Le théorème de plongement de Nagata

Pierre Deligne

Résumé Sauf pour quelques corrections ajoutées en 2010, l'article reproduit des notes, envoyées à Nagata dans les années 70, qui étaient une traduction en langage des schémas de ses articles [2] et [3]. Les démonstrations sont une version "constructive" de celles de Nagata. Rendre les démonstrations "constructives" a permis de les débarrasser de l'usage de valuations. Une exposition plus détaillée et des résultats additionnels sont dans Conrad [1]. Sauf mention expresse du contraire, tous les schémas considérés sont supposés noethériens.

Abstract Except for a few corrections added in 2010, the article reproduces notes, sent to Nagata in the 1970s, which were a translation in the language of schemes of his articles [2], [3]. The proofs are a "constructive" version of his proofs. Making the proofs constructives allowed us to proceed without using valuations. A more detailed exposition and additional results are in Conrad [1]. Unless otherwise mentioned, all the schemes considered are supposed to be Noetherian.

0. Rappels sur les éclatements

0.1.

Si a est un idéal de l'anneau A, le schéma déduit de $X = \mathrm{Spec}(A)$ en éclatant a est réunion d'ouverts $D(x)$ pour x parcourant un système de générateurs de a, et $D(x)$ est le spectre du sous-anneau $A[ax^{-1}]$ de $A[x^{-1}]$. De plus, $D(x) \cap X - V(a) = \mathrm{Spec}(A[x^{-1}])$.

Si c est un second idéal de A, définissant un sous-schéma $V(c)$ de X, la trace sur $D(x)$ du transformé pur de $V(c)$ est définie par l'idéal de $A[ax^{-1}]$ trace de l'idéal de $A[x^{-1}]$ engendré par c.

LEMME 0.2

Soient X un schéma, a et b deux faisceaux d'idéaux sur X et $\widetilde{X}$ le schéma éclaté de X le long de $a + b$. Alors, l'ouvert de $\widetilde{X}$ réunion des $D(x)$ pour $x \in b$ contient le transformé pur de $V(a)$.

En effet, $\widetilde{X}$ est réunion des $D(x)$ pour $x \in a$ ou $x \in b$, et pour $x \in a$, $D(x)$ est disjoint du transformé pur de $V(a)$.

Kyoto Journal of Mathematics, Vol. 50, No. 4 (2010), 661–670
DOI 10.1215/0023608X-2010-009,
Received January 27, 2010. Revised June 10, 2010. Accepted June 14, 2010.
2010 Mathematics Subject Classification: 14E25.

Le lemme 0.3 du texte original était faux. La version corrigée qui suit du lemme date de mars 1996. Elle a amené un changement de notations. Le lemme original utilisait les notations suivantes, auxquelles la suite du texte réfère : plutôt que F et G, on considérait leurs compléments U et V qui, avec $Y' := U \cap p^{-1}(Y)$ formaient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[rr, hook] \arrow[d] & & Z \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[r, hook] & V \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

où Y' est fermé dans $p^{-1}(V)$.

LEMME 0.3

Soient $p : Z \to X$ et des sous-schémas fermés $F \supset G$ dans X, et Y dans Z. On suppose que

$$Y \cap p^{-1}(F) \subset p^{-1}(G) \quad \textit{(schématiquement)}.$$

Éclatons X le long de G en $\widetilde{X}$, et soit $\tilde{p} : \widetilde{Z} \to \widetilde{X}$ déduit de $p : Z \to X$ par changement de base. Alors, l'adhérence ($\overline{Y - p^{-1}(G)}$ dans $\widetilde{Z}$) de $Y - p^{-1}(G)$ dans $\widetilde{Z}$ et $\tilde{p}^{-1}(\overline{F - G}$ dans $\widetilde{X}$) sont des fermés disjoints de $\widetilde{Z}$.

On peut supposer que Z et X affines. Soit $\mathcal{G}$ l'idéal de G. Recouvrons $\widetilde{X}$ par les ouverts $D(g)$ pour g dans $\mathcal{G}$ (un système générateur de $\mathcal{G}$ suffit) et $X - G$ par les $U(g) = D(g) -$ (image inverse de G)

$$\begin{array}{ccc} X - G & \subset & \widetilde{X} \\ \| & & \| \\ \bigcup U(g) & \subset & \bigcup D(g). \end{array}$$

Il suffit de voir que pour chaque g, les traces sur $\tilde{p}^{-1}D(g)$ de $\tilde{p}^{-1}(\overline{F - G}$ dans $\widetilde{X}$) et de ($\overline{Y - p^{-1}G}$ dans $\widetilde{Z}$) sont disjointes. Ce sont respectivement l'image inverse de l'adhérence de $F \cap U(g)$ dans $D(g)$, et l'adhérence de $Y \cap p^{-1}(U(g))$ dans $\tilde{p}^{-1}D(g)$.

Notons par $\tilde{}$ une image inverse de X à Z, ou de $D(g)$ à $\tilde{p}^{-1}D(g)$. Puisque $p^{-1}G \supset Y \cap p^{-1}(F)$, l'image inverse $\tilde{g}$ de g sur Z peut s'écrire $\tilde{g} = y + f$, avec y nul sur Y et f nul sur $p^{-1}(F)$. Il existe des a_i sur Z et f_i dans l'idéal de F tels que $f = \Sigma a_k \tilde{f_i}$. Puisque $F \supset G$, les f_i sont dans l'idéal de G et les f_i/g sont des fonctions sur $D(g)$. Elles s'annulent sur $F \cap U(g)$, donc sur ($\overline{F \cap U(g)}$ dans $D(g)$), et $\Sigma a_i (f_i/g)^{\sim}$ et nul sur $\tilde{p}^{-1}(\overline{F \cap U(g)}$ dans $D(g)$). Sur $p^{-1}U(g)$, on a $1 = y/g + f/g = y/g + \sigma a_i (f_i/g)^{\sim}$, et la même somme vaut donc 1 sur $Y \cap p^{-1}U(g)$, donc sur son adhérence ($\overline{Y \cap p^{-1}U(g)}$ dans $\tilde{p}^{-1}D(g)$). Ceci prouve la disjonction requise.

REMARQUE

Si on se donne plutôt des fermés $F \supset G_0$ de X, avec G_0 que $Y \cap p^{-1}(F)$ soit contenu *ensemblistement* dans $p^{-1}(G_0)$, il existe r tel que le $r^{\text{ième}}$ voisinage infinitesimal G de G_0 dans F vérifie les hypothèse du lemme. Si $\mathcal{J}$ est l'idéal qui définit $(Y \cap p^{-1}(F))_{\text{red}}$ dans $Y \cap p^{-1}(F)$, il suffit de prendre r tel que $\mathcal{J}^{r+1} = 0$. Le lemme permet donc, par un éclatement qui ne touche pas ou complément V de G_0, de « séparer » le transformé pur de F et $(Y - p^{-1}(G_0))^-$ dans $\widetilde{Z}$.

LEMME 0.4

Soit un diagramme commutatif de schémas

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[r, hook] \arrow[d, "p"] & \overline{X}' \arrow[d, "q"] \\ U \arrow[ur, hook] \arrow[r, hook] & X \arrow[r, hook] & \overline{X} \end{tikzcd}$$

avec U ouvert dense de $\overline{X}$ et $\overline{X}'$, p et q séparés de type fini et $q^{-1}(X) = X'$. Soient F un fermé de X, et G un fermé de $\overline{X}'$ contenant $p^{-1}(F)$. Il existe alors un idéal a avec $V(a) \subset \overline{F} - F$ tel que, après le changement de base par le morphisme d'éclatement défini par a : $\widetilde{\overline{X}} \to \overline{X}$, et après avoir remplacé le nouvel $\overline{X}'$ par l'adhérence de U, on ait :

$$q^{-1}(\overline{F}) \subset G.$$

Dans le langage de Nagata, pour prendre l'adhérence de F dans l'espace de Z. R. de X (« bubble space »), il suffit de prendre « l'intersection » des adhérences de F dans les éclatés de X de centre $\subset \overline{F} - F$.

Appliquons le lemme 0.3 à

$$\begin{tikzcd} \overline{X}' - q^*\overline{F} \arrow[rr, hook] \arrow[d] & & \overline{X}' - G \arrow[d] \\ \overline{X} - \overline{F} \arrow[r, hook] & \overline{X} - (\overline{F} - F) \arrow[r, hook] & \overline{X} \end{tikzcd}$$

On trouve a, et après le changement de base $\widetilde{\overline{X}} \to \overline{X}$, la nouvelle adhérence $\overline{F}$ est disjointe de l'image de l'adhérence de (l'ancien) $\overline{X}' - q^*\overline{F}$ dans $\overline{X}' - G$; en particulier, après avoir remplacé $\widetilde{X}$ par $\overline{U}$, cette nouvelle adhérence est disjointe de l'image de $\overline{X}' - G$, ce qu'on voulait.

LEMME 0.5

Soit un diagramme de S-schémas séparés de type fini

$$\begin{tikzcd} & X_i \arrow[r, hook] \arrow[d] & \overline{X}_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n) \\ U \arrow[ur, hook] \arrow[r, hook] & X & \end{tikzcd}$$

avec $\overline{X}_i$ propre sur S et U ouvert dense de X et $\overline{X}_i$. Soit X^* l'adhérence de U dans le produit des $\overline{X}_i$. Enfin, soit F_i un fermé de X_i ; on suppose que l'intersection des images inverses des F_i dans X^* est vide.

Alors, après avoir remplacé $\overline{X}_i$ par un éclaté de centre dans $\overline{F}_i - F$, on peut obtenir une situation analogue où l'intersection des images inverses des $\overline{F}_i$ est vide.

Soit X^{**} un éclaté de $X^* : X^{**} \xrightarrow{p_i} \overline{X}_i$, tel que dans X^{**} on ait $\bigcap \overline{p_i^{-1}(F_i)} = \varnothing$ (éclater $\bigcap \overline{p_i^{-1}(F_i)}$). Appliquons le lemme 0.4 aux diagrammes

$$\begin{tikzcd} & p_i^{-1}(X_i) \arrow[r, hook] \arrow[d] & X^{**} \arrow[d] \\ U \arrow[ur, hook] \arrow[r, hook] & X_i \arrow[r, hook] & \overline{X}_i \end{tikzcd}$$

et à $F_i \subset X_i$, $G_i = \overline{p_i^{-1}(F_i)}$. Ceci nous fournit l'éclatement voulu des $\overline{X}_i$. Dans la nouvelle situation, en effet, dans l'adhérence de U dans X^{**}, on a $\bigcap p_i^{-1}(\overline{F}_i) \subset \bigcap G_i = \varnothing$. Puisque $X^{**} \to X^*$ est surjectif, ceci est encore vrai dans X^*.

1. Les théorèmes

DÉFINITION 1.1

Soient X et Y deux S-schémas, avec Y séparé sur S. Une quasi-domination $f : X \to Y$ est un couple formé d'un ouvert dense U de X et d'un morphisme de S-schémas $f : U \to Y$ dont le graphe soit fermé dans $X \times_S Y$.

Soient X et Y deux S-schémas, avec Y séparé sur S, U un ouvert (quasi-compact) de X et $f : U \to Y$. On dit que X est *quasi-dominant* (rel. à U et f) sur Y s'il existe une quasi-domination de l'adhérence schématique $\overline{U}$ de U, à valeurs dans Y, qui prolonge f. Il existe au plus une telle quasi-domination (de graphe l'adhérence du graphe de f).

Une *quasi-domination* f est dite *propre* (ou *complète*) si le morphisme $f : U \to Y$ est propre.

THÉORÈME 1.2 ([2, THÉORÈME 3.2])

Soient X et Y deux S-schémas et $U \subset V \subset X$ deux ouverts denses de X. On suppose Y séparé de type fini sur S. Soit $f : U \to Y$ une quasi-domination de V

dans Y. Il existe un idéal a avec $V(a) \subset X - V$ tel que l'éclaté $\widetilde{X}$ de X selon $V(a)$ quasi-domine Y.

Par le changement de base $X \to S$, on se ramène à supposer que $X = S$. Y est alors un schéma sur X, f une section de Y au-dessus de U, et par hypothèse $f(U)$ est fermé au-dessus de V.

Cas 1. $U = V$, $p : Y \to X$ quasi-affine, X affine.

Par hypothèse, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, hook] \arrow[dr] & & E_X \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

avec E_X un espace affine type sur X. Si $\widetilde{X}$ quasi-domine E_X (rel. à f), alors a fortiori X quasi-domine Y. On peut donc supposer que $Y = E_X$. Un éclatement préliminaire permet de supposer que $X - U$ est un diviseur D. Localement sur X, f admet donc des coordonnées $(f_i u^{-n})$ où u est une équation locale de D, où f_i est régulier et où n est choisi assez grand une fois pour toutes. Soit a l'idéal engendré par u^n et les f_i. Après éclatement de $V(a)$, f se prolonge en une section de l'espace projectif complété de E_X et on a gagné.

Cas 2. $U = V$, p quasi-affine.

D'après le cas 1, si $(U_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est un recouvrement affine de X, il existe sur U_i un idéal a_i qui convient. Cet idéal admet une extension $\tilde{a}_i$ sur X, avec $V(\tilde{a}_i) \subset X - V$, et il suffit d'éclater le produit des $\tilde{a}_i$.

Cas 3. p quasi-affine.

D'après le lemme 0.3 appliqué à

$$\begin{tikzcd} f(U) \arrow[rr, hook] \arrow[d] & & Y \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[r, hook] & V \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

un éclatement préliminaire permet de supposer que $p(\overline{f(U)}) \cap \overline{(V - U)} = \varnothing$. Il existe donc un ouvert quasi-compact X' de X avec $X' \cap V = U$ et $p(\overline{f(U)}) \subset X'$. D'après le cas 2, il existe un idéal a sur X', avec $V(a) \subset X' - U$, tel que l'éclaté $\widetilde{X}'$ quasi-domine Y (*i.e.*, $\overline{f(U)}$). Reste à prolonger a en un idéal sur X, avec $V(a) \subset X - V$.

Cas général.

Soit (Y_i) un recouvrement fini de Y par des ouverts affines, et posons

$$U_i = f^{-1}(Y_i), \qquad X_i = \overline{U}_i, \qquad V_i = X_i \cap V.$$

Le cas 3 s'applique aux

$$\begin{tikzcd} & & & Y_i \cap p^{-1}(X_i) \arrow[d] \\ U_i \arrow[urrr] & \subset & V_i & \subset & X_i \end{tikzcd}$$

d'où un idéal a_i sur X_i ; cet idéal définit un idéal a_i sur X, avec encore $V(a_i) \subset X - V$. Éclatons le produit des a_i. L'éclatement $q : \widetilde{X} \to X$ obtenu est tel que $q^{-1}(X_i)$ domine l'éclatement $\widetilde{X}_i$. Si $X'_i = q^{-1}(X_i)$, il existe donc un ouvert U'_i de X_i, avec $U'_i \supset q^{-1}(U_i)$, tel que, *au-dessus de* X_i, $\overline{f(U_i)}$ soit une section de $f : U'_i \to Y$. On en conclut que, après éclatement,

$$\overline{f(U)} = \bigcup f_i(U'_i)$$

Pour prouver le théorème 1.2, on a le droit de remplacer Y par $\overline{f(U)}$, et on conclut par le cas 3 et le lemme suivant.

LEMME 1.3

$\overline{f(U)}$ est quasi-affine sur $\widetilde{X}$.

En effet, $\overline{f(U)}$ est quasi-fini sur $\widetilde{X}$.

COROLLAIRE 1.4 (UNE VARIANTE DU LEMME DE CHOW)

Soit $f : X \to S$ un morphisme séparé de type fini. Alors pour tout ouvert U quasi-projectif sur S et dense dans X, il existe un diagramme de S-schémas

$$X \xleftarrow{q} X' \overset{j}{\hookrightarrow} \overline{X}$$

avec q morphisme d'éclatement défini par un idéal a vérifiant $V(a) \subset X' - U$, et avec $\overline{X}$ projectif sur S.

En particulier, q est projectif et surjectif et $q^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U$.

Soit U^* un S-schéma projectif contenant U comme ouvert schématiquement dense. D'après le théorème 1.2 appliqué à l'injection de U dans X, on peut choisir U^* quasi-dominant sur X : on dispose d'un diagramme

(1.4.1)
$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & V \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi"] & U^* \\ U \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

et ici, puisque U^* est propre sur S, φ est propre.

LEMME 1.5

Soit un diagramme de S-schémas séparés de type fini

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & V \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi"] & Y \\ U \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

avec U dense dans X, dense dans Y, et schématiquement dense dans V, et φ une quasi-domination de Y dans X. Si a est un idéal de X, avec $V(a) \subset X - U$, tel que l'éclaté $\widetilde{X}$ de X selon a quasi-domine V (rel. à U), et que U soit schématiquement dense dans $\widetilde{X}$, d'où un diagramme

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook] \arrow[dr, hook] & W \arrow[r, hook] \arrow[d, "\psi"] & \widetilde{X} \\ & V \end{tikzcd}$$

alors,

(a) *ψ est le morphisme d'éclatement de V selon $\varphi^* a$;*

(b) *le graphe de ψ est fermé dans $\widetilde{X} \times_S Y$.*

Soit $\widetilde{V}$ l'éclaté de V selon $\varphi^* a$:

(1) D'après la propriété universelle de $\widetilde{X}$, on dispose d'un unique X-morphisme de $\widetilde{V}$ dans $\widetilde{X}$, soit α.

(2) D'après la propriété universelle de $\widetilde{V}$, on dispose d'un unique V-morphisme de W dans $\widetilde{V}$, soit β.

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[rr, hook] \arrow[ddd, "\varphi"] & & Y \\ U \arrow[ur, hook] \arrow[drr, hook] \arrow[ddr, hook] & & \widetilde{V} \arrow[ul] \arrow[dr, "\alpha"] & \\ & & W \arrow[uul, "\psi"] \arrow[u, "\beta"] \arrow[r, hook] & \widetilde{X} \arrow[dll] \\ & X & & \end{tikzcd}$$

D'après le théorème 1.2, éclatant X_1 sans toucher à U, on se ramène à supposer que X_1 quasi-domine X_2

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[r, hook] \arrow[dd] & X_1 \\ U \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \\ & X_2 & \end{tikzcd}$$

Appliquons le lemme 1.5 à ce diagramme, de façon à obtenir

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[r, hook] \arrow[dd, "\psi"] & X_2' \\ U \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \\ & V \arrow[r, hook] & X_1 \end{tikzcd}$$

où

(a) ψ est le morphisme d'éclatement d'un idéal a de V avec $V(a) \subset V - U$,
(b) le graphe de ψ est fermé dans $X_1 \times X_2'$, et
(c) X_2' est un éclatement de X_2.

Soit a' un idéal de X_1 qui prolonge a, avec $V(a') \subset X_1 - U$, et soit $q : X_1' \to X_1$ l'éclaté de X_1 selon a. ψ induit alors un isomorphisme entre W et $q^{-1}(V)$, et le graphe de cet isomorphisme est fermé dans $X_1' \times X_2'$. On définit X en recollant X_1' et X_2' selon cet isomorphisme.

REMARQUE

La démonstration montre qu'on peut prendre pour $p_i : U_i \to X_i$ $(U_i \subset X)$ un morphisme d'éclatement d'un idéal hors de U.

THÉORÈME 1.6 ([2, LEMME 4.1 et THÉORÈME 4.3])

Soit $f : X \to S$ séparé de type fini. Il existe une immersion de X dans un S-schéma propre sur S.

Le graphe de φ est (trivialement) propre sur V ; il en est de même de son image réciproque sur $V \times_S \widetilde{X}$, et on en déduit que le graphe de ψ est propre sur V, ce que ψ est propre. β est donc propre, et d'image schématiquement dense, car déjà U est schématiquement dense dans $\widetilde{V}$. D'autre part, β est une section locale de α sur W (car $\beta_{|U}$ en est une sur U), donc β est un isomorphisme.

Par hypothèse, le graphe de ψ est fermé dans $V \times_S \widetilde{X}$, et contenu dans l'image réciproque du graphe de φ, qui est fermé dans $Y \times X$; on en conclut que $\Gamma(\psi)$ est fermé dans $Y \times \widetilde{X}$.

Appliquons le lemme 1.5 à 1.4.1. Il existe un idéal a sur X, avec $V(a) \subset X - U$, tel que l'éclaté $\widetilde{X}$ quasi-domine V. On peut de plus se débrouiller pour que U soit schématiquement dense dans $\widetilde{X}$. D'après le lemme 1.5, et parce que φ est propre, $\widetilde{X}$ est donc l'éclaté de V selon $\varphi^* a$. Si a' est un idéal de U^* qui prolonge a, avec $V(a) \subset U^* - U$, on prend alors

$$X' = \widetilde{X}, \qquad \overline{X} = \widetilde{U}^*.$$

LEMME 1.7 ([2, LEMME 4.2])

Soit un diagramme de S-schémas séparés de type fini

$$X_2 \hookleftarrow U \hookrightarrow X_1$$

avec U ouvert dense de X_i. Il existe $j : U \hookrightarrow X$, avec X séparé *de type fini sur S et U schématiquement dense dans X et des quasi-dominations propres $p_i : X \to X_i$.*

Soit U_i un recouvrement ouvert fini de X par des ouverts quasi-projectifs denses. Pour chaque U_i, il existe (voir le corollaire 1.4) un diagramme commutatif de S-schémas

$$\begin{tikzcd} & X'_i \arrow[r, hook, "j_i"'] \arrow[dd, "q_i"] & \overline{X}_i \\ U_i \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \\ & X_i & \end{tikzcd}$$

avec q_i propre, $\overline{X}_i$ propre sur S et U_i dense dans $\overline{X}_i$. Soient $F_i = X_i - U_i$ et $F'_i = q_i^{-1}(F_i)$. Soit enfin X^* l'adhérence de U dans le produit des $\overline{X}_i$:

$$p_i : X^* \longrightarrow \overline{X}_i.$$

D'après le lemme 0.5, un éclatement préliminaire de $\overline{X}_i$, ne touchant pas à $\overline{X}'_i$, permet de supposer que $\bigcap p_i^{-1}(\overline{F}'_i) = \varnothing$.

Soit M_i le schéma séparé sur S obtenu en recollant X et $\overline{X}_i - \overline{F}'_i$ le long de U_i.

$$\begin{tikzcd} & \overline{X}_i - \overline{F}'_i \arrow[d, hook] \\ X \arrow[r, hook] & M_i \end{tikzcd}$$

Appliquons le lemme 1.7 à X et aux M_i, pour obtenir $X \hookrightarrow M$ où M quasi-domine proprement chacun des M_i. Il reste à prouver que M est propre sur S. On dispose en effet d'applications

$$X^* - p_i^{-1}(\overline{F}'_i) \longrightarrow M_i$$

qui se recollent sur $U = \bigcap U_i$. Remplaçant X^* par un éclaté X^{**}, on obtient des applications $X^{**} - p_i^{-1}(\overline{F}_i) \to M$ qui se recollent, d'où une application de l'adhérence schématique de U dans X^{**}, à valeurs dans M. M, image de cette application, est propre sur S.

Commentaires

J'espère qu'en étant plus constructifs encore, on pourra prouver le théorème 1.6 pour $f : X \to S$ séparé de type fini, S quasi-compact quasi-séparé. Les règles à suivre sont :

(a) considérer uniquement des ouverts quasi-compacts et des fermés définis par des idéaux de type fini

(b) ne jamais prendre d'adhérence schématique (on sortirait de (a)), mais prendre seulement un fermé contenant la partie donnée et suffisamment petit pour les constructions ultérieures

(c) ne pas parler d'ouvert quasi-projectif dense (cf. (b)). Se rappeler que, pour construire de tels ouverts, on pourrait partir d'un recouvrement affine U_i, et prendre $U = \bigcup (U_i - \overline{\bigcup_{j<i} U_j})$. Traduire les arguments en termes des U_i de départ, et appliquer (a) + (b).

Je n'ai par contre aucune idée dans le cas des espaces algébriques.

Remerciements. Les notes originelles étaient manuscrites. Elles ont été dactylographieés par V. Maillot.

Références

[1] B. Conrad, *Deligne's notes on Nagata compactifications*, J. Ramanujan Math. Soc. **22** (2007), 205–257.

[2] M. Nagata, *Imbedding of an abstract variety in a complete variety*, J. Math. Kyoto Univ. **2** (1962), 1–10.

[3] ———, *A generalization of the imbedding problem of an abstract variety in a complete variety*, J. Math. Kyoto Univ. **3** (1963), 89–102.

Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey 08540, USA;
deligne@math.ias.edu