J. Math. Soc. Japan
Vol. 60, No. 2 (2008) pp. 397–421
doi: 10.2969/jmsj/06020397

Déformations de réseaux dans certains groupes résolubles

By Cédric Rousseau

(Received Jun. 19, 2007)

Abstract. We aim to study local rigidity and deformations for the following class of groups: the semidirect product $\Gamma = \boldsymbol{Z}^n \rtimes_A \boldsymbol{Z}$ where $n \geq 2$ is an integer and A is a hyperbolic matrix in $SL(n, \boldsymbol{Z})$, considered first as a lattice in the solvable Lie group $G = \boldsymbol{R}^n \rtimes_A \boldsymbol{R}$, then as a subgroup of the semisimple Lie group $SL(n+1, \boldsymbol{R})$. We will notably show that, although Γ is locally rigid neither in G nor in H, it is locally $SL(n+1, \boldsymbol{R})$–rigid in G in the sense that every small enough deformation of Γ in G is conjugated to Γ by an element of $SL(n+1, \boldsymbol{R})$.

1. Introduction.

Soient Γ un groupe de type fini et G un groupe topologique. On désigne par $R(\Gamma, G)$ l'ensemble des morphismes de groupes de Γ dans G muni de la topologie de la convergence ponctuelle *i.e.* la topologie induite par celle du produit G^Γ (de sorte que deux morphismes de Γ dans G sont proches si, et seulement si, ils le sont sur un ensemble de générateurs de Γ). Un morphisme de groupes $r : \Gamma \to G$ est dit localement rigide si tout autre morphisme de groupes $r' : \Gamma \to G$ suffisamment proche de r est conjugué à r, c'est-à-dire s'il existe un voisinage V de r dans $R(\Gamma, G)$ tel que:

$$\forall\, r' \in V, \quad \exists\, g \in G, \quad \forall\, \gamma \in \Gamma, \quad r'(\gamma) = g r(\gamma) g^{-1}.$$

Lorsque Γ est un sous-groupe de G, on dira que Γ est localement rigide dans G si l'injection canonique de Γ dans G est localement rigide. Cette notion de rigidité locale a été initialement étudiée dans le cas où G est un groupe de Lie semi-simple et Γ un réseau dans G. Sur ce point, le premier résultat important, obtenu d'abord partiellement par Calabi [**1**], Calabi-Vesentini [**2**] et Selberg [**7**], puis de manière complète par Weil [**8**], [**9**], est le suivant:

Théorème I. *Soit G un groupe de Lie semi-simple non localement isomorphe à $SL(2, \boldsymbol{R})$. Si Γ est un réseau cocompact irréductible dans G alors Γ est localement rigide dans G.*

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 22E25, 22E40.
Key Words and Phrases. local rigidity, lattices in solvable Lie groups, group cohomology.

Pour plus de détails sur l'historique de ce théorème, le lecteur pourra consulter [**3**]. Peu après, Weil [**10**] fournit un critère de rigidité locale valide dans un cadre plus général. Tout morphisme $\Gamma \to G$ définit une action du groupe Γ sur $\mathfrak{g}$ via la représentation adjointe Ad_G. L'algèbre $\mathfrak{g}$ devient ainsi un Γ-module et on peut donc définir la cohomologie $H^*(\Gamma, \mathfrak{g})$ de Γ (en tant que groupe discret) à coefficients dans $\mathfrak{g}$. Weil montre alors le:

Théorème II. *Soit $r \in R(\Gamma, G)$ où Γ est un groupe de type fini et G un groupe de Lie. Si $H^1(\Gamma, \mathfrak{g}) = 0$, le morphisme r est localement rigide.*

Dès lors ce critère motive la recherche de méthodes de calcul du groupe de cohomologie $H^1(\Gamma, \mathfrak{g})$ censé mesurer le défaut de rigidité d'un réseau dans un groupe de Lie (voir notamment [**5**], [**6**]). Par exemple si Γ et G sont abéliens, l'action de Γ sur G est triviale et $H^1(\Gamma, \mathfrak{g}) = \boldsymbol{R}^n \otimes \mathfrak{g}$ où n est le rang (de la partie libre) de Γ; le cas nilpotent est aussi relativement facile à traiter.

Par contre, à notre connaissance, il n'existe pas dans la littérature d'exemples de calculs explicites de cohomologie pour les réseaux dans les groupes de Lie résolubles non nilpotents. C'est l'objet de ce travail: on se propose d'étudier le cas non trivial des déformations du réseau obtenu comme produit semi-direct de $\boldsymbol{Z}$ agissant sur $\boldsymbol{Z}^n$ (où $n \geq 2$) à l'aide d'une matrice hyperbolique $A \in SL(n, \boldsymbol{Z})$ diagonalisable et à valeurs propres réelles strictement positives. Si $A = PDP^{-1}$, on peut définir pour tout réel t la puissance A^t en posant $A^t = PD^tP^{-1}$, où D^t est la matrice diagonale des valeurs propres élevées à la puissance t et ainsi construire le produit semi-direct $G = \boldsymbol{R}^n \rtimes_A \boldsymbol{R}$ dans lequel la multiplication s'écrit:

$$(U, x)(V, y) = (U + A^x V,\, x + y).$$

Le groupe G, muni de sa structure canonique de groupe de Lie, est résoluble et $\Gamma = \boldsymbol{Z}^n \rtimes_A \boldsymbol{Z}$ est un réseau cocompact dans G. Nous établirons dans un premier temps le résultat suivant:

Théorème. *Si A admet k valeurs propres distinctes de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_k$, alors l'espace $H^1(\Gamma, \mathfrak{g})$ est de dimension $\sum_{j=1}^{k} m_j^2 - 1$.*

Ce résultat, à lui-seul, ne permet pas d'affirmer que le réseau Γ n'est pas localement rigide dans G, mais laisse présumer qu'il en est ainsi. À ce niveau, à défaut de rigidité locale ou de non-rigidité locale clairement établie, on peut néanmoins se poser la question d'une rigidité locale relative au sens suivant:

Définition. Soient Γ un groupe de type fini, H un groupe topologique et G un sous-groupe de H. Un morphisme $r : \Gamma \to G$ sera dit localement H-rigide si tout morphisme $r' : \Gamma \to G$ suffisamment proche de r est conjugué à r par un élément de H, c'est-à-dire s'il existe un voisinage V de r dans $R(\Gamma, G)$ tel que:

$$\forall\, r' \in V, \quad \exists\, h \in H, \quad \forall\, \gamma \in \Gamma, \quad r'(\gamma) = hr(\gamma)h^{-1}.$$

Si Γ est un sous-groupe de G, on dira que Γ est localement H-rigide dans G si l'injection canonique de Γ dans G est localement H-rigide.

Notre groupe $G = \boldsymbol{R}^n \rtimes_A \boldsymbol{R}$ et son réseau $\Gamma = \boldsymbol{Z}^n \rtimes_A \boldsymbol{Z}$ peuvent être considérés comme sous-groupes de $H = SL(n+1, \boldsymbol{R})$ (d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, ensemble des matrices carrées réelles de dimension $n+1$ et de trace nulle) au moyen du plongement

$$u : (U, x) \mapsto \begin{pmatrix} A^x & U \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut naturellement s'interroger sur l'éventuelle rigidité locale de Γ dans H. On remarquera que H est un groupe de Lie semi-simple, mais dans lequel Γ n'est pas un réseau, et donc que cette situation ne remplit pas les hypothèses du théorème I. Par ailleurs, le calcul de l'espace $H^1(\Gamma, \mathfrak{h})$ dans le but de pouvoir éventuellement appliquer le théorème II semble particulièrement difficile. Nous montrerons néanmoins que:

THÉORÈME. *L'application linéaire $H^1(\Gamma, \mathfrak{g}) \to H^1(\Gamma, \mathfrak{h})$ induite par l'injection $G \hookrightarrow H$ est nulle.*

Ceci laisse penser que Γ est localement H-rigide dans G. En passant par la détermination directe des déformations de Γ dans G relativement à H, nous montrerons que c'est effectivement le cas. Plus précisément:

THÉORÈME. *Étant donnée une déformation $\Gamma^{(\varepsilon)}$ de Γ dans G (voir propositions* 11 *et* 12 *pour les notations) il existe un unique élément K de H proche de l'identité tel que $\Gamma^{(\varepsilon)} = K\Gamma K^{-1}$, à savoir:*

$$K = \begin{pmatrix} \kappa P I^{(\varepsilon)} P^{-1} & \kappa(A-I)^{-1}\sum_{i=1}^n \epsilon_i U_i \\ 0 & \kappa \end{pmatrix} \quad \textit{où } \kappa = \det I^{(\varepsilon)^{-\frac{1}{n+1}}}.$$

Ce résultat et sa preuve nous permettront d'ailleurs d'affirmer non seulement que, comme on pouvait le supposer, Γ n'est pas localement rigide dans G (Corollaire 14), mais que de plus Γ n'est pas localement rigide dans H (Proposition 15).

2. Calcul de l'espace $H^1(\Gamma, \mathfrak{g})$.

2.1. Cohomologie des groupes: quelques rappels.

Avant toute chose, rappelons rapidement que pour calculer la cohomologie d'un Γ–module V (Γ groupe quelconque fixé) de manière effective (voir par exemple [**4**, p. 1 à 22]) on peut la considérer en tant que cohomologie du complexe des cochaînes inhomogènes:

$$0 \to V \xrightarrow{d} C^1(\Gamma, V) \xrightarrow{d} C^2(\Gamma, V) \xrightarrow{d} \cdots$$

où, pour tout $k \geq 0$, $C^k(\Gamma, V)$ est l'ensemble des applications de Γ^k dans V (en faisant l'identification $C^0(\Gamma, V) = V$), et la différentielle d s'écrit (on se contentera ici des degrés ≤ 1):

$$dv(\gamma) = \gamma.v - v \quad \text{pour tous } v \in V \text{ et } \gamma \in \Gamma,$$
$$dF(\gamma, \gamma') = \gamma.F(\gamma') - F(\gamma\gamma') + F(\gamma) \quad \text{pour tous } F \in C^1(\Gamma, V) \text{ et } \gamma, \gamma' \in \Gamma.$$

Les 1-cocycles à valeurs dans V sont ainsi les applications $F\colon \Gamma \to V$ vérifiant:

$$F(\gamma\gamma') = F(\gamma) + \gamma.F(\gamma') \quad \text{pour tous } \gamma, \gamma' \in \Gamma.$$

Identifions Γ à sa représentation dans $GL(V)$; on montre que:

Proposition 1. *Si $\Gamma = \langle\gamma\rangle$ est isomorphe à $\boldsymbol{Z}$ alors*

$$H^n(\Gamma, E) \simeq \begin{cases} \mathrm{Ker}(\gamma - \mathrm{Id}_V) & \textit{si } n = 0, \\ \mathrm{Coker}(\gamma - \mathrm{Id}_V) & \textit{si } n = 1, \\ 0 & \textit{si } n \geq 2. \end{cases}$$

2.2. La représentation adjointe de G et les champs invariants.

Revenons maintenant à la situation qui nous intéresse: $\Gamma = \boldsymbol{Z}^n \rtimes_A \boldsymbol{Z}$ réseau dans $G = \boldsymbol{R}^n \rtimes_A \boldsymbol{R}$ agissant sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ au moyen de la représentation adjointe de G. Tâchons de décrire cette action et dans un premier temps d'en déterminer les invariants. Pour tout $h \in G$, $\mathrm{Ad}_G(h)$ est l'application induite sur $\mathfrak{g}$, espace canoniquement isomorphe à l'espace tangent T_0G (l'élément neutre de G étant noté 0), par la dérivée de l'automorphisme intérieur $\rho_h\colon g \mapsto hgh^{-1}$. Aussi, pour tous $h = (U, x)$ et $g = (V, y)$ dans G, on a:

$$\begin{aligned}\rho_h(g) &= (U,x)(V,y)(U,x)^{-1}\\ &= (U + A^x V,\, x+y)(-A^{-x}U,\, -x)\\ &= (U + A^x V - A^y U,\, y).\end{aligned}$$

La structure de variété de G peut être définie par la seule carte de G dans $\boldsymbol{R}^{n+1}$:

$$((x_1,\dots,x_n),\, x_{n+1}) \longmapsto (x_1,\dots,x_n,x_{n+1}).$$

Dans les repères naturels des espaces tangents $\mathrm{T}_g G$ et $\mathrm{T}_{\rho_h(g)}G$, la différentielle $d_g\rho_h$ est représentée par la matrice par blocs:

$$d_g\rho_h = \begin{pmatrix} A^x & -\dfrac{dA^y}{dy}U \\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

De $A^y = PD^yP^{-1}$, on tire $\frac{dA^y}{dy} = PD^y(\ln D)P^{-1}$, où:

$$D^y = \begin{pmatrix} {\mu_1}^y & & \\ & \ddots & \\ & & {\mu_n}^y\end{pmatrix} \text{ et } \ln D = \begin{pmatrix} \ln\mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \ln\mu_n\end{pmatrix}.$$

D'où

$$d_g\rho_h = \begin{pmatrix} A^x & -PD^y(\ln D)P^{-1}U \\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

et en l'élément neutre 0 de G:

$$d_0\rho_h = \begin{pmatrix} A^x & -P(\ln D)P^{-1}U \\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Considérons les champs de vecteurs tangents $X_1,\dots,X_n,X_{n+1}$ sur G définis par:

$$\begin{pmatrix} X_1\\ \vdots\\ X_n\\ X_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^{x_{n+1}}\,{}^{\mathrm{t}}P & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial/\partial x_1\\ \vdots\\ \partial/\partial x_n\\ \partial/\partial x_{n+1}\end{pmatrix}. \tag{1}$$

Si $P = (p_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, ces champs prennent en $g = ((x_1,\dots,x_n),\dots,x_{n+1})$ la valeur:

$$\begin{cases} X_i(g) = {\mu_i}^{x_{n+1}}\left(p_{1i}\dfrac{\partial}{\partial x_1}(g)+\cdots+p_{ni}\dfrac{\partial}{\partial x_n}(g)\right) & \text{si } 1\leq i\leq n; \\ X_{n+1}(g) = \dfrac{\partial}{\partial x_{n+1}}(g). \end{cases}$$

On vérifie aisément que ces champs forment une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G et que de plus, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, on a:

$$[X_i, X_j] = \begin{cases} 0 & \text{si } 1\leq j\leq n; \\ -(\ln\mu_i)X_i & \text{si } j = n+1. \end{cases}$$

On travaillera par la suite exclusivement dans cette base, dans laquelle $d_0\rho_h$, c'est-à-dire $\mathrm{Ad}_G(h)$, a pour matrice:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}_G(h) &= \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^x & -P(\ln D)P^{-1}U \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D^x & -(\ln D)P^{-1}U \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

On remarquera que, en tant que sous-groupes de Γ, d'une part $\boldsymbol{Z}$ agit trivialement sur $\boldsymbol{R}X_{n+1}$, et d'autre part $\boldsymbol{Z}^n$ agit trivialement sur $\mathfrak{g}_0 = \bigoplus_{i=1}^n \boldsymbol{R}X_i$.

On établit ainsi de manière immédiate la proposition suivante:

PROPOSITION 2.

(i) $H^0(\boldsymbol{Z}^n, \mathfrak{g}) = \mathfrak{g}_0 \simeq \boldsymbol{R}^n$;

(ii) $H^0(\boldsymbol{Z}, \mathfrak{g}) = \boldsymbol{R}X_{n+1} \simeq \boldsymbol{R}$;

(iii) $H^0(\Gamma, \mathfrak{g}) = 0$.

2.3. Les espaces $H^1(\boldsymbol{Z}^n, \mathfrak{g})$, $H^1(\boldsymbol{Z}, \mathfrak{g})$ et $H^1(\Gamma, \mathfrak{g})$.

Toujours considérés comme sous-groupes de Γ, $\boldsymbol{Z}^n$ et $\boldsymbol{Z}$ agissent sur $\mathfrak{g}$. Déterminer leur cohomologie à valeurs dans $\mathfrak{g}$, et plus précisément la forme des 1-cocycles pour ces actions, nous sera utile pour calculer $H^1(\Gamma, \mathfrak{g})$.

Pour toute 1-cochaîne inhomogène $F : \boldsymbol{Z}^n \to \mathfrak{g}$ et tout $U \in \boldsymbol{Z}^n$, on pose:

$$F(U) = \begin{pmatrix} W_F(U) \\ w_{n+1,F}(U) \end{pmatrix} \text{ où } W_F(U) = \begin{pmatrix} w_{1,F}(U) \\ \vdots \\ w_{n,F}(U) \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^n.$$

Notons $\mathrm{M}(n, \boldsymbol{R})$ l'espace des matrices carrées réelles de dimension n.

Proposition 3.

(i) *Les* 1*-cocycles* $F : \boldsymbol{Z}^n \to \mathfrak{g}$ *sont les applications de la forme*:

$$F(U) = \begin{pmatrix} M_F U \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{où } M_F \in M(n, \boldsymbol{R}).$$

(ii) *Un* 1*-cocycle* $F : \boldsymbol{Z}^n \to \mathfrak{g}$ *est exact si, et seulement si, il existe* $w \in \boldsymbol{R}$ *tel que*:

$$\forall\ U \in \boldsymbol{Z}^n, \quad F(U) = \begin{pmatrix} -w(\ln D)P^{-1}U \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(iii) *L'espace* $H^1(\boldsymbol{Z}^n, \mathfrak{g})$ *est de dimension* $n^2 - 1$.

Preuve.

(i) Soient $F : \boldsymbol{Z}^n \to \mathfrak{g}$ un 1-cocycle et $(c_j)_{1\leq j\leq n}$ le sytème canonique de générateurs de $\boldsymbol{Z}^n$. De l'égalité $F(c_i + c_j) = F(c_j + c_i)$ pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, on tire:

$$F(c_i) + (c_i, 0).F(c_j) = F(c_j) + (c_j, 0).F(c_i),$$

et donc:

$$(c_j, 0).F(c_i) - F(c_i) = (c_i, 0).F(c_j) - F(c_j),$$

ce qui s'écrit matriciellement:

$$\begin{pmatrix} 0 & -(\ln D)P^{-1}c_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_F(c_i) \\ w_{n+1,F}(c_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(\ln D)P^{-1}c_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_F(c_j) \\ w_{n+1,F}(c_j) \end{pmatrix}.$$

D'où

$$w_{n+1,F}(c_i)c_j = w_{n+1,F}(c_j)c_i,$$

et comme c_i et c_j sont linéairement indépendants dans $\boldsymbol{R}^n$ lorsque $i \neq j$, $w_{n+1,F}(c_i) = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Soit J la projection de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}_0$; comme $\boldsymbol{Z}^n$ agit trivialement sur $\mathfrak{g}_0$, $J \circ F$ est un morphisme de groupes de $\boldsymbol{Z}^n$ dans $\mathfrak{g}_0$, donc est de la forme $(J \circ F)(U) = M_F U$, avec $M_F \in \mathrm{M}(n, \boldsymbol{R})$. Ainsi F est nécessairement de la forme:

$$F(U) = \begin{pmatrix} M_F U \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, toute application F: $\boldsymbol{Z}^n \to \mathfrak{g}$ de cette forme est un 1-cocycle car alors:

$$\begin{aligned} F(U+V) &= \begin{pmatrix} M_F(U+V) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_F U \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_F V \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} M_F U \\ 0 \end{pmatrix} + (U,0).\begin{pmatrix} M_F V \\ 0 \end{pmatrix} = F(U) + (U,0).F(V). \end{aligned}$$

(ii) Les 1-cobords F: $\boldsymbol{Z}^n \to \mathfrak{g}$ s'écrivent:

$$F(U) = (U,0).X - X \text{ où } X \in \mathfrak{g}.$$

Si $X = \left(\begin{smallmatrix} W \\ w \end{smallmatrix}\right)$, alors

$$F(U) = \begin{pmatrix} 0 & -(\ln D)P^{-1}U \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w(\ln D)P^{-1}U \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(iii) découle immédiatement de (i) et (ii). □

Pour ce qui est de l'action de $\boldsymbol{Z}$, on a la proposition qui suit:

PROPOSITION 4.

(i) *Les* 1*-cocycles* F: $\boldsymbol{Z} \to \mathfrak{g}$ *sont les applications de la forme*:

$$F(s) = \begin{pmatrix} (D^s - I)(D - I)^{-1} X_F(1) \\ s x_F(1) \end{pmatrix} \quad \textit{où } X_F(1) \in \boldsymbol{R}^n, x_F(1) \in \boldsymbol{R}.$$

(ii) *L'espace* $H^1(\boldsymbol{Z}, \mathfrak{g})$ *est de dimension* 1.

Preuve.
(i) De manière générale (voir par exemple [**4**, p. 21]), on connaît la forme des 1-cocycles dans un $\boldsymbol{Z}$-module; ainsi on peut voir que dans notre situation les 1-cocycles F: $\boldsymbol{Z} \to \mathfrak{g}$ s'écrivent:

$$F(s) = \begin{pmatrix} X_F(s) \\ x_F(s) \end{pmatrix} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{s-1} (0,k).F(1) & \text{si } s \geq 0, \\ \displaystyle -\sum_{k=s}^{-1} (0,k).F(1) & \text{si } s \leq 0. \end{cases}$$

Donc ici:

$$F(s) = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{s-1} D^k X_F(1) \\ s x_F(1) \end{pmatrix} \ \text{si } s \geq 0 \text{ et } F(s) = \begin{pmatrix} \displaystyle -\sum_{k=s}^{-1} D^k X_F(1) \\ s x_F(1) \end{pmatrix} \ \text{si } s \leq 0.$$

Aussi, pour tout entier $s \geq 0$: $D^s - I = \big(\sum_{k=0}^{s-1} D^k\big)(D - I)$, et

$$\begin{aligned} D^{-s} - I &= -D^{-s}(D^s - I) \\ &= -D^{-s}\Big(\sum_{k=0}^{s-1} D^k\Big)(D - I) = -\Big(\sum_{k=-s}^{-1} D^k\Big)(D - I), \end{aligned}$$

d'où la forme annoncée pour $F(s)$.
(ii) Soit $\sigma = (0, 1)$ le générateur de $\boldsymbol{Z}$ dans Γ. On sait que (*cf.* Proposition 1):

$$H^1(\boldsymbol{Z}, \mathfrak{g}) \simeq \operatorname{Coker}(\operatorname{Ad}_G(\sigma) - \operatorname{Id}_{\mathfrak{g}}),$$

espace vectoriel clairement de dimension 1 étant donné que $\operatorname{Ad}_G(\sigma) - \operatorname{Id}_{\mathfrak{g}}$ a pour matrice:

$$\begin{pmatrix} D - I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Ces deux dernières propositions nous permettent de décrire les 1-cocycles de Γ dans $\mathfrak{g}$:

Proposition 5. *Les* 1*-cocycles* $F : \Gamma \mapsto \mathfrak{g}$ *sont les applications de la forme*:

$$F(U,s) = \begin{pmatrix} M_F U + (D^s - I)(D-I)^{-1} X_F(1) \\ 0 \end{pmatrix},$$

oú $X_F(1) \in \boldsymbol{R}^n$ *et* $M_F \in M(n, \boldsymbol{R})$ *est telle que* $M_F A = D M_F$.

PREUVE. Soit $F : \Gamma \mapsto \mathfrak{g}$ un 1-cocycle. Les restrictions $F_{|\boldsymbol{Z}^n}$ et $F_{|\boldsymbol{Z}}$ sont alors des 1-cocycles respectivement de $\boldsymbol{Z}^n$ et $\boldsymbol{Z}$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$ et qui s'écrivent donc:

$$F_{|\boldsymbol{Z}^n}(U) = \begin{pmatrix} M_F U \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } F_{|\boldsymbol{Z}}(s) = \begin{pmatrix} (D^s - I)(D-I)^{-1} X_F(1) \\ s x_F(1) \end{pmatrix},$$

où $M_F \in \mathrm{M}(n, \boldsymbol{R})$, $X_F(1) \in \boldsymbol{R}^n$ et $x_F(1) \in \boldsymbol{R}$. Aussi, pour tout $(U,s) \in \Gamma$:

$$\begin{aligned} F(U,s) &= F((U,0)(0,s)) = F_{|\boldsymbol{Z}^n}(U) + (U,0).F_{|\boldsymbol{Z}}(s), \\ &= F((0,s)(A^{-s}U,0)) = F_{|\boldsymbol{Z}}(s) + (0,s).F_{|\boldsymbol{Z}^n}(A^{-s}U). \end{aligned} \tag{2}$$

D'où l'égalité

$$(U,0).F_{|\boldsymbol{Z}}(s) - F_{|\boldsymbol{Z}}(s) = (0,s).F_{|\boldsymbol{Z}^n}(A^{-s}U) - F_{|\boldsymbol{Z}^n}(U),$$

ce qui, pour $s = 1$, donne:

$$\begin{pmatrix} 0 & -(\ln D) P^{-1} U \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_F(1) \\ x_F(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_F A^{-1} U \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} M_F U \\ 0 \end{pmatrix},$$

et donc:

$$-x_F(1)(\ln D) P^{-1} U = (D M_F A^{-1} - M_F) U = (D M_F P D^{-1} - M_F P) P^{-1} U.$$

Ceci étant pour tout $U \in \boldsymbol{Z}^n$, en posant $N_F = M_F P = (n_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ on a:

$$D N_F D^{-1} - N_F = -x_F(1) \ln D.$$

Or cette dernière égalité signifie que, pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$(\mu_i \mu_j^{-1} - 1) n_{ij} = -x_F(1) \delta_{ij} \ln \mu_i, \tag{3}$$

où δij est le symbole de Kronecker, ce qui lorsque $i = j$ force $x_F(1)$ à être nul, si bien que $DN_FD^{-1} = N_F$. Ainsi $DM_FP = M_FPD$, ou encore:

$$DM_F = M_FPDP^{-1} = M_FA. \tag{4}$$

Finalement, suivant (2), F est de la forme:

$$F(U,s) = \begin{pmatrix} M_FU + (D^s - I)(D - I)^{-1}X_F(1) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, on montre sans peine que toute application $F\colon \Gamma \to \mathfrak{g}$ de cette forme avec la condition (4) est un 1-cocycle. □

Proposition 6. *Les* 1*-cobords* $F\colon \Gamma \mapsto \mathfrak{g}$ *sont de la forme*:

$$F(U,s) = \begin{pmatrix} -w(\ln D)P^{-1}U + (D^s - I)W \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textit{où } W \in \boldsymbol{R}^n, w \in \boldsymbol{R}.$$

Preuve. Les 1-cobords $F\colon \Gamma \to \mathfrak{g}$ sont les applications qui s'écrivent:

$$F(U,s) = (U,s).X - X, \text{ où } X \in \mathfrak{g}.$$

$$\text{Si } X = \begin{pmatrix} W \\ w \end{pmatrix}, \text{ alors } F(U,s) = \begin{pmatrix} D^s - I & -(\ln D)P^{-1}U \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W \\ w \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -w(\ln D)P^{-1}U + (D^s - I)W \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Nous sommes dès lors en mesure de déterminer la dimension de l'espace $H^1(\Gamma, \mathfrak{g})$:

Théorème 7. *Si* A *admet* k *valeurs propres distinctes* ($k \leq n$) *et si* $m_1, \ldots, m_k$ *sont leurs multiplicités respectives, alors*:

$$\dim H^1(\Gamma, \mathfrak{g}) = \sum_{i=1}^{k} {m_i}^2 - 1.$$

Preuve. La relation (3) qui, en définitive, s'écrit:

$$\forall\, i,j \in \{1, \ldots, n\},\ (\mu_i {\mu_j}^{-1} - 1)n_{ij} = 0,$$

montre que l'ensemble $\mathscr{M}_A$ des matrices N_F telles que $N_F D = D N_F$ est le sous-espace de $\mathrm{M}(n, \boldsymbol{R})$ engendré par l'ensemble des matrices élémentaires E_{ij} telles que $\mu_i = \mu_j$. La dimension de ce sous-espace est donc égale au cardinal de l'ensemble $\Delta_A = \{(i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2 | \mu_i = \mu_j\}$, c'est-à-dire à:

$$\begin{aligned} n + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ m_i \geq 2}}^{k} \binom{m_i}{2} &= n + \sum_{i=1}^{k} m_i(m_i - 1) \\ &= n + \sum_{i=1}^{k} {m_i}^2 - \sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k} {m_i}^2. \end{aligned}$$

On déduit alors de la proposition 5 que l'application

$$\phi : F \mapsto (X_F(1), M_F P)$$

est un isomorphisme entre l'espace $Z^1(\Gamma, \mathfrak{g})$ des 1-cocycles et $\boldsymbol{R}^n \oplus \mathscr{M}_A$, d'où

$$\dim Z^1(\Gamma, \mathfrak{g}) = n + \sum_{i=1}^{k} {m_i}^2.$$

D'après la Proposition 6, l'image par cet isomorphisme de l'ensemble $B^1(\Gamma, \mathfrak{g})$ des 1-cobords est:

$$\phi(B^1(\Gamma, \mathfrak{g})) = \{((D - I)W, -w \ln D) | W \in \boldsymbol{R}^n, w \in \boldsymbol{R}\},$$

et par conséquent $\dim B^1(\Gamma, \mathfrak{g}) = n + 1$, d'où:

$$\dim H^1(\Gamma, \mathfrak{g}) = \dim Z^1(\Gamma, \mathfrak{g}) - \dim B^1(\Gamma, \mathfrak{g}) = \sum_{i=1}^{k} {m_i}^2 - 1. \qquad \square$$

3. Le morphisme induit $H^1(\Gamma, \mathfrak{g}) \to H^1(\Gamma, \mathfrak{h})$ est nul.

Comme il a été dit dans l'introduction, on peut considérer G comme un sous-groupe de $H = SL(n+1, \boldsymbol{R})$ au moyen du plongement

$$u : (U, x) \mapsto \begin{pmatrix} A^x & U \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut restreindre ce morphisme au groupe Γ et s'intéresser à ses déformations, autrement dit à l'espace de cohomologie $H^1(\Gamma, \mathfrak{h})$, Γ agissant sur $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(n+1, \boldsymbol{R})$ au moyen de $\mathrm{Ad}_H \circ u$, où la représentation adjointe Ad_H de H est simplement la conjugaison dans $\mathfrak{h}$. Cependant, le calcul explicite de cet espace, et donc la question de la rigidié locale de Γ dans H, apparaît comme assez difficile.

Néanmoins, u est une application analytique de G dans H et on montre aisément (en utilisant le fait que $u \circ \rho_\gamma = \rho_{u(\gamma)} \circ u$ pour tout $\gamma \in \Gamma$) que sa différentielle $du : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ induit un morphisme entre les complexes de cochaînes $(C^k(\Gamma, \mathfrak{g}))_{k \in \boldsymbol{N}}$ et $(C^k(\Gamma, \mathfrak{h}))_{k \in \boldsymbol{N}}$, et donc un morphisme, encore noté du, entre les espaces de cohomologie $H^k(\Gamma, \mathfrak{g})$ et $H^k(\Gamma, \mathfrak{h})$, $du : [F] \mapsto [du \circ F]$. Dans ce qui suit, nous allons nous attacher à montrer que ce morphisme est nul.

3.1. L'application exponentielle de G.

Afin d'obtenir l'expression de la différentielle $du : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$, on aura besoin de celle de l'application exponentielle de G faisant commuter le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{u} & H \\ {\scriptstyle \exp}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \exp} \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow[du]{} & \mathfrak{h} \end{array}$$

Rappelons que nous nous sommes fixés dans $\mathfrak{g}$ la base $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}$ suivante:

$$\begin{cases} X_i(g) = {\mu_i}^{x_{n+1}} \left(p_{1i} \dfrac{\partial}{\partial x_1}(g) + \cdots + p_{ni} \dfrac{\partial}{\partial x_n}(g) \right) & \text{si } 1 \leq i \leq n; \\ X_{n+1}(g) = \dfrac{\partial}{\partial x_{n+1}}. \end{cases}$$

Proposition 8. *L'application exponentielle* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *est définie par*

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i X_i \right) = (P\Phi(\lambda_{n+1})\Lambda, \lambda_{n+1}),$$

où $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) & & \\ & \ddots & \\ & & \phi_n(t) \end{pmatrix}$ *avec* $\phi_i(t) = \frac{{\mu_i}^t - 1}{t \ln \mu_i}$, $1 \leq i \leq n$.

Preuve. Pour toute fonction numérique f analytique sur G, on a:

$$f(\exp tX) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(X^k f)(0).$$

Considérons pour chaque entier $j \in \{1, \dots, n+1\}$ la fonction numérique

$$f_j : g = ((x_1, \dots, x_n), x_{n+1}) \mapsto x_j.$$

Soit $j \in \{1, \dots, n\}$ fixé; on a:

$$\begin{cases} (X_i f_j)(g) = {\mu_i}^{x_{n+1}} \left(p_{1i} \dfrac{\partial f_j}{\partial x_1}(g) + \cdots + p_{ni} \dfrac{\partial f_j}{\partial x_n}(g) \right) = p_{ji} {\mu_i}^{x_{n+1}} \text{ si } 1 \leq i \leq n; \\ (X_{n+1} f_j)(g) = 0. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} (X_i' X_i f_j)(g) = 0 & \forall\, i \in \{1, \dots, n+1\}, \forall\, i' \in \{1, \dots, n\}; \\ (X_{n+1} X_i f_j)(g) = (\ln \mu_i) p_{ji} {\mu_i}^{x_{n+1}} & \forall\, i \in \{1, \dots, n\}; \\ ({X_{n+1}}^2 f_j)(g) = 0. \end{cases}$$

Et pour tout entier k:

$$({X_{n+1}}^k X_i f_j)(g) = (\ln \mu_i)^k p_{ji} {\mu_i}^{x_{n+1}} \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Ainsi, si $X = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i X_i$, on a:

$$(X^k f_j)(g) = \begin{cases} f_j(g) = x_j & \text{si } k = 0; \\ {\lambda_{n+1}}^{k-1} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_{ji} (\ln \mu_i)^{k-1} {\mu_i}^{x_{n+1}} & \text{si } k \geq 1. \end{cases}$$

D'où, si $\lambda_{n+1} \neq 0$:

$$\begin{aligned} f_j(\exp X) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{{\lambda_{n+1}}^{k-1}}{k!} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_{ji} (\ln \mu_i)^{k-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i p_{ji}}{\lambda_{n+1} \ln \mu_i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda_{n+1} \ln \mu_i)^k}{k!} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_{ji} \frac{e^{\lambda_{n+1} \ln \mu_i} - 1}{\lambda_{n+1} \ln \mu_i}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_{ji} \phi_i(\lambda_{n+1}),$$

expression qui reste valable lorsque $\lambda_{n+1} = 0$ en considérant les fonctions ϕ_i prolongées par continuité en 0. On vérifie de manière immédiate que

$$\begin{pmatrix} f_1(\exp X) \\ \vdots \\ f_n(\exp X) \end{pmatrix} = P\Phi(\lambda_{n+1})\Lambda.$$

Pour ce qui est de la dernière composante, on a:

$$\begin{cases} (X_i f_{n+1})(g) = 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq n; \\ (X_{n+1} f_{n+1})(g) = 1. \end{cases}$$

Par conséquent:

$$f_{n+1}(\exp X) = \lambda_{n+1}. \qquad \square$$

Dans la Section 2.2, nous n'avons pas eu recours à l'application exponentielle pour déterminer la représentation adjointe de G. On peut éprouver la validité de l'expression que nous venons d'établir en constatant la commutativité du diagramme:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\rho_\gamma} & G \\ {\scriptstyle \exp}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \exp} \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow[\mathrm{Ad}_G(\gamma)]{} & \mathfrak{g} \end{array}$$

En effet, si $\gamma = (U, s) \in \Gamma$ est fixé, on a:

$$\begin{aligned} \rho_\gamma\left(\exp \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i X_i \right) &= (U, s)(P\Phi(\lambda_{n+1})\Lambda, \lambda_{n+1})(-A^{-s}U, -s) \\ &= ((I - A^{\lambda_{n+1}})U + A^s P\Phi(\lambda_{n+1})\Lambda, \lambda_{n+1}) \\ &= (P(I - D^{\lambda_{n+1}})P^{-1}U + PD^s\Phi(\lambda_{n+1})\Lambda, \lambda_{n+1}) \end{aligned}$$

Or $I - D^{\lambda_{n+1}} = -\lambda_{n+1}\Phi(\lambda_{n+1})\ln D$, si bien que

$$\rho_\gamma\biggl(\exp\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i X_i\biggr) = (P\Phi(\lambda_{n+1})(-\lambda_{n+1}(\ln D)P^{-1}U + D^s\Lambda), \lambda_{n+1})$$

Aussi,

$$\begin{pmatrix} -\lambda_{n+1}(\ln D)P^{-1}U + D^s\Lambda \\ \lambda_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^s & -(\ln D)P^{-1}U \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Lambda \\ \lambda_{n+1}\end{pmatrix}$$

sont les coordonnées de $\mathrm{Ad}_G(\gamma)(\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i X_i)$, et donc

$$\rho_\gamma\biggl(\exp\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i X_i\biggr) = \exp\biggl(\mathrm{Ad}_G(\gamma)\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i X_i\biggr).$$

3.2. La différentielle du.

Proposition 9. *La différentielle de l'application $u : G \to H$ est l'application $du : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ telle que*

$$du\biggl(\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i X_i\biggr) = \begin{pmatrix}\lambda_{n+1}P(\ln D)P^{-1} & P\Lambda \\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad \text{où } \Lambda = \begin{pmatrix}\lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix}.$$

Preuve. Soit $X = \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i X_i$ tel que $\lambda_{n+1} \neq 0$, alors

$$u(\exp X) = \begin{pmatrix} A^{\lambda_{n+1}} & P\Phi(\lambda_{n+1})\Lambda \\ 0 & 1\end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} D^{\lambda_{n+1}} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}K^{-1}$$

avec

$$K = \begin{pmatrix} P & -P(D^{\lambda_{n+1}} - I)^{-1}\Phi(\lambda_{n+1})\Lambda \\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

et donc

$$u(\exp X) = K\left(\exp\begin{pmatrix}\lambda_{n+1}\ln D & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)K^{-1}$$
$$= \exp\left(\lambda_{n+1}K\begin{pmatrix}\ln D & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}K^{-1}\right).$$

Par conséquent,

$$du(X) = \lambda_{n+1}K\begin{pmatrix}\ln D & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}K^{-1} = \begin{pmatrix}\lambda_{n+1}P(\ln D)P^{-1} & P\Lambda\\ 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{5}$$

Dans le cas où $\lambda_{n+1} = 0$, on a:

$$u(\exp X) = \begin{pmatrix}I & P\Lambda\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix}0 & P\Lambda\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

et l'égalité (5) reste donc valable. □

3.3. Nullité du morphisme induit $du : H^1(\Gamma, \mathfrak{g}) \to H^1(\Gamma, \mathfrak{h})$.

Proposition 10. *Pour tout* 1*-cocycle* $F : \Gamma \to \mathfrak{g}$ *le* 1*-cocycle* $du \circ F : \Gamma \to \mathfrak{h}$ *est exact. Plus précisément,* F *étant de la forme donnée à la Proposition* 5*, on a pour tout* $\gamma = (U, s) \in \Gamma$*:*

$$(du \circ F)(\gamma) = \mathrm{Ad}_G(u(\gamma))\Theta_F - \Theta_F$$
$$\textit{où } \Theta_F = \begin{pmatrix}\left(\frac{\mathrm{Tr}\,PM_F}{n+1}\right)I - PM_F & P(D-I)^{-1}X_F(1)\\ 0 & \frac{\mathrm{Tr}\,PM_F}{n+1}\end{pmatrix}.$$

Preuve. Un 1-cocycle F et un élément γ étant fixés, on a:

$$\mathrm{Ad}_G(u(\gamma))\Theta_F - \Theta_F$$
$$= \begin{pmatrix}A^s & U\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(\frac{\mathrm{Tr}\,PM_F}{n+1}\right)I - PM_F & P(D-I)^{-1}X_F(1)\\ 0 & \frac{\mathrm{Tr}\,PM_F}{n+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{-s} & -A^{-s}U\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$- \begin{pmatrix}\left(\frac{\mathrm{Tr}\,PM_F}{n+1}\right)I - PM_F & P(D-I)^{-1}X_F(1)\\ 0 & \frac{\mathrm{Tr}\,PM_F}{n+1}\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}-A^sPM_FA^{-s} + PM_F & A^sPM_FA^{-s}U + (A^s - I)P(D-I)^{-1}X_F(1)\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Aussi,

$$\begin{aligned}APM_FA^{-1} &= PDM_FPD^{-1}P^{-1}\\ &= PM_FAPD^{-1}P^{-1} \quad \text{car } M_FA = DM_F\\ &= PM_F.\end{aligned}$$

Donc, pour tout $s \in \boldsymbol{Z}$, $A^sPM_FA^{-s} = PM_F$, et par conséquent:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}_G(u(\gamma))\Theta_F - \Theta_F &= \begin{pmatrix}0 & PM_FU + P(D^s - I)(D-I)^{-1}X_F(1)\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\ &= (du \circ F)(\gamma).\end{aligned}$$ □

Par analogie avec l'énoncé du théorème II, la proposition 10 nous amène à penser que Γ est localement H-rigide dans G. C'est ce qu'on va effectivement montrer dans la partie qui suit.

4. Le groupe Γ est localement H-rigide dans G.

Dans cette dernière partie les groupes Γ et G seront toujours considérés comme des sous-groupes de H. On peut montrer sans difficulté que Γ admet pour présentation:

$$\Gamma = \left\langle \gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma_{n+1} \;\middle|\; \begin{array}{r}\gamma_{n+1}\gamma_j{\gamma_{n+1}}^{-1}{\gamma_n}^{-a_{nj}} \dots {\gamma_1}^{-a_{1j}}, \quad 1 \le j \le n\\ \gamma_i\gamma_j{\gamma_i}^{-1}{\gamma_j}^{-1}, \quad 1 \le i < j \le n\end{array}\right\rangle.$$

Cette donnée de Γ en termes de générateurs et relations va nous permettre d'expliciter les morphismes de groupes de Γ dans G.

PROPOSITION 11. *Les générateurs de Γ dans H étant*:

$$\gamma_j = \begin{pmatrix}I & U_j\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad \textit{pour } j \in \{1, \dots, n\},$$

$$\gamma_{n+1} = \begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

les éléments de $R(\Gamma, G)$ sont les morphismes r qui vérifient:

$$r(\gamma_j) = \begin{pmatrix} I & RU_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{pour } j \in \{1, \dots, n\},$$

$$r(\gamma_{n+1}) = \begin{pmatrix} A^{t_{n+1}} & R_{n+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où $R \in M(n, \boldsymbol{R})$*,* $R_{n+1} \in \boldsymbol{R}^n$*,* $t_{n+1} \in \boldsymbol{R}$ *sont tels que* $A^{t_{n+1}} R = RA$*.*

Preuve. Soit $r : \Gamma \to G$ un morphisme de groupes. Posons $g_j = r(\gamma_j)$ pour tout $j \in \{1, \dots, n+1\}$; alors:

$$g_j = \begin{pmatrix} A^{t_j} & R_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{où } t_j \in \boldsymbol{R} \text{ et } R_j = (r_{ij})_{1 \le i \le n} \in \boldsymbol{R}^n,$$

et il faut que:

$$\forall\, j \in \{1, \dots, n\}, \quad g_{n+1} g_j {g_{n+1}}^{-1} = {g_1}^{a_{1j}} \dots {g_n}^{a_{nj}}, \tag{6}$$

$$\forall\, i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad g_i g_j = g_j g_i. \tag{7}$$

Or pour tout $j \in \{1, \dots, n+1\}$:

$$g_{n+1} g_j {g_{n+1}}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{t_j} & (I - A^{t_j}) R_{n+1} + A^{t_{n+1}} R_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et, en ne s'intéressant pour l'instant qu'au premier bloc:

$$\begin{aligned} {g_1}^{a_{1j}} \dots {g_n}^{a_{nj}} &= \begin{pmatrix} A^{t_1} & R_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{a_{1j}} \cdots \begin{pmatrix} A^{t_n} & R_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{a_{nj}} \\ &= \begin{pmatrix} A^{\sum_{i=1}^n a_{ij} t_i} & S \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{où } S \in \boldsymbol{R}^n. \end{aligned}$$

La condition (6) entraîne donc: $\forall\, j \in \{1, \dots, n\},\ t_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} t_i$, c'est-à-dire

$$({}^{\mathrm{t}}\!A - I) \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = 0.$$

Par conséquent $t_j = 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ et la condition (7) s'en trouve vérifiée. Ceci étant, on a $S = \sum_{i=1}^n a_{ij} R_i$, et donc:

$$g_1{}^{a_{1j}} \dots g_n{}^{a_{nj}} = \begin{pmatrix} I & \sum_{i=1}^n a_{ij} R_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $A^{t_{n+1}} R_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} R_i$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, c'est-à-dire, en posant $R = (r_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$:

$$RA = A^{t_{n+1}} R. \qquad \square$$

De là, on peut également décrire assez aisément les déformations de Γ dans G:

PROPOSITION 12. *Les déformations du sous-groupe* Γ *dans le groupe* G *sont les sous-groupes* $\Gamma^{(\varepsilon)}$ *de* H *engendrés par les éléments* $\gamma_1^{(\varepsilon)}$, ..., $\gamma_n^{(\varepsilon)}$, $\gamma_{n+1}^{(\varepsilon)}$ *de la forme*:

$$\gamma_j^{(\varepsilon)} = \begin{pmatrix} I & P I^{(\varepsilon)} P^{-1} U_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad si\ 1 \leq j \leq n,$$

$$\gamma_{n+1}^{(\varepsilon)} = \begin{pmatrix} A & \sum_{i=1}^n \epsilon_i U_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où $I^{(\varepsilon)} = I + \sum_{(i,j) \in \Delta_A} \epsilon_{ij} E_{ij}$, $|\epsilon_{ij}| \lll 1$, $|\epsilon_i| \lll 1$, *et en rappelant que* $\Delta_A = \{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2 | \mu_i = \mu_j\}$.

PREUVE. Les déformations $\Gamma^{(\varepsilon)}$ de Γ sont les sous-groupes de H engendrés par les éléments $\gamma_1^{(\varepsilon)}, \dots, \gamma_n^{(\varepsilon)}, \gamma_{n+1}^{(\varepsilon)}$ qui a priori peuvent être mis sous la forme:

$$\gamma_j^{(\varepsilon)} = \begin{pmatrix} I & P\big(I + \sum_{1 \leq i,j \leq n} \epsilon_{ij} E_{ij}\big) P^{-1} U_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{si } 1 \leq j \leq n,$$

$$\gamma_{n+1}^{(\varepsilon)} = \begin{pmatrix} A^{1+\epsilon} & \sum_{i=1}^n \epsilon_i U_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et qui, d'après la Proposition 11, doivent de plus vérifier:

$$A^{1+\epsilon}P\Big(I+\sum_{1\leq i,j\leq n}\epsilon_{ij}E_{ij}\Big)P^{-1}=P\Big(I+\sum_{1\leq i,j\leq n}\epsilon_{ij}E_{ij}\Big)P^{-1}A,$$

c'est à dire:

$$D^{1+\epsilon}\Big(I+\sum_{1\leq i,j\leq n}\epsilon_{ij}E_{ij}\Big)=\Big(I+\sum_{1\leq i,j\leq n}\epsilon_{ij}E_{ij}\Big)D.$$

Puisque $D=\sum_{1\leq,i,j\leq n}\delta_{ij}\mu_i E_{ij}$, cette relation s'écrit:

$$\sum_{1\leq i,j\leq n}{\mu_i}^{1+\epsilon}(\delta_{ij}+\epsilon_{ij})E_{ij}=\sum_{1\leq i,j\leq n}\mu_j(\delta_{ij}+\epsilon_{ij})E_{ij},$$

et donc

$$\forall\ i,j\in\{1,\dots,n\},\quad \mu_i^{1+\epsilon}(\delta_{ij}+\epsilon_{ij})=\mu_j(\delta_{ij}+\epsilon_{ij}). \tag{8}$$

Pour $i=j$, ceci donne:

$$\forall\ i\in\{1,\dots,n\},\quad \mu_i^{1+\epsilon}(1+\epsilon_{ii})=\mu_i(1+\epsilon_{ii}),$$

et les ϵ_{ii} étant suffisamment petits pour que $1+\epsilon_{ii}\neq 0$, on a $\mu_i^{1+\epsilon}=\mu_i$ pour tout i, et donc $\epsilon=0$. La condition (8) devient ainsi:

$$\forall\ i,j\in\{1,\dots,n\},\quad \mu_i\epsilon_{ij}=\mu_j\epsilon_{ij},$$

d'où

$$\forall\ i,j\in\{1,\dots,n\},\quad \mu_i\neq\mu_j\Rightarrow\epsilon_{ij}=0. \qquad \square$$

THÉORÈME 13. *Le sous-groupe Γ est localement H-rigide dans G. Plus précisément, étant donnée une déformation $\Gamma^{(\varepsilon)}$ de Γ dans G telle que décrite dans la Proposition* 12*, il existe un unique élément K de H proche de l'identité tel que $\Gamma^{(\varepsilon)}=K\Gamma K^{-1}$, à savoir*:

$$K=\begin{pmatrix}\kappa PI^{(\varepsilon)}P^{-1} & \kappa(A-I)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i U_i\\ 0 & \kappa\end{pmatrix}\quad \textit{où}\ \kappa=\det I^{(\varepsilon)^{-\frac{1}{n+1}}}$$

Preuve. Soit $\Gamma^{(\varepsilon)}$ une déformation de Γ dans G; supposons qu'il existe $K \in H$ tel que $\Gamma^{(\varepsilon)} = K\Gamma K^{-1}$ *i.e.* $K\Gamma = \Gamma^{(\varepsilon)}K$. On pose

$$K = \begin{pmatrix} \tilde{K} & K_C \\ K_L & \kappa \end{pmatrix} \quad \text{avec } \tilde{K} \in \mathrm{M}(n, \boldsymbol{R}).$$

Alors, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\begin{pmatrix} \tilde{K} & K_C \\ K_L & \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & U_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & PI^{(\varepsilon)}P^{-1}U_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{K} & K_C \\ K_L & \kappa \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} \tilde{K} & \tilde{K}U_j + K_C \\ K_L & K_L U_j + \kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{K} + PI^{(\varepsilon)}P^{-1}U_j K_L & K_C + \kappa PI^{(\varepsilon)}P^{-1}U_j \\ K_L & \kappa \end{pmatrix},$$

d'où on tire:

$$\forall\ j \in \{1, \ldots, n\}, \begin{cases} PI^{(\varepsilon)}P^{-1}U_j K_L = 0, \\ (\tilde{K} - \kappa PI^{(\varepsilon)}P^{-1})U_j = 0, \\ K_L U_j = 0. \end{cases}$$

Par conséquent $K_L = 0$, $\tilde{K} = \kappa PI^{(\varepsilon)}P^{-1}$ et de la condition supplémentaire $\det K = 1$, on tire $\kappa = \pm \det I^{(\varepsilon)^{-\frac{1}{n+1}}}$ (les ϵ_{ij} étant suffisamment petits pour que $I^{(\varepsilon)}$ soit inversible et κ pouvant être négatif si n est impair, mais où finalement seul $\kappa > 0$ pourra amener à une matrice K proche de l'identité). De plus, on a:

$$\begin{pmatrix} \tilde{K} & K_C \\ 0 & \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \sum_{i=1}^n \epsilon_i U_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{K} & K_C \\ 0 & \kappa \end{pmatrix},$$

i.e.

$$\begin{pmatrix} \tilde{K}A & K_C \\ 0 & \kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\tilde{K} & AK_C + \kappa \sum_{i=1}^n \epsilon_i U_i \\ 0 & \kappa \end{pmatrix},$$

d'où $\tilde{K}A = A\tilde{K}$, égalité qui est bien vérifiée avec $\tilde{K} = \kappa PI^{(\varepsilon)}P^{-1}$, et $K_C =$

$-\kappa(A-I)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i U_i$. Finalement:

$$K=\begin{pmatrix}\kappa P I^{(\varepsilon)}P^{-1} & \kappa(A-I)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i U_i\\ 0 & \kappa\end{pmatrix}. \qquad \square$$

Le théorème 7 nous laissait à penser que le réseau Γ n'est pas localement rigide dans G, ce que l'on on peut maintenant affirmer:

Corollaire 14. *Le réseau Γ n'est pas localement rigide dans G. Plus précisément, les déformations de Γ qui sont conjuguées à Γ dans G sont les sous-groupes $\Gamma^{(\varepsilon)}$ engendrés par les éléments $\gamma_1^{(\varepsilon)}, \ldots, \gamma_n^{(\varepsilon)}, \gamma_{n+1}^{(\varepsilon)}$ de la forme*:

$$\gamma_j^{(\varepsilon)}=\begin{pmatrix}I & A^{\epsilon}U_j\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad \textit{si } 1\le j\le n,$$

$$\gamma_{n+1}^{(\varepsilon)}=\begin{pmatrix}A & \sum_{i=1}^{n}\epsilon_i U_i\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Preuve. Etant donnée une déformation $\Gamma^{(\varepsilon)}$ de Γ dans G, il s'agit de voir si l'élément K donné par le Théorème 13 est dans G. Or ceci est le cas si, et seulement si, il existe un réel ϵ tel que

$$PI^{(\varepsilon)}P^{-1}=A^{\epsilon} \ \textit{i.e.}\ I^{(\varepsilon)}=D^{\epsilon}, \tag{9}$$

$$\det I^{(\varepsilon)}=1, \tag{10}$$

où la condition (10) est automatiquement vérifiée avec la condition (9). $\square$

Nous pouvons même maintenant prouver que:

Proposition 15. *Le groupe Γ n'est pas localement rigide dans H.*

Preuve. Considérons une déformation $\Gamma^{(\varepsilon)}$ de Γ dans H, ne différant de celle considérée dans la démonstration du Théorème 13 que par le dernier générateur, qui sera ici:

$$\gamma_{n+1}^{(\varepsilon)}=\begin{pmatrix}AI^{(\varepsilon)} & 0\\ 0 & \det {I^{(\varepsilon)}}^{-1}\end{pmatrix}$$

où $I^{(\varepsilon)} = I + \sum_{(i,j)\in\Delta_A} \epsilon_{ij} E_{ij}$ est pris tel que $\det I^{(\varepsilon)} \neq 1$.

Comme dans la preuve du Théorème 13, on déduit des relations $K\gamma_j = \gamma_j^{(\varepsilon)} K$, $1 \leq j \leq n$, qu'une matrice K proche de l'identité susceptible de conjuguer $\Gamma^{(\varepsilon)}$ à Γ dans H est nécessairement de la forme:

$$K = \begin{pmatrix} \tilde{K} & K_C \\ 0 & \kappa \end{pmatrix} \text{ où } \kappa = \det I^{(\varepsilon)^{-\frac{1}{n+1}}}, \quad \tilde{K} = \kappa P I^{(\varepsilon)} P^{-1}.$$

Mais ici, la dernière relation $K\gamma_{n+1} = \gamma_{n+1}^{(\varepsilon)} K$ s'écrit:

$$\begin{pmatrix} \tilde{K} & K_C \\ 0 & \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AI^{(\varepsilon)} & 0 \\ 0 & \kappa^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{K} & K_C \\ 0 & \kappa \end{pmatrix},$$

ce qui entraîne $\kappa^{n+1} = 1$ et donc la contradiction $\det I^{(\varepsilon)} = 1$. □

On remarquera finalement comment dans cet exemple l'espace $H^1(\Gamma, \mathfrak{g})$ quantifie le défaut de rigidité de Γ dans G. On constate en effet que la dimension de cet espace est exactement la différence entre le nombre de paramètres de déformations de Γ dans G (les n nombres ϵ_i et les $\sum_{i=1}^k {m_i}^2$ nombres ϵ_{ij} de la Proposition 12) et le nombre de ces paramètres, à savoir $n+1$, qui produisent des déformations conjuguées à Γ:

$$\dim H^1(\Gamma, \mathfrak{g}) = \left(n + \sum_{i=1}^{k} {m_i}^2\right) - (n+1).$$

En outre, le groupe Γ s'avérant localement H-rigide dans G tout en n'étant localement rigide ni dans G ni dans H, la notion de rigidité locale relative introduite ici prend pleinement son sens, le résultat de la Proposition 10 nous incitant par ailleurs à énoncer une généralisation du Théorème II qu'il resterait à démontrer:

CONJECTURE. *Soient Γ un groupe de type fini, H un groupe de Lie et (G,u) un sous-groupe de Lie de H, d'algèbres de Lie respectives $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}$, et $r \in R(\Gamma, G)$. Si le morphisme du : $H^1(\Gamma, \mathrm{Ad}_G \circ r) \to H^1(\Gamma, (\mathrm{Ad}_H \circ u) \circ r)$ induit en cohomologie par u est nul, alors le morphisme r est localement H-rigide.*

REMERCIEMENTS. L'étude des déformations du réseau Γ dans le groupe de Lie G présentée ici m'a été suggérée par A. El Kacimi dans le cadre de ma thèse de doctorat, la bonne idée d'aller voir comment le groupe Γ se comporte dans $SL(n+1, \boldsymbol{R})$ revenant par ailleurs à R. Parthasarathy. Je les en remercie, ainsi que pour les discussions que j'ai pu avoir avec eux durant l'élaboration de ce travail.

References

[1] E. Calabi, On compact, Riemannian manifolds with constant curvature I, Proc. Sympos. Pure Math., **III**, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1961, pp. 155–180.

[2] E. Calabi and E. Vesentini, On compact, locally symmetric Kälher manifolds, Ann. of Math. (2), **71** (1960), 472–507.

[3] D. Fisher, Local rigidity of group actions: past, present, future, preprint, 9–10.

[4] A. Guichardet, Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie, CEDIC/Fernand Nathan, Collection "Textes mathématiques", 1980.

[5] M. S. Raghunathan, On the first cohomology of discrete subgroups of semisimple Lie groups, Amer. Jour. Math., **41** (1965), 103–139.

[6] M. S. Raghunathan, Discrete subgroups of Lie groups, Springer, New-York, 1972.

[7] A. Selberg, On discontinuous groups in higher-dimensional symmetric spaces, Contributions to function theory (Internat. Colloq. Function Theory, Bombay, 1960), Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1960, pp. 147–164.

[8] A. Weil, On discrete subgroups of Lie groups, Ann. of Math., **72** (1960), 369–384.

[9] A. Weil, On discrete subgroups of Lie groups II, Ann. of Math., **75** (1962), 578–602.

[10] A. Weil, Remarks on the cohomology of groups, Ann. of Math., **80** (1964), 149–157.

Cédric Rousseau

LAMAV, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis
59313 Valenciennes Cedex 9, France
E-mail: cedric.rousseau@univ-valenciennes.fr