MEMOIRS OF THE COLLEGE OF SCIENCE, UNIVERSITY OF KYOTO, SERIES A,
Vol. XXVI, Mathematics No. 3, 1951.

Sur les surfaces osculatrices à un espace à connexion projective majorante.

Par

Jōyō KANITANI

(Reçu le 12 Mars. 1951)

1. Envisageons un espace $\boldsymbol{R}$ à n dimensions, dont le point courant sera désigné par x^i $(i=,\dots, n)$. Supposons qu'une courbe C dans $\boldsymbol{R}$ soit développée en courbe Γ dans un espace projectif $\boldsymbol{S}_N$ à N dimensions $(N>n)$ au moyen de la connexion $\Gamma^\beta_{\alpha i}(\alpha, \beta=0, 1,\dots, N;\ i=1,\dots, n)$, le repère mobile le long de la courbe Γ étant défini par

$$dA_\alpha=\Gamma^\beta_{\alpha i}dx^i A_\beta \tag{1·1}$$
$$(A_0\equiv A\ ;\ \alpha=0, 1,\dots, N;\ \beta:\ 0\to N;\ i:\ 1\to n).$$

Nous pouvons toujours supposer sans restreindre la généralité que

$$\Gamma^\beta_{0i}=\delta^\beta_i\quad (\beta=0, 1,\dots, N;\ i=1,\dots, n), \tag{1·2}$$

$$\Gamma^1_{1i}+\Gamma^2_{2i}+\dots+\Gamma^N_{Ni}=0. \tag{1·3}$$

Il existe toujours dans $\boldsymbol{S}_N$ une surface[1] V_n à n dimensions qui a un contact du second ordre au point A avec le développement d'une courbe quelconque dans $\boldsymbol{R}$, issue du point x^i. Elle est définie par

$$z^p=\frac{1}{2}H^p_{ij}z^iz^j+\dots$$
$$(p=n+1, \dots, N;\ i, j:\ 1\to n),$$

où

$$H^p_{ij}=\frac{1}{2}(\Gamma^p_{ij}+\Gamma^p_{ji}), \tag{1·4}$$

1. J. Kanitani. Sur l'espace à connexion projective majorante, I. Jap. Journ. Math. Vol. XIX, 1947, p. 343.

et $z^I(I=1,\dots,N)$ sont les coordonnées non homogènes d'un point de S_N, rapportté au repère $[A, A_1,\dots, A_N]$ associé an point x^i.

La condition nécessaire et suffisante pour que cette surface ait un contact du troisième ordre s'écrit

$$R^p_{0ij}=0 \quad (p=n+1,\dots,N;\ i,j=1,\dots,n),$$

où $R^\alpha_{\alpha ij}(\alpha, \beta=0,1,\dots N;\ i,j=1,\dots,n)$ est le tenseur de courbure (le tenseur de torsion inclus) relatif à la connexion $\Gamma^\beta_{\alpha i}$.

Si cette condition est vérifiée, et si l'on écrit l'équation de V_n

$$z^p=\frac{1}{2}H^p_{ij}z^iz^j+\frac{1}{6}H^p_{ijk}z^iz^jz^k+\dots,\quad (p=n+1,\dots,N),$$

où H^p_{ijk} est symétrique par rapport à i, j, k, on a

$$H^p_{ijk}=\frac{1}{3}(\varDelta_kH^p_{ij}+\varDelta_iH^p_{jk}+\varDelta_jH^p_{ik}),$$

où par $\varDelta_h$ on désigne la différentiation absolue définie par

$$\varDelta_hH^p_{ij}=\frac{\partial H^p_{ij}}{\partial x^h}+\Gamma^p_{qh}H^q_{ij}-\Gamma^l_{ih}H^p_{lj}-\Gamma^l_{jh}H^p_{il}$$
$$(q:\ n+1\rightarrow N;\ l:\ 1\rightarrow n).$$

Nous démontrons dans cet article que la condition pour un contact d'ordre ν s'écrit

$$D_{i_\lambda}\dots D_{i_1}R^p_{0lm}=0$$
$$\begin{pmatrix} l, m, i_1,\dots, i_\lambda=1,\dots,n \\ \lambda=0, 1,\dots,\nu-3;\ p=n+1,\dots,N\end{pmatrix}$$

où por D_k on désigne la diffárentiation absolue effectué de la manière projective par rapport à α, β, et de la manière affine par rapport à $l, m, i_1, i_2,\dots$, a savoir, par exemple

$$D_jD_iR^p_{0lm}=\frac{\partial D_iR^p_{0lm}}{\partial x^j}+\Gamma^p_{\tau j}D_iR^\tau_{0lm}-\Gamma^\tau_{0j}D_iR^p_{\tau lm}$$
$$-\Gamma^a_{lj}D_iR^p_{0am}-\Gamma^a_{mj}D_iR^p_{0la}-\Gamma^a_{ij}D_aR^p_{0lm}$$
$$(\tau:\ 0\rightarrow N;\ a:\ 1\rightarrow n).$$

D'une maniére précise, pour qu'il existe les fonctions $H^p_{i_1\dots i_\lambda}$ $(p=n+1,\dots,N;\ i_1,\dots,i_\lambda=1,\dots,n;\ \lambda=2,\dots,\nu)$ des variables $x^1,\dots,x^n$ de telle sorte qu'étant donné une courbe quelconque $C(x^i=\varphi^i(t))$ dans $\boldsymbol{R}$, si l'on prend sur cette courbe deux points infiniment voisins $x^i=\varphi^i(t), x'^i=\varphi(t')$, et si l'on désigne par A, A' les images de ces points, la surface V_n, dans S_N, représentée par

$$z^p=\frac{1}{2}H^p_{ij}z^iz^j+\ldots+\frac{1}{\nu!}H^p_{i_1\ldots i_\nu}z^{i_1}\ldots z^{i_\nu}+\ldots$$

par rapport au repère associè au point x^i contienne le point A' à l'exception de quantités infinitesimals d'ordre $\nu+1$ par rapport à $|t'-t|$, il faut et il suffit que

$$D_{i_\lambda}\ldots D_{i_1}R^p_{0lm}=0 \quad (\lambda=0,1,\ldots,\nu-3). \tag{1·5}$$

Si cette conditon est vèrifiée les coefficients $H^p_{i_1\ldots i_\lambda}$ $(\lambda=2,\ldots,\nu-1)$ sont déterminés, proche en proche (H^p_{ij} est déterminé par (1·4)) par

$$\begin{aligned}H^p_{i_1\ldots i_\lambda}=&\Delta_{i_\lambda}H^p_{i_1\ldots i_{\lambda-1}}+\sum_{s=2}^{\lambda-3}\sum_j(s-1)H^p_{j_1\ldots j_s}H^q_{j_{s+1}\ldots j_{\lambda-1}}\Gamma'^0_{qi_\lambda} \\ &+\sum_j(\lambda-3)H^p_{j_1\ldots j_{\lambda-2}}\Gamma'^0_{j_{\lambda-1}i_\lambda} \\ &-\sum_{s=2}^{\lambda-2}H^q_{j_1\ldots j_s}H^p_{j_{s+1}\ldots j_{\lambda-1}a}\Gamma'^a_{qi_\lambda} \\ &(q:\ n+1\to N;\ a:\ 1\to n),\end{aligned} \tag{1·6}$$

où $j_1\ldots j_{\lambda-1}$ est une permutation de $i_1,\ldots,i_{\lambda-1}$, et $\sum_j$ désigne la sommation qui s'etend pour toutes les combianisons $j_1,\ldots,j_s$ pris s à s (ou $\lambda-2$ à $\lambda-2$) de $i_1,\ldots,i_{\lambda-1}$. Les coefficients $H_{i_1\ldots i_\lambda}$ $(\lambda=2,\ldots,\nu-1)$ ainsi définis sont symétriques par rapport à $i_1,\ldots,i_\lambda$. Quant au coefficient $H^q_{i_1\ldots i_\nu}$, si l'on le choisi de telle sorte qu'il soit symétriqure par rapport à $i_1,\ldots,i_\nu$, et si l'on désigne par $\theta_{i_1\ldots i_\nu}$ le second membre de (1·6) où $\lambda=\nu$, il vient

$$H^p_{i_1\ldots i_\nu}=\theta^p_{(i_1\ldots i_\nu)}. \tag{1·7}$$

Nous avons déjà démontré dans un mémoire précécent[1] que cette proposition est vraie pour $\nu=3$, 4. Il ne reste donc que de prouver que si elle est vraie pour ν, elle s'etend aussi pour $\nu+1$.

2. Lorsque $R^p_{0lm}=0$ (l, $m=1\ldots,n$; $p=n+1,\ldots,N$), nous avons

$$\begin{aligned}D_lR^p_{0lm}&=H^p_{la}R^a_{0lm}-R^p_{llm}\quad (a:1\to n) \\ &=-(\Delta_mH^p_{il}-\Delta_lH^p_{im}).\end{aligned} \tag{2·1}$$

---

1. J. Kanitani, loe. cit.

Nous allons maintenant démontrer que si les équations

$$D_{i_\lambda}\ldots D_{i_1}R^p_{0lm}\equiv 0 \tag{2·2}$$
$$(p=n+1,\ldots,N;\ l,m,i_1,\ldots,i_\lambda=1,\ldots,n)$$

sont vérifiées pour $\lambda=0,1,\ldots,\sigma-1(\sigma\geqq 2)$, les équations

$$\begin{aligned}D_{i_\lambda}\ldots D_{i_1}R^p_{0lm}&\qquad\qquad (2·3)\\
&=(-1)^{\lambda-1}\{H^p_{i_1\ldots i_\lambda a}R^a_{0lm}+\sum_j H^p_{j_1\ldots j_{\lambda-1}a}R^a_{j_\lambda lm}\\
&+\sum_{s=2}^{\lambda-1}\sum_j H^q_{j_1\ldots j_s}H^p_{j_{s+1}\ldots j_\lambda a}R^a_{qlm}\\
&-(\lambda-1)H^p_{i_1\ldots i_\lambda}R^0_{0lm}-H^q_{i_1\ldots i_\lambda}R^p_{qlm}\\
&-(\lambda-2)\sum_j H^p_{j_1\ldots j_{\lambda-1}}R^0_{j_\lambda lm}\\
&-\sum_{s=2}^{\lambda-2}(s-1)\sum_j H^p_{j_1\ldots j_s}H^q_{j_{s+1}\ldots j_\lambda}R^0_{qlm}\}\quad (q:n+1\to N)\\
&=(-1)^\lambda(H^p_{i_1\ldots i_\lambda lm}-H^p_{i_1\ldots i_\lambda ml})\end{aligned}$$

sont vérifiées pour $\lambda=1,\ldots,\sigma$ (l'équation (2·1) pour $\lambda=1$) où $H^p_{i_1\ldots i_\lambda}$ est défini par (1·6) pour $\lambda=3,\ldots,\sigma+2$ et, par suite, $H^p_{i_1\ldots i_\lambda}$ est symétrique par rapport à $i_1\ldots i_\lambda$ pour $\lambda=2,\ldots,\sigma+1$.

Plus général, considérons un système des fonctions $G^\beta_{\alpha l_1\ldots l_s}$ $(\alpha,\beta=0,\ldots,N;\ l_1\ldots,l_s=1,\ldots,n)$ des variables $x^1,\ldots,x^n$ assujetties à la condition

$$D_{i_\lambda}\ldots D_{i_1}G^p_{0l_1\ldots l_s}\equiv 0 \tag{2·4}$$

pour $\lambda=0,\ldots,\sigma-1$ où par D_k on désigne la differentiation absolue efféctuée de la manière projective par rapport à α,β et de la manière affine par rapport à l,i. Si les équations (2·2) sont véfifiées pour $\lambda=0,1,\ldots,\sigma-1$, la première équation de (2·3) sera vérifiée même quand on remplace R^p_{0lm} par $G^p_{0l_1\ldots l_s}$.

Cette proposition est vraie d'abord pour $\sigma=2$. En effet, si

$$R^p_{0lm}\equiv 0,\ D_iR^p_{0lm}\equiv 0,$$

nous avons

$$\begin{aligned}D_jD_iR^p_{0lm}&=H^p_{bj}D_iR^b_{0lm}-D_iR^p_{jlm}\\
&=H^p_{bj}\left(\frac{\partial R^b_{0lm}}{\partial x^i}+\delta^b_iR^0_{0lm}+\Gamma^b_{ai}R^a_{0lm}-R^b_{ilm}\right)\end{aligned}$$

$$-\left(\frac{\partial(H^p_{jb}R^b_{0lm})}{\partial x^i}+H^p_{ai}R^a_{jlm}+\Gamma^p_{qi}R^q_{jlm}\right.$$
$$\left.-\Gamma^b_{ji}R^p_{blm}-H^q_{ji}R^p_{qlm}\right)$$
$$=H^p_{ij}R^0_{0lm}+H^q_{ij}R^p_{qlm}$$
$$-H^p_{aj}R^a_{ilm}-H^p_{ai}R^a_{jlm}-H^p_{ija}R^a_{0lm}.$$

De même, si $G^p_{0l_1\ldots l_s}\equiv 0$, $R^p_{0lm}\equiv 0$ et, par suite, $\Gamma^p_{ij}=H^p_{ij}$ nous avons

$$D_iG^p_{0l_1\ldots l_s}=H^p_{ia}G^a_{0l_1\ldots l_s}-G^p_{il_1\ldots l_s}.$$

Si $G^p_{0l_1\ldots l_s}\equiv 0$, $D_iG^p_{0l_1\ldots l_s}\equiv 0$, $R^p_{0lm}\equiv 0$, $D_iR^p_{0lm}\equiv 0$ et, par suite $\Gamma^p_{ij}=H^p_{ij}$, $H^p_{ijk}=\Delta_iH^p_{jk}$, nous avons

$$D_jD_iG^p_{0l_1\ldots l_s}=H^p_{ij}G^0_{0l_1\ldots l_s}+H^q_{ij}G^p_{ql_1\ldots l_s}$$
$$-H^p_{aj}G^a_{0l_1\ldots l_s}-H^p_{ai}G^a_{jl_1\ldots l_s}-H^p_{ija}G^a_{0l_1\ldots l_s}.$$

Nous avons ensuite d'après (1·6)

$$H^p_{ijlm}=\Delta_mH^p_{ijl}+H^p_{ij}\Gamma^0_{lm}+H^p_{jl}\Gamma^0_{im}+H^p_{il}\Gamma^0_{jm}$$
$$-(H^q_{ij}H^p_{la}+H^q_{jl}H^p_{ia}+H^q_{il}H^p_{ja})\Gamma^p_{qm}.$$

Or,

$$\Delta_lH^p_{i_1\ldots i_\lambda}=\frac{\partial H^p_{i_1\ldots i_\lambda}}{\partial x^l}+\Gamma^p_{ql}H^q_{i_1\ldots i_\lambda}-\sum_\sigma\Gamma^a_{i_\sigma l}H^p_{i_1\ldots a\ldots i_\lambda},$$

$$(\Delta_m\Delta_l-\Delta_l\Delta_m)H^p_{i_1\ldots i_\lambda}=H^p_{i_1\ldots i_\lambda}\left(\frac{\partial\Gamma^p_{ql}}{\partial x^m}-\frac{\partial\Gamma^p_{qm}}{\partial x^l}+\Gamma^p_{ql}\Gamma^p_{rm}-\Gamma^p_{qm}\Gamma^q_{rl}\right)$$
$$-\sum_\sigma H^p_{i_1\ldots a\ldots i_\lambda}\left(\frac{\partial\Gamma^a_{i_\sigma l}}{\partial x^m}-\frac{\partial\Gamma^a_{i_\sigma m}}{\partial x^l}+\Gamma^b_{i_\sigma l}\Gamma^a_{bm}-\Gamma^b_{i_\sigma m}\Gamma^a_{bl}\right)$$
$$-(\Gamma^a_{lm}-\Gamma^a_{ml})D_aH^p_{i_1\ldots i_\lambda}$$
$$=(R^p_{qlm}+H^p_{al}\Gamma^a_{qm}-H^p_{am}\Gamma^a_{ql})H^q_{i_1\ldots i_\lambda}$$
$$-\sum_\sigma(R^a_{i_\sigma lm}-\delta^a_m\Gamma^0_{i_\sigma l}+\delta^a_l\Gamma^0_{i_\sigma m}-H^q_{i_\sigma l}\Gamma^a_{qm}+H^q_{i_\sigma m}\Gamma^a_{ql})H^q_{i_1\ldots a\ldots i_\lambda}$$
$$-R^a_{0lm}D_aH^p_{i_1\ldots i_\lambda}\quad (q,r:\ n+1\to N;\ a,b:\ 1\to n),$$

en particulier,

$$\Delta_mH^p_{ijl}-\Delta_lH^p_{ijm}=(\Delta_m\Delta_l-\Delta_l\Delta_m)H^p_{ij}$$
$$=(R^p_{qlm}+H^p_{al}\Gamma^a_{qm}-H^p_{am}\Gamma^a_{ql})H^q_{ij}$$

$$-R^a_{ilm}H^p_{aj}-R^a_{jlm}H^p_{ai}+\Gamma^0_{il}H^p_{mj}+\Gamma^0_{jl}H^p_{mi}-\Gamma^0_{im}H^p_{lj}-\Gamma^0_{jm}H^p_{li}$$
$$+(H^q_{il}H^p_{aj}+H^q_{jl}H^p_{al})\Gamma^a_{qm}-(H^q_{im}H^p_{aj}+H^q_{jm}H^p_{ai})\Gamma^a_{ql}$$
$$-H^p_{ija}R^a_{0lm}.$$

Il vient donc

$$D_jD_iR^p_{0lm}=H_{ijlm}-H_{ijml}.$$

3. Nous démontrons maintenant que si la proposition mentionnée au n° précédent est vraie pour σ, elle s'étend aussi paur $\sigma+1$.

Supposons que cette proposition soit vraie pour σ, et que les équations (2·2) soient vérifiées pour $\lambda=0,1,\ldots,\ldots,\sigma$. Alors $H^p_{i_1\ldots i_\lambda}$ est symétrique par rapport à $i_1,\ldots i_\lambda$ pour $\lambda=2,\ldots,\sigma+2$, et les équations (2·3) sont vérifiées méme quand on remplace $R^3_{\alpha lm}$ par $D_iR^3_{\alpha lm}$, a savoir,

$$\begin{aligned}D_{i_\sigma}\ldots D_{i_1}D_iR^p_{0lm}&\\
=(-1)^{\sigma-1}\{&H^p_{i_1\ldots i_\sigma a}D_iR^a_{0lm}+\sum_j H^p_{j_1\ldots j_{\sigma-1}a}D_iR^a_{j_\sigma lm}\\
&+\sum_{s=2}^{\sigma-1}\sum_j H^q_{j_1\ldots j_s}H^p_{j_{s+1}\ldots j_\sigma a}D_iR^a_{qlm}\\
&-(\sigma-1)H^p_{i_1\ldots i_\sigma}D_iR^0_{0lm}-H^q_{i_1\ldots i_\sigma}D_iR^p_{qlm}\\
&-(\sigma-2)\sum_j H^q_{j_1\ldots j_{\sigma-1}}D_iR^0_{j_\sigma lm}\\
&-\sum_{s=2}^{\sigma-2}\sum_j(s-1)H^p_{j_1\ldots j_s}H^q_{j_{s+1}\ldots j_\sigma}D_iR^0_{qlm}\end{aligned}$$

pour $\lambda=2,\ldots,\sigma$.

Ajoutons au second membre de cette équation l'expression

$$\begin{aligned}&\sum_{s=2}^{\sigma-1}\sum_j(-1)^{s-1}H^q_{j_1\ldots j_s}\Gamma^b_{qi}D_bD_{j_\sigma}\ldots D_{j_{s+1}}R^p_{0lm}\\
&+\sum_{s=2}^{\sigma-1}\sum_j(-1)^{\sigma-s}H^p_{j_{s+1}\ldots j_\sigma b}\Gamma^b_{qi}D_{j_s}\ldots D_{j_1}R^q_{0lm}\\
&-\sum_{s=2}^{\sigma-2}\sum_j(-1)^s(s-1)H^p_{j_1\ldots j_s}\Gamma^0_{qi}D_{j_\sigma}\ldots D_{j_{s+1}}R^q_{0lm}\\
&-\sum_{s=2}^{\sigma-2}\sum_j(-1)^{\sigma-s}(s-1)H^q_{j_{s+1}\ldots j_\sigma}\Gamma^0_{qi}D_{j_s}\ldots D_{j_1}R^p_{0lm}\\
&-\sum_j(\sigma-2)\Gamma^0_{j_\sigma i}D_{j_{\sigma-1}}\ldots D_{j_1}R^p_{0lm}\\
&-\Delta_i(D_{i_\sigma}\ldots D_{i_1}R^p_{0lm})\end{aligned}$$

qui est identiquement nulle d'après l'hypothèse, et remplçons les dérivées de R^{p}_{0lm} par leurs expressions données par (2·3), et portons les relations

$$\begin{aligned}
&D_iR^{a}_{0lm}-\Delta_iR^{a}_{0l}=\delta^{a}_{i}R^{0}_{0lm}-R^{a}_{ilm},\\
&D_iR^{a}_{jlm}-\Delta_iR^{a}_{jlm}=\delta^{a}_{i}R^{0}_{jlm}+\Gamma^{a}_{qi}R^{q}_{jlm}-\Gamma^{0}_{ji}R^{a}_{0lm}-H^{q}_{ji}R^{a}_{qlm},\\
&D_iR^{a}_{qlm}-\Delta_iR^{a}_{qlm}=\delta^{a}_{i}R^{0}_{qlm}+\Gamma^{a}_{ri}R^{r}_{qlm}-\Gamma^{0}_{qi}R^{a}_{0lm}-\Gamma^{b}_{qi}R^{a}_{blm},\\
&D_iR^{0}_{0lm}-\Delta_iR^{0}_{0lm}=\Gamma^{0}_{bi}R^{b}_{0lm}-R^{0}_{ilm},\\
&D_iR^{p}_{qlm}-\Delta_iR^{p}_{qlm}=H^{p}_{ai}R^{a}_{qlm}-\Gamma^{a}_{qi}R^{p}_{alm},\\
&D_iR^{0}_{jlm}-\Delta_iR^{0}_{jlm}=\Gamma^{0}_{ai}R^{a}_{jlm}+\Gamma^{0}_{qi}R^{q}_{jlm}-\Gamma^{0}_{ji}R^{0}_{0lm}-H^{q}_{ji}R^{0}_{qlm},\\
&D_iR^{0}_{qlm}-\Delta_iR^{0}_{qlm}=\Gamma^{0}_{ai}R^{a}_{qlm}+\Gamma^{0}_{ri}R^{r}_{qlm}-\Gamma^{0}_{qi}R^{0}_{0lm}-\Gamma^{a}_{qi}R^{0}_{alm}.\\
&\qquad\qquad (b:\ 1\to n\ ;\ q,r:\ n+1\to N).
\end{aligned}$$

Il veiendra

$$\begin{aligned}
&D_{i_\sigma}\cdots D_{i_1}D_iR^{p}_{0lm}\\
&\quad=(-1)^{\sigma}\{H^{p}_{i\,i_1\cdots i_\sigma a}R^{a}_{0lm}+\sum_j H^{p}_{jj_1\cdots j_{\sigma-1}a}R^{a}_{j_\sigma lm}\\
&\qquad+\sum_{s=1}^{\sigma-1}\sum_j H^{q}_{jj_1\cdots j_s}H^{p}_{j_{s+1}\cdots j_\sigma a}R^{a}_{qlm}\\
&\qquad-\sigma H^{p}_{ii_1\cdots i_\sigma}R^{0}_{0lm}-H^{q}_{ii_1\cdots i_\sigma}R^{p}_{qlm}\\
&\qquad-(\sigma-1)\sum_j H^{p}_{jj_1\cdots j_{\sigma-1}}R^{0}_{j_\sigma lm}\\
&\qquad-\sum_{s=1}^{\sigma-2}\sum_j sH^{p}_{jj_1\cdots j_s}H^{q}_{j_{s+1}\cdots j_\sigma}R^{0}_{qlm}.
\end{aligned}$$

C'est à dire que la première équation de (2·3) s'étnd pour $\lambda=\sigma+1$. De la même maniére on peut démontrer si les équations (2·4) sont vérifiées pour $\lambda=0,1,\ldots,\sigma$, la première équatlon de (2·3) où $\lambda=\sigma+1$ est vérifiée même quand on remplace R^{3}_{alm} par $G^{3}_{al_1\cdots l_s}$.

Enfin, si l'on définit $H^{p}_{i_1\cdots i_{\sigma+1}lm}$, $H^{p}_{i_1\cdots i_{\sigma+1}ml}$ au moyen de (1·7) il vient

$$\begin{aligned}
&H^{p}_{i_1\cdots i_{\sigma+1}lm}-H^{p}_{i_1\cdots i_{\sigma+1}ml}\\
&\quad=H^{q}_{i_1\cdots i_{\sigma+1}}R^{p}_{qlm}+\sigma H^{p}_{i_1\cdots i_{\sigma+1}}R^{0}_{0lm}\\
&\quad+(\sigma-1)\sum_j H^{p}_{j_1\cdots j_\sigma}R^{0}_{j_{\sigma+1}lm}\\
&\quad+\sum_{s=2}^{\sigma-1}\sum_j(s-1)H^{p}_{j_1\cdots j_s}H^{p}_{j_{s+1}\cdots j_{\sigma+1}}R^{0}_{qlm}
\end{aligned}$$

$$-H^{p}_{i_1\cdots i_{\sigma+1}a}R^{a}_{0lm}-\sum_{j}H^{p}_{j_1\cdots j_\sigma a}R^{0}_{j_{\sigma+1}lm}$$
$$-\sum_{s=2}^{\sigma-1}\sum_{j}H^{q}_{i_1\cdots j_s}H^{p}_{j_{s+1}\cdots j_\sigma a}R^{a}_{qlm}$$

comme conséquence de (3·5), et des équations

$$\begin{aligned}
\Delta_m\Gamma'^0_{ql}-\Delta_l\Gamma'^0_{qm}&=R^0_{qlm}-\Gamma'^a_{ql}\Gamma'^0_{am}+\Gamma'^b_{qm}\Gamma'^0_{bl}-R^b_{0lm}\Gamma'^0_{qb}\\
\Delta_m\Gamma'^0_{jl}-\Delta_l\Gamma'^0_{jm}&=R^0_{jlm}-H^r_{jl}\Gamma'^0_{rm}+H^r_{jm}\Gamma'^0_{rl}-R^b_{0lm}\Gamma'^0_{jb}\\
\Delta_m\Gamma'^a_{ql}-\Delta_l\Gamma'^a_{qm}&=R^a_{qlm}-\Gamma'^0_{ql}\delta^a_m+\Gamma'^0_{qm}\delta^a_l-R^b_{0lm}\Gamma'^a_{qb}
\end{aligned}$$
$$(b:\ 1\to n\ ;\ r:\ n+1\to N).$$

C'est à dire que la deuxième équation de (2·3) s'étend pour $\lambda=\sigma+1$.

4. Soient z^I $(I=1,\dots,N)$ les coordonnées non homogènes d'un point P de S_N rapporté au repère $[A, A_1;\dots, A_N]$ de sorte qu'on a

$$P=A+z^IA_I\ \ (I:\ 1\to N).$$

Si le point P est un point fixe, on a

$$\begin{aligned}
d(A+z^IA_I)&=dx^iA_i+dz^IA_I+(z^I\Gamma'^0_{Ij}A+z^I\Gamma'^m_{Ij}A_m+z^I\Gamma'^p_{Ij}A_p)dx^j\\
&=\rho(A+z^IA_I)\quad (I:1\to N;\ m:\ 1\to n\ ;\ p:\ n+1\to N),
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&z^I\Gamma'^0_{Ij}dx^j=\rho,\\
&dz^i+dx^i+z^I\Gamma'^i_{Ij}dx^j=\rho z^i=z^iz^I\Gamma'^0_{Ij}dx^j,\\
&dz^p+z^I\Gamma'^p_{Ij}dx^j=\rho z^p=z^pz^I\Gamma'^0_{Ij}dx^j
\end{aligned}$$
$$(i=1,\dots,n\ ;\ p=n+1,\dots,N;\ I:\ 1\to N;\ j:\ 1\to n).$$

Prenons ce point fixe sur le développement Γ de C dans le voisinage du point A. On a alors

$$z^i=dx^i+\frac{1}{2}(d^2x^i+\Gamma'^i_{ij}dx^idx^j)+\dots. \tag{4·1}$$

D'ailleurs, si la proposition mentionnée au n° 1 est vraie pour contact jusqu'à l'ordre ν, et si les équations (1.5) sont vérifiées pour $\lambda=0,\dots,\nu-3$, nous avons

$$\begin{aligned}
dz^i=&-dx^i-z^a\Gamma'^i_{aj}dx^j-\Gamma'^i_{pj}(\chi^p_2+\dots+\chi^p_{\nu-1}+\dots)dx^j \qquad (4·2)\\
&+z^iz^a\Gamma'^0_{aj}dx^j+z^i\Gamma'^0_{pj}(\chi^p_2+\dots+\chi^p_{\nu-2}+\dots)dx^j\\
dz^p=&-z^a\Gamma'^0_{ai}dx^j-\Gamma'^p_{qj}(\chi^q_2+\dots+\chi^q_\nu+\dots)dx^j
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+z^a\Gamma^{\cdot 0}_{aj}\chi^p_2dx^j\\
&+z^a\Gamma^{\cdot 0}_{aj}\chi^p_3dx^j+\Gamma^{\cdot 0}_{qj}\chi^q_2\chi^p_2dx^j\\
&+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&+z^a\Gamma^{\cdot 0}_{aj}\chi^p_{\nu-1}dx^j+\Gamma^{\cdot 0}_{qj}\chi^0_j\chi^q_2\chi^p_{\nu-2}dx^j+\dots+\Gamma^{\cdot 0}_{qj}\chi^q_{\nu-2}\chi^p_2dx^i\\
&+\dots(a,j:\ 1\to n;\ q:\ n+1\to N),
\end{aligned}
$$

où

$$\chi^p_\lambda=\frac{1}{\lambda!}H^p_{i_1\dots i_\lambda}(\varphi^1(t),\dots,\varphi^n(t))z^{i_1}\dots z^{i_\lambda}.$$

5. Prenons sur la courbe C deux points infiniment voisins $x^i=\varphi^i(t)$, $x'^i=\varphi^i(t')$. Soient z^I $(I=1,\dots,N)$ les coordonnées non homogènes de l'image du point x'^i rapporté au repère $[A, A_1,\dots, A^N]$ associé au point x^i. En supposant que la propositon mentionnée au n° 1 soit vraie pour ν, et que les équatisns (1·5) soient vérifiées pour $\lambda=0,1,\dots,\nu-3$ nous cherchons maintenant la condition pour que les équations

$$z^p=\frac{1}{2}H^p_{ij}z^ix^j+\dots+\frac{1}{(\nu+1)!}H^p_{i_1\dots i_{\nu+1}}z^{i_1}\dots z^{i_{\nu+1}}+(t'-t)^{\nu+2}f^p(t,t')$$
$$(p=n+1,\dots,N)$$

soient vèrifiées, où $H^p_{i_1\dots i_\lambda}$ $(\lambda=2,\dots\nu+1)$ sont symétriques par rapport à $i_1,\dots,i_\lambda$, et $f^p(t,t')$ $(p=n+1,\dots,N)$ sont des fonctions analytiques d'aprés l'hypothèse qu'il en est ainsi pour $\Gamma^{\cdot 3}_{at}(x^1\dots,x^n)$, $\varphi^i(t)$. Cela revient à dire que si l'on regarde le point x'^i comme point fixe, et si l'on fait varier t les équations

$$
\begin{aligned}
dz^p=H^p_{ij}z^idz^j+\frac{1}{2}dH^p_{ij}z^iz^j+\frac{1}{2}H^p_{ijk}z^iz^jdz^k+\dots\\
+\frac{1}{\nu!}(dH^p_{i_1\dots i_\nu}+H^p_{i_1\dots i_{\nu+1}}dz^{i_{\nu+1}})z^{i_1}\dots z^{i_\nu}\\
+(t'-t)^{\nu+1}f^p_1(t,t')dt
\end{aligned}
$$

soient verifiées, où $f^p_1(t,t')$ est de la même nature que $f^p(t,t')$. Portons-y (4·2). Alors, puisque les $H^p_{i_1\dots i_\lambda}$ sont définis par (1·6) pour $\lambda=2,\dots,\nu-1$ tandis que $H^p_{i_1\dots i_\nu}$ est donné par (1·7), nous avons

$$
\begin{aligned}
&\nu(H^p_{i_1\dots i_\nu}-\theta^p_{i_1\dots i_\nu})z^{i_1}\dots z^{i_{\nu-1}}dx^{i_\nu}\\
&+\{H^p_{i_1\dots i_\nu m}dx^m-dH^p_{i_1\dots i_\nu}-H^q_{i_1\dots i_\nu}\Gamma^{\cdot p}_{qm}dx^m
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\nu H^{p}_{i_1\cdots i_\nu m}\,\Gamma'^{a}_{i_{\nu-1}a}dx^m\\
&-\sum_{s=2}^{\nu-2}\binom{\nu}{s}(s-1)H^{p}_{i_1\cdots i_s}H^{q}_{i_s+1\cdots i_\nu}\Gamma'^{0}_{qm}dx^m\\
&-\binom{\nu}{\nu-1}(\nu-2)H^{p}_{i_1\cdots i_{\nu-1}}\Gamma'^{0}_{i_\nu m}dx^m\\
&+\sum_{s=2}^{\nu-1}\binom{\nu}{s}H^{q}_{i_1\cdots i_s}H^{p}_{i_s+1\cdots i_\nu a}\Gamma'^{a}_{qm}dx^m\}\,z^{i_1}\cdots z^{i_\nu}\\
&=\nu!(t'-t)^{\nu+1}f^{p}_{1}(t,t')dt.
\end{aligned}
$$

Faisons-y $t'=t+dt$, et remplaçons z^i par leurs valeurs données par (4·1). Le coefficient de $(dt)^{\nu+1}$ dans l'équation ainsi obtenue doit être nul. Égalons à zéro la partie de ce coefficient, contenant la dérivée du second ordre de $\varphi^i(t)$. Il vient

$$(H^{p}_{i_1\cdots i_\nu}-\theta^{p}_{i_1\cdots i_\nu})d^2x^{i_1}dx^{i_2}\cdots dx^{i_\nu}=0.$$

Si cette équation est vérifiée indépendamment du choix des valeurs de $\varphi^i(t)$, $d^i\varphi/dt$ nous avons

$$\theta^{p}_{i_1\cdots i_{\nu-2}lm}=\theta^{p}_{i_1\cdots i_{\nu-2}ml}=H^{p}_{i_1\cdots i_{\nu-2}lm}.$$

Comme nous avons déjà démontré, cette condition peut s'écrire

$$D_{i_{\nu-2}}\cdots D_{i_1}R^{p}_{0lm}=0.$$

Cette condition étant vérifiée, le coefficient de $(dt)^{\nu+1}$ dont venons de mentionner devient

$$(H^{p}_{i_1\cdots i_{\nu+1}}-\theta^{p}_{i_1\cdots i_{\nu+1}})\varphi^{i_1}(t)\,\varphi^{i_2}(t)\cdots\varphi^{i_{\nu+1}}(t).$$

La condition pour que ceci soit nul indépendamment du choix des valeurs de $\varphi^i(t)$ s'écrit

$$H^{p}_{i_1\cdots i_{\nu+1}}=\theta^{p}_{(i_1\cdots i_{\nu+1})}.$$

La démonstration est ainsi completée.