J. Math. Soc. Japan
Vol. 54, No. 2, 2002

Caractérisation des ensembles essentiels

By Allami BENYAICHE and Aiad ELGOURARI

(Received Oct. 30, 2000)

Abstract. In this work we study the essential sets for some Kato measure in $(\boldsymbol{R}^d - \{0\})$, $d \geq 2$. Using the caracterisation of Picard principle via the Green kernel associated to the Schrödinger operator $\Delta - \mu$; we give a new caracterisation of such sets when $\mu = (f(.)/\|.\|)^2 \lambda$ where f is assumed to be rotation free nonnegative, decreasing and locally Hölder continuous on $\{0 < \|x\| \leq 1\}$. In particular we obtain results given by T. Tada in the case where $d = 2$ and $f(r) = -\log r$.

1. Introduction.

On désigne par $\Omega_r = \{x \in \boldsymbol{R}^d, 0 < x < r\}$, la boule ouverte ponctuée de $\boldsymbol{R}^d$ de centre 0 et de rayon r et Γ_r la sphère de centre 0 et de rayon r, $r > 0$ et $d \geq 2$. Soit $K_{loc}(\boldsymbol{R}^d - \{0\})$ le cône convexe des mesures de Kato locales sur $(\boldsymbol{R}^d - \{0\})$; pour la définition voir [**1**], [**2**], [**3**], [**5**].

Etant donnée une mesure positive $\mu \in K_{loc}(\boldsymbol{R}^d - \{0\})$. Soit ${}^{\mu}H_0$ le cône convexe des solutions continues positives de l'équation de Schrödinger: $\Delta u - u\mu = 0$ sur $\Omega = \Omega_1$, s'annulant sur la frontière $\partial\Omega - \{0\}$.

On dit que $\mu \in K_{loc}$ vérifie le principe de Picard lorsque le nombre des génératrices extrémales de ${}^{\mu}H_0$ est égale à 1.

Soit μ une mesure positive pour laquelle le principe de Picard est vérifié et ν une mesure dans $K_{loc}(\boldsymbol{R}^d - \{0\})$ avec $\nu \leq \mu$. Généralement le Principe de Picard n'est pas vérifié pour ν [**6**], [**10**], [**11**]. Cependant dans le cas où les deux mesures sont radiales, c'est à dire que $\mu(f) = \mu(f \circ g)$ pour toute fonction borélienne f et tout élément g du groupe orthogonal $SO(d)$, le principe de Picard est vérifié pour ν [**4**], [**9**]. Ce résultat reste encore valable lorsque $1_A \nu \leq 1_A \mu$ pour certains sous -ensembles A de Ω, appelés ensembles μ-essentiels.

Dans ce travail, nous étudions ces ensembles pour les mesures $\mu = ((f(.))^2/\|.\|^2)\lambda$, λ est la mesure de Lebesgue sur $\boldsymbol{R}^d$, où f vérifie certains conditions, en particulier pour $f(r) = (-\log r)^{\alpha/2}$, $\alpha \in]0, 2]$.

L'interêt des ensembles μ-essentiels réside dans le fait que la mesure μ vérifie le principe de Picard si, et seulement si, elle possède un ensemble essentiel ne

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 31Bxx; Secondary 31B25, 35Q40.
Key Words and Phrases. Schrödinger equation, essential set, Picard principle.

contenant pas un ensemble de type Ω_r, $r \in [0,1]$. Dans ce cas, A est une réunion d'ouvert $A_n := \{a_n < \|x\| < b_n\}$ où (a_n) et (b_n) sont tels que:

$$0 < b_{n+1} < a_n < b_n < 1 \ \ (n \geq 1); \quad \lim_{n \to +\infty} a_n = 0.$$

En utilisant la caractérisation du principe de Picard à l'aide de la fonction de Green associée à l'équation de Schrödinger: $\Delta u - u\mu = 0$ [**4**] et la caractérisation des ensembles μ-essentiels pour μ radiale et $\mu \in K_{loc}(\boldsymbol{R}^d - \{0\})$; nous caractérisons les ensembles essentiels pour $\mu = ((f(.))^2/\|.\|^2)\lambda$, où f est une fonction radiale décroissante localement höldérienne et continue. Ainsi nous donnons des nouvelles caractérisations des ensembles μ-essentiels pour des densités plus générales sur $\boldsymbol{R}^d$, $d \geq 2$. On note que le cas particulier $f(r) = -\log r$, $r \in]0,1[$ et $d = 2$ a été traité par Tada [**12**] via d'autres méthodes. Les auteurs remercient les professeurs A. Boukricha et W. Hansen pour les remarques qu'ils leurs ont faites, ainsi que le referee pour ses commentaires.

2. Notations et Préliminaires.

Pour chaque ouvert U de $\boldsymbol{R}^d$, $d \geq 2$, on note $M^+(U)$ l'ensemble des mesures de Radon positives sur U. On désigne par σ_r la mesure de surface normalisée sur la sphère de centre 0 et de rayon r, notée Γ_r, et $w_d = 2\pi^{d/2}/(\Gamma(d/2))$ l'aire de la sphère Γ_1.

Soit $(\boldsymbol{R}^d, H)$ l'espace harmonique associé au Laplacien. Pour tout ouvert relativement compact V d'un ouvert U de $\boldsymbol{R}^d$ et pour une mesure $\mu \in M^+(U)$, on note par G^V la fonction de Green sur V et par K_V^μ le noyau défini sur l'ensemble des fonctions continues et bornées par:

$$K_V^\mu f(.) := \int_V G_z^V(.) f(z) \mu(dz).$$

Lorsque $K_V^\mu 1$ est continue et réelle, on dit que μ est dans la classe de Kato locale $K_{loc}(U)$ sur U [**5**]. Dans ce cas les solutions continues de l'équation de Schrödinger sur U:

$$\Delta\varphi - \varphi\mu = 0, \quad \text{au sens des distributions,}$$

forment un espace harmonique $(U, {}^\mu H)$ (voir [**5**]). Les μ-potentiels seront notés par ${}^\mu P$ et la fonction de Green sur un ouvert V de U associée à $\Delta - \mu$ est notée par ${}^\mu G^V$. Pour tout $r > 0$, on note $\Omega_r = \{x \in \boldsymbol{R}^d : 0 < \|x\| < r\}$ et ${}^\mu G = {}^\mu G^{\Omega_1}$. On note aussi par $s \vee t := \max(s,t)$ et $s \wedge t := \min(s,t)$, et par ${}^\mu H_0$ le cône convexe défini par: ${}^\mu H_0 = \{h \in {}^\mu H^+(\Omega_1), \lim_{\|x\| \to 1} h(x) = 0\}$.

Définition 2.1. Soit $\mu \in K_{loc}(\Omega_1)$, comme dans ([**1**], [**2**], [**3**] et [**7**], [**8**]) nous définissons $\dim_p \mu$, la dimension de Picard de μ, par le nombre des génératrices extrémales de ${}^\mu H_0$. Cette dimension est au moins 1 et peut être infinie. Nous disons que μ vérifie le principe de Picard si $\dim_p \mu = 1$.

LEMME 2.1 ([**4**]). *Soit* $\mu \in K_{loc}(\Omega_1)$.

(1) *Il existe une unique fonction continue bornée* $\widetilde{e^r_\mu} \in {}^\mu H(\Omega_r)$ *telle que*: $\lim_{\|x\| \to r} \widetilde{e^r_\mu}(x) = 1$. *Si* μ *est invariante par rotation sur* Ω_r, *alors*:

(2) *Il existe sur* Ω_r *une unique fonction* $\tilde{h}^r_\mu$ *telle que*: $\tilde{h}^r_\mu \in {}^\mu H_0(\Omega_r)$ *et* $\tilde{h}^r_\mu(x_0) = 1$ *pour* $x_0 \in \Omega_r$ *tel que* $\|x_0\| = r/2$. *De plus*, $\lim_{x \to 0} \tilde{h}^r_\mu(x) = +\infty$.

3. Perturbation par une mesure radiale.

Dans ce paragraphe, nous donnons quelques résultats du cas particulier de la perturbation par une mesure radiale μ dans le cas d'une couronne $U = \{x \in \boldsymbol{R}^d : a < \|x\| < b\}$. Pour tout $t \in]a, b[$, posons:

$$P_t^U(.) := \int_{\Gamma_1} G_{tz}^U(.)\sigma(dz) \quad \text{et} \quad P_t = P_t^{\Omega_1} \text{ avec } \sigma = \sigma_1.$$

Alors, P_t^U est un potentiel sur U, continue, borné et radial. Par un calcul direct on obtient:

i) **Pour d** $= 2$, on a:

$$P_t^{\Omega_1}(s) = P_t(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \log(1/t) & \text{si } 0 < s \le t < 1 \\ \dfrac{1}{2\pi} \log(1/s) & \text{si } 0 < t \le s < 1 \end{cases}$$

et pour des réels s, t tels que: $a < s \le t < b$ on a:

$$P_s^U(t) = P_t^U(s) = \frac{1}{2\pi} \frac{\log(s/a)\log(b/t)}{\log(b/a)}.$$

ii) **Pour d** ≥ 3, on pose: $C_d = \dfrac{\Gamma(d/2)}{2(d-2)\pi^{d/2}}$.
On a:

$$P_t^{\Omega_1}(s) = P_t(s) = \begin{cases} C_d(1/t^{d-2} - 1) & \text{si } 0 < s \le t < 1 \\ C_d(1/s^{d-2} - 1) & \text{si } 0 < t \le s < 1 \end{cases}$$

et si s et t sont tels que: $a < s \le t < b$ alors sur la couronne $U = \{a \le \|x\| \le b\}$ on a:

$$P_s^U(t) = P_t^U(s) = C_d \frac{1}{b^{d-2} - a^{d-2}} \left(\left(\frac{b}{t}\right)^{d-2} - 1 \right) \left(1 - \left(\frac{a}{s}\right)^{d-2} \right).$$

Soit ${}^\mu P_t^U$ le μ-potentiel sur U vérifiant:

$${}^\mu P_t^U = (I + K_U^\mu)^{-1} P_t^U.$$

Alors

$${}^\mu P_t^U = \int_{\Gamma_1} {}^\mu G_{tz}^U \sigma(dz).$$

Proposition 3.1. *Si* $\mu = (\alpha^2/\|.\|^2)\lambda$, $\alpha > 0$ *on a*:

$$^{\mu}P_s^{\Omega_b}(t) = \frac{1}{w_d\delta}\frac{1}{b^k}e_\mu^b(s\wedge t)h_\mu^b(s\vee t)$$

$$\text{où } e_\mu^b(x) = \left(\frac{\|x\|}{b}\right)^{(-k+\delta)/2} \text{ et } h_\mu^b(x) = \left(\frac{\|x\|}{b}\right)^{(-k-\delta)/2} - \left(\frac{\|x\|}{b}\right)^{(-k+\delta)/2}$$

$$\text{avec } w_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)},\quad k = d-2 \text{ et } \delta = \sqrt{(d-2)^2 + 4\alpha^2}.$$

Preuve. Soit ρ la mesure de Radon positive sur $]0,+\infty[$ telle que μ est l'image de la mesure $\rho\otimes\sigma$ sur $]0,+\infty[\times\Gamma_1$ par l'application:

$$\chi :]0,+\infty[\times\Gamma_1 \to \boldsymbol{R}^d - \{0\}$$
$$(t,z) \to tz.$$

Si f est une fonction radiale alors

$$K_U^\mu f(s) = w_d\int_a^b P_t^U(s)f(t)\rho(dt).$$

Or

$$\begin{aligned}
P_t^{\Omega_b}(t) &= (I + K_{\Omega_b}^\mu)\,{}^{\mu}P_t^{\Omega_b}(t)\\
&= {}^{\mu}P_t^{\Omega_b}(t) + K_{\Omega_b}^\mu\,{}^{\mu}P_t^{\Omega_b}(t)\\
&= {}^{\mu}P_t^{\Omega_b}(t) + w_d\int_0^b P_t^{\Omega_b}(s)\,{}^{\mu}P_t^{\Omega_b}(s)\rho(ds)\\
&= {}^{\mu}P_t^{\Omega_b}(t) + w_d\int_0^t P_t^{\Omega_b}(s)\,{}^{\mu}P_t^{\Omega_b}(s)\alpha^2 s^{k-1}(ds)\\
&\quad + w_d\int_t^b P_t^{\Omega_b}(s)\,{}^{\mu}P_t^{\Omega_b}(s)\alpha^2 s^{k-1}(ds).
\end{aligned}$$

D'après [**4**, Théorème 2.3] il existe une constante C $(C \neq C_d)$ telle que:

$$^{\mu}P_t^{\Omega_b}(s) = Ce_\mu^b(s\wedge t)h_\mu^b(s\vee t).$$

i) Si d = 2 on a:

$$P_t^{\Omega_b}(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\log\dfrac{b}{t} & (0 < s \leq t)\\[2ex] \dfrac{1}{2\pi}\log\dfrac{b}{s} & (t \leq s < b)\end{cases}$$

et

$$
{}^{\mu}P_t^{\Omega_b}(s) = \begin{cases} C\left(\frac{s}{b}\right)^{\alpha}\left(\left(\frac{b}{t}\right)^{\alpha} - \left(\frac{t}{b}\right)^{\alpha}\right) & (0 < s \leq t) \\ C\left(\frac{t}{b}\right)^{\alpha}\left(\left(\frac{b}{s}\right)^{\alpha} - \left(\frac{s}{b}\right)^{\alpha}\right) & (t \leq s < b). \end{cases}
$$

Par suite

$$
\int_0^t P_t^{\Omega_b}(s)\,{}^{\mu}P_t^{\Omega_b}(s)\frac{2\pi}{s}\alpha^2(ds) = \alpha C\left(1 - \left(\frac{t}{b}\right)^{2\alpha}\right)\log\frac{b}{t},
$$

$$
\int_t^b P_t^{\Omega_b}(s)\,{}^{\mu}P_t^{\Omega_b}(s)\frac{2\pi}{s}\alpha^2(ds) = \alpha C\left\{\log\frac{b}{t} + \left(\frac{t}{b}\right)^{2\alpha}\log\frac{b}{t} - \frac{1}{\alpha} + \frac{t^{2\alpha}b^{-2\alpha}}{\alpha}\right\}.
$$

On déduit que

$$
\frac{1}{2\pi}\log\frac{b}{t} = C\left\{1 - t^{2\alpha}b^{-2\alpha} + 2\alpha\log\frac{b}{t} - 1 + t^{2\alpha}b^{-2\alpha}\right\}.
$$

C'est à dire

$$
C = \frac{1}{4\pi\alpha}.
$$

ii) **Si** $\mathbf{d} \geq \mathbf{3}$ on a:

$$
P_t^{\Omega_b}(s) = \begin{cases} C_d\left(\frac{1}{t^k} - \frac{1}{b^k}\right) & (0 < s \leq t) \\ C_d\left(\frac{1}{s^k} - \frac{1}{b^k}\right) & (t \leq s < b), \end{cases}
$$

$$
{}^{\mu}P_t^{\Omega_b}(s) = \begin{cases} C\left(\frac{s}{b}\right)^{(-k+\delta)/2}\left(\left(\frac{t}{b}\right)^{(-k-\delta)/2} - \left(\frac{t}{b}\right)^{(-k+\delta)/2}\right) & (0 < s \leq t) \\ C\left(\frac{t}{b}\right)^{(-k+\delta)/2}\left(\left(\frac{s}{b}\right)^{(-k-\delta)/2} - \left(\frac{s}{b}\right)^{(-k+\delta)/2}\right) & (t \leq s < b). \end{cases}
$$

Comme $C_d w_d = 1/k$ on a:

$$
w_d\int_0^t P_t^{\Omega_b}(s)\,{}^{\mu}P_t^{\Omega_b}(s)\alpha^2 s^{k-1}\,ds = C\frac{2\alpha^2}{k(k+\delta)}\left\{\left(\frac{b}{t}\right)^{k} - \left(\frac{b}{t}\right)^{k-\delta} - 1 + \left(\frac{t}{b}\right)^{\delta}\right\},
$$

$$
w_d\int_t^b P_t^{\Omega_b}(s)\,{}^{\mu}P_t^{\Omega_b}(s)\alpha^2 s^{k-1}\,dt = C\frac{2\alpha^2}{k(k+\delta)}\left(\frac{b^k}{t^k} - \frac{t^{\delta}}{b^{\delta}}\right) + C\frac{2\alpha^2}{k(k-\delta)}\left(1 - \left(\frac{b}{t}\right)^{k-\delta}\right).
$$

On pose: $f(t) = C_d(t^{-k} - b^{-k})$

$$g(t) = C\left\{\frac{b^k}{t^k} - \left(\frac{t}{b}\right)^{-k+\delta} + \frac{2\alpha^2}{k(k+\delta)}\left(\frac{2b^k}{t^k} - \frac{t^{-k+\delta}}{b^{-k+\delta}} - 1\right) + \frac{2\alpha^2}{k(k-\delta)}\left(1 - \frac{t^{-k+\delta}}{b^{-k+\delta}}\right)\right\}$$

comme $\lim_{t\to b}\dfrac{g'(t)}{f'(t)} = C\dfrac{\delta b^{-1}}{C_d k b^{-k-1}}$ on a $C\dfrac{\delta b^{-1}}{C_d k b^{-k-1}} = 1$

et par suite $C = \left(\dfrac{\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}b^{d-2}}\right)\dfrac{1}{\sqrt{(d-2)^2 + 4\alpha^2}}$. □

REMARQUES 3.1. (1) Si $d = 2$ alors $C = 1/4\pi\alpha$.

(2) Dans [**4**] A. Boukricha et E. Haouala, ont prouvé l'éxistence de la constante C sans la donner d'une façon explicite ce qui est utile dans notre situation (voir remarque 3.2).

(3) Notons que e_μ^b (resp: h_μ^b) coincide avec $\widetilde{e_\mu^b}$ (resp: $\tilde{h}_\mu^b$) à une constante multiplicative prés.

Maintenant nous donnons d'une façon précise l'expression de ${}^\mu P^U$ dans la couronne $U = \{x \in \boldsymbol{R}^d : a < \|x\| < b\}$ et $\mu = (\alpha^2/\|.\|^2)\lambda$.

THÉORÈME 3.1. *Si* $\mu = (\alpha^2/\|.\|^2)\lambda$, *et* $U = \{x \in \boldsymbol{R}^d : a < \|x\| < b\}$, *alors*:

$$\text{i)}\quad {}^\mu P_s^U(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\alpha\pi}\dfrac{1}{(b^{2\alpha} - a^{2\alpha})}\left(\dfrac{b^{2\alpha}}{s^{2\alpha}} - 1\right)(s^{2\alpha} - a^{2\alpha}), & si\ d = 2 \\[2ex] \dfrac{1}{w_d\delta}\dfrac{1}{(b^\delta - a^\delta)}\dfrac{1}{s^k}\left(\dfrac{b^\delta}{s^\delta} - 1\right)(s^\delta - a^\delta), & si\ d \ge 3 \end{cases}$$

$$\text{ii)}\quad {}^\mu P_s^U(t) = \begin{cases} \dfrac{{}^\mu P_s^U(s)}{h_\mu^b(s)}h_\mu^b(t), & si\ a < s \le t < b \\[2ex] \dfrac{{}^\mu P_s^U(s)}{h_\mu^a(s)}h_\mu^a(t), & si\ a < t \le s < b \end{cases}$$

où $\delta = \sqrt{(d-2)^2 + 4\alpha^2}$ *et* $k = d - 2$.

PREUVE. L'opérateur de Schrödinger $\Delta - \mu$ possède une fonction de Green symétrique sur U, notée par ${}^\mu G^U$, qui vérifie l'égalité:

$$G_x^U(y) = {}^\mu G_x^U(y) + \int_U G_t^U(x)\,{}^\mu G_t^U(y)\mu(dt), \quad \text{pour } x, y \in U$$

$$G_x^U(y) = {}^\mu G_x^U(y) + w_d\alpha^2\int_a^b\int_{\Gamma_1} G_{t\theta}^U(x)\,{}^\mu G_{t\theta}^U(y)\sigma(d\theta)t^{d-3}(dt).$$

Ainsi,

$$\int_{\Gamma_1} G_{sz}^U(y)\sigma(dz)$$

$$= \int_{\Gamma_1} {}^\mu G_{sz}^U(y)\sigma(dz) + \alpha^2 w_d \int_{\Gamma_1}\int_a^b\int_{\Gamma_1} G_{t\theta}^U(sz)\,{}^\mu G_{t\theta}^U(y)\sigma(d\theta)t^{d-3}(dt)\sigma(dz)$$

$$= \int_{\Gamma_1} {}^\mu G_{sz}^U(y)\sigma(dz) + \alpha^2 w_d \int_a^b\int_{\Gamma_1} {}^\mu G_{t\theta}^U(y)\int_{\Gamma_1} G_{t\theta}^U(sz)\sigma(dz)\sigma(d\theta)t^{d-3}(dt).$$

Comme μ est invariante par rotation, alors ${}^\mu P_t^U$ est radial dans U. Or l'application: $x \in U \to \int_U G^U(x, sz)\sigma(dz)$ est continue dans U et ${}^\mu G^U \leq G^U$. Par suite l'application: $x \to \int_U {}^\mu G^U(x, sz)\sigma(dz)$ est continue dans U. Ainsi, ${}^\mu P_t^U$ est un μ-potentiel sur U, continue, borné et μ-harmonique en dehors de la sphère de centre 0 et de rayon t. On déduit que:

$$\text{(I)}\quad P_s^U(\|y\|) = {}^\mu P_s^U(\|y\|) + \alpha^2 w_d \int_a^b P_t^U(s)\,{}^\mu P_t^U(\|y\|)t^{d-3}\,dt.$$

D'après le principe de minimum on obtient:

$${}^\mu P_s^U(t) = \begin{cases} \dfrac{{}^\mu P_s^U(s)}{h_\mu^b(s)} h_\mu^b(t), & \text{si } a < s \leq t < b \\[2ex] \dfrac{{}^\mu P_s^U(s)}{h_\mu^a(s)} h_\mu^a(t), & \text{si } a < t \leq s < b. \end{cases}$$

D'après (I) on a:

$$P_s^U(s) = {}^\mu P_s^U(s) + \alpha^2 w_d \int_a^s P_t^U(s)\,{}^\mu P_t^U(s)t^{d-3}\,dt + \alpha^2 w_d \int_s^b P_t^U(s)\,{}^\mu P_t^U(s)t^{d-3}\,dt$$

$$= {}^\mu P_s^U(s) + \alpha^2 w_d \int_a^s P_t^U(s)\frac{{}^\mu P_s^U(s)}{h_\mu^a(s)} h_\mu^a(t)t^{d-3}\,dt$$

$$+ \alpha^2 w_d \int_s^b P_t^U(s)\frac{{}^\mu P_s^U(s)}{h_\mu^b(s)} h_\mu^b(t)t^{d-3}\,dt$$

$$= {}^\mu P_s^U(s)\left\{1 + \alpha^2 w_d \int_a^s P_t^U(s)\frac{h_\mu^a(t)}{h_\mu^a(s)}t^{d-3}\,dt + \alpha^2 w_d \int_s^b P_t^U(s)\frac{h_\mu^b(t)}{h_\mu^b(s)}t^{d-3}\,dt\right\}.$$

i) Si d $= \mathbf{2}$ on a:

$$h_\mu^a(t) = \frac{a^\alpha}{t^\alpha} - \frac{t^\alpha}{a^\alpha}$$

et

$$P_s^U(t) = P_t^U(s) = \frac{1}{2\pi}\frac{\log(s/a)\log(b/t)}{\log(b/a)} \quad \text{si } a < s \le t < b.$$

Ainsi,

$$P_s^U(s) = {}^{\mu}P_s^U(s)\left\{1 + \frac{\alpha^2}{h_\mu^a(s)}\frac{\log(b/s)}{\log(b/a)}\int_a^s\left(\log\frac{t}{a}\right)h_\mu^a(t)t^{-1}\,dt\right.$$
$$\left. + \frac{\alpha^2}{h_\mu^b(s)}\frac{\log(s/a)}{\log(b/a)}\int_s^b\left(\log\frac{b}{t}\right)h_\mu^b(t)t^{-1}\,dt\right\}.$$

Or

$$I_1 := \int_a^s\left(\log\frac{t}{a}\right)h_\mu^a(t)t^{-1}\,dt = \frac{1}{\alpha}\left\{\left(\frac{a}{s}\right)^\alpha + \left(\frac{s}{a}\right)^\alpha\right\}\log\frac{a}{s} - \frac{1}{\alpha^2}h_\mu^a(s),$$
$$I_2 := \int_s^b\left(\log\frac{b}{t}\right)h_\mu^b(t)t^{-1}\,dt = \frac{1}{\alpha}\left\{\left(\frac{b}{s}\right)^\alpha + \left(\frac{s}{b}\right)^\alpha\right\}\log\frac{b}{s} - \frac{1}{\alpha^2}h_\mu^b(s)$$

et donc

$$\frac{\alpha^2}{h_\mu^a(s)}\frac{\log(b/s)}{\log(b/a)}I_1 = -\alpha\left(\frac{a^{2\alpha}+s^{2\alpha}}{a^{2\alpha}-s^{2\alpha}}\right)2\pi P_s^U(s) - \frac{\log(b/s)}{\log(b/a)},$$
$$\frac{\alpha^2}{h_\mu^b(s)}\frac{\log(s/a)}{\log(b/a)}I_2 = \alpha\left(\frac{b^{2\alpha}+s^{2\alpha}}{b^{2\alpha}-s^{2\alpha}}\right)2\pi P_s^U(s) - \frac{\log(s/a)}{\log(b/a)}.$$

Ainsi

$$P_s^U(s) = {}^{\mu}P_s^U(s)\left\{1 + \alpha\left(\frac{b^{2\alpha}+s^{2\alpha}}{b^{2\alpha}-s^{2\alpha}} - \frac{a^{2\alpha}+s^{2\alpha}}{a^{2\alpha}-s^{2\alpha}}\right)2\pi P_s^U(s) - \frac{\log(s/a)}{\log(b/a)} - \frac{\log(b/s)}{\log(b/a)}\right\}.$$

D'où

$${}^{\mu}P_s^U(s) = \frac{1}{4\alpha\pi(b^{2\alpha}-a^{2\alpha})}\left(\frac{b^{2\alpha}}{s^{2\alpha}} - 1\right)(s^{2\alpha} - a^{2\alpha}).$$

ii) **Si d** $\geq$ **3** on a:

$$h_\mu^a(t) = \left(\frac{t}{a}\right)^{(-k-\delta)/2} - \left(\frac{t}{a}\right)^{(-k+\delta)/2},$$

$$P_s^U(t) = P_t^U(s) = C_d\frac{1}{b^k - a^k}\left(\left(\frac{b}{t}\right)^k - 1\right)\left(1 - \left(\frac{a}{s}\right)^k\right) \quad \text{pour } a < s \le t < b.$$

D'après (I) on a:

$$P_s^U(s) = {}^{\mu}P_s^U(s)\left\{1 + \frac{\alpha^2 C_d w_d}{(b^k - a^k)h_\mu^a(s)}\left(\left(\frac{b}{s}\right)^k - 1\right)\int_a^s\left(1 - \left(\frac{a}{t}\right)^k\right)h_\mu^a(t)t^{k-1}\,dt\right.$$
$$\left. + \frac{\alpha^2 C_d w_d}{(b^k - a^k)h_\mu^b(s)}\left(1 - \left(\frac{a}{s}\right)^k\right)\int_s^b\left(\left(\frac{b}{t}\right)^k - 1\right)h_\mu^b(t)t^{k-1}\,dt\right\}.$$

Or

$$\begin{aligned}
I_3 &:= \int_a^s\left(1 - \left(\frac{a}{t}\right)^k\right)h_\mu^a(t)t^{k-1}\,dt \\
&= (a^k s^{-k} - 1)\left(\frac{2}{k+\delta}a^{(k+\delta)/2}s^{(k-\delta)/2} + \frac{2}{\delta - k}a^{(k-\delta)/2}s^{(k+\delta)/2}\right) \\
&\quad + \frac{4k}{(\delta - k)(\delta + k)}(a^{(k-\delta)/2}s^{(k+\delta)/2} - a^{(k+\delta)/2}s^{(k-\delta)/2}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &:= \int_s^b\left(\left(\frac{b}{t}\right)^k - 1\right)h_\mu^b(t)t^{k-1}\,dt \\
&= (b^k s^{-k} - 1)\left(\frac{2}{k+\delta}s^{(k-\delta)/2}b^{(k+\delta)/2} + \frac{2}{\delta - k}b^{(k-\delta)/2}s^{(k+\delta)/2}\right) \\
&\quad + \frac{4k}{(\delta - k)(\delta + k)}(b^{(k-\delta)/2}s^{(k+\delta)/2} - b^{(k+\delta)/2}s^{(k-\delta)/2}).
\end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha^2 C_d w_d}{(b^k - a^k)h_\mu^a(s)}\left(\left(\frac{b}{s}\right)^k - 1\right)I_3 \\
&\quad = -\frac{\alpha^2 w_d}{h_\mu^a(s)}P_s^U(s)\left(\frac{2}{k+\delta}a^{(k+\delta)/2}s^{(k-\delta)/2} + \frac{2}{\delta - k}a^{(k-\delta)/2}s^{(k+\delta)/2}\right) \\
&\qquad - k w_d C_d\frac{(b^k - s^k)}{b^k - a^k},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha^2 C_d w_d}{(b^k - a^k)h_\mu^b(s)}\left(1 - \left(\frac{a}{s}\right)^k\right)I_4 \\
&\quad = \frac{\alpha^2 w_d}{h_\mu^b(s)}P_s^U(s)\left(\frac{2}{k+\delta}b^{(k+\delta)/2}s^{(k-\delta)/2} + \frac{2}{\delta - k}b^{(k-\delta)/2}s^{(k+\delta)/2}\right) \\
&\qquad - k w_d C_d\frac{(s^k - a^k)}{b^k - a^k}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$P_s^U(s) = {}^\mu P_s^U(s)\left\{1 + w_d P_s^U(s)\left(\frac{(\delta-k)b^\delta + (k+\delta)s^\delta}{2(s^{-k}b^\delta - s^{-k+\delta})} - \frac{(\delta-k)a^\delta + (\delta+k)s^\delta}{2(s^{-k}a^\delta - s^{-k+\delta})}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{kC_d w_d(b^k - a^k)}{b^k - a^k}\right\}$$

et comme $C_d w_d = 1/k$, on déduit que

$$\frac{1}{w_d} = \frac{\delta s^{\delta+k}(a^\delta - b^\delta)}{(b^\delta - s^\delta)(a^\delta - s^\delta)}\,{}^\mu P_s^U(s).$$

Ainsi

$${}^\mu P_s^U(s) = \frac{(b^\delta - s^\delta)(s^\delta - a^\delta)}{\delta s^{\delta+k}(b^\delta - a^\delta)}\,\frac{1}{w_d}.$$

C'est à dire

$${}^\mu P_s^U(s) = \frac{\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}\delta(b^\delta - a^\delta)}\,\frac{1}{s^k}\left(\frac{b^\delta}{s^\delta} - 1\right)(s^\delta - a^\delta). \qquad \square$$

REMARQUES 3.2. (1) Si $d = 2$, alors $\delta = 2\alpha$, et donc on retrouve l'expression:

$${}^\mu P_s^U(s) = \frac{1}{4\alpha\pi(b^{2\alpha} - a^{2\alpha})}\left(\frac{b^{2\alpha}}{s^{2\alpha}} - 1\right)(s^{2\alpha} - a^{2\alpha}).$$

(2) Si on note $U_a = \{x \in \boldsymbol{R}^d : a < \|x\| < b\}$ et ${}^\mu H_{U_a}$ le noyau μ-harmonique associé à U_a. Alors pour tout μ-potentiel q sur Ω_b, les fonctions ${}^\mu H_{U_a}q$ décroissent localement uniformément vers zéro lorsque a tend vers zéro. Si

$$q^{U_a} = q - {}^\mu H_{U_a}q$$

alors, pour tout $x \in \Omega_b$,

$$\sup_{a>0} q^{U_a}(x) = \lim_{a\to 0} q^{U_a}(x) = q(x).$$

Ainsi $\lim_{a\to 0} {}^\mu P_s^{U_a} = {}^\mu P_s^{\Omega_b}$; ce qui est bien vérifiée par calcul, car

$$\lim_{a\to 0}\frac{\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}\delta}\,\frac{(b^\delta - s^\delta)}{(b^\delta - a^\delta)}s^{-\delta-k}(s^\delta - a^\delta) = \frac{\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}\delta b^k}e_\mu^b(s)h_\mu^b(s).$$

(3) On remarque aussi que $\lim_{a\to 0} P_s^{U_a} = P_s^{\Omega_b}$.

4. Ensembles $((f(.))^2/\|.\|^2)\lambda$-essentiels.

DÉFINITION 4.1. Un sous ensemble ouvert et invariant par rotation A de Ω est un ensemble essentiel pour une mesure μ invariante par rotation, si le principe de Picard est vérifié pour toute mesure ν telle que: $1_A\nu \le 1_A\mu$.

Remarques 4.1 ([**7**]). (1) L'importance des ensembles essentiels pour l'étude du principe de Picard est donné par le résultat suivant: Une mesure μ vérifie le principe de Picard si, et seulement si, il existe un ensemble essentiel ne contenant pas un ensemble de type $\Omega_r = \{x \in \boldsymbol{R}^d : 0 < \|x\| < r\}$, $r \in]0,1[$.

(2) S'il existe $r \in]0,1[$ tel que $\Omega_r = \{x \in \boldsymbol{R}^d : 0 < \|x\| < r\} \subset A$, alors A est essentiel pour μ si, et seulement si, μ vérifie le principe de Picard.

(3) Notons que E. Haouala [**7**, Théorème 3.2] a montré que pour les mesures radiales $\mu \in K_{loc}(\boldsymbol{R}^d - \{0\})$, A est μ-essentiel si, et seulement si,

$$\int_A \frac{1}{\|x\|^2} \int_{\Gamma_1} {}^{\mu}G^A_{\|x\|z}(x)\sigma(dz)\lambda(dx) = +\infty.$$

Si zéro n'est pas dans l'adhérence $\bar{A}$ *de* A alors A n'est pas essentiel pour μ. Dans le cas contraire A contient une réunion d'ouverts $A_n := \{a_n < \|x\| < b_n\}$ où (a_n) et (b_n) sont tels que: $0 < b_{n+1} \leq a_n < b_n < 1$ $(n \geq 1)$ et $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$.

Dorénavant nous considérons les mesures de type $\mu = ((f(.))^2/\|.\|^2)\lambda$ où f est une fonction radiale décroissante, localement höldérienne, continue, non bornée sur $]0,1[$ et strictement positive. Ainsi

$$1_{A_n}\frac{(f(b_n))^2}{\|x\|^2}\lambda \leq 1_{A_n}\frac{(f(\|x\|))^2}{\|x\|^2}\lambda \leq 1_{A_n}\frac{(f(a_n))^2}{\|x\|^2}\lambda.$$

Posons:

$$J_n = 1_{A_n}\frac{(f(\|.\|))^2}{\|.\|^2}\lambda, \quad \mu_n = 1_{A_n}\frac{(f(a_n))^2}{\|.\|^2}\lambda \quad \text{et} \quad \nu_n = 1_{A_n}\frac{(f(b_n))^2}{\|.\|^2}\lambda.$$

Alors

$${}^{\mu_n}G^{A_n}_x \leq {}^{J_n}G^{A_n}_x \leq {}^{\nu_n}G^{A_n}_x.$$

Ainsi, on obtient:

$$\text{(II)} \quad \int_{A_n} \frac{1}{\|x\|^2}\, {}^{\mu_n}P^{A_n}_{\|x\|}(x)\lambda(dx) \leq \int_{A_n} \frac{1}{\|x\|^2}\, {}^{J_n}P^{A_n}_{\|x\|}(x)\lambda(dx) \leq \int_{A_n} \frac{1}{\|x\|^2}\, {}^{\nu_n}P^{A_n}_{\|x\|}(x)\lambda(dx).$$

Notons que, d'après le théorème 3.1, on a les expressions suivantes:

$$\text{(a)} \quad \int_{A_n} \frac{1}{\|x\|^2}\, {}^{\mu_n}P^{A_n}_{\|x\|}(x)\lambda(dx) = \frac{1}{\alpha_n}\frac{b_n^{\alpha_n} + a_n^{\alpha_n}}{b_n^{\alpha_n} - a_n^{\alpha_n}}\log\frac{b_n}{a_n} - \frac{2}{\alpha_n^2}$$

$$= \frac{2}{\alpha_n^2}\left\{\frac{(\alpha_n/2)\log(b_n/a_n)}{\tanh((\alpha_n/2)\log(b_n/a_n))} - 1\right\}$$

avec $\alpha_n = \sqrt{(d-2)^2 + 4(f(a_n))^2}$.

$$\text{(b)} \quad \int_{A_n} \frac{1}{\|x\|^2}\, {}^{v_n}P^{A_n}_{\|x\|}(x)\lambda(dx) = \frac{1}{\beta_n}\frac{b_n^{\beta_n}+a_n^{\beta_n}}{b_n^{\beta_n}-a_n^{\beta_n}}\log\frac{b_n}{a_n} - \frac{2}{\beta_n^2}$$
$$= \frac{2}{\beta_n^2}\left\{\frac{(\beta_n/2)\log(b_n/a_n)}{\tanh((\beta_n/2)\log(b_n/a_n))} - 1\right\}$$

avec $\beta_n = \sqrt{(d-2)^2 + 4(f(b_n))^2}$.
De l'inégalité (II), des expressions (a) et (b) et de la remarque 4.1.(3) on déduit les lemmes suivants:

LEMME 4.1. *Si A est μ-essentiel alors* $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\beta_n^2}\left\{\frac{(\beta_n/2)\log(b_n/a_n)}{\tanh((\beta_n/2)\log(b_n/a_n))} - 1\right\}$ $= +\infty$.

LEMME 4.2. *Si* $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\alpha_n^2}\left\{\frac{(\alpha_n/2)\log(b_n/a_n)}{\tanh((\alpha_n/2)\log(b_n/a_n))} - 1\right\} = +\infty$ *alors A est μ-essentiel.*

THÉORÈME 4.1. *On suppose que f, a_n et b_n vérifient la condition suivante*:
(III): $f(a_n) \leq \log a_n^{-1}$ *pour* $n = 1, 2, \ldots$ *et* $\liminf_{n\to+\infty}(f(b_n)/f(a_n)) = \liminf_{n\to+\infty}(\log b_n^{-1}/\log a_n^{-1})$.
Les assertions suivantes sont équivalentes:

(1) *A est* $\dfrac{(f(.))^2}{\|.\|^2}\lambda$*-essentiel*,

(2) $$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\beta_n^2}\left\{\frac{(\beta_n/2)\log(b_n/a_n)}{\tanh((\beta_n/2)\log(b_n/a_n))} - 1\right\} = +\infty \quad \textit{où}$$
$$\beta_n = \sqrt{(d-2)^2 + 4f(b_n)^2},$$

(3) $$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{f(b_n)^2}\left\{\frac{f(b_n)\log(b_n/a_n)}{\tanh(f(b_n)\log(b_n/a_n))} - 1\right\} = +\infty,$$

(4) $$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{f(b_n)^2}\log\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{f(b_n)} + \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{f(b_n)}\right\} = +\infty,$$

(5) $$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{f(a_n)^2}\log\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{f(a_n)} + \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{f(a_n)}\right\} = +\infty,$$

(6) $$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{f(a_n)^2}\left\{\frac{f(a_n)\log(b_n/a_n)}{\tanh(f(a_n)\log(b_n/a_n))} - 1\right\} = +\infty,$$

$$(7)\qquad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{\alpha_n^2}\left\{\frac{(\alpha_n/2)\log(b_n/a_n)}{\tanh((\alpha_n/2)\log(b_n/a_n))}-1\right\}=+\infty \ \text{ où}$$

$$\alpha_n=\sqrt{(d-2)^2+4f(a_n)^2}.$$

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2): Résulte du lemme 4.1.

(2) $\Rightarrow$ (3): On considère la fonction décroissante en x suivante:

$$\psi(x,\tau)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{\tau x}{\tanh(\tau x)}-1\right)\quad \text{où } \tau>0 \text{ et } x>0.$$

Ainsi

$$\psi\left(f(b_n),\log\frac{b_n}{a_n}\right)\geq\psi\left(\frac{\beta_n}{2},\log\frac{b_n}{a_n}\right).$$

C'est à dire:

$$\frac{1}{f(b_n)^2}\left\{\frac{f(b_n)\log(b_n/a_n)}{\tanh(f(b_n)\log(b_n/a_n))}-1\right\}\geq\frac{4}{\beta_n^2}\left\{\frac{(\beta_n/2)\log(b_n/a_n)}{\tanh((\beta_n/2)\log(b_n/a_n))}-1\right\}.$$

D'où le résultat.

(3) $\Rightarrow$ (4):

$$\frac{1}{f(b_n)^2}\log\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{f(b_n)}+\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{f(b_n)}\right\}-\frac{1}{f(b_n)^2}\left\{\frac{f(b_n)\log(b_n/a_n)}{\tanh(f(b_n)\log(b_n/a_n))}-1\right\}$$

$$=\frac{1}{f(b_n)^2}\left\{\log\cosh\left(\log\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{f(b_n)}\right)-\frac{f(b_n)\log(b_n/a_n)}{\tanh(f(b_n)\log(b_n/a_n))}+1\right\}.$$

On pose:

$\varphi(x)=\log\cosh x-(x/\tanh x)+1$ pour $x>0$. Par un simple calcul on déduit que: $\varphi(x)\geq 0$ pour tout $x>0$. Ainsi

$$\frac{1}{f(b_n)^2}\log\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{f(b_n)}+\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{f(b_n)}\right\}\geq\frac{1}{f(b_n)^2}\left\{\frac{f(b_n)\log(b_n/a_n)}{\tanh(f(b_n)\log(b_n/a_n))}-1\right\}$$

d'où le résultat.

(4) $\Rightarrow$ (5): Puisque f est décroissante, alors $f(b_n)<f(a_n)$. Ainsi

$$\log\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{f(b_n)}+\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{f(b_n)}\right\}<\log\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{f(a_n)}+\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{f(a_n)}\right\}.$$

On distingue deux cas:

i) Si $\liminf_{n\to+\infty} f(b_n)/f(a_n) > 0$.
Alors il existe une constante $M_1 > 0$ telle que: $M_1/f(b_n) < 1/f(a_n)$; à partir d'un certain rang. Et par suite, de l'inégalité

$$\frac{M_1^2}{(f(b_n))^2}\log\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{f(b_n)}+\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{f(b_n)}\right\}<\frac{1}{(f(a_n))^2}\log\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{f(a_n)}+\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{f(a_n)}\right\},$$

on déduit le résultat.

ii) Supposons que $\liminf_{n\to+\infty} f(b_n)/f(a_n) = 0$. Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(a_n)^2}\log\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{f(a_n)}\right\}&=\frac{\log 2^{-1}}{f(a_n)^2}+\frac{\log a_n^{-1}}{f(a_n)}-\frac{\log b_n^{-1}}{f(a_n)}\\&=\frac{\log 2^{-1}}{f(a_n)^2}+\frac{\log a_n^{-1}}{f(a_n)}\left(1-\frac{\log b_n^{-1}}{\log a_n^{-1}}\right).\end{aligned}$$

D'après la condition (III) on déduit que

$$\frac{\log 2^{-1}}{f(a_n)^2}+\frac{\log a_n^{-1}}{f(a_n)}\left(1-\frac{\log b_n^{-1}}{\log a_n^{-1}}\right)\geq\frac{\log 2^{-1}}{f(a_n)^2}+1-\frac{\log b_n^{-1}}{\log a_n^{-1}}.$$

Par suite

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{f(a_n)^2}\log\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{f(a_n)}+\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{f(a_n)}\right\}>0.$$

On déduit que

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{f(a_n)^2}\log\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{f(a_n)}+\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{f(a_n)}\right\}=+\infty.$$

(5) $\Rightarrow$ (6): De la croissance de la fonction $u(x) = 3(x/\tanh(x) - 1) - 2\log(\cosh(x))$, pour $x > 0$, on déduit que $(1/\log(\cosh(x)))(x/\tanh(x) - 1) > 2/3$, $\forall x > 0$.
Ainsi

$$\liminf_{n\to+\infty}\frac{1}{\log(\cosh(f(a_n)\log(b_n/a_n)))}\left(\frac{f(a_n)\log(b_n/a_n)}{\tanh(f(a_n)\log(b_n/a_n))}-1\right)>0,$$

et par suite ils existent $\beta > 0$ et un entier naturel n_0 tels que, pour $n > n_0$,

$$\frac{\beta}{f(a_n)^2}\log\left(\cosh\left(f(a_n)\log\frac{b_n}{a_n}\right)\right)<\frac{1}{f(a_n)^2}\left(\frac{f(a_n)\log(b_n/a_n)}{\tanh(f(a_n)\log(b_n/a_n))}-1\right).$$

D'où le résultat.

(6) $\Rightarrow$ (7): On considère la fonction croissante suivante:

$$h(x) = \frac{x}{\tanh(x)}.$$

Alors

$$\left\{\frac{(\alpha_n/2)\log(b_n/a_n)}{\tanh((\alpha_n/2)\log(b_n/a_n))} - 1\right\} > \left\{\frac{f(a_n)\log(b_n/a_n)}{\tanh(f(a_n)\log(b_n/a_n))} - 1\right\},$$

et comme

$$\frac{\alpha_n^2/4}{f(a_n)^2} = \frac{(d-2)^2/4}{f(a_n)^2} + 1 < \frac{(d-2)^2}{4}(f(a_1))^{-2} + 1,$$

on déduit que

$$\frac{1}{f(a_n)^2} < \frac{(d-2)^2(f(a_1))^{-2} + 4}{\alpha_n^2}.$$

Ainsi

$$\frac{(d-2)^2(f(a_1))^{-2} + 4}{\alpha_n^2}\left\{\frac{(\alpha_n/2)\log(b_n/a_n)}{\tanh((\alpha_n/2)\log(b_n/a_n))} - 1\right\}$$
$$> \frac{1}{f(a_n)^2}\left\{\frac{f(a_n)\log(b_n/a_n)}{\tanh(f(a_n)\log(b_n/a_n))} - 1\right\}.$$

(7) $\Rightarrow$ (1): Résulte du lemme 4.2. □

Corollaire 4.1. *Soit f une fonction radiale, décroissante, localement höld-érienne continue, non bornée sur* $]0,1[$ *et strictement positive telle que*: $f(r) = c(-\log r)$ $(0 < c \leq 1)$, *au voisinage de* 0, *alors les assertions du théorème* 4.1 *sont équivalentes.*

Dans le cas où $\lim_{n\to+\infty} f(a_n)\log(b_n/a_n) = 0$ et l'hypothèse (III) du théorème 4.1 est vérifiée, on a une caractérisation simple des ensembles μ-essentiels:

Proposition 4.1. *On suppose que f, a_n et b_n vérifient les conditions suivantes*: $f(a_n) \leq \log a_n^{-1}$ *pour* $n \geq 1$, $\liminf_{n\to+\infty} f(b_n)/f(a_n) = \liminf_{n\to+\infty} (\log b_n^{-1}/\log a_n^{-1})$ *et* $\lim_{n\to+\infty} f(a_n)\log(b_n/a_n) = 0$. *Les assertions suivantes sont équivalentes*:

$$1 - A \ \textit{est} \ \frac{(f(.))^2}{\|.\|^2}\lambda\textit{-essentiel},$$

$$2 - \sum_{n\geq 1}\left(\log\frac{b_n}{a_n}\right)^2 = +\infty.$$

PREUVE. De la décroissance de la fonction $x \to x/\tanh(x) - 1 - x^2$, pour tout $x > 0$, on déduit que:

$$\frac{f(a_n)\log(b_n/a_n)}{\tanh(f(a_n)\log(b_n/a_n))} - 1 \leq f(a_n)^2\left(\log\frac{b_n}{a_n}\right)^2.$$

Puisque $\lim_{x\to 0}(1/x^2)(x/\tanh(x) - 1) = 1/3$ et $\lim_{n\to+\infty} f(a_n)\log(b_n/a_n) = 0$, alors ils existent $M > 0$ et un entier naturel n_0 tels que pour tout $n > n_0$ on a:

$$M\left(f(a_n)\log\frac{b_n}{a_n}\right)^2 \leq \frac{f(a_n)\log(b_n/a_n)}{\tanh(f(a_n)\log(b_n/a_n))} - 1.$$

Donc, pour tout $n > n_0$, on a

$$M\left(\log\frac{b_n}{a_n}\right)^2 \leq \frac{1}{f(a_n)^2}\left(\frac{f(a_n)\log(b_n/a_n)}{\tanh(f(a_n)\log(b_n/a_n))} - 1\right) \leq \left(\log\frac{b_n}{a_n}\right)^2.$$

Ainsi, d'après le théorème 4.1.(6), on déduit le résultat. □

EXAMPLE 4.1. On considère la fonction f définie par $f(x) = (-\log(x))^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ et les suites $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ données par $a_n = e^{-\sqrt{n}-1/(3\sqrt{n})}$, $b_n = e^{-\sqrt{n}}$.

REMARQUES 4.2. (1) Si $\lim_{n\to+\infty} f(a_n)\log(b_n/a_n) > 0$, alors la proposition précédente n'est plus valable. (Voir l'exemple 5.1.)

(2) Si $f = 1$, i.e. $\mu = (1/\|.\|^2)\lambda$, l'équivalence de la proposition précédente est toujours vraie. (Voir théorème 5.1.)

5. Applications.

Dans cette section nous donnons quelques applications dans le cas où $f(x) = (-\log\|x\|)^{\alpha/2}$ avec, $\alpha \in [0, 2]$. Notons que les ensembles f-essentiels avec, $f(x) = -\log\|x\|$ et $f(x) = 1$ ont été étudiés par T. Tada en dimension 2.

Comme les mesures $\nu = ((\log\|.\|)^2/\|.\|^2)\lambda$ et $\mu = (1/\|.\|^2)\lambda$ vérifient le principe de Picard ([**3**], [**8**], [**9**]), alors elles possèdent des ensembles essentiels ne contenant pas un ensemble de type $\Omega_r, r \in]0, 1[$. Le théorème, ci-dessous, donne une caractérisation des ensembles $1/\|x\|^2$-essentiels.

THÉORÈME 5.1. *Les asseretions suivantes sont équivalentes*:

$$1 - A = \bigcup_{n\geq 1}\{a_n < \|x\| < b_n\} \text{ est } \frac{1}{\|x\|^2}\text{-essentiel},$$

$$2 - \sum_{n\geq 1}\left(\log\frac{b_n}{a_n}\right)^2 = +\infty.$$

Remarque 5.1. Cette caractérisation des ensembles $1/\|x\|^2$-essentiels a été donnée par T. Tada [**12**] dans le cas $\boldsymbol{R}^2$. En remarquant que, A est $1/\|x\|^2$-essentiel si, et seulement si, A est essentiel pour la mesure nulle; E. Haouala [**7**] a démontré ce résultat dans le cas $\boldsymbol{R}^d$, $d \geq 2$. Nous donnons une autre démonstration de ce résultat en utilisant l'expression du potentiel ${}^{(1/\|x\|^2)\lambda}P^{A_n}$.

Preuve. D'après [**7**]

$$A \text{ est } \frac{1}{\|x\|^2}\text{-essentiel} \Leftrightarrow \int_A \frac{1}{\|x\|^2} \int_{\Gamma_1} {}^{(1/\|.\|^2)\lambda}G^A_{\|x\|z}(x)\sigma(dz)\lambda(dx) = +\infty$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} \int_{a_n}^{b_n} {}^{(1/\|x\|^2)\lambda}P_r^{A_n}(r) r^{d-3}\, dr = +\infty.$$

D'après le théorème 3.1 on a:

$$\int_{a_n}^{b_n} {}^{(1/\|x\|^2)\lambda}P_r^{A_n}(r) r^{d-3}\, dr = \frac{2}{\alpha_1^2}\left\{\frac{\alpha_1}{2}\frac{b_n^{\alpha_1}+a_n^{\alpha_1}}{b_n^{\alpha_1}-a_n^{\alpha_1}}\log\frac{b_n}{a_n} - 1\right\},$$

avec $\alpha_1 = \sqrt{(d-2)^2+4}$.

On pose $\gamma_n = \dfrac{\alpha_1}{2}\log\dfrac{b_n}{a_n}$. Donc

$$\frac{2}{\alpha_1^2}\left\{\frac{\alpha_1}{2}\frac{b_n^{\alpha_1}+a_n^{\alpha_1}}{b_n^{\alpha_1}-a_n^{\alpha_1}}\log\frac{b_n}{a_n} - 1\right\} = \frac{2}{\alpha_1^2}\left\{\frac{\gamma_n}{\tanh\gamma_n} - 1\right\}.$$

Comme les séries de termes générales $(\gamma_n/\tanh\gamma_n) - 1$ et $(\log(b_n/a_n))^2$ sont de même nature alors,

$$A \text{ est } \frac{1}{\|x\|^2}\text{-essentiel} \Leftrightarrow \sum_{n\geq 1}\left(\log\frac{b_n}{a_n}\right)^2 = +\infty. \qquad \square$$

Théorème 5.2. *Les assertions suivantes sont équivalentes*:

(1) A *est* $\dfrac{(\log\|.\|)^2}{\|.\|^2}\lambda$*-essentiel*,

(2) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\beta_n^2}\left\{\frac{(\beta_n/2)\log(b_n/a_n)}{\tanh((\beta_n/2)\log(b_n/a_n))} - 1\right\} = +\infty$ *où* $\beta_n = \sqrt{(d-2)^2 + 4(\log b_n)^2}$,

(3) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(\log b_n)^2}\left\{\frac{(-\log b_n)\log(b_n/a_n)}{\tanh((-\log b_n)\log(b_n/a_n))} - 1\right\} = +\infty,$

(4) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(\log b_n)^2}\log\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{\log b_n} + \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{\log b_n}\right\} = +\infty,$

$$(5)\quad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{(\log a_n)^2}\log\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{\log a_n}+\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{\log a_n}\right\}=+\infty,$$

$$(6)\quad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{(\log a_n)^2}\left\{\frac{(-\log a_n)\log(b_n/a_n)}{\tanh((-\log a_n)\log(b_n/a_n))}-1\right\}=+\infty,$$

$$(7)\quad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{\alpha_n^2}\left\{\frac{(\alpha_n/2)\log(b_n/a_n)}{\tanh((\alpha_n/2)\log(b_n/a_n))}-1\right\}=+\infty \quad \textit{où}$$

$$\alpha_n=\sqrt{(d-2)^2+4(\log a_n)^2}.$$

Remarque 5.2. Dans $\boldsymbol{R}^2$, les caractérisations (3) et (4) ont été données par T. Tada via d'autres méthodes. En utilisant les téchniques de la théorie du potentiel nous sommes arrivés à donner ces résultats dans $\boldsymbol{R}^d$, $d\geq 2$.

On sait que les mesures $\nu=((-\log\|x\|)^{\beta}/\|x\|^2)\lambda$, $\beta\in\,]0,2]$ et $\mu=(1/\|x\|^2)\lambda$ vérifient le principe de Picard voir [**8**] et [**9**] pour $d=2$ et [**3**] pour $d\geq 3$, donc elles admettent des ensembles essentiels non triviaux qui sont caractérisés dans les deux propositions qui suivent:

Proposition 5.1. *Les assertions suivantes sont équivalentes*:

$$(1)\quad A=\bigcup_{n\geq 1}\{x\in\boldsymbol{R}^d : a_n<\|x\|<b_n\}\ \textit{est}\ \frac{1}{\|x\|^{\alpha}}\textit{-essentiel avec } \alpha\in\,]0,2],$$

$$(2)\quad \sum_{n\geq 1}\left(\log\frac{b_n}{a_n}\right)^2=+\infty.$$

Comme dans le cas $\alpha=2$ on démontre la proposition suivante:

Proposition 5.2. *Dans $\boldsymbol{R}^d$, $d\geq 2$, et pour $\alpha\in\,]0,2]$ les assertions suivantes sont équivalentes*:

$$(1)\quad A\ \textit{est}\ \frac{(-\log r)^{\alpha}}{r^2}\textit{-essentiel},$$

$$(2)\quad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{\beta_n^2}\left\{\frac{(\beta_n/2)\log(b_n/a_n)}{\tanh((\beta_n/2)\log(b_n/a_n))}-1\right\}=+\infty \quad \textit{où}$$

$$\beta_n=\sqrt{(d-2)^2+4(-\log b_n)^{\alpha}},$$

$$(3)\quad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{(-\log b_n)^{\alpha}}\left\{\frac{(-\log b_n)^{\alpha/2}\log(b_n/a_n)}{\tanh((-\log b_n)^{\alpha/2}\log(b_n/a_n))}-1\right\}=+\infty,$$

$$(4)\quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(-\log a_n)^{\alpha}} \log \frac{1}{2}\left\{ \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{(-\log a_n)^{\alpha/2}} + \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{(-\log a_n)^{\alpha/2}} \right\} = +\infty,$$

$$(5)\quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(-\log a_n)^{\alpha}} \left\{ \frac{(-\log a_n)^{\alpha/2}\log(b_n/a_n)}{\tanh((-\log a_n)^{\alpha/2}\log(b_n/a_n))} - 1 \right\} = +\infty,$$

$$(6)\quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\alpha_n^2} \left\{ \frac{(\alpha_n/2)\log(b_n/a_n)}{\tanh((\alpha_n/2)\log(b_n/a_n))} - 1 \right\} = +\infty \ \textit{où}$$

$$\alpha_n = \sqrt{(d-2)^2 + 4(-\log a_n)^{\alpha}}.$$

Remarques 5.1. (1) On sait que si $\mu \geq \nu$ tout ensemble μ-essentiel est ν-essentiel. Si on note E_β l'ensemble de tous les ensembles $(-\log\|x\|)^{\beta}/\|x\|^2$-essentiels, $\beta \in]0,2]$, alors si $\beta < \beta'$ on a: $E_{\beta'} \subset E_\beta$.

(2) Les ensembles $(-\log\|x\|)^{\beta}/\|x\|^2$-essentiels, $\beta \in]0,2]$, sont $1/\|x\|^2$-essentiels mais les ensembles $1/\|x\|^2$-essentiels ne sont pas en général $(-\log\|x\|)^{\beta}/\|x\|^2$-essentiels comme le montre l'exemple suivant:

Example 5.1. On fixe les suites suivantes: $\rho_n = 1 + 1/n^{\alpha}$ où $0 < \alpha < 1/2$

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{(1+\rho_n)^{n^2}} \\ b_n = \rho_n a_n. \end{cases}$$

Soit $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n$, où $A_n = \{x \in \boldsymbol{R}^d : a_n < \|x\| < b_n\}$. Puisque $b_n/a_n = \rho_n$ alors $\sum_{n\geq 1}(\log(b_n/a_n))^2 = +\infty$. D'après le théorème 5.1, A est $1/\|x\|^2$-essentiel. On remarque que

$$\frac{1}{(\log b_n)^2} \log \frac{1}{2}\left\{ \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{\log b_n} + \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{\log b_n} \right\} \leq \frac{1}{\log b_n} \log \frac{a_n}{b_n}$$

et

$$\frac{\log(a_n/b_n)}{\log b_n} = \frac{\log a_n - \log b_n}{\log b_n} = \frac{1}{1 - (\log \rho_n / -\log a_n)} - 1.$$

Puisque

$$\frac{1}{1 - (\log \rho_n / -\log a_n)} - 1 < \frac{1}{n^2} \ \text{ pour } n > n_0,$$

alors la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(-\log b_n)^2} \log \frac{1}{2}\left\{ \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{\log b_n} + \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{\log b_n} \right\}$$

converge. Ainsi, d'après le théorème 5.2, A n'est pas un ensemble $(\log\|x\|)^2/\|x\|^2$-essentiel. Notons que $\lim_{n\to+\infty}(-\log a_n)\log(b_n/a_n) > 0$ et que la série $\sum_{n\geq 1}(\log(b_n/a_n))^2 = +\infty$. (Voir Remarque 4.2.1.)

References

[1] A. Benyaiche and A. Boukricha, Ordre de Nevanlinna des fonctions sous-harmoniques continues en une singularité isolée, Potential Anal., No. 12 (2000), 147–167.

[2] A. Boukricha, Principe de Picard et comportement des solutions continues de l'équation de Schrödinger, au voisinage d'une singularité isolée, BIBOS Publication, No. 247, Universität Bielefeld, 1987.

[3] A. Boukricha, Principe de Picard pour les mesures invariantes par rotation, Potential theory, ed. by M. Kishi, (1991), 161–169.

[4] A. Boukricha and E. Haouala, Principe de Picard pour les mesures invariantes par rotation, J. Math. Soc. Japan, Vol. 47, No. 1 (1995), 159–170.

[5] A. Boukricha, W. Hansen and H. Hueber, Continuous solutions of the generalized Schrödinger equation and perturbation of harmonic spaces, Expo. Math., **5** (1987), 97–135.

[6] A. Boukricha and W. Hansen, Strong nonmonotonicity of the Picard dimension, Comm. Partial Differential Equations, **20** (384) (1995), 567–590.

[7] E. Haouala, Thèse de Doctorat ès-sciences, Faculté des Sciences de Tunis, Avril 1993.

[8] M. Nakai, Martin boundary over an isolated singularity of rotation free density, J. Math. Soc. Japan, **26** (1974), 483–507.

[9] M. Nakai, A test of Picard principle for rotation free densities, J. Math. Soc. Japan, **27** (1975), 412–431.

[10] M. Nakai and T. Tada, Nonmonotoneity of Picard principle, Trans. Amer. Math. Soc., **292** (1985), 629–644.

[11] M. Nakai and T. Tada, Extreme nonmonotoneity of the Picard principle, Math. Ann., **281** (1988), 279–293.

[12] T. Tada, Essential sets of Picard principle for rotation free densities, Kodai Math. J., **14** (1991), 134–143.

Allami Benyaiche
Université IBN TOFAIL
Faculté des Sciences de Kénitra
BP 133
MOROCCO

Aiad Elgourari
Université IBN TOFAIL
Faculté des Sciences de Kénitra
BP 133
MOROCCO