J. Math. Soc. Japan
Vol. 24, No. 2, 1972

Représentations unitaires des groupes symplectiques

par Masahiko SAITO

(Reçu le 31 août 1971)

§ 0. Introduction.

On se propose dans ce mémoire de construire plusieurs séries de représentations unitaires des groupes symplectiques sur un corps auto-dual.

Soit $\boldsymbol{K}$ un corps commutatif localement compact dont le groupe additif est auto-dual. Tanaka [7] et Shalika [5] ont construit toutes les représentations unitaires irréductibles de $SL(2, \boldsymbol{K})=Sp(2, \boldsymbol{K})$. Ce travail est un essaie de généraliser leurs résultats à un groupe symplectique quelconque $G_n=Sp(2n, \boldsymbol{K})$. La construction de Tanaka et Shalika repose sur la méthode développée par A. Weil [8], que nous suivrons aussi.

Soit Φ une forme quadratique non dégénérée sur $\boldsymbol{K}^{n'}$. On construit d'abord une représentation projective unitaire U^{Φ} de G_n dépendant de Φ. On montrera ensuite que U^{Φ} provient d'une représentation linéaire unitaire $\tilde{U}^{\Phi}$ de G_n sous une certaine condition. Cette condition est vide pour le corps des nombres complexes et les corps finis, et est la parité de n' pour le corps des nombres réels et les corps $\mathfrak{p}$-adiques. Dans le dernier paragraphe, on se restreint au cas où $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$, $\Phi=E$ (unité) et $n\leqq n'$, et décompose la représentation $\tilde{U}^{\Phi}$ suivant les représentations irréductibles du groupe orthogonal $O(n')$. Les représentations ainsi obtenues sont définies sur l'espace des fonctions vectorielles sur l'espace $\mathfrak{S}_+$ des matrices symétriques positives d'ordre n et de carré intégrable par rapport à une mesure de Radon. Si $n=n'$, ces représentations sont toutes irréductibles.

On fixe les notations dans § 1. On construira dans § 2 les représentations projectives unitaires U^{Φ} dans l'espace des fonctions de carré intégrable sur l'espace $\mathcal{M}$ des matrices à n lignes et n' colonnes sur $\boldsymbol{K}$. Ici, on a suivi une méthode un peu différente de celle de Weil. On donnera aussi la forme explicite de l'opérateur pour certains éléments typiques de G_n.

Dans § 3, on définit, pour une matrice symétrique inversible A, le nombre $\Omega(\Phi, A)$, qui représente le facteur cohomologique de projectivité de la représentation U^{Φ}. Deux lemmes seront démontrés qui permettent de réduire le calcul de Ω au cas simple. On reproduira aussi le résultat sur la classification des formes quadratiques. Ici et dans le reste du mémoire, on suppose n' pair pour le corps des nombres réels et les corps $\mathfrak{p}$-adiques.

Dans § 4, on calcule $\Omega(\Phi, A)$ explicitement, et montre que $\Omega(\Phi, A)$ peut s'écrire sous la forme $p(\Phi)\tilde{\Omega}(\Phi, A)$, où $p(\Phi)$ ne dépend pas de A et $\tilde{\Omega}(\Phi, A)$ (A symétrique inversible) peut se prolonger à un caractère d'ordre 2 du groupe $GL(n, \boldsymbol{K})$. Ce resultat est essentiel pour linéariser U^{Φ}.

Le § 5 sera consacré à la linéarisation de U^{Φ}. Faute de méthode générale, on se servira de la connaissance des générateurs et des relations pour G_n, due à Steinberg [6]. Le calcul étant élémentaire mais très compliqué, on n'en reproduira pas le détail.

Dans le dernier paragraphe, on suppose que $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$, $\Phi=E$ et $n \leqq n'$. Soit ζ une représentation irréductible de dimension N de $O(n')$ qui est de classe 1 par rapport à un certain sous-groupe Γ isomorphe à $O(n'-n)$, et soit r la dimension de l'espace des invariants par $\zeta(\Gamma)$. Soit $\boldsymbol{H}^{\zeta}$ l'espace des fonctions de carré intégrable $\boldsymbol{f}$ sur $\mathcal{M}$ à valeurs dans $\boldsymbol{C}^N$ telles qu'on ait $\boldsymbol{f}(ZP)=\boldsymbol{f}(Z)\zeta(P)$ pour tout $P \in O(n')$. Alors la somme directe de N répliques de $\tilde{U}^{\Phi}$ induit une représentation $\tilde{U}^{\Phi,\zeta}$ dans $\boldsymbol{H}^{\zeta}$, qui peut se transférer à l'espace $L^2(\mathfrak{S}_+, \boldsymbol{C}^r, \delta X)$, où $\mathfrak{S}_+$ est l'espace des matrices symétriques positives d'ordre n et $\delta X = c|\det X|^{\frac{n'-n-1}{2}} dX$. On donnera la forme explicite de l'opérateur pour certains éléments typiques de G_n. On démontrera que les représentations ainsi obtenues sont toutes irréductibles si $n=n'$.

En appendice, on explicite la mesure δX et démontre un lemme qui nous sert à montrer l'irréductibilité d'une représentation.

Des résultats essentiels mais partiels de ce travail ont déjà été annoncés dans [4].

§ 1. Préliminaires.

1°. Soit $\boldsymbol{K}$ un corps commutatif localement compact dont le groupe additif est auto-dual au sens de Pontrjagin: $\boldsymbol{K}$ est donc le corps des nombres réels ou complexes, un corps fini ou un corps $\mathfrak{p}$-adique. Dans le cas d'un corps fini (resp. $\mathfrak{p}$-adique), la caractéristique p de $\boldsymbol{K}$ (resp. du corps des restes) sera toujours supposée impaire.

2°. On désigne par $|a|$ la valeur absolue d'un élément a de $\boldsymbol{K}$ définie par la formule $d(ax)=|a|dx$, où dx est une mesure de Haar du groupe additif $\boldsymbol{K}$.

3°. Choisissons une fois pour toutes un caractère unitaire non trivial e du groupe additif $\boldsymbol{K}$. Si l'on désigne e_a ($a \in \boldsymbol{K}$) le caractère $x \mapsto e(ax)$, la correspondance $a \leftrightarrow e_a$ donne une auto-dualité de $\boldsymbol{K}$.

Pour la simplicité, on fait les conventions ci-dessous. Pour $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$, dx est la mesure de Lebesgue et $e(x)=e^{iax}$ ($a>0$). Pour $\boldsymbol{K}$ $\mathfrak{p}$-adique, dx est la mesure de Haar normalisée de telle façon que la masse de l'anneau des entiers $\mathfrak{o}$ soit égale à 1, et e est un caractère unitaire dont la restriction à $\mathfrak{o}$ est triviale mais celle à $\mathfrak{p}^{-1}$ ($\mathfrak{p}$ étant l'idéal premier de $\mathfrak{o}$) ne l'est pas.

4°. Soient n et n' des entiers strictement positifs. Munissons l'espace vectoriel $\boldsymbol{K}^n$ de la forme quadratique ≪unité≫ et $\boldsymbol{K}^{n'}$ d'une forme quadratique non dégénérée Φ. Φ désignera aussi la matrice de Φ. L'espace $\mathcal{M}=\mathcal{M}(n, n')$ des matrices à n lignes et n' colonnes sur $\boldsymbol{K}$ sera alors muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée:

$$\langle Z, W\rangle=\langle Z, W\rangle_{\Phi}=\operatorname{Tr} ZW^*=\operatorname{Tr} Z^*W\,,$$

où $Z^*=\Phi^{-1}\,{}^tZ$ est la matrice adjointe de Z relative aux deux formes quadratiques ci-dessus. On conviendra d'écrire $e(Z, W)$ pour $e(\langle Z, W\rangle)$.

5°. Pour une fonction f de carré intégrable sur $\mathcal{M}$ par rapport à la mesure de Haar produit dZ, on définit la transformée de Fourier $\tilde{f}$ de f par la formule

$$\tilde{f}(W)=c(n, \Phi)\int_{\mathcal{M}} f(Z)e(Z, W)dZ\,,$$

où la constante positive $c(n, \Phi)$ est choisie de telle façon que l'on ait les formules

$$\int|f(Z)|^2dZ=\int|\tilde{f}(W)|^2dW\,, \qquad f(Z)=c(n, \Phi)\int\tilde{f}(W)e(-Z, W)dW\,.$$

§ 2. Les représentations projectives de Weil.

1°. Soit Γ l'espace produit $\mathcal{M}\times\mathcal{M}\times\boldsymbol{K}$ muni de la topologie produit et de la loi de multiplication suivante: pour deux éléments $\gamma_i=\gamma(X_i, Y_i, t_i)$ $(i=1, 2)$,

$$\gamma_1\gamma_2=\gamma(X_1+X_2, Y_1+Y_2, t_1+t_2+\langle X_1, Y_2\rangle)\,.$$

Γ est un groupe nilpotent localement compact qui est un produit semi-direct de $\boldsymbol{K}$ par $\mathcal{M}\times\mathcal{M}$. Appelons $\boldsymbol{K}^*$ le groupe multiplicatif des éléments non nuls de $\boldsymbol{K}$. Pour $\lambda\in\boldsymbol{K}^*$, une représentation ρ^λ de Γ est définit dans l'espace $L^2(\mathcal{M})$ par la formule

$$[\rho^\lambda(\gamma(X, Y, t))f](Z)=e_\lambda(t+\langle Z, Y\rangle)f(Z+X)\,.$$

La théorie de Mackey sur les représentations induites [1] dit que toutes les ρ^λ sont unitaires irréductibles, que ρ^λ et ρ^μ sont équivalentes si et seulement si $\lambda=\mu$ et que toute représentation unitaire irréductible de Γ de dimension supérieure à 1 est équivalente à une ρ^λ.

2°. Soit G le groupe symplectique à $2n$ variables sur $\boldsymbol{K}$:

$$\begin{aligned} G&=Sp(2n, \boldsymbol{K})\\ &=\left\{\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix};\ {}^tAD-{}^tCB=E,\ {}^tAC={}^tCA,\ {}^tBD={}^tDB\right\}, \end{aligned}$$

E étant la matrice unité.

G opère sur Γ comme un groupe d'automorphismes: pour $g=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\in G$ et $\gamma=\gamma(X, Y, t)\in\Gamma$, l'élément $g(\gamma)=\gamma(X', Y', t')$ dans Γ est défini par

$$X'=AX+BY\,,\qquad Y'=CX+DY\,,$$

$$t'=t+\frac{1}{2}(\langle AX, CX\rangle_\Phi+2\langle CX, BY\rangle_\Phi+\langle BY, DY\rangle_\Phi)\,.$$

Les éléments centraux $\gamma(0, 0, t)$ de Γ sont les invariants par G.

3°. L'application $\rho_g^\lambda: \gamma\mapsto\rho_g^\lambda(\gamma)=\rho^\lambda(g(\gamma))$ est une représentation unitaire de Γ équivalente à ρ^λ; car on a

$$\rho_g^\lambda(\gamma(0, 0, t))=\rho^\lambda(\gamma(0, 0, t))=e(\lambda t)$$

et cela caractérise la classe d'équivalence de représentations.

Il existe par le Lemme de Schur un opérateur unitaire $U(g)=U^{\Phi,\lambda}(g)$, unique à un facteur constant de module 1 près, tel qu'on ait

$$\rho_g^\lambda(\gamma)=U(g)\rho^\lambda(\gamma)U(g)^{-1}$$

pour tout $\gamma\in\Gamma$. Il est facile de voir que l'application $g\mapsto U(g)$ est une représentation projective unitaire continue de G (représentation projective de Weil). Si $\lambda\mu^{-1}$ est carré dans $\boldsymbol{K}^*$, $U^{\Phi,\lambda}$ et $U^{\Phi,\mu}$ sont équivalentes. On écrira désormais U pour $U^{\Phi,\lambda}$, sauf s'il y a de danger de confusion.

4°. On convient d'écrire certains éléments de G comme suit:

$$m(A, C)=\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & {}^tA^{-1} \end{pmatrix},\qquad A \text{ inversible},\quad {}^tAC \text{ symétrique};$$

$$n(C)=m(E, C)\,,\qquad h(A)=m(A, 0)\,;$$

$$s(B)=\begin{pmatrix} 0 & B \\ -{}^tB^{-1} & 0 \end{pmatrix},\qquad B \text{ inversible}\,.$$

Soient G_1 le sous-groupe fermé de G formé des éléments $m(A, C)$ et G_2 le sous-ensemble ouvert et dense dans G formé des éléments $g=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ où B est inversible.

On peut facilement trouver l'opérateur $U(g)$ pour g dans $G_1\cup G_2$ (à un facteur constant près):

$$[U(m(A, C))f](Z)=|\det A|^{-\frac{n'}{2}}e\Big(-\frac{\lambda}{2}CA^{-1}Z, Z\Big)f(A^{-1}Z)\,,$$

$$[U(s(B))f](Z)=|\det\lambda B^{-1}|^{\frac{n'}{2}}\tilde{f}(\lambda B^{-1}Z)\,.$$

Pour $g\in G_2$, on a

$$[U(g)f](Z)=|\det\lambda B^{-1}|^{\frac{n'}{2}}e\Big(-\frac{\lambda}{2}DB^{-1}Z, Z\Big)$$

$$\cdot c(n, \Phi)\int f(W)e\Big(-\frac{\lambda}{2}B^{-1}AW, W\Big)e(\lambda B^{-1}Z, W)dW\,.$$

Pour g dans $G_1 \cup G_2$, $U(g)$ s'entendra comme l'opérateur décrit ci-dessus, sans ambiguïté de facteur constant.

§ 3. Les formes quadratiques et le nombre $\Omega(\Phi, A)$.

On peut, sous une certaine condition, trouver un coefficient cohomologique de module 1 qui rend linéaire la représentation projective de Weil. Cette condition est vide pour le corps des nombres complexes et les corps finis (les groupes symplectiques étant d'ailleurs simplement connexes), et est la parité de n' pour le corps des nombres réels et les corps $\mathfrak{p}$-adiques. Dans ce paragraphe, on introduira, selon Weil, un nombre $\Omega(\Phi, A)$, A étant symétrique inversible, qui jouera le rôle essentiel dans la linéarisation de $U^{\Phi,\lambda}$.

1°. Pour B_1, B_2 inversible et C symétrique inversible d'ordre n, on a

$$s(B_1)n(C)s(B_2) = n(-{}^tB_1^{-1}C^{-1}B_1^{-1})s(B_1CB_2)n(-B_2^{-1}C^{-1}\,{}^tB_2^{-1}).$$

Par conséquent, $U(s(B_1))\,U(n(C))U(s(B_2))$ et $U(n(-{}^tB_1^{-1}C^{-1}B_1^{-1}))U(s(B_1CB_2))\cdot U(n(-B_2^{-1}C^{-1}\,{}^tB_2^{-1}))$ ne se diffèrent que par un facteur constant de module 1, lequel on va expliciter.

PROPOSITION 1 (Weil). *Pour une matrice symétrique inversible A d'ordre n, il existe un nombre $\Theta(\Phi, A)$ tel qu'on ait l'égalité*

$$(*) \cdots\cdots\cdots\cdots \int\Big[\int f(Z-W)e(AW, W)dW\Big]dZ = \Theta(\Phi, A)\int f(W)dW$$

*pour les fonctions f de Schwartz-Bruhat sur $\mathcal{M}(n, n')$.**)

PROPOSITION 2 (Weil). *Si l'on pose*

$$\Omega(\Phi, A) = c(n, \Phi)|2|^{\frac{nn'}{2}}|\det A|^{\frac{n'}{2}}\Theta(\Phi, A),$$

$\Omega(\Phi, A)$ est de module 1 et on a

$$U(s(B_1))U(n(C))U(s(B_2))$$
$$= \Omega\Big(\Phi, -\frac{\lambda}{2}C\Big)U(n(-{}^tB_1^{-1}C^{-1}B_1^{-1}))U(s(B_1CB_2))U(n(-B_2^{-1}C^{-1}\,{}^tB_2^{-1})).$$

La démonstration de ces deux propositions se trouvent dans n°14, p. 162 de Weil [8].

On écrira $\Theta(A)$, $\Omega(A)$ pour $\Theta(\Phi, A)$, $\Omega(\Phi, A)$ s'il n'y a pas de danger de confusion.

---

*) On pourrait heuristiquement écrire

$$\Theta(\Phi, A) = \int e(AZ, Z)dZ.$$

Pour un corps fini, cette intégrale a un sens. Pour un corps $\mathfrak{p}$-adique, on l'interprétera comme valeur principale et en déduira sa valeur.

2°. Les deux lemmes suivantes seront utiles dans le paragraphe prochain.

LEMME 1. *Si la forme quadratique Φ est de la forme*

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 & & & \\ & \Phi_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Phi_l \end{pmatrix}$$

et que $A=\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}$ *est diagonale inversible, on a les formules de réduction:*

$$\Theta(\Phi, A)=\prod_{k=1}^{n}\prod_{j=1}^{l}\Theta(\Phi_j, \alpha_k),$$

$$\Omega(\Phi, A)=\prod_{k=1}^{n}\prod_{j=1}^{l}\Omega(\Phi_j, \alpha_k).$$

DÉMONSTRATION. Si l'on décompose une matrice W dans $\mathcal{M}(n, n')$ en nl vecteurs en lignes suivant la décomposition de Φ, et si on écrit $W=(w_{kj})$ $(1\leqq k\leqq n,\ 1\leqq j\leqq l)$, on a

$$e(AW, W)_\Phi=\prod_{k=1}^{n}\prod_{j=1}^{l}e(\alpha_k w_{kj}, w_{kj})_{\Phi_j}.$$

Il suffit alors de prendre $f(W)=\prod_{k=1}^{n}\prod_{j=1}^{l}f_{kj}(w_{kj})$ dans (*).

LEMME 2. *Une matrice symétrique A d'ordre n sur $\boldsymbol{K}$ peut s'écrire sous la forme $A={}^tPDP$, où D est diagonale et $|\det P|=1$. On a en plus*

$$\Theta(\Phi, A)=\Theta(\Phi, D), \qquad \Omega(\Phi, A)=\Omega(\Phi, D).$$

DÉMONSTRATION. Une démonstration de la première assertion pour les corps $\mathfrak{p}$-adiques se trouve dans Shalika [5]. Les autres cas sont bien connus. Pour la dernière assertion, il suffit de rappeler que $d(PW)=dW$ si $|\det P|=1$.

3°. On reproduit ici le résultat bien connu sur la classification à l'équivalence près des forme quadratiques non dégénérées sur $\boldsymbol{K}$ (voir [2]). Pour le corps des nombres réels et les corps $\mathfrak{p}$-adiques, on se restreint aux formes quadratiques de dimension $n'=2m$ paire. On convient d'écrire $A\oplus B$ pour la somme directe de deux matrices A et B:

$$A\oplus B=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

a) $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$, $n'=2m$ $(m\in\boldsymbol{Z})$.

$$\Phi_{2m}^s=E_s\oplus -E_{n'-s} \qquad (0\leqq s\leqq 2m),$$

E_s étant la matrice unité d'ordre s.

b) $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{C}$. $\Phi_{n'}=E_{n'}$.

c) $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{F}_q$. Posons $F=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ et ε un élément non carré de $\boldsymbol{K}^*$.

$n'=2m+1$. $\quad \Phi_{2m+1}^{-}=F\oplus\cdots\oplus F\oplus 1,$

$$\Phi_{2m+1}^{+}=F\oplus\cdots\oplus F\oplus\varepsilon .$$

$n'=2m$. $\quad \Phi_{2m}^{-}=F\oplus\cdots\oplus F,$

$$\Phi_{2m}^{+}=F\oplus\cdots\oplus F\oplus\begin{pmatrix}1 & \\ & -\varepsilon\end{pmatrix}.$$

d) $\boldsymbol{K}$ $\mathfrak{p}$-adique, $n'=2m$ ($m\in\boldsymbol{Z}$). Soient ε une unité non carrée et π un générateur de $\mathfrak{p}$. Posons $F=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ et $E(\rho)=\begin{pmatrix}1 & \\ & -\rho\end{pmatrix}$ où $\rho=\varepsilon$, π ou $\varepsilon\pi$.

$$\Phi_{2m}^{-}=F\oplus\cdots\oplus F,$$

$$\Phi_{2m}^{\rho}=F\oplus\cdots\oplus F\oplus E(\rho),$$

$$\Phi_{2m}^{\prime\rho}=F\oplus\cdots\oplus F\oplus\kappa(\rho)E(\rho),$$

$$\Phi_{2m}^{+}=F\oplus\cdots\oplus F\oplus E(\varepsilon)\oplus-\pi E(\varepsilon),$$

où $\kappa(\varepsilon)=\pi$, $\kappa(\pi)=\varepsilon$ et $\kappa(\varepsilon\pi)=\varepsilon^{-1}$.

§ 4. Calcul de $\Omega(\Phi, A)$.

Soit $\alpha\in\boldsymbol{K}^*$. Ecrivons $\theta(\alpha)$, $\omega(\alpha)$ respectivement pour $\Theta(\Phi,\alpha)$, $\Omega(\Phi,\alpha)$ dans le cas où $n=n'=1$ et $\Phi(x)=x^2$ ($x\in\boldsymbol{K}$).

1°. $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$. a) En prenant $f(x)=e^{-ax^2}$ ($a>0$) dans (*), on obtient le résultat suivant par le calcul des intégrales curvilignes:

$$\omega(\alpha)=\exp\left(\frac{\pi}{4}i\operatorname{sgn}\alpha\right).$$

b) Soit A une matrice symétrique inversible d'ordre n. En écrivant $A={}^tPDP$ où $|\det P|=1$ et D est diagonale d'éléments $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, on a par les Lemmes 1 et 2,

$$\begin{aligned}\Omega(\Phi_{2m}^{s}, A)&=\Omega(\Phi_{2m}^{s}, D)\\ &=\prod_{k=1}^{n}[\omega(\alpha_k)^s\omega(-\alpha_k)^{2m-s}]\\ &=\prod_{k=1}^{n}(i\operatorname{sgn}\alpha_k)^{s-m}\\ &=i^{n(s-m)}(\operatorname{sgn}\det A)^{s-m}.\end{aligned}$$

2°. $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{C}$. On a facilement $\Omega(\Phi_{n'}, A)=1$ dans tous les cas.

3°. $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{F}_q$. a) Le calcul direct donne $\omega(\alpha)=\gamma\cdot\operatorname{sgn}\alpha$, où $\operatorname{sgn}\alpha=\pm 1$

suivant que α est carré ou non carré dans $\boldsymbol{K}^*$, et γ est une somme de Gauss divisée par son module:

$$\gamma=q^{-\frac{1}{2}}\sum_{x\in \boldsymbol{F}_q} e(x^2).$$

b) $n=1$, $n'=2$. Pour $\Phi_2^-=F=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, on a

$$\Theta(\Phi_2^-, \alpha)=\sum_{x,y\in \boldsymbol{F}_q} e(2\alpha xy)=q. \qquad \Omega(\Phi_2^-, \alpha)=1.$$

Pour $\Phi_2^+=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\varepsilon\end{pmatrix}$, on a

$$\Omega(\Phi_2^+, \alpha)=\omega(\alpha)\omega(-\varepsilon^{-1}\alpha)=-\gamma^2\cdot \operatorname{sgn}(-1)=-1,$$

par les Lemmes et la relation $\gamma^2=\operatorname{sgn}(-1)$.

c) Cas général. Soit A une matrice symétrique inversible d'ordre n et écrivons $A={}^tPDP$, où P est inversible et D est diagonale d'éléments $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$. Toujours par les lemmes,

$$\begin{aligned}\Omega(\Phi_{2m+1}^-, A)&=\prod_{k=1}^{n}[\Omega(\Phi_2^-, \alpha_k)^m\omega(\alpha_k)]\\ &=\gamma^n \operatorname{sgn}(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)\\ &=\gamma^n(\operatorname{sgn}\det A).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega(\Phi_{2m+1}^+, A)&=\prod_{k=1}^{n}[\Omega(\Phi_2^-, \alpha_k)^m\omega(\varepsilon^{-1}\alpha_k)]\\ &=(-\gamma)^n(\operatorname{sgn}\det A).\end{aligned}$$

$$\Omega(\Phi_{2m}^-, A)=\prod_{k=1}^{n}[\Omega(\Phi_2^-, \alpha_k)^m]=1.$$

$$\Omega(\Phi_{2m}^+, A)=\prod_{k=1}^{n}[\Omega(\Phi_2^-, \alpha_k)^{m-1}\Omega(\Phi_2^+, \alpha_k)]=(-1)^n.$$

4°. $\boldsymbol{K}$ $\mathfrak{p}$-adique. Supposons que le corps des restes $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ contient q éléments, et soit $\gamma'=q^{-\frac{1}{2}}\sum_{x\in\mathfrak{o} \bmod \mathfrak{p}} e(\pi^{-1}x^2)$. Alors $\gamma'=\pm\gamma$ (la signature dépend du choix du charactère e).

Mettons d'abord un lemme.

LEMME. *Soit A une matrice symétrique inversible d'ordre n sur $\boldsymbol{K}$. Désignons par $\mathfrak{O}$ et $\mathfrak{P}^k$ ($k\in \boldsymbol{N}$) l'ensemble des matrices à n lignes et n' colonnes sur $\mathfrak{o}$ et $\mathfrak{p}^k$ respectivement. On a la formule*

$$\Theta(\Phi, A)=\lim_{N\to+\infty}\int_{\mathfrak{P}^{-N}} e(AZ, Z)_{\Phi} dZ.$$

DÉMONSTRATION. Prenons la fonction caractéristique de $\mathfrak{O}$ comme f dans (*). On a alors

$$\int_{\mathfrak{M}}\Big[\int_{\mathfrak{M}} f(Z-W)e(AW, W)dW\Big]dZ$$
$$=\int_{\mathfrak{M}}\Big[\int_{\mathfrak{O}} e(A(Z+X), Z+X)dX\Big]dZ$$
$$=\lim_{N\to+\infty}\int_{\mathfrak{P}^{-N}}\Big[\int_{\mathfrak{O}} e(A(Z+X), Z+X)dX\Big]dZ$$
$$=\lim_{N\to+\infty}\int_{\mathfrak{O}}\Big[\int_{\mathfrak{P}^{-N}} e(A(Z+X), Z+X)dZ\Big]dX$$
$$=\lim_{N\to+\infty}\int_{\mathfrak{P}^{-N}} e(AZ, Z)dZ\,,$$

ce qu'il fallait démontrer.

a) $n=n'=1$. Ecrivons $\alpha=\alpha_0\pi^l$, α_0 étant unité. Nous allons montrer

$$w(\alpha)=\begin{cases} 1 \text{ si } l \text{ est pair}\,, \\ \gamma'\cdot\operatorname{sgn}\bar{\alpha}_0 \text{ sinon}\,. \end{cases}$$

Ici, $\bar{\alpha}_0$ désigne l'image de α_0 dans $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$.

DÉMONSTRATION. i) Soit $\alpha=\alpha_0\pi^{2k}$ ($k\in \boldsymbol{Z}$). Pour N assez grand, on a

$$\int_{\mathfrak{p}^{-N}} e(\alpha x^2)dx=\int_{\mathfrak{p}^{-N}} e(\alpha_0\pi^{2k}x^2)\,dx=q^k\int_{\mathfrak{p}^{k-N}} e(\alpha_0 y^2)dy$$
$$=q^k\sum_{y\in\mathfrak{p}^{k-N}\bmod \mathfrak{o}}\int_{\mathfrak{o}} e[\alpha_0(y+z)^2]dz$$
$$=q^k\sum_{y\in\mathfrak{p}^{k-N}\bmod \mathfrak{o}} e(\alpha_0 y^2)\int_{\mathfrak{o}} e(2\alpha_0 yz)dz=q^k\,,$$

d'où résulte que $\theta(\alpha)=q^k$, $\omega(\alpha)=1$.

ii) Soit $\alpha=\alpha_0\pi^{2k-1}$ ($k\in\boldsymbol{Z}$). Pour N assez grand, on a

$$\int_{\mathfrak{p}^{-N}} e(\alpha x^2)dx=\int_{\mathfrak{p}^{-N}} e(\alpha_0\pi^{-1}\pi^{2k}x^2)dx=q^k\int_{\mathfrak{p}^{k-N}} e(\alpha_0\pi^{-1}y^2)dy$$
$$=q^k\sum_{y\in\mathfrak{p}^{k-N}\bmod \mathfrak{p}}\int_{\mathfrak{p}} e[\alpha_0\pi^{-1}(y+z)^2]dz$$
$$=q^k\sum_{y\in\mathfrak{p}^{k-N}\bmod \mathfrak{p}} e(\alpha_0\pi^{-1}y^2)\int_{\mathfrak{p}} e(2\alpha_0\pi^{-1}yz)dz$$
$$=q^{k-1}\sum_{y\in\mathfrak{p}^{k-N}\bmod \mathfrak{p}} e(\alpha_0\pi^{-1}y^2)\,q^{k-\frac{1}{2}}\gamma'\cdot\operatorname{sgn}\bar{\alpha}_0\,,$$

d'où resulte $\theta(\alpha)=|\alpha|^{-\frac{1}{2}}\gamma'\cdot\operatorname{sgn}\bar{\alpha}_0$, $\omega(\alpha)=\gamma'\cdot\operatorname{sgn}\bar{\alpha}_0$.

b) $n=1$, $n'=2$. Pour $\alpha\in \boldsymbol{K}^*$, $\operatorname{sgn}_\rho(\alpha)$ ($\rho=\varepsilon, \pi, \varepsilon\pi$) sera, par définition, égal à 1 s'il existe un élément z dans $\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{K}$ tel que $\alpha=\Phi_2^\rho(z)$, et à -1 sinon. Si $v(\alpha)$ désigne l'ordre de α dans $\boldsymbol{K}$, on a

$$\mathrm{sgn}_\varepsilon(\alpha)=(-1)^{v(\alpha)},$$
$$\mathrm{sgn}_\pi(\alpha)=\mathrm{sgn}\,(-1)^{v(\alpha)}\,\mathrm{sgn}\,\bar{\alpha}_0\,,$$
$$\mathrm{sgn}_{\varepsilon\pi}(\alpha)=[-\mathrm{sgn}\,(-1)]^{v(\alpha)}\,\mathrm{sgn}\,\bar{\alpha}_0\,.$$

(b1) $\Phi_2^-=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

$$\Theta(\Phi_2^-,\alpha)=\lim_{N\to+\infty}\iint_{\mathfrak{p}^{-N}\times\mathfrak{p}^{-N}}e(2\alpha xy)\,dx\,dy=q^k\,.$$

$$\Omega(\Phi_2^-,\alpha)=1\,.$$

(b2) $\Phi_2^\rho=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\rho\end{pmatrix}$ $\quad(\rho=\varepsilon,\ \pi,\ \varepsilon\pi)$.

$$\Omega(\Phi_2^\varepsilon,\alpha)=\omega(\alpha)\omega(-\varepsilon^{-1}\alpha)=\left\{\begin{matrix}1 \text{ si } v(\alpha) \text{ est pair}\\ -\gamma'^2\,\mathrm{sgn}\,(-1)=-1 \text{ sinon}\end{matrix}\right\}$$
$$=\mathrm{sgn}_\varepsilon(\alpha)\,.$$

$$\Omega(\Phi_2^\pi,\alpha)=\omega(\alpha)\omega(-\pi^{-1}\alpha)$$
$$=\left\{\begin{matrix}\gamma'\cdot\mathrm{sgn}\,(-\bar{\alpha}_0)=\gamma'^{-1}\cdot\mathrm{sgn}\,\bar{\alpha}_0 \text{ si } v(\alpha) \text{ est pair}\\ \gamma'\cdot\mathrm{sgn}\,\bar{\alpha}_0=\gamma'^{-1}\cdot\mathrm{sgn}\,(-1)\,\mathrm{sgn}\,\bar{\alpha}_0 \text{ sinon}\end{matrix}\right\}$$
$$=\gamma'^{-1}\,\mathrm{sgn}\,(-1)^{v(\alpha)}\,\mathrm{sgn}\,\bar{\alpha}_0=\gamma'^{-1}\,\mathrm{sgn}_\pi(\alpha)\,.$$

$$\Omega(\Phi_2^{\varepsilon\pi},\alpha)=\omega(\alpha)\omega(-\varepsilon^{-1}\pi^{-1}\alpha)$$
$$=\left\{\begin{matrix}\gamma'\cdot\mathrm{sgn}\,(-\overline{\varepsilon\alpha_0})=-\gamma'^{-1}\,\mathrm{sgn}\,\bar{\alpha}_0 \text{ si } v(\alpha) \text{ est pair}\\ \gamma'\cdot\mathrm{sgn}\,\bar{\alpha}_0=-\gamma'^{-1}\cdot-\mathrm{sgn}\,(-1)\cdot\mathrm{sgn}\,\bar{\alpha}_0 \text{ sinon}\end{matrix}\right\}$$
$$=-\gamma'^{-1}[-\mathrm{sgn}\,(-1)]^{v(\alpha)}\,\mathrm{sgn}\,\bar{\alpha}_0=-\gamma'^{-1}\cdot\mathrm{sgn}_{\varepsilon\pi}(\alpha)\,.$$

Si l'on pose $p(\rho)=1,\ \gamma'^{-1},\ -\gamma'^{-1}$ pour $\rho=\varepsilon,\pi,\varepsilon\pi$ respectivement, on peut écrire ces trois résultats dans une formule:

$$\Omega(\Phi_2^\rho,\alpha)=p(\rho)\,\mathrm{sgn}_\rho(\alpha)\,.$$

(b3) $\Phi_2'^\rho=\begin{pmatrix}\kappa(\rho) & 0\\ 0 & -\kappa(\rho)\rho\end{pmatrix}$ $\qquad \rho=\varepsilon,\pi,\varepsilon\pi\,.\quad \kappa(\rho)=\pi,\varepsilon,\varepsilon^{-1}\,.$

On obtient le résultat suivant par la même manière que dans (b2):

$$\Omega(\Phi_2'^\rho,\alpha)=-p(\rho)\,\mathrm{sgn}_\rho(\alpha)\,.$$

c) Cas général. Soit A une matrice symétrique inversible d'ordre n et écrivons $A={}^tPDP$, où $|\det P|=1$ et D est diagonale d'éléments $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$.

$$\Omega(\Phi_{2m}^-,A)=\prod_{k=1}^n\Omega(\Phi_2^-,\alpha_k)^m=1\,.$$

$$\Omega(\Phi_{2m}^{\rho}, A)=\prod_{k=1}^{n}[\Omega(\Phi_2^-, \alpha_k)^{m-1}\Omega(\Phi_2^{\rho}, \alpha_k)]$$
$$=p(\rho)^n \prod_{k=1}^{n} \mathrm{sgn}_\rho(\alpha_k)=p(\rho)^n\, \mathrm{sgn}_\rho(\det A).$$
$$\Omega(\Phi_{2m}^{\prime\rho}, A)=\prod_{k=1}^{n}[\Omega(\Phi_2^-, \alpha_k)^{m-1}\Omega(\Phi_2^{\prime\rho}, \alpha_k)]$$
$$=(-p(\rho))^n \prod_{k=1}^{n} \mathrm{sgn}_\rho(\alpha_k)=(-p(\rho))^n\, \mathrm{sgn}_\rho(\det A).$$
$$\Omega(\Phi_{2m}^{+}, A)=\prod_{k=1}^{n}[\Omega(\Phi_2^-, \alpha_k)^{m-2}\Omega(\Phi_2^{\varepsilon}, \alpha)\Omega(\Phi_2^{\prime\varepsilon}, -\alpha)]$$
$$=(-\mathrm{sgn}_\varepsilon(-1))^n=(-1)^n.$$

5°. Résumé. Vu les résultats précédent, on peut écrire $\Omega(\Phi, A)$ sous la forme

$$\Omega(\Phi, A)=p(\Phi)\tilde{\Omega}(\Phi, A)$$

où $p(\Phi)$ ne dépend pas de A, et $\tilde{\Omega}(\Phi, A)$ qui est originairement défini pour les matrices symétriques inversibles peut se prolonger en un homomorphisme continu de $GL(n, \boldsymbol{K})$ dans $\{\pm 1\}$.

On présente le résultat dans la table suivante.

$\boldsymbol{K}$	forme quadratique	$p(\Phi)$	$\tilde{\Omega}(\Phi, A)$
$\boldsymbol{R}$	Φ_{2m}^{s}	$i^{n(s-m)}$	$(\mathrm{sgn}\det A)^{s-m}$
$\boldsymbol{C}$	$\Phi_{n'}$	1	1
$\boldsymbol{F}_q$	Φ_{2m+1}^{-}	γ^n	$\mathrm{sgn}\det A$
	Φ_{2m+1}^{+}	$(-\gamma)^n$	$\mathrm{sgn}\det A$
	Φ_{2m}^{-}	1	1
	Φ_{2m}^{+}	$(-1)^n$	1
$\mathfrak{p}$-adique	Φ_{2m}^{-}	1	1
	Φ_{2m}^{ρ}	$p(\rho)^n$	$\mathrm{sgn}_\rho(\det A)$
	$\Phi_{2m}^{\prime\rho}$	$(-p(\rho))^n$	$\mathrm{sgn}_\rho(\det A)$
	Φ_{2m}^{+}	$(-1)^n$	1

Rappelons les notations:

1. $\begin{cases} \rho=\varepsilon, \pi, \varepsilon\pi \\ p(\rho)=1, \gamma'^{-1}, -\gamma'^{-1} \end{cases}$ (respectivement).

2. $\gamma=q^{-\frac{1}{2}}\sum_{x\in \boldsymbol{F}_q} e(x^2)$, $\gamma'=q^{-\frac{1}{2}}\sum_{x\in\mathfrak{o} \bmod \mathfrak{p}} e(\pi^{-1}x^2)$.

3. Pour α dans $\boldsymbol{R}^*$ ou $\boldsymbol{F}_q^*$, $\mathrm{sgn}\,\alpha=\pm 1$ suivant que α est carré ou non carré dans $\boldsymbol{K}^*$. Pour α dans $\boldsymbol{K}^*$ $\mathfrak{p}$-adique, $\mathrm{sgn}_\rho(\alpha)$ est égal à 1 si α est la norme d'un élément de l'extension quadratique $\boldsymbol{K}(\rho^{\frac{1}{2}})$, et à -1 sinon.

DÉFINITION. Pour chaque Φ, on définit l'homomorphisme $A\mapsto\tilde{\Omega}(\Phi, A)$ de $GL(n, \boldsymbol{K})$ dans $\{\pm 1\}$ par la table ci-dessus.

§ 5. Linéarisation des représentations projectives $U^{\Phi,\lambda}$.

Supposons désormais que $n'=2m$ est pair pour le corps des nombres réels et les corps $\mathfrak{p}$-adiques.

DÉFINITION. Pour un élément $m(A, C)$ dans G_1, on pose

$$\tilde{U}^{\Phi,\lambda}(m(A, C))=\tilde{\Omega}(\Phi, A)U^{\Phi,\lambda}(m(A, C)).$$

Pour un élément $g=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ dans G_2 (B inversible), on pose

$$\tilde{U}^{\Phi,\lambda}(g)=p(\Phi)^{-1}\tilde{\Omega}\Big(\Phi, -\frac{\lambda}{2}B\Big)U^{\Phi,\lambda}(g).$$

PROPOSITION. a) *Pour m_1 et m_2 dans G_1, on a*

$$\tilde{U}(m_1)\tilde{U}(m_2)=\tilde{U}(m_1m_2).$$

b) *Pour g_1, g_2 et g_1g_2 dans G_2, on a*

$$\tilde{U}(g_1)\tilde{U}(g_2)=\tilde{U}(g_1g_2).$$

DÉMONSTRATION. L'énoncé a) est trivial. Pour b), comme

$$g=n(DB^{-1})s(B)n(B^{-1}A),$$

on a

$$U(g_1)U(g_2)=\Omega\Big(\Phi, -\frac{\lambda}{2}B_1^{-1}B_3B_2^{-1}\Big)U(g_1g_2), \qquad g_1g_2=\begin{pmatrix} A_3 & B_3 \\ C_3 & D_3 \end{pmatrix},$$

d'où vient le résultat par un calcul facile.

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME. *L'application $\tilde{U}$ de $G_1\cup G_2$ dans le groupe unitaire de $L^2(\mathcal{M})$ se prolonge en une représentation* linéaire *unitaire continue de G_n dans $L^2(\mathcal{M})$.*

Pour le démontrer, on se servira de la connaissance des générateurs et des relations pour G due à Steinberg [**6**]. Si $n=1$, le théorème a déjà été démontré par plusieurs auteurs (e.g. Shalika [**5**]). On suppose donc $n>1$.

1°. Soit Σ le système des racines du type C_n (dans la notations d'E. Cartan). Les générateurs de G sont les éléments radiciels $x_\alpha(t)$ ($\alpha\in\Sigma$, $t\in\boldsymbol{K}$). Les relations fondamentales de Steinberg sont (A), (B) et (C), que nous allons expliciter.

(A) $x_\alpha(t)x_\alpha(s)=x_\alpha(t+s)$ ($\alpha\in\Sigma$, $t, s\in\boldsymbol{K}$).

(B) $[x_\alpha(t), x_\beta(s)]=\prod x_{i\alpha+j\beta}(c_{ij\alpha\beta}t^is^j)$.

Ici, $[x, y]=xyx^{-1}y^{-1}$, le produit s'étend à tous les entiers positifs i, j pour lesquels $i\alpha+j\beta\in\Sigma$, les termes étant arrangés dans un ordre lexicographique, et les $c_{ij\alpha\beta}$ sont certains entiers qui ne dépendent pas de t, s.

Posons

$$w_\alpha(t)=x_\alpha(t)x_{-\alpha}(-t^{-1})x_\alpha(t) \qquad (t\in \boldsymbol{K}^*),$$

$$h_\alpha(t)=w_\alpha(t)w_\alpha(1)^{-1}=w_\alpha(t)w_\alpha(-1) \qquad (t\in \boldsymbol{K}^*).$$

(C) $h_\alpha(t)h_\alpha(s)=h_\alpha(ts)$ $(\alpha\in\Sigma,\ t,\ s\in \boldsymbol{K}^*)$.

2°. Nous allons écrire les générateurs dans la forme matricielle. Désignons par E la matrice unité et par E_{ik} les unités matricielles d'ordre n.

$$a_{ik}(t)=\begin{pmatrix} E+tE_{ik} & 0 \\ 0 & E-tE_{ki}\end{pmatrix} \qquad (i\neq k),$$

$$b_{ik}(t)=\begin{pmatrix} E & t(E_{ik}+E_{ki}) \\ 0 & E\end{pmatrix} \qquad (i\neq k),$$

$$b_i(t)=b_{ii}(t)=\begin{pmatrix} E & tE_{ii} \\ 0 & E\end{pmatrix},$$

$$c_{ik}(t)=\begin{pmatrix} E & 0 \\ t(E_{ik}+E_{ki}) & E\end{pmatrix} \qquad (i\neq k),$$

$$c_i(t)=c_{ii}(t)=\begin{pmatrix} E & 0 \\ tE_{ii} & E\end{pmatrix}.$$

On va définir l'opérateur unitaire $\hat{U}(g)$ dans $L^2(\mathcal{M})$ pour chaque générateur g, et montrer que ces opérateurs satisfont aux conditions correspondant à A), B) et C). On aura alors une représentation *linéaire* unitaire $\hat{U}$ de G dans $L^2(\mathcal{M})$. Ensuite on montrera que $\hat{U}(g)=\tilde{U}(g)$ pour g dans $G_1\cup G_2$. Comme G_2 est ouvert et dense dans G et que $\tilde{U}$ est continue dans G_2, on aura démontré le théorème.

Les éléments $a_{ik}(t)$ et $c_{ik}(t)$ étant dans G_1, on convient de poser $\hat{U}(g)=\tilde{U}(g)$ pour ces éléments. Les élément $b_{ik}(t)$ sont de la forme $s(E)n(C)s(-E)$, C étant symétrique, on pose donc

$$\hat{U}(b_{ik}(t))=\tilde{U}(s(E))\tilde{U}(n(C))\tilde{U}(s(-E)).$$

Plus précisément, on écrit une matrice Z dans $\mathcal{M}(n, n')$ sous la forme $Z=\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n\end{bmatrix}$, les z_i étant dans $\boldsymbol{K}^{n'}$. Pour une fonction $f(Z)$, on convient d'écrire

$$f_i(u_i)=f\left(\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ z_n\end{bmatrix}\right), \qquad f_{ik}(u_i, u_k)=f\left(\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_k \\ \vdots \\ z_n\end{bmatrix}\right).$$

Les opérateurs $\hat{U}(b_{ik}(t))$ sont alors donnés par les formules suivantes:

$$[\hat{U}(b_i(t))f](Z)$$
$$=|\lambda t^{-1}|^m \Omega\Big(\Phi, \frac{1}{2}\lambda t\Big)c(1, \Phi)\int_{K^{n'}} e\Big(-\frac{1}{2}\lambda t^{-1}(z_i-u_i), z_i-u_i\Big)f_i(u_i)du_i\,,$$

$$[\hat{U}(b_{ik}(t))f](Z)$$
$$=|\lambda t^{-1}|^{2m}c(1, \Phi)^2 \iint_{K^{n'}\times K^{n'}} e(-\lambda t^{-1}(z_i-u_i), z_k-u_k)f_{ik}(u_i, u_k)du_i du_k \qquad (i\neq k)\,.$$

3°. Les relations (B) sont les suivantes.

1) $\quad [c_{ik}(t), c_{lm}(s)]=E, \qquad [b_{ik}(t), b_{lm}(s)]=E.$

2) $\quad [a_{ik}(t), a_{ml}(s)]=\begin{cases} E & (k\neq m) \\ a_{il}(ts) & \end{cases}$

3) $\quad \begin{cases} [c_{ik}(t), a_{ml}(s)]=E \qquad (k, i\neq m) \\ [c_{ik}(t), a_{kl}(s)]=\begin{cases} c_{il}(ts) & (k\neq i,\ i\neq l) \\ c_{il}(ts)c_l(-ts^2) & (k=i) \end{cases} \\ [c_{ik}(t), a_{ki}(s)]=c_i(2ts) \end{cases}$

4) $\quad \begin{cases} [b_{ik}(t), a_{lm}(s)]=E \qquad (k, i\neq m) \\ [b_{ik}(t), a_{lk}(s)]=b_{il}(-ts) \qquad (i\neq l) \\ [b_i(t), a_{li}(s)]=b_{il}(-ts)b_l(-ts^2) \\ [b_{ik}(t), a_{ik}(s)]=b_i(-2ts) \end{cases}$

5) $\quad \begin{cases} [b_{ik}(t), c_{ml}(s)]=E \qquad (k\neq m,\ i\neq l,\ k\neq l,\ i\neq m) \\ [b_{ik}(t), c_{kl}(s)]=a_{il}(ts) \\ [b_i(t), c_{il}(s)]=a_{il}(ts)c_l(ts^2)=c_l(ts^2)a_{il}(ts) \\ [b_{ik}(t), c_k(s)]=a_{ik}(ts)b_i(-t^2s)=b_i(-t^2s)a_{ik}(ts)\,. \end{cases}$

La constatation de la compatibilité des opérateurs avec ces relations est élémentaire mais très compliquée, qu'on ne reproduit pas ici.

Il est facile de voir que $\hat{U}(g)=\tilde{U}(g)$ pour g dans $G_1\cup G_2$, ce qui achève la démonstration.

§ 6. Décomposition de la représentation.

Soit $O(\Phi)$ le groupe orthogonal associé à Φ. Pour un élément P dans $O(\Phi)$, R_P désigne la translation à droite dans $L^2(\mathcal{M})$: $R_Pf(Z)=f(ZP)$. Il est alors facile de voir que R_P commute avec tous les opérateurs $\tilde{U}(g)$ $(g\in G)$, et par conséquent la représentation $\tilde{U}$, eventuellement augmentée, se décompose en une somme hilbertienne suivant les représentations de $O(\Phi)$. Cependant, comme on n'a pas de résultat général assez précis et satisfaisant, on se contente de présenter dans ce qui suit un résultat pour certains cas spéciaux.

Supposons désormais que $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$, $\Phi=\Phi_{2m}^{2m}=E$ et $n\leqq n'=2m$.

1°. Appelons Γ le sous-groupe de $O(n')$ formé des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Soit ζ une représentation matricielle unitaire irréductible de dimension N du groupe $O(n')$. On suppose sans rien restreindre que les $\zeta(P)$ pour $P\in\Gamma$ sont de la forme

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

où r est la dimension de l'espace des invariants par $\zeta(\Gamma)$. Alors, $r>0$ si et seulement si ζ est de classe 1 par rapport à Γ.

2°. Soit $\boldsymbol{H}^N$ l'espace hilbertien des N-tuples $\boldsymbol{f}=(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ des fonctions f_i dans $L^2(\mathcal{M})$ avec la norme

$$\|\boldsymbol{f}\|^2=\sum_{i=1}^{N}\|f_i\|^2.$$

Soit $\boldsymbol{H}^\zeta$ l'ensemble des fonctions $\boldsymbol{f}$ dans $\boldsymbol{H}^N$ telles qu'on ait

$$\boldsymbol{f}(ZP)=\boldsymbol{f}(Z)\zeta(P)$$

pour tout $P\in O(n')$. Nous verrons plus tard que $\boldsymbol{H}^\zeta$ n'est pas $\{0\}$ si et seulement si ζ est classe 1 par rapport à Γ.

Si $\tilde{U}^N$ désigne la représentation de G dans $\boldsymbol{H}^N$, prolongée de $\tilde{U}$ dans la manière naturelle, $\boldsymbol{H}^\zeta$ est un sous-espace fermé et invariant par $\tilde{U}^N(G)$.

3°. Soit $\mathfrak{S}_+$ l'espace des matrices symétriques positives d'ordre n. Comme l'application $Z\mapsto Z^tZ$ de $\mathcal{M}(n, n')$ sur $\mathfrak{S}_+$ est propre, il existe une mesure de Radon δX sur $\mathfrak{S}_+$ telle qu'on ait

$$\int_{\mathfrak{S}_+}\boldsymbol{h}(X)\delta X=\int_{\mathcal{M}}\boldsymbol{h}(Z^tZ)dZ$$

pour toute fonction $\boldsymbol{h}$ sur $\mathfrak{S}_+$.

PROPOSITION. $\delta X=c|\det X|^{\frac{n'-n-1}{2}}dX$,

$$c=2^{-n}V(n')^n\prod_{i=1}^{n}[V(i-1)B(i, n'-i)]^{-1},$$

où dX est la restriction à $\mathfrak{S}_+$ de la mesure de Lebesgue sur l'espace vectoriel des matrices symétriques, $V(k)$ est la masse de la boule unité à k dimensions et $B(i, n'-i)$ est défini par la formule

$$B(i,\ n'-i)=\int_0^1 x^{n'-i}(1-x^2)^{\frac{i-1}{2}}dx\,.$$

On en donnera une démonstration en appendice.

4°. Soit $\mathcal{H}^\zeta$ l'espace hilbertien des fonctions δX-mesurables $\boldsymbol{h}$ sur $\mathfrak{S}_+$ à valeurs dans $\boldsymbol{C}^r$ telles que

$$\|\boldsymbol{h}\|^2=\int_{\mathfrak{S}_+}\|\boldsymbol{h}(X)\|^2\delta X<+\infty\,.$$

On va construire un isomorphisme hilbertien de $\boldsymbol{H}^\zeta$ sur $\mathcal{H}^\zeta$. Pour $X\in\mathfrak{S}_+$, $X^{\frac{1}{2}}$ signifiera la racine carrée de X dans $\mathfrak{S}_+$. Toute matrice Z dans $\mathcal{M}$ peut s'écrire sous la forme

$$Z=((Z^tZ)^{\frac{1}{2}},\ 0)P(Z)\qquad\text{(décomposition polaire)}\,,$$

où 0 est la $(n,\ n'-n)$-matrice zéro et $P(Z)\in O(n')$. Si Z^tZ est inversible, $P(Z)$ est uniquement déterminé modulo Γ à gauche.

Pour $\boldsymbol{f}=(f_i)$ dans $\boldsymbol{H}^\zeta$, on a

$$\boldsymbol{f}(Z)=\boldsymbol{f}((Z^tZ)^{\frac{1}{2}},\ 0)\zeta(P(Z))\,.$$

En prenant P dans Γ, on voit que $f_i((Z^tZ)^{\frac{1}{2}},\ 0)=0$ pour $i>r$. Par conséquent, pour $X\in\mathfrak{S}_+$, $\boldsymbol{f}(X^{\frac{1}{2}},\ 0)$ est de la forme $(\boldsymbol{h}(X),\ 0_{N-r})$, où $\boldsymbol{h}$ est une fonction sur $\mathfrak{S}_+$ à valeur dans $\boldsymbol{C}^r$. Il n'est pas difficile de voir que l'application $\boldsymbol{f}\mapsto\boldsymbol{h}$ est un isomorphisme hilbertien de $\boldsymbol{H}^\zeta$ sur $\mathcal{H}^\zeta$. L'isomorphisme réciproque $\boldsymbol{h}\mapsto\boldsymbol{f}$ est donné par la formule

$$\boldsymbol{f}(Z)=(\boldsymbol{h}(Z^tZ),\ 0_{N-r})\zeta(P(Z))\,.$$

5°. La restriction de $\tilde{U}^N$ à $\boldsymbol{H}^\zeta$ peut se transférer par l'isomorphisme $\boldsymbol{f}\mapsto\boldsymbol{h}$ en une représentation dans $\mathcal{H}^\zeta$, que l'on désigne par $V^\zeta=V^{\Phi,\lambda,\zeta}$.

On va donner la forme explicite des opérateurs $V^\zeta(g)$ pour g dans $G_1\cup G_2$.

Soient $e(x)=e^{2\pi ix}$ et $\lambda=\pm1$. Alors $c(n,\ \Phi)=1$, $p(\Phi)=i^{nm}$ et $\tilde{\Omega}(\Phi,\ A)=(\operatorname{sgn}\det A)^m$. Pour $P\in O(n')$, on écrit

$$\zeta(P)=\begin{pmatrix}\zeta_1(P) & * \\ * & *\end{pmatrix},$$

où $\zeta_1(P)$ est d'ordre r.

THÉORÈME. *Pour $\boldsymbol{h}\in\mathcal{H}^\zeta$ et $X\in\mathfrak{S}_+$, on a*

$$[V^\zeta(n(C))\boldsymbol{h}](X)=e\Big(-\frac{\lambda}{2}C,\ X\Big)\boldsymbol{h}(X)\,,$$

$$[V^\zeta(h(A))\boldsymbol{h}](X)=(\det A)^{-m}\boldsymbol{h}(A^{-1}X^tA^{-1})\zeta_1(P(A^{-1}X^{\frac{1}{2}},\ 0))\,.$$

Pour $g=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ dans G_2, on a

$$[V^{\zeta}(g)\boldsymbol{h}](X)=(i\lambda)^{nm}(\det B)^{-m}e\Big(-\frac{\lambda}{2}DB^{-1},\ X\Big)$$

$$\cdot\int_{Y\in\mathfrak{S}_+}\int_{Q\in O(n')}\boldsymbol{h}(Y)e\Big(-\frac{\lambda}{2}B^{-1}A,\ Y\Big)\zeta_1(Q)e(\lambda B^{-1}X^{\frac{1}{2}},\ Y^{\frac{1}{2}}Q_1)dQ\,\delta Y\,.$$

Ici, $Q=\begin{pmatrix}Q_1 & * \\ * & *\end{pmatrix}$, Q_1 *étant d'ordre n, et dQ est la mesure de Haar normalisée de* $O(n')$.

DÉMONSTRATION. La première partie est facile. Soit $g=\begin{pmatrix}A & B \\ C & D\end{pmatrix}$ dans G_2. Par la définition de V^{ζ}, on a

$$([V^{\zeta}(g)\boldsymbol{h}](X),\ 0)$$
$$=(i\lambda)^{nm}(\det B)^{-m}e\Big(-\frac{\lambda}{2}DB^{-1}Z,\ Z\Big)\int_{\mathcal{M}}\boldsymbol{f}(W)K(g,\ Z,\ W)dW\cdot\zeta(P(Z))^{-1}\,,$$

où $\boldsymbol{h}\leftrightarrow\boldsymbol{f}$, $Z^tZ=X$ ($Z\in\mathcal{M}$) et

$$K(g,\ Z,\ W)=e\Big(-\frac{\lambda}{2}B^{-1}AW,\ W\Big)e(\lambda B^{-1}Z,\ W)\,.$$

On a ensuite

$$\int_{\mathcal{M}}\boldsymbol{f}(W)K(g,\ Z,\ W)dW=\int_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{h}(Y),\ 0)\zeta(P(W))K(g,\ Z,\ W)dW \qquad (Y=W^tW)$$
$$=\int_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{h}(Y),\ 0)\zeta(P(WP))K(g,\ Z,\ WP)dW \qquad (P\in O(n'))$$
$$=\int_{\mathcal{M}}\int_{O(n')}(\boldsymbol{h}(Y),\ 0)\zeta(P(W)P)K(g,\ Z,\ WP)dP\,dW\,.$$

Posons $Q=P(W)\cdot P\cdot P(Z)^{-1}$. Comme

$$\langle B^{-1}Z,\ WP\rangle=\langle B^{-1}X^{\frac{1}{2}},\ Y^{\frac{1}{2}}Q_1\rangle\,,$$

on a

$$\int_{O(n')}\zeta(P(W)P)K(g,\ Z,\ WP)dP$$
$$=\int_{O(n')}\zeta(QP(Z))e\Big(-\frac{\lambda}{2}B^{-1}A,\ Y\Big)e(\lambda B^{-1}X^{\frac{1}{2}},\ Y^{\frac{1}{2}}Q_1)dQ$$
$$=e\Big(-\frac{\lambda}{2}B^{-1}A,\ Y\Big)\int_{O(n')}\zeta(Q)e(\lambda B^{-1}X^{\frac{1}{2}},\ Y^{\frac{1}{2}}Q_1)dQ\cdot\zeta(P(Z))\,.$$

De plus, on a

$$\int_{O(n')}\zeta(Q)e(\lambda B^{-1}X^{\frac{1}{2}},\ Y^{\frac{1}{2}}Q_1)dQ$$
$$=\int_{Q\in O(n')}\int_{R\in\Gamma}\zeta(QR)e(\lambda B^{-1}X^{\frac{1}{2}},\ Y^{\frac{1}{2}}Q_1)dR\,dQ$$
$$=\int_{O(n')}\begin{pmatrix}\zeta_1(Q) & 0 \\ 0 & E\end{pmatrix}e(\lambda B^{-1}X^{\frac{1}{2}},\ Y^{\frac{1}{2}}Q_1)dQ\,,$$

d'où le résultat.

THÉORÈME. *Si $n=n'=2m$, les représentations unitaires V^{ζ} sont toutes irréductibles.*

DÉMONSTRATION. Supposons qu'un opérateur borné Δ dans $\mathcal{H}^{\zeta}$ commute avec tous les $V^{\zeta}(g)$ pour $g \in G$. En prenant $g=n(C)$, on voit que Δ commute avec les opérateurs de multiplication par $e\left(-\frac{\lambda}{2}C, X\right)$ pour toute C symétrique. Il existe donc une fonction δX-mesurable bornée Δ sur $\mathfrak{S}_+$ à valeur r-matricielles telles qu'on ait

$$\Delta \boldsymbol{h}(X) = \boldsymbol{h}(X)\Delta(X)$$

pour toute $\boldsymbol{h} \in \mathcal{H}^{\zeta}$ (voir une démonstration en Appendice). En prenant ensuite $g=h(A)$, on a la relation

$$\zeta(P(A^{-1}X^{\frac{1}{2}}))\Delta(X) = \Delta(A^{-1}X^{t}A^{-1})\zeta(P(A^{-1}X^{\frac{1}{2}}))\,.$$

En posant $A=X^{\frac{1}{2}}$, on voit que $\Delta(X)$ est une matrice constante Δ. Notons qu'on n'a pas employé l'hypothèse $n=n'$ jusqu'ici. En posant enfin $A=X^{\frac{1}{2}}P^{-1}$ ($P \in O(n)$), on a

$$\zeta(P)\Delta = \Delta\zeta(P)$$

pour tout $P \in O(n)$. Comme ζ est irréductible, Δ doit être une matrice scalaire, ce qui démontre le théorème.

Pour $n<n'$, nous ne savons pas si V^{ζ} est irréductible.

Appendice.

I. DÉMONSTRATION de la Proposition dans § 6, 3° (p. 246).

a) $GL(n, \boldsymbol{R})$ opère transitivement sur $\mathfrak{S}_+$ par l'opération $L_A^*: X \mapsto AX^tA$ ($X \in \mathfrak{S}_+$, $A \in GL(n, \boldsymbol{R})$). Si dX désigne la restriction à $\mathfrak{S}_+$ de la mesure de Lebesgue sur l'espace vectoriel des matrices symétriques, on a

$$d(AX^tA) = |\det A|^{n+1}dX\,.$$

Donc la mesure $\delta^*X = |\det X|^{-\frac{n+1}{2}}dX$ sur $\mathfrak{S}_+$ est la seule mesure invariante par L_A^* à un facteur constant près.

D'un autre côté, $GL(n, \boldsymbol{R})$ opère sur $\mathcal{M}$ par l'opération $L_A: Z \mapsto AZ$ ($Z \in \mathcal{M}$, $A \in GL(n, \boldsymbol{R})$), et la mesure $d^*Z = |\det Z^tZ|^{-\frac{n'}{2}}dZ$ est invariante par L_A.

Soit ϕ l'application $Z \mapsto Z^tZ$ de $\mathcal{M}$ sur $\mathfrak{S}_+$. Puisque ϕ est propre, il existe, pour une mesure de Radon μ sur $\mathcal{M}$, la mesure image directe $\phi(\mu)$ sur $\mathfrak{S}_+$. Si μ est L_A-invariante, $\phi(\mu)$ est L_A^*-invariante, parce qu'on a $\phi \circ L_A = L_A^* \circ \phi$. Comme il n'y a qu'une mesure L_A^*-invariante sur $\mathfrak{S}_+$ à un facteur constant près, on a $\phi(d^*Z) = c\delta^*X$. Pour une fonction f sur $\mathfrak{S}_+$, on a

$$c\int_{\mathfrak{S}_+} f(X)\delta^* X = \int_{\mathcal{M}} f(Z^t Z) d^* Z = \int_{\mathcal{M}} f(Z^t Z) |\det Z^t Z|^{-\frac{n'}{2}} dZ,$$

d'où résulte

$$c\int_{\mathfrak{S}_+} f(X) |\det X|^{\frac{n'-n-1}{2}} dX = \int_{\mathcal{M}} f(Z^t Z) dZ.$$

b) Pour déterminer la constante c, on considère l'ensemble $\mathfrak{T}_+$ des matrices triangulaires supérieures à éléments diagonaux positifs. L'application $X \mapsto X^t X$ de $\mathfrak{T}_+$ sur $\mathfrak{S}_+$ est un isomorphisme et sa jacobienne $J(X)$ relative aux mesures de Lebesgue sur $\mathfrak{T}_+$ et $\mathfrak{S}_+$ égale à $2^n \cdot x_{11} x_{22}^2 \cdots x_{nn}^n$ $(X=(x_{ij}))$. On a donc, pour une fonction f sur $\mathfrak{S}_+$,

$$\int_{\mathfrak{S}_+} f(X) dX = \int_{\mathfrak{T}_+} f(X^t X) 2^n \cdot x_{11} x_{22}^2 \cdots x_{nn}^n dX.$$

Pour obtenir le résultat, il suffira de prendre comme f la fonction caractéristique de l'ensemble des matrices dans $\mathfrak{S}_+$ dont les éléments diagonaux sont inférieurs à 1.

II. a) Soient X un espace localement compact dénombrable à l'infini, δx une mesure de Radon positive sur X, et $\mathcal{H}$ l'espace hilbertien des fonctions de carré intégrable sur X à valeurs dans $\boldsymbol{C}^r$. Pour une fonction φ dans $L^\infty(X)$ (les fonctions mesurables bornées), M_φ désignera l'opérateur de multiplication par φ dans $\mathcal{H}$: $\boldsymbol{f} \mapsto M_\varphi \boldsymbol{f} = (\varphi f_1, \varphi f_2, \cdots, \varphi f_r)$.

PROPOSITION 1. *Si un opérateur borné T dans $\mathcal{H}$ commute avec tous les M_φ $(\varphi \in L^\infty(X))$, il existe une fonction mesurable bornée $A(x)$ sur X à valeurs matricielles à r lignes et r colonne telle qu'on ait*

$$T\boldsymbol{f}(x) = \boldsymbol{f}(x) A(x)$$

pour toute fonction $\boldsymbol{f}$ dans $\mathcal{H}$.

DÉMONSTRATION. Il existe une suite croissante d'ouverts U_n telle que $\bar{U}_n$ soit compact et que l'union des U_n soit égale à X. Soit e_n la fonction caractéristique de $\bar{U}_n$ et posons

$$\boldsymbol{e}_n^i(x) = (0, \cdots, \overbrace{e_n(x)}^{i}, 0, \cdots) \qquad (1 \leqq i \leqq r).$$

Le support de $T\boldsymbol{e}_n^i$ est contenu dans $\bar{U}_n$ et on peut écrire

$$T\boldsymbol{e}_n^i(x) = \sum_{i=1}^{r} a_{ij}(x) \boldsymbol{e}_n^j(x)$$

pour $x \in \bar{U}_n$. Les fonctions $a_{ij}(x)$ sont bien prolongées en tout X, et il nous suffit de poser $A(x) = (a_{ij}(x))$.

b) Soient G un groupe commutatif localement compact dénombrable à l'infini, X un sous-espace ouvert de G et μ une fonction continue partout non nulle sur X. Soit $\delta x = \mu(x) dx$, dx étant une mesure de Haar de G. Désignons par $\mathcal{H}=L^2(X, \boldsymbol{C}^r, \delta x)$ l'espace hilbertien des fonctions de carré intégrable par rapport à δx sur X à valeurs dans $\boldsymbol{C}^r$.

PROPOSITION 2. *Soit T un opérateur borné de $\mathcal{H}$ et $\hat{G}_X$ l'ensemble des caractères unitaires de G restreints à X. Si T commute avec tous les M_χ $(\chi\in\hat{G}_X)$, T commute avec tous les M_φ $(\varphi\in L^\infty(X, \delta x))$.*

DÉMONSTRATION. L'assertion est vraie si $X=G$, $\delta x=dx$ (voir [3]). La modification n'est pas difficile.

En combinant les Propositions 1 et 2, on obtient ce qui suit.

PROPOSITION 3. *Dans les notations de Proposition 2, on suppose positive la fonction μ. Si un opérateur borné T de $\mathcal{H}$ commute avec tous les M_χ $(\chi\in\hat{G}_X)$, il existe une fonction δ-mesurable bornée $A(x)$ sur X à valeurs matricielles à r lignes et r colonnes telle qu'on ait*

$$T\boldsymbol{f}(x)=\boldsymbol{f}(x)A(x)$$

pour toute $\boldsymbol{f}$ dans $\mathcal{H}$.

Université de Tokyo

Bibliographie

[1] G. W. Mackey, Induced representations of locally compact groups I, Ann. of Math., **55** (1952), 101–139.

[2] O. T. O'Meara, Introduction to quadratic forms, Springer, 1963.

[3] M. Saito, Représentations unitaires du groupe des déplacements dans un plan p-adique, J. Math. Soc. Japan, **19** (1967), 411–425.

[4] M. Saito, Représentations unitaires des groupes symplectiques, C. R. Acad. Sci. Paris, **267** (1968), 500–503.

[5] J. A. Shalika, Representations of the two by two unimodular group over local fields, Seminar on representations of Lie groups No. 2 (note mimeographiée).

[6] R. Steinberg, Générateurs, relations et revêtements de groupes algébriques, Colloque sur la théorie des groupes algébriques, Bruxelles, 1962, 113–127.

[7] S. Tanaka, On irreducible unitary representations of some special linear groups of the second order, Osaka J. Math., **3** (1966), 217–242.

[8] A. Weil, Sur certains groupes d'opérateurs unitaires, Acta Math., **111** (1964), 153–211.