)$. L'existence de la section dernière est bien assurée, car nous avons, si $n \geq 3$,

$$N-1 = \binom{n}{3} + n^2 - n - 1 \geq n = \dim M$$

ce qui nous montre que ([2], p. 148)

$$\pi_i(S^{N-1}) = 0 \quad (i = 1, \dots, N-2).$$

Lorsque $n=2$ on a $N=n$, à savoir, W_x est isomorphe à T_x^* . Nous pouvons donc choisir, si la variété M est compacte, le champ de covecteurs τ de telle sorte qu'il n'admette que des points singulière de nombre fini ([3] p. 548). Cela revient à dire que

$$\theta = a^{ir}a^{js}a^{kt}b_{ijk}b_{rst}$$

ne s'annule qu'à points de nombre fini ([1] p. 83).

4. En faisant l'usage des notations introduites dans [1], posons

$$\begin{aligned} k_{lmij} &= K_{lis}K_{mj}^s - K_{ljs}K_{mi}^s \\ &+ \frac{1}{n-2}(H_{li}K_{mj}^sK_{js}^t - H_{mi}K_{lt}^sK_{js}^t \\ &\quad - H_{lj}K_{mt}^sK_{is}^t + H_{mj}K_{lt}^sK_{is}^t) \\ &- \frac{1}{(n-1)(n-2)}(H_{li}H_{mj} - H_{lj}H_{mi})K_t^{rs}K_{rs}^t. \end{aligned}$$

Il vient

$$(4.1) \quad \begin{aligned} k_{mlij} &= -k_{lmij}, \quad k_{lmji} = -k_{lmij}, \quad k_{ijlm} = k_{lmij}, \\ H^{mj}k_{lmij} &= 0. \end{aligned}$$

Lorsque $n=3$, en y faisant $l=1, i=1, 2, 3$, nous avons

$$\begin{aligned} H^{22}k_{1212} + 2H^{23}k_{1213} + H^{33}k_{1313} &= 0, \\ H^{21}k_{1221} + H^{31}k_{1321} + H^{23}k_{1223} + H^{33}k_{1323} &= 0, \\ H^{21}k_{1231} + H^{31}k_{1331} + H^{22}k_{1232} + H^{32}k_{1332} &= 0. \end{aligned}$$

Ajoutons ces équations multipliées respectivement par H^{i1}, H^{i2}, H^{i3} ($i=1, 2, 3$). Nous obtenons

$$\begin{aligned} H_{21}k_{3123} + H_{22}k_{3131} + H_{23}k_{3112} \\ + H_{31}k_{1223} + H_{32}k_{1231} + H_{33}k_{1212} &= 0, \\ H_{11}k_{3123} + H_{12}k_{3131} + H_{13}k_{3112} &= 0, \\ H_{11}k_{1223} + H_{12}k_{1231} + H_{13}k_{1212} &= 0. \end{aligned}$$

De même, en faisant $l=2, 3$ dans (1), on tire

$$\begin{aligned} H_{31}k_{1223} + H_{32}k_{1231} + H_{33}k_{1212} \\ + H_{11}k_{2323} + H_{12}k_{2331} + H_{13}k_{2312} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_{21}k_{1223} + H_{22}k_{1231} + H_{23}k_{1212} &= 0, \\
 H_{21}k_{2323} + H_{22}k_{2331} + H_{23}k_{2312} &= 0, \\
 H_{11}k_{2323} + H_{12}k_{2331} + H_{13}k_{2312} \\
 + H_{21}k_{3123} + H_{22}k_{3131} + H_{23}k_{3112} &= 0, \\
 H_{31}k_{2323} + H_{32}k_{2331} + H_{33}k_{2312} &= 0, \\
 H_{31}k_{3123} + H_{32}k_{3131} + H_{33}k_{3112} &= 0.
 \end{aligned}$$

En résumé nous avons

$$H_{i1}k_{lm23} + H_{i2}k_{lm31} + H_{i3}k_{lm12} = 0 \quad (i, l, m = 1, 2, 3)$$

et, par suite,

$$k_{lmij} = 0 \quad (l, m, i, j = 1, 2, 3).$$

Ensuite, si l'on pose

$$\begin{aligned}
 \langle lmi j \rangle &= \{lmi j\} \\
 &- \frac{1}{n-2} (a_{li} \{m \cdot js\} - a_{mi} \{l \cdot js\} \\
 &- a_{lj} \{m \cdot is\} + a_{mj} \{l \cdot is\}) \\
 &+ \frac{1}{(n-1)(n-2)} (a_{lm} a_{mj} - a_{lj} a_{mi}) \{ \cdot \cdot st \},
 \end{aligned}$$

il vient aussi

$$\begin{aligned}
 \langle mlij \rangle &= -\langle lmi j \rangle, \quad \langle lmji \rangle = -\langle lmi j \rangle, \quad \langle ijlm \rangle = \langle lmi j \rangle, \\
 a^{mj} \langle lmi j \rangle &= 0.
 \end{aligned}$$

Nous avons donc, lorsque $n=3$,

$$\langle lmi j \rangle = 0 \quad (l, m, i, j = 1, 2, 3).$$

Or, nous avons d'après (3.4), (4.2)_n, (5.3) de [1]

$$R_{hki j} - R_{khi j} = \frac{1}{\kappa} \langle hki j \rangle - k_{hki j}.$$

Nous obtenons ainsi, lorsque $n=3$,

$$(4.2) \quad R_{hki j} = R_{khi j} \quad (h, k, i, j = 1, 2, 3).$$

5. Supposons que $n=3$. L'équation $H^{kj}(R_{hki j} + R_{khi j})=0$ devient alors d'après (4.2)

$$(5.1) \quad H^{kj} R_{hki j} = 0.$$

Posons

$$(5.2) \quad \mathbf{K}_{ijl} = H_{l1}R_{ij23} + H_{l2}R_{ij31} + H_{l3}R_{ij12}.$$

de sorte qu'on a

$$\mathbf{K}_{ijl} = \mathbf{K}_{jil}.$$

L'équation (5.1) peut s'écrire

$$\mathbf{K}_{ijl} = \mathbf{K}_{ilj}.$$

D'ailleurs nous avons d'après (5.2) de [1] (p. 163)

$$H^{hk}\mathbf{K}_{hkl} = 0.$$

Nous appellerons donc la forme $\mathbf{K}_{ijl}du^idu^jdu^l$ la forme de Darboux induite. Il suit de (5.2)

$$(5.3) \quad R_{ij23} = \mathbf{K}_{ij}^1, \quad R_{ij31} = \mathbf{K}_{ij}^2, \quad R_{ij12} = \mathbf{K}_{ij}^3.$$

Posons

$$P_{hij} = R_{hij}^0 - H_{hm}R_{n+1 \cdot ij}^m.$$

Nous avons ((6.3) de [1])

$$H^{hj}P_{hij} = 0$$

ce qui nous donne

$$(5.4) \quad H_{h1}P_{k23} + H_{h2}P_{k31} + H_{h3}P_{k12} = H_{k1}P_{h23} + H_{k2}P_{h31} + H_{k3}P_{h12}.$$

Grâce à (2.6) de [1] (l'identité de Bianchi), nous avons

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial R_{hki j}}{\partial u^l} - \Pi_{hl}^s R_{skij} - \Pi_{kl}^s R_{hsij} + H_{kl}R_{hij}^0 - H_{hl}R_{n+1kij} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2}K_{kl}^s R_{hsij} + \frac{1}{2}K_{hl}^s R_{skij} \right) du^l \wedge du^i \wedge du^j = 0 \\ & (h, k, i, j = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Ajoutons membre à membre à cette équation ce qu'on obtient en y échangeant h, k . Nous obtenons alors grâce aux (4.2), (5.3), (5.4)

$$\mathbf{K}_{hk;s}^s + H_{h1}P_{k23} + H_{h2}P_{k31} + H_{h3}P_{k12} = 0$$

$$(h, k = 1, 2, 3)$$

et, par suite,

$$(5.5) \quad P_{k23} = -\mathbf{K}_{k;s}^{1s}, \quad P_{k31} = -\mathbf{K}_{k;s}^{2s}, \quad P_{k12} = -\mathbf{K}_{k;s}^{3s}.$$

En retranchant l'une de l'autre les deux équations que nous venons de mentionner nous obtenons

$$(5.6) \quad K_{ht}^s \mathbf{K}_{ks}^t = K_{kt}^s \mathbf{K}_{hs}^t.$$

6. Soient $X = t^s \Lambda_s$, $X' = t'^s \Lambda_s$ les vecteurs horizontaux ([1], p. 158). Posons

$$v_1 = \begin{vmatrix} t^2 & t^3 \\ t'^2 & t'^3 \end{vmatrix}, \quad v_2 = \begin{vmatrix} t^3 & t^1 \\ t'^3 & t'^1 \end{vmatrix}, \quad v_3 = \begin{vmatrix} t^1 & t^2 \\ t'^1 & t'^2 \end{vmatrix}.$$

La sous-algèbre d'holonomie de Lie-algèbre du groupe structural $\mathcal{O}$ est engendrée par les éléments

$$\Omega_\lambda^\mu = q_\beta^\mu p_\lambda^\alpha R_{\alpha ij}^\beta t^i t'^j.$$

Puisque

$$R_{0ij}^\beta = R_{\alpha ij}^{\alpha+1} = 0, \quad p_0^K = q_0^K = 0, \quad p_A^{n+1} = q_A^{n+1} = 0 \\ (\alpha, \beta = 0, 1, \dots, n; K = 1, \dots, n+1; A = 0, \dots, n),$$

nous avons

$$\Omega_0^\beta = 0, \quad \Omega_\infty^{n+1} = 0, \\ \Omega_h^k = q_m^k p_h^l R_{lij}^m t^i t'^j = \frac{1}{2} q_m^k p_h^l \mathbf{K}_l^{ms} v_s \\ (h, k = 1, 2, 3; l, m: 1 \rightarrow 3).$$

Envisageons l'homographie représentant un tel élément :

$$(6.1) \quad \begin{cases} \lambda_{\xi'}^{\xi''0} = \Omega_i^0 \xi^i + \Omega_4^0 \xi^4, \\ \lambda_{\xi'}^{\xi''k} = \Omega_i^k \xi^i + \Omega_4^k \xi^4 \quad (k = 1, 2, 3), \\ \lambda_{\xi'}^{\xi''4} = 0. \end{cases}$$

Considérons dans $\mathbf{S}_4$ un hyperplan u_α . Son pôle par rapport à la quadrique

$$2\xi^0 \xi^4 = H_{ij} \xi^i \xi^j \quad (i, j: 1 \rightarrow 3)$$

que nous appellerons la quadrique de Lie est donné par

$$\xi^0 = -u_4, \quad \xi^i = H^{ij} u_j, \quad \xi^4 = -u_0.$$

Le portant dans (6.1) nous obtenons

$$\lambda_{\xi'}^{\xi''0} = \Omega^{0s} u_s - \Omega_4^0 u_0, \\ \lambda_{\xi'}^{\xi''k} = \Omega^{ks} u_s - \Omega_4^k u_0, \\ \lambda_{\xi'}^{\xi''4} = 0$$

ce qui détermine une corrélation projective dans l'espace $o = AA_1 A_2 A_3$

amenant le plan $(u_0, u_1, u_2, u_3) (=u \cap o)$ au point $(\xi'^0, \xi'^1, \xi'^2, \xi'^3)$. Le lieu des éléments d'incidence dans cette corrélation est la quadrique

$$(6.2) \quad \Omega^{ij}u_i u_j + (\Omega^{0i} - \Omega_4^i)u_0 u_i - \Omega_4^0(u_0)^2 = 0.$$

Le pôle du plan $(\delta_0^k, \delta_1^k, \delta_2^k, \delta_3^k)$ ($k=1, 2, 3$) par rapport à cette quadrique est le point donné par

$$\Omega^{ki}u_i + \frac{1}{2}(\Omega^{0k} - \Omega_4^k)u_0 = 0.$$

Ainsi, le plan polaire π du point A (l'intersection des trois plans considérés) passe par les trois points

$$(6.3) \quad \left(\frac{1}{2}(\Omega_k^0 - \Omega_{4k}), \Omega_k^1, \Omega_k^2, \Omega_k^3 \right) \quad (k=1, 2, 3)$$

qui déterminent ce plan polaire π pourvu que la quadrique (6.2) soit régulière. Si l'on prend comme point de départ du chemin horizontal le point (u^i, δ_ω^i) , les points (6.3) deviennent

$$\left(-\frac{1}{2}K_{k;s}^{\epsilon}v_t, K_k^{1\epsilon}v_t, K_k^{2\epsilon}v_t, K_k^{3\epsilon}v_t \right).$$

Or, en considérant le cas où $n=2$, si l'on y remplace K_k^{ij} par $K_k^{ij}(i, j, k=1, 2)$ on obtient les expressions de deux points dont la droite de jonction est la directrice de Wilczynski ([4], p. 203).

Nous pouvons donc regarder le plan polaire π comme directrice de Wilczynski généralisée de M .

Les hyperplans homologues dans la transformation projective (6.1) se relient au moyen des équations

$$(6.6) \quad \begin{cases} \sigma u'_0 = 0, \\ \sigma u'_i = \Omega_i^0 u_0 + \Omega_i^k u_k, \\ \sigma u'_4 = \Omega_4^0 u_0 + \Omega_4^k u_k. \end{cases}$$

L'hyperplan polaire d'un point ξ par rapport à la quadrique de Lie est donné par

$$u_0 = -\xi^4, \quad u_i = H_{ij}\xi^j, \quad u_4 = -\xi^0.$$

En effectuant, ensuite, la transformation (6.4) nous obtenons la corrélation projective

$$(6.5) \quad \begin{cases} \sigma u'_0 = 0, \\ \sigma u'_i = \Omega_{ij}\xi^j - \Omega_i^0 \xi^4, \\ \sigma u'_4 = \Omega_{4j}\xi^j - \Omega_4^0 \xi^4. \end{cases}$$

dans laquelle le lieu des éléments d'incidence est le cône

$$\Omega_{ij}\xi^i\xi^j - (\Omega_i^0 - \Omega_{4i})\xi^i\xi^4 - \Omega_4^0(\xi^0)^2 = 0.$$

La droite conjuguée à l'hyperplan $o = AA_1A_2A_3$ par rapport à ce cône se trouve dans les trois hyperplans

$$\left(0, \Omega_{k1}, \Omega_{k2}, \Omega_{k3}, -\frac{1}{2}(\Omega_k^0 - \Omega_{4k})\right) \quad (k=1, 2, 3).$$

qui sont les hyperplans polaires des points (6.3) par rapport à la quadrique de Lie.

RÉFÉRENCES

- [1] J. Kanitani, Sur le faisceau canonique d'une variété différentiable (Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. Math. Vol. 32, 1959).
- [2] N. Steenrod, The topology of fibre bundles.
- [3] P. Alexandroff, H. Hopf, Topologie.
- [4] G. Fubini, E. Chech, Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces.