J. Math. Soc. Japan
Vol. 16, No. 4, 1964

Sur les familles d'ensembles analytiques

Par Osamu FUJITA

(Reçu le 10 avril, 1964)

Introduction. En 1934, Oka a indiqué que les domaines de normalité pour les familles de surfaces analytiques sont pseudoconvexes[1]. Dans le Mémoire d'Oka, le problème est traité dans l'espace de deux variables complexes. Dans le présent Mémoire nous vérifierons d'abord que ce résultat subsiste dans l'espace de n variables complexes (No. 5, Théorème 1)[2].

Dans le Mémoire [5], Oka a indiqué un critère intéressant pour les familles normales de surfaces analytiques[3]. Mais au lieu de généraliser ce critère, nous adopterons un autre critère qui est plus simple que celui d'Oka (No. 2, Lemme 1).

Dans la partie II, nous verrons que le résultat analogue s'etend aux familles d'ensembles analytiques (No. 10, Théorème 2).

I. Familles normales de surfaces analytiques

1. Définitions. Soit D un domaine dans l'espace (x) de n variables complexes $x_1, x_2, \cdots, x_n$[4]. On appelle *surface analytique dans* D un ensemble de points qui s'exprime à un voisinage de tout point de D par l'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe (non identiquement nulle).

Soit Δ un domaine (connexe ou non) contenu dans D. Etant donnée une suite infinie

$$S_1, S_2, \cdots, S_\nu, \cdots \tag{1}$$

de surfaces analytiques dans D, nous appellerons que *la suite* (1) *converge analytiquement dans* Δ, s'il existe pour tout point P de Δ un polycylindre (γ) contenant P tel que l'on puisse associer à la suite (1) une suite infinie

1) Oka [5], p. 95, Théorème 2. Pour les domaines pseudoconvexes, voir Oka [7] Introduction et No. 7.

2) La définition pour les familles normales de surfaces analytiques dans ce Mémoire est légèrement différente de celle d'Oka.

3) Oka [5], p. 95, Théorème 1. Pour ce Théorème 1 et le Théorème 2 précédent d'Oka, voir aussi Nishino [2] et Oka [8].

4) Dans le présent Mémoire, on ne considère que des domaines univalents dans un espace fini, sans exception.

(2) $$f_1, f_2, \cdots, f_\nu, \cdots$$

de fonctions holomorphes dans (γ) satisfaisant à *la condition* (α) suivante:

(α) *Pour chaque* ν $(\nu=1, 2, \cdots)$ S_ν *est déterminé par* $f_\nu=0$ *dans* (γ), *et la suite* (2) *converge uniformément vers une fonction* f_0 (*non identiquement nulle*) *dans* (γ)[5].

Soit $\boldsymbol{F}$ une famille de surfaces analytiques dans D, et soit Δ un domaine (connexe ou non) contenu dans D. Nous dirons que *la famille* $\boldsymbol{F}$ *est normale dans* Δ si, de toute suite infinie

$$S_1, S_2, \cdots, S_\nu, \cdots$$

de surfaces appartenant à la famille, on peut extraire une suite partielle qui converge analytiquement dans Δ[6].

Nous dirons que *la famille* $\boldsymbol{F}$ *est normale en un point* P *du domaine* D si elle est normale dans un polycylindre (γ) contenant P. *Si une famille est normale en tout point d'un domaine* Δ $(\subseteqq D)$, *elle est normale dans* Δ[7].

Soit D_0 l'ensemble de tous les points de D où la famille $\boldsymbol{F}$ est normale. D_0 est un ensemble ouvert (connexe ou non) et la famille $\boldsymbol{F}$ est normale dans D_0. *Le domaine* D_0 *sera appelé le domaine de normalité pour* $\boldsymbol{F}$.

Soit $J=D-D_0$. Alors J est l'ensemble de tous les points de D où la famille $\boldsymbol{F}$ cesse d'être normale, et J est fermé dans D. *L'ensemble* J *sera appelé l'ensemble de points* (J) *de la famille* $\boldsymbol{F}$.

REMARQUE. Soit

(1) $$S_1, S_2, \cdots, S_\nu, \cdots$$

une suite de surfaces analytiques dans D, qui converge analytiquement dans un domaine Δ (connexe ou non) contenu dans D. Par définition même, pour tout point P de Δ il existe un polycylindre $(\gamma)_P$ contenant P et une suite $\{f_{\nu,P}\}$ $(\nu=1, 2, \cdots)$ de fonctions holomorphes dans $(\gamma)_P$ satisfaisant à la condition (α). Soit $f_{0,P}$ la fonction limite de la suite $\{f_{\nu,P}\}$, alors $f_{0,P}$ est une fonction holomorphe dans $(\gamma)_P$ (non identiquement nulle).

Dans cette circonstance nous avons une surface analytique S_0 *dans* Δ *qui s'exprime par* $f_{0,P}=0$ *dans* $(\gamma)_P$ *pour tout point* P *de* Δ. (En particulier, si $f_{0,P}$ est non nulle dans $(\gamma)_P$ pour tout point P de Δ, S_0 n'existe pas effectivement dans Δ.)

---

5) En particulier, si S_ν $(\nu=1, 2, \cdots)$ n'existent pas effectivement à l'intérieur complet de Δ sauf pour un nombre fini d'indices ν, la suite (1) converge analytiquement dans Δ.

6) Cette définition pour les familles normales de surfaces analytiques est a priori plus générale que celle d'Oka ([5], p. 94).

7) La démonstration peut se calquer sur celle pour des familles de fonctions holomorphes.

En effet, soit $(\gamma)_Q$ un polycylindre correspondant à un point Q de Δ, tel que l'intersection $(\gamma)_P \cap (\gamma)_Q$ ne soit pas vide. Nous allons vérifier que l'ensemble $f_{0,P}=0$ coïncide avec l'ensemble $f_{0,Q}=0$ dans l'intersection $(\gamma)_P \cap (\gamma)_Q$. Pour cela il suffit de dire qu'un point P' de (γ) $(=(\gamma)_P)$ est un point limite de la suite (1) si et seulement si $f_0(P')=0$.

D'après la condition (α), S_ν est déterminé par $f_\nu=0$ dans (γ) $(\nu=1, 2, \cdots)$, et la suite f_ν $(\nu=1, 2, \cdots)$ converge uniformément vers f_0 dans (γ). Soit $f_0(P') \neq 0$ pour un point P' de (γ), il existe un voisinage V de P' et un entier N suffisamment grand tel que pour $\nu \geqq N$ f_ν soit non nulle dans V. Par suite P' ne peut pas être un point limite de la suite (1).

Soit $f_0(P')=0$ pour un point P' de (γ). Nous allons montrer que P' est un point limite de la suite (1).

Dans le cas où $n=1$, soit $P'=x'$. Comme $f_0(x)$ n'est pas identiquement nulle dans (γ), il existe un nombre positif r suffisamment petit tel que $f_0(x)$ ne s'annule pas dans l'ensemble $0<|x-x'|\leqq r$. La fonction $f_0(x)$ admet le seul zéro $x=x'$ d'ordre p $(\geqq 1)$ dans $|x-x'|\leqq r$. Soit r' un nombre positif plus petit que r, mais d'ailleurs quelconque. La suite f_ν $(\nu=1, 2, \cdots)$ tendant uniformément vers f_0 dans $|x-x'|\leqq r'$, il suit d'un théorème connu sur les fonctions holomorphes que, pour un nombre entier suffisamment grand ν_0, f_ν $(\nu \geqq \nu_0)$ admet p zéros (en tenant compte de la multiplicité) dans $|x-x'|\leqq r'$. r' $(0<r'<r)$ étant quelconque, P' est un point limite de la suite (1)[8].

Dans le cas où $n \geqq 2$, soient $(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)$ les coordonnées du point P'. En appliquant une transformation pseudoconforme convenable au voisinage de P', on peut supposer que $f_0(x'_1, \cdots, x'_{n-1}, x_n) \not\equiv 0$. Considérons une suite

$$(1') \qquad \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_\nu, \cdots$$

de surfaces analytiques au voisinage de x'_n dans le plan x_n, σ_ν $(\nu=1, 2, \cdots)$ étant déterminés par $f_\nu(x'_1, \cdots, x'_{n-1}, x_n)=0$, respectivement. La suite de fonctions d'une variable x_n $\{f_\nu(x'_1, \cdots, x'_{n-1}, x_n)\}$ $(\nu=1, 2, \cdots)$ converge uniformément vers $f_0(x'_1, \cdots, x'_{n-1}, x_n)$ au voisinage de x'_n. Ceci est le cas où $n=1$, par suite x'_n est un point limite de la suite (1'). Donc P' est un point limite de la suite (1). C. Q. F. D.

La surface analytique S_0 dans la remarque précédente sera appelée la limite de la suite infinie (1) *dans Δ.*

2. Lemme 1. Dans l'espace (x, y) de $n+1$ variables complexes $x_1, x_2, \cdots, x_n, y$, considérons un domaine D de la forme

8) Un point P est appelé point limite de la suite (1), si pour tout voisinage du point P, il existe une infinité de surfaces de la suite (1), admettant un point au moins dans le voisinage.

$$(x) \in \Delta, \ |y| < R$$

où Δ est un domaine dans l'espace (x) et R est un nombre positif. Soit $\boldsymbol{F}$ une famille de surfaces analytiques dans D satisfaisant à *la condition* (β) suivante:

(β) *Pour* $\boldsymbol{F}$ *il existe un nombre positif* R_0 *qui est plus petit que* R *et tel que toute surface* S *de la famille* $\boldsymbol{F}$ *n'existe pas effectivement dans la partie*

$$(x) \in \Delta, \ R_0 \leqq |y| \leqq R.$$

Soit S une surface quelconque de la famille $\boldsymbol{F}$. Alors, grâce à Weierstrass, on peut trouver un polynôme en y sans facteur multiple de la forme suivante:

$$F(x, y) = y^m + A_1 y^{m-1} + \cdots + A_m$$

où m est un entier positif et $A_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ sont des fonctions holomorphes dans Δ; S est déterminée par $F(x, y) = 0$ dans $D = (\Delta, |y| < R)$, et F ne s'annule pas dans $|y| \geqq R_0$.

De plus ce polynôme F en y ayant la propriété indiquée est unique pour S. *Nous dirons que le polynôme* F *correspond à la surface* S. *Le degré* m *du polynôme* F *sera appelé le degré de la surface* S.

LEMME 1. *Soit* $\boldsymbol{F}$ *une famille de surfaces analytiques dans le domaine* $D = (\Delta, |y| < R)$ *satisfaisant à la condition* (β). *Pour que la famille* $\boldsymbol{F}$ *soit normale dans* D, *il faut et il suffit que les degrés des surfaces analytiques de la famille* $\boldsymbol{F}$ *soient bornés.*

Soit $\boldsymbol{F}_m$ la famille de surfaces analytiques formée par toutes les surfaces de degré m appartenant à la famille $\boldsymbol{F}$. Nous allons montrer que la famille $\boldsymbol{F}_m$ est normale dans D. Soit S une surface analytique de $\boldsymbol{F}$, et soit

$$F(x, y) = y^m + A_1(x) y^{m-1} + \cdots + A_m(x)$$

le polynôme en y correspondant à S. Pour tout point (x') de Δ l'équation $F(x, y) = 0$ a m racines $y'_1, y'_2, \cdots, y'_m$ dans $|y| < R_0$. Donc

$$\begin{aligned} |A_j(x')| &= |\sum y'_{i_1} y'_{i_2} \cdots y'_{i_j}| \ (1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leqq m) \\ &< {}_mC_j R_0^j \qquad\qquad (j = 1, 2, \cdots, m). \end{aligned}$$

Posons

$$A_j(x) = A_{j,S}(x),$$

et considérons une famille de fonctions holomorphes

$$\{A_{j,S}\}, \ S \in \boldsymbol{F}_m.$$

Les modules de fonctions $A_{j,S}$ étant bornés dans Δ, il suit, d'un critère connu sur les familles normales de fonctions holomorphes, que la famille est normale dans Δ $(j = 1, 2, \cdots, m)$. De là, il s'ensuit immédiatement que $\boldsymbol{F}_m$ est normale dans D.

D'après ce que nous venons de voir, il est évident que la condition dans

le lemme est suffisante. Nous allons montrer qu'elle est aussi nécessaire.

Supposons qu'une famille $\boldsymbol{F}$ de surfaces analytiques dans D satisfaisant à la condition (β) soit normale dans D, et que les degrés des surfaces analytiques de la famille $\boldsymbol{F}$ ne soient pas bornés. Alors il existe une suite de surfaces analytiques de la famille $\boldsymbol{F}$,

$$S_1, S_2, \cdots, S_\nu, \cdots \tag{1}$$

telle que la suite de degrés m_ν de S_ν ($\nu=1, 2, \cdots$) soit strictement croissante, c'est-à-dire

$$m_1 < m_2 < \cdots < m_\nu < \cdots .$$

La famille $\boldsymbol{F}$ étant normale dans D, on peut extraire une suite partielle de (1) qui converge analytiquement dans D. Pour simplifier l'écriture, supposons que la suite (1) converge analytiquement dans D. Soit S_0 la surface analytique limite de la suite (1) dans D[9]. D'après la condition (β), S_0 n'existe pas effectivement dans

$$(x) \in \Delta, \ |y| > R_0 .$$

De là, pour un point quelconque (x') de Δ, l'intersection de S_0 et de la droite analytique $x_1 = x'_1, \cdots, x_n = x'_n$ a un nombre fini de points:

$$(x', y'_1), (x', y'_2), \cdots, (x', y'_l), \ (l \geqq 1) .$$

Comme la suite (1) converge analytiquement dans D, d'après la définition même, il existe un polycylindre $(\gamma)_i$ qui contient (x', y'_i), et une suite $\{f^i_\nu\}$ ($\nu=1, 2, \cdots$) de fonctions holomorphes dans $(\gamma)_i$ qui satisfait à la condition (α); c'est-à-dire, pour chaque ν ($\nu=1, 2, \cdots$), S_ν est déterminée par $f^i_\nu = 0$ dans $(\gamma)_i$, et la suite $\{f^i_\nu\}$ ($\nu=1, 2, \cdots$) converge uniformément vers une fonction f^i_0 (non identiquement nulle) dans $(\gamma)_i$ ($i=1, 2, \cdots, l$).

Pour un nombre positif r_i suffisamment petit, le cercle

$$(x) = (x'), \ |y - y'_i| \leqq r_i$$

est contenu dans $(\gamma)_i$ et $f^i_0(x', y)$ n'est pas nulle pour $0 < |y - y'_i| \leqq r_i$; la fonction $f^i_0(x', y)$ admet un seul zéro $y = y'_i$ d'ordre n_i ($\geqq 1$) dans $|y - y'_i| \leqq r_i$.

Soit F_ν le polynôme en y correspondant à S_ν ($\nu=1, 2, \cdots$). Pour un nombre entier ν_0 suffisamment grand, $F_\nu(x', y)$ ($\nu \geqq \nu_0$) n'est pas nulle pour $|y - y'_i| \geqq r_i$ ($i=1, 2, \cdots, l$), et le nombre de zéros de $F_\nu(x', y)$ dans $|y - y'_i| < r_i$ est au plus égal à n_i ($i=1, 2, \cdots, l$). Donc

$$m_\nu \leqq n_1 + n_2 + \cdots + n_l ,$$

où m_ν est le degré de S_ν ($\nu \geqq \nu_0$). Ceci est une contradiction, car la suite m_ν ($\nu=1, 2, \cdots$) est strictement croissante. Donc la condition du lemme est nécessaire. C. Q. F. D.

9) Voir la remarque au No. 1.

3. Ensembles pseudoconcaves et domaines pseudoconvexes.

Soit D un domaine dans l'espace (x) de n variables complexes $x_1, x_2, \cdots, x_n$. *Un ensemble E de points de D est appelé ensemble pseudoconcave dans D*[10], *s'il jouit des propriétés suivantes:*

1° L'ensemble E est fermé à l'intérieur de D.

2° (Théorème de la continuité) Soit $n \geqq 2$ et soit (ξ) un point de E. Si, pour un nombre positif ρ, l'ensemble

$$x_i = \xi_i \ (i = 1, 2, \cdots, n-1), \ 0 < |x_n - \xi_n| < \rho$$

reste extérieur à E, on peut trouver un nombre positif r de façon que, à tout point $(x'_1, \cdots, x'_{n-1})$ dans $|x_i - \xi_i| < r$ $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$ correspond au moins un point x'_n dans $|x_n - \xi_n| < \rho$ tel que le point (x') appartienne à E.

3° La propriété 2° de l'ensemble E admet toutes les transformations pseudoconformes biunivoques au voisinage d'un point quelconque de l'ensemble E[11].

Soit D un domaine dans l'espace $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ et soit E le complément de D $(E = (x) - D)$. Nous appelons D *pseudoconvexe*[12], si l'ensemble E est un ensemble pseudoconcave dans l'espace (x). Nous appliquons le terme, pseudoconvexe aussi aux domaines non connexes.

Soit D un domaine pseudoconvexe et soit E un ensemble pseudoconcave dans D. Alors le domaine $D' = D - E$ (connexe ou non) est pseudoconvexe.

4. Nous allons expliquer un fait qui concerne des ensembles analytiques et qui sera appliqué plus tart dans les démonstrations des théorèmes 1 et 2. (Voir No. 5 et No. 10.)

LEMME DE GRAUERT[13]. *Soit D un domaine dans l'espace (x) de n variables complexes $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Soit Σ un ensemble analytique dans D tel que toutes les composantes irreductibles soient de dimension λ $(0 \leqq \lambda \leqq n-1)$. Alors il existe une transformation linéaire non-singulière L de l'espace (x)*

$$x'_i = \sum a_{ij} x_j \ (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

telle que l'intersection de Σ et de l'ensemble analytique $x'_i = \alpha_i$ $(i = 1, 2, \cdots, \lambda)$ soit au plus de dimension 0 dans D, pour tout point (α) dans l'espace des variables complexes $x'_1, x'_2, \cdots, x'_n$. De plus, étant donné un nombre positif quelconque ε, il existe une telle transformation qui satisfait aux conditions suivantes:

---

10) Nishino [3], p. 227. "Ensemble de la class (H)" suivant Oka [5], p. 95.

11) Pour le cas $n=1$, tout ensemble satisfaisant à la condition 1° est pseudoconcave.

12) Oka [6], p. 37.

13) Grauert, [1], p. 249, Satz 9. Nishino [4], p. 382, Théorème I.

$$|a_{ii}-1|<\varepsilon,\ |a_{ij}|<\varepsilon\ (i\neq j\,;\,i,j=1,2,\cdots,n)^{14)}.$$

5. Théorème 1. *Soit D un domaine dans l'espace (x) de n variables complexes $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Soit $\boldsymbol{F}$ une famille de surfaces analytiques dans D. L'ensemble J de points (J) de la famille $\boldsymbol{F}$ est un ensemble pseudoconcave dans D. En particulier si D est pseudoconvexe, le domaine de normalité D_0 pour $\boldsymbol{F}$ est encore pseudoconvexe.*

Il est évident que l'ensemble J jouit de la propriété 1° dans la définition d'ensembles pseudoconcaves (voir No. 3).

Il s'agit maintenant de la propriété 2°. Soit $n\geqq 2$ et soit (ξ) un point (J) de la famille $\boldsymbol{F}$. Supposons que pour un nombre positif ρ l'ensemble

$$x_i=\xi_i\quad(i=1,2,\cdots,n-1),\quad 0<|x_n-\xi_n|<\rho$$

reste extérieur à J. Alors il existe des nombres positives r, ρ_1, ρ_2 $(\rho_1<\rho_2<\rho)$ tels que l'ensemble

$$|x_i-\xi_i|<r\quad(i=1,2,\cdots,n-1),\quad |x_n-\xi_n|\leqq\rho_2$$

soit contenu dans D, et l'ensemble

$$|x_i-\xi_i|<r\quad(i=1,2,\cdots,n-1),\quad \rho_1\leqq|x_n-\xi_n|\leqq\rho_2$$

reste extérieur à J.

Nous allons montrer que pour tout point $(x'_1, x'_2, \cdots, x'_{n-1})$ dans $|x_i-\xi_i|<\frac{r}{2}$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$ il existe au moins un point x'_n dans $|x_n-\xi_n|<\rho_2$ tel que le point $(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)$ appartienne à J.

Supposons que cela ne soit pas vrai. Pour un point $(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1})$ dans $|x_i-\xi_i|<\frac{r}{2}$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$ l'ensemble

$$x_i=a_i\quad(i=1,2,\cdots,n-1),\quad |x_n-\xi_n|\leqq\rho_2$$

reste extérieur à J. D'où, pour un nombre positif suffisamment petit d l'ensemble

$$|x_i-a_i|<d\quad(i=1,2,\cdots,n-1),\quad |x_n-\xi_n|\leqq\rho_2$$

reste extérieur à J. Pour simplifier l'écriture, supposons que (ξ) soit l'origine.

Soit

$$(1)\qquad S_1, S_2, \cdots, S_\nu, \cdots$$

une suite infinie quelconque de surfaces analytiques appartenant à $\boldsymbol{F}$. La famille $\boldsymbol{F}$ étant normale dans

$$(\Delta)\qquad |x_i|<r\quad(i=1,2,\cdots,n-1),\quad \rho_1<|x_n|<\rho_2,$$

on peut en extraire une suite partielle qui converge analytiquement dans Δ:

14) Pour la démonstration, voir les Mémoires dans la note 13).

(2) $$S_{\nu_1}, S_{\nu_2}, \cdots, S_{\nu_\mu}, \cdots.$$

Soit S_0 la limit de la suite (2) dans Δ. S_0 est une surface analytique dans Δ (voir la remarque au No. 1).

Grâce à Grauert (*No. 4, Lemme de Grauert*), pour un nombre positif quelconque ε il existe une transformation linéaire non singulière de l'espace (x):

(T) $$x'_i = \sum a_{ij}x_j \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

$$|a_{ii}-1| < \varepsilon, \quad |a_{ij}| < \varepsilon \quad (i \neq j\,;\, i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

telle que l'intersection de S_0 et de l'ensemble analytique $x'_i = \alpha_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$ soit au plus de dimension 0 dans Δ, pour tout point (α) dans l'espace des variables complexes $x'_1, x'_2, \cdots, x'_{n-1}$.

Pour un nombre positif ε suffisamment petit les conditions suivantes sont aussi remplies.

1° La transformation

(T_0) $$u_i = \sum a_{ij}x_j, \quad x_n = x_n \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1\,;\, j = 1, 2, \cdots, n)$$

de l'espace (x) est non singulière.

2° Le domaine dans l'espace (u, x_n) qui correspond par T_0 au domaine

$$|x_i| < r \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1), \quad |x_n| < \rho_2$$

dans l'espace (x), contient le domaine

$$|u_i| < \frac{3}{4}r \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1), \quad |x_n| < \rho_2.$$

3° Le domaine dans l'espace (u, x_n), qui correspond par T_0 au domaine

$$|x_i - a_i| < d \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1), \quad |x_n| < \rho_2$$

dans l'espace (x), contient le domaine

$$|u_i - a_i| < \frac{d}{2} \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1), \quad |x_n| < \rho_2.$$

4° Le domaine dans l'espace (x), qui correspond par T_0^{-1} au domaine

$$|u_i| < \frac{3}{4}r \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1), \quad |x_n| < \rho_2$$

dans l'espace (u, x_n), contient le domaine

$$|x_i| < \frac{1}{2}r \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1), \quad |x_n| < \rho_2.$$

Dans ces circonstances, à la suite (2) de surfaces analytiques correspond une suite

(2′) $$S'_{\nu_1}, S'_{\nu_2}, \cdots, S'_{\nu_\mu}, \cdots$$

de surfaces analytiques dans le domaine

$$|u_i| < \frac{3}{4}r \quad (i=1, 2, \cdots, n-1), \quad |x_n| < \rho_2$$

(d'après la condition 2°). La suite (2′) converge analytiquement dans

$$(\Delta') \qquad |u_i| < \frac{3}{4}r \quad (i=1, 2, \cdots, n-1), \quad \rho_1 < |x_n| < \rho_2,$$

et sa limite S_0' est la surface analytique dans Δ' correspondant à la surface analytique S_0 dans Δ.

Soit (γ) le polycylindre $|u_i| < \frac{3}{4}r$ $(i=1, 2, \cdots, n-1)$ dans l'espace $(u_1, u_2, \cdots, u_{n-1})$ et soit (u') un point quelconque de (γ). D'après la propriété de la transformation T, l'intersection de S_0' et de l'ensemble analytique $u_i = u_i'$ $(i=1, 2, \cdots, n-1)$ est un ensemble analytique au plus de dimension 0 dans Δ'. Donc il existe un nombre ρ_3 $(\rho_1 < \rho_3 < \rho_2)$ tel que la circonférence

$$u_i = u_i' \quad (i=1, 2, \cdots, n-1), \quad |x_n| = \rho_3$$

n'intersecte pas S_0'. Par suite, pour un nombre ρ_4 $(\rho_1 < \rho_4 < \rho_3)$ suffisamment voisin de ρ_3 et un nombre positif r' suffisamment petit, l'ensemble fermé

$$|u_i - u_i'| \leqq r' \quad (i=1, 2, \cdots, n-1), \quad \rho_4 \leqq |x_n| \leqq \rho_3$$

est contenu dans Δ' et il n'intersecte pas S_0'.

La suite (2′) de surfaces analytiques tendant analytiquement vers S_0' dans Δ', pour un nombre entier μ' suffisamment grand les surfaces analytiques S'_{ν_μ} $(\mu \geqq \mu')$ n'intersecte pas cet ensemble fermé. Soit (γ') le polycylindre $|u_i - u_i'| < r'$ $(i=1, 2, \cdots, n-1)$. Alors la famille $\{S'_{\nu_\mu}\}$ $(\mu \geqq \mu')$ de surfaces analytiques dans le domaine $((\gamma'), |x_n| < \rho_3)$ satisfait à la condition (β) du No. 2. Donc, d'après le lemme 1, pour que la famille soit normale dans le domaine $((\gamma'), |x_n| < \rho_3)$, il faut et il suffit que les degrés des surfaces analytiques de la famille soient bornés.

Soit ρ_3' $(\rho_1 < \rho_3' < \rho_2)$ un autre nombre correspondant à ρ_3. Supposons, pour fixer les idées, que $\rho_3' > \rho_3$. Soit (γ'') le polycylindre correspondant à (γ'), et ρ_4' $(\rho_1 < \rho_4' < \rho_3')$ soit le nombre correspondant à ρ_4. Alors, pour un nombre entier μ'' suffisamment grand, toute surface analytique S'_{ν_μ} $(\mu \geqq \mu'')$ n'existe pas effectivement dans la partie $((\gamma''), \rho_4' < |x_n| < \rho_3')$.

Considérons dans le domaine

$$((\gamma') \cap (\gamma''), \ \rho_4 < |x_n| < \rho_3')$$

la famille de surfaces analytiques

$$\{S'_{\nu_\mu}\} \ (\mu \geqq \max(\mu', \mu'')).$$

Comme toute surface analytique de la famille n'existe pas effectivement dans la partie

$$((\gamma') \cap (\gamma''), \ \rho_4 < |x_n| < \rho_3 \cup \rho_4' < |x_n| < \rho_3'),$$

nous pouvons considérer les degrés des surfaces analytiques de la famille dans le domaine

$$((\gamma')\cap(\gamma''),\ \rho_4<|x_n|<\rho_3')$$

(pareillement au No. 2).

De plus, la famille étant normale dans le domaine, les degrés des surfaces analytiques de la famille sont bornés. Les degrés de la famille $\{S'_{\nu_\mu}\}(\mu\geqq\mu'')$ sont donc bornés dans $((\gamma''),\ |x_n|<\rho_3')$ si et seulement si les degrés de la famille $\{S'_{\nu_\mu}\}$ $(\mu\geqq\mu')$ sont bornés dans $((\gamma'),\ |x_n|<\rho_3)$.

Un point (u') du polycylindre (γ) sera de première espèce, si pour un couple $(\rho_3, (\gamma'))$ les degrés des surfaces analytiques de la famille $\{S'_{\nu_\mu}\}$ $(\mu\geqq\mu')$ sont bornés dans le domaine $((\gamma'),\ |x_n|<\rho_3)$. Soit (u') un point de première espèce. Alors tous les points du polycylindre (γ') sont de première espèce. Donc l'ensemble A_1 de tous les points de première espèce dans (γ) est un ensemble ouvert.

Tout point de l'ensemble $A_2=(\gamma)-A_1$ sera de deuxième espèce. D'après ce que nous venons de voir, un point (u') de (γ) est de deuxième espèce, si et seulement si pour un couple $(\rho_3, (\gamma'))$ les degrés des surfaces analytiques de la famille $\{S'_{\nu_\mu}\}$ $(\mu\geqq\mu')$ ne sont pas bornés dans le domaine $((\gamma'),\ |x_n|<\rho_3)$. Soit (u') un point de deuxième espèce. Alors tous les points du polycylindre (γ') sont de deuxième espèce. Donc A_2 est aussi un ensemble ouvert. Comme (γ) est connexe, il faut que

$$(\gamma)=A_1 \quad \text{ou} \quad (\gamma)=A_2.$$

Or, la famille $\boldsymbol{F}$ étant normale dans

$$|x_i-a_i|<d\ (i=1, 2, \cdots, n-1),\ |x_n|<\rho_2,$$

la famille $\{S'_{\nu_\mu}\}$ $(\mu=1, 2, \cdots)$ est normale dans

$$|u_i-a_i|<\frac{d}{2}\ (i=1, 2, \cdots, n-1),\ |x_n|<\rho_2$$

(d'après la condition 3°). D'où, d'apprès le lemme 1, le point (a) est de première espèce. Donc, il faut que $(\gamma)=A_1$.

Alors, d'après le lemme 1, la famille $\{S'_{\nu_\mu}\}$ $(\mu=1, 2, \cdots)$ est normale dans le domaine $((\gamma),\ |x_n|<\rho_2)$. Par suite, la famille $\{S_{\nu_\mu}\}$ $(\mu=1, 2, \cdots)$ est normale dans le domaine

$$(\Delta_0) \qquad |x_i|<\frac{1}{2}r \quad (i=1, 2, \cdots, n-1), \quad |x_n|<\rho_2$$

(d'après la condition 4°). Donc on peut en extraire une suite partielle qui converge analytiquement dans Δ_0. La suite infinie S_ν $(\nu=1, 2, \cdots)$ de surfaces analytiques de la famille $\boldsymbol{F}$ étant quelconque, il s'ensuit que la famille $\boldsymbol{F}$ est normale dans Δ_0; ce qui est contradictoire, car l'origine est un point (J) de la famille $\boldsymbol{F}$.

Donc l'ensemble J des points (J) de la famille $\boldsymbol{F}$ jouit de la propriété 2° dans la définition d'ensembles pseudoconcaves.

Il est facile à voir que la propriété 2° de J admet toute transformation pseudoconforme biunivoque au voisinage d'un point quelconque de J. C.Q.F.D.

II. Familles normales d'ensembles analytiques

6. Définitions. Soit D un domaine dans l'espace (x) de n variables complexes $x_1, x_2, \cdots, x_n$. *Un ensemble analytique dans D* est un ensemble de points qui s'exprime à un voisinage de tout point de D par l'ensemble des zéros communs d'un nombre fini de fonctions holomorphes. Nous appellerons *qu'un ensemble analytique Σ dans D est de dimension λ*, si toutes les composantes irréductibles de Σ sont de dimension λ.

Soit $n \geqq 2$ et soit Δ un domaine partiel (connexe ou non) de D. Etant donnée une suite infinie

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_\nu, \cdots \tag{1}$$

d'ensembles analytiques de dimension λ dans D $(0 \leqq \lambda \leqq n-2)$, *nous appellerons que la suite* (1) *converge analytiquement dans Δ*, s'il existe pour tout point P de Δ un polycylindre (γ) contenant P tel que l'on puisse associer à la suite (1) une suite infinie de systèmes de fonctions

$$\{(f_\nu^1, f_\nu^2, \cdots, f_\nu^l)\} \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

satisfaisant à *la condition* (α') suivante, où l $(\geqq n-\lambda)$ est un nombre entier independent de ν, d'ailleurs quelconque.

Condition (α').

1° *$f_\nu^1, f_\nu^2, \cdots, f_\nu^l$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ sont des fonctions holomorphes dans (γ) et pour chaque ν $(\nu = 1, 2, \cdots)$ l'ensemble des zéros communs de $f_\nu^1, f_\nu^2, \cdots, f_\nu^l$ contient l'ensemble $(\gamma) \cap \Sigma_\nu$.*

2° *Pour chaque i $(i = 1, 2, \cdots, l)$ la suite infinie*

$$\{f_\nu^i\} \quad (\nu = 1, 2, \cdots)$$

de fonctions holomorphes dans (γ) converge uniformément vers f_0^i dans (γ).

3° *Soit Σ_0' l'ensemble des zéros communs de $f_0^1, f_0^2, \cdots, f_0^l$, dans (γ). Toute composante irréductible de Σ_0' est au plus de dimension λ.*

4° *Soit P' un point quelconque de Σ_0'. A tout voisinage V de P', il existe un nombre entier ν_0 suffisamment grand tel que tout Σ_ν $(\nu \geqq \nu_0)$ ait au moins un point dans V.*

D'après la condition 3° toute composante irréductible de Σ_0' est au plus de dimension λ. D'autre part, d'après la condition 4° toute composante irréductible de Σ_0' est au moins de dimension λ (voir la proposition 2 au No. 7). Donc

Σ'_0 est un ensemble analytique de dimension λ dans (γ), s'il existe effectivement. D'où il s'ensuit (pareillement à la remarque au No. 1) que:

REMARQUE. Soit

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_\nu, \cdots \tag{1}$$

une suite d'ensembles analytiques de dimension λ $(0 \leqq \lambda \leqq n-2)$ dans D, qui converge analytiquement dans un domaine Δ (connexe ou non) contenu dans D. Par définition même, pour tout point P de Δ il existe un polycylindre $(\gamma)_P$ contenant P tel que l'on puisse associer à la suite (1) une suite de systèmes de fonctions

$$\{(f^1_{\nu,P}, f^2_{\nu,P}, \cdots, f^l_{\nu,P})\} \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

satisfaisant à la condition (α'). Soit $\Sigma'_{0,P}$ l'ensemble des zéros communs de $f^1_{0,P}, f^2_{0,P}, \cdots, f^l_{0,P}$ dans $(\gamma)_P$. Alors *nous avons un ensemble analytique* $\Sigma_{0,\Delta}$ *dans* Δ *tel que* $\Sigma_{0,\Delta} = \Sigma'_{0,P}$ *dans* $(\gamma)_P$ *pour tout point* P *de* Δ. $\Sigma_{0,\Delta}$ *est de dimension* λ *dans* Δ, *s'il existe effectivement.*

L'ensemble analytique $\Sigma_{0,\Delta}$ dans la remarque précédente sera appelé *la limite de la suite* (1) *d'ensembles analytiques dans* Δ.

Soit $\boldsymbol{F}$ une famille d'ensembles analytiques de dimension λ $(\lambda \leqq n-2, n \geqq 2)$ dans D et soit Δ un domaine partiel (connexe ou non) de D. Nous dirons que *la famille* $\boldsymbol{F}$ *est normale dans* Δ, si de toute suite infinie

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_\nu, \cdots$$

d'ensembles analytiques appartenant à la famille, on peut extraire une suite partielle qui converge analytiquement dans Δ.

Points où la famille $\boldsymbol{F}$ *est normale, le domaine de normalité pour* $\boldsymbol{F}$, *points* (J) *de* $\boldsymbol{F}$ et *l'ensemble* J seront définis pareillement (voir No. 1). Alors *la famille* $\boldsymbol{F}$ *est normale dans* Δ, *si et seulement si* $\boldsymbol{F}$ *est normale en tout point de* Δ. *Le domaine de normalité* D_0 *pour* $\boldsymbol{F}$ *est un domaine partiel (connexe ou non) de* D *et l'ensemble* $J(=D-D_0)$ *est fermé à l'intérieur de* D.

Dans le cas où $\lambda = n-1$ $(n \geqq 1)$ (c'est-à-dire le cas de surfaces analytiques), on peut définir des suites infinies qui convergent analytiquement et familles normales à la manière de la présente section. *Pour le moment, ces familles normales seront appelées familles normales de surfaces analytiques au sens du No. 6.*

Si une famille de surfaces analytiques est normale au sens du No. 1, il est évident qu'elle est normale au sens du No. 6. D'après la proposition 3 dans la section suivante, ces deux définitions seront équivalentes.

7. Propositions.

PROPOSITION 1. *Considérons dans l'espace* (x, y) *de* $n+1$ *variables complexes* $x_1, x_2, \cdots, x_n, y$ *un domaine* $D = (\Delta, |y| < R)$, *où* Δ *est un domaine dans*

l'espace (x) *et* R *est un nombre positif. Soit* Σ *un ensemble analytique dans* D. *Si la projection*[15] *de* Σ *sur le plan* y *est contenue à l'intérieur complet de* $|y|<R$, *la projection* $\underline{\Sigma}$ *de* Σ *sur l'espace* (x) *est un ensemble analytique dans* Δ. *De plus, si* Σ *est de dimension* λ *dans* D, *il en est de même pour* $\underline{\Sigma}$.

En effet, soit (x') un point quelconque de Δ. Nous allons montrer que Σ s'exprime à un voisinage de (x') par l'ensemble des zéros communs d'un nombre fini de fonctions holomorphes.

L'intersection de Σ et de la droit analytique $x_1=x'_1, x_2=x'_2, \cdots, x_n=x'_n$ est un nombre fini de points (x', y'_i) $(i=1, 2, \cdots, m)$, car Σ n'existe pas effectivement dans la partie $|y|\geqq R_0$, R_0 étant un nombre positif plus petit que R. Dans le cas où $m=0$ le problème est trivial, car Σ n'existe pas effectivement au voisinage de (x'). Donc supposons que $m\geqq 1$.

Dans un voisinage de (x', y'_1) Σ est l'ensemble des zéros communs d'un nombre fini de fonctions holomorphes $f_1, f_2, \cdots, f_p$ $(p\geqq 1)$. D'après la condition donnée, il existe au moins une f_i tel que $f_i(x', y)$ ne soit pas nulle identiquement. Supposons que $f_1(x', y)\neq 0$ identiquement, pour fixer les idées. Pour un nombre positif ρ suffisamment petit, $f_1(x', y)$ admet le seul zéro $y=y'_1$ d'ordre $l(\geqq 1)$ dans $|y-y'_1|\leqq\rho$. Grâce à Weierstrass, pour un nombre positif r suffisamment petit

$$f_1(x, y)=F(x, y)\Omega(x, y)$$

dans $[(\gamma), (\Gamma)]$, où (γ) est le polcylindre $|x_i-x'_i|<r$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ dans l'espace (x) et (Γ) est le cercle $|y-y'_i|<\rho$ dans le plan y. F est un polynôme en y de degré l tel que le coefficient de la plus haute puissance soit l et les autres coefficients soient des fonctions holomorphes de (x) dans (γ), et Ω est une fonction holomorphe qui ne s'annule pas dans $[(\gamma), (\Gamma)]$.

Dans le cas où $p=1$, le problème est résolu immédiatement. Donc supposons que $p\geqq 2$. Soit (ξ) un point quelconque de (γ) et soient $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_l$ des racines de $F(\xi, y)=0$; $\eta_i(i=1, 2, \cdots, l)$ sont dans (Γ). Soient $u_2, u_3, \cdots, u_p$ des variables complexes nouvelles, et considérons le produit

$$H(\xi, u)=\prod[f_2(\xi, \eta_i)u_2+\cdots+f_p(\xi, \eta_i)u_p]$$

$(i=1, 2, \cdots, l)$. C'est un polynôme en $u_2, \cdots, u_p$. Soient $g_1(\xi), g_2(\xi), \cdots, g_q(\xi)$ $(q\geqq 1)$ tous les coefficients du polynôme. Alors $g_j(x)$ $(j=1, 2, \cdots, q)$ sont des fonctions uniformes dans (γ). Elles sont holomorphes aux points où les discriminants de tous les facteurs irréductibles de $F(x, y)$ sont non nuls. De plus nous pouvons supposer sans perdre la généralité que f_i $(i=1, 2, \cdots, p)$ soient

15) Soit $(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n, y'_1, y'_2, \cdots, y'_m)$ un point de l'espace (x, y). La projection du point (x', y') sur l'espace (x) est le point (x') de l'espace (x). Soit E un ensemble de points de l'espace (x, y). La projection $\underline{E}$ de l'ensemble E sur l'espace (x) est l'ensemble des projections de tous les points de E sur l'espace (x).

holomorphes au voisinage de $|x_i - x'_i| \leqq r$ $(i=1, 2, \cdots, n)$, $|y-y'_1| \leqq \rho$; par suite les modules de $g_j(x)$ $(j=1, 2, \cdots, q)$ sont bornés dans (γ). Donc $g_j(x)$ $(j=1, 2, \cdots, q)$ sont des fonctions holomorphes dans (γ) (d'après le théorème de Riemann)[16].

Soit (x'', y'') un point quelconque de $\Sigma \cap [(\gamma), (\Gamma)]$. Alors $f_i(x'', y'')=0$ pour $i=1, 2, \cdots, p$. Par suite $H(x'', u) \equiv 0$; $g_i(x'')=0$ pour $j=1, 2, \cdots, q$. Inversement supposons que $g_j(x'')=0$ $(j=1, 2, \cdots, q)$ pour un point (x'') de (γ). Soient $y''_1, y''_2, \cdots, y''_l$ des racines de $F(x'', y)=0$. Car

$$H(x'', u) = \Pi\, [f_2(x'', y''_i)u_2 + \cdots + f_p(x'', y''_i)u_p]$$

$(i=1, 2, \cdots, l)$ est nulle identiquement, au moins un facteur

$$f_2(x'', y''_{i_0})u_2 + \cdots + f_p(x'', y''_{i_0})u_p$$

est nulle identiquement. Par suite (x'', y''_{i_0}) est un point de $\Sigma \cap [(\gamma), (\Gamma)]$. Donc, la projection de $\Sigma \cap [(\gamma), (\Gamma)]$ sur l'espace (x) est l'ensemble des zéros communs des fonctions holomorphes $g_j(x)$ $(j=1, 2, \cdots, q)$ dans (γ).

Soient $[(\gamma)_i, (\Gamma)_i]$ $(i=1, 2, \cdots, m)$ des polycylindres correspondants à (x', y'_i), et soient g^i_j $(j=1, 2, \cdots, q_i)$ des fonctions holomorphes correspondants dans $(\gamma)_i$. Soient $v_1, v_2, \cdots, v_{q_0}$ $(q_0 = \max q_i,\ i=1, 2, \cdots, m)$ des variables complexes nouvelles, et considérons le produit

$$\Pi\, [g^i_1(x)v_1 + g^i_2(x)v_2 + \cdots + g^i_{q_i}(x)v_{q_i}] \quad (i=1, 2, \cdots, m).$$

C'est un polynôme en $v_1, v_2, \cdots, v_{q_0}$, dont tous les coefficients $g_j(x)$ $(j=1, 2, \cdots, s)$ sont des fonctions holomorphes dans $(\gamma)_0 = \cap (\gamma)_i$ $(i=1, 2, \cdots, m)$. De plus, on voit facilement que dans $(\gamma)_0$ la projection $\underline{\Sigma}$ de Σ sur l'espace (x) est l'ensemble des zèros communs de $g_i(x)$ $(i=1, 2, \cdots, s)$.

D'après le mode de raisonnement ci-dessus, si Σ est de dimension λ, il en est de même pour $\underline{\Sigma}$. C. Q. F. D.

PROPOSITION 2. *Toute composante irréductible de Σ'_0 dans la condition (α') 3° du No. 6 est au moins de dimension λ.*

Supposons, par l'absurde, qu'une composante irréductible σ de Σ'_0 soit de dimension $\mu (\leqq \lambda - 1)$. Soit $P' \in \sigma$ un point régulier de Σ'_0. En appliquant une transformation pseudoconforme convenable au voisinage de P', on peut supposer que P' soit l'origine à l'espace nouveau $(u_1, \cdots, u_\mu, y_1, \cdots, y_{n-\mu})$, et que dans un polycylindre

$$(\gamma') \qquad |u_1| < r, \cdots, |u_\mu| < r, |y_1| < R, \cdots, |y_{n-\mu}| < R$$

les projections de $\Sigma'_0 \cap (\gamma')$ sur le plan y_i $(i=1, 2, \cdots, n-\mu)$ n'existent pas effectivement dans $|y_i| \geqq R_0$, où r, R, R_0 $(< R)$ sont des nombres positives convenables. Soient F_i $(i=1, 2, \cdots, n-\mu)$ des ensembles fermés

16) Voir Osgood [9], p. 186.

$$|u_1| \leqq r', \cdots, |u_\mu| \leqq r', |y_1| \leqq R', \cdots, |y_{i-1}| \leqq R',$$
$$R_0 \leqq |y_i| \leqq R', |y_{i+1}| \leqq R', \cdots, |y_{n-\mu}| \leqq R',$$

où $0 < r' < r$, $R_0 < R' < R$. Alors Σ'_0 n'existe pas effectivement dans $F = \cup F_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n-\mu)$. Donc il existe un nombre entier ν'_0 tel que Σ_ν $(\nu \geqq \nu'_0)$ n'existe pas effectivement dans F. L'origine P' étant un point limite de la suite Σ_ν $(\nu = 1, 2, \cdots)$ (d'après la condition (α') 4° du No. 6), pour un nombre entier suffisamment grand ν_0 $(\geqq \nu'_0)$ Σ_{ν_0} existe effectivement dans

$$(\gamma'') \qquad |u_i| < r' \ (i = 1, 2, \cdots, \mu), \ |y_j| < R' \ (j = 1, 2, \cdots, n-\mu).$$

Par suite $\Sigma'_{\nu_0} = \Sigma_{\nu_0} \cap (\gamma'')$ est un ensemble analytique de dimension λ dans (γ''). Car Σ'_{ν_0} n'existe pas effectivement dans $|y_{n-\mu}| \geqq R_0$, d'après la proposition 1 la projection de Σ'_{ν_0} sur l'espace $(u_1, \cdots, u_\mu, y_1, \cdots, y_{n-\mu-1})$ est un ensemble analytique de dimension λ dans

$$|u_i| < r' \ (i = 1, 2, \cdots, \mu), \ |y_j| < R' \ (j = 1, 2, \cdots, n-\mu-1).$$

De même les projections de Σ'_{ν_0} sur l'espace $(u_1, \cdots, u_\mu, y_1, \cdots, y_{n-\mu-k})$ $(k = 2, 3, \cdots, n-\mu)$ sont des ensembles analytiques de dimension λ dans

$$|u_i| < r' \ (i = 1, 2, \cdots, \mu), \ |y_j| < R' \ (j = 1, 2, \cdots, n-\mu-k).$$

En particulier la projection de Σ'_{ν_0} sur l'espace $(u_1, \cdots, u_\mu)$ est un ensemble analytique de dimension λ dans $|u_i| < r'$ $(i = 1, 2, \cdots, \mu)$. Ceci est absurde car $\mu \leqq \lambda - 1$. Donc toute composante irréductible de Σ'_0 est au moins de dimension λ. C. Q. F. D.

PROPOSITION 3. *Soit D un domaine sur l'espace de n variables complexes $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Si une famille $\boldsymbol{F}$ de surfaces analytiques dans D est normale dans D au sens du No. 6, elle est normale dans D au sens du No. 1.*

En effet, soit

$$(1) \qquad S_1, S_2, \cdots, S_\nu, \cdots$$

une suite infinie quelconque de $\boldsymbol{F}$. $\boldsymbol{F}$ étant normale dans D au sens du No. 6, il existe une suite partielle

$$(2) \qquad S_{\nu_1}, S_{\nu_2}, \cdots, S_{\nu_\mu}, \cdots$$

de (1) qui converge analytiquement dans D au sens du No. 6.

Nous allons montrer que la famille $\{S_{\nu_\mu}\}$ $(\mu = 1, 2, \cdots)$ est normale dans D au sens du No. 1.

Soit S_0 la limite de la suite (2) au sens du No. 6, et soit P_0 un point quelconque de S_0. D'après la définition même, dans un polycylindre (γ) contenant P_0 on peut associer à la suite (2) une suite infinie $\{(f^1_\mu, f^2_\mu, \cdots, f^l_\mu)\}$ $(\mu = 0, 1, 2, \cdots; l \geqq 1)$ de systèmes de fonctions satisfaisant à la condition (α') du No. 6. La surface analytique S_0 étant l'ensemble des zéros communs de $f^1_0, f^2_0, \cdots, f^l_0$

dans (γ), au moins une fonction de $f_0^1, f_0^2, \cdots, f_0^l$ ne s'annule identiquement. Supposons que $f_0^1 \neq 0$ identiquement, pour fixer les idées. Soient $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ les corrdonnées du point P_0. En appliquant une transformation pseudoconforme convenable au voisinage de P_0, on peut supposer que $f_0^1(x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0, x_n) \neq 0$ identiquement. Par suite, pour des nombres positives convenables, r, R, $R_0(<R)$, l'ensemble fermé $(\bar{\Delta}, |x_n - x_n^0| \leqq R)$ est contenu dans (γ) et $f_0^1 \neq 0$ dans $(\bar{\Delta}, R_0 \leqq |x_n - x_n^0| \leqq R)$, où $\bar{\Delta}$ est le polycylindre fermé $|x_i - x_i^0| \leqq r$ $(i=1, 2, \cdots, n-1)$ dans l'espace $(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$.

Alors il existe un nombre entier μ_0 suffisamment grand, tel que toute $S_{\nu\mu}$ $(\mu \geqq \mu_0)$ n'existe pas effectivement dans $(\bar{\Delta}, R_0 \leqq |x_n - x_n^0| \leqq R)$. Par suite la famille de surfaces analytiques $\{S_{\nu\mu}\}$ $(\mu \geqq \mu_0)$ satisfait à la condition (β) du No. 2 dans le domaine $(\Delta, |x_n - x_n^0| < R)$, où Δ est le polycylindre $|x_i - x_i^0| < r$ $(i=1, 2, \cdots, n-1)$ dans l'espace $(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$. De plus les degrés des surfaces analytiques de la famille sont bornés, car $\{f_\mu^1\}$ $(\mu=1, 2, \cdots)$ converge uniformément vers f_0^1, et $S_{\nu\mu}$ $(\mu=1, 2, \cdots)$ sont contennues dans $f_\mu^1=0$ respectivement. D'où, d'après le lemme 1, la famille $\{S_{\nu\mu}\}$ $(\mu \geqq \mu_0)$ est normale dans $(\Delta, |x_n - x_n^0| < R)$ au sens du No. 1. Donc, il en est de même de la famille $\{S_{\nu\mu}\}$ $(\mu=1, 2, \cdots)$. D'un autre côté, il est évident que la famille $\{S_{\nu\mu}\}$ $(\mu=1, 2, \cdots)$ est normale au sens du No. 1 en tout point de D qui n'appartient pas à S_0. Donc la famille est normale dans D au sens du No. 1.

Ainsi, d'après la définition même, on peut extraire une suite partielle de la suite (2) qui converge analytiquement dans D au sens du No. 1. La suite infinie (1) de surfaces analytiques de la famille $\boldsymbol{F}$ étant quelconque, la famille $\boldsymbol{F}$ est normale dans D au sens du No. 1. C. Q. F. D.

Soit Δ un domaine dans l'espace de n variables complexes $x_1, x_2, \cdots, x_n$ et soit D un domaine de la forme

$$(\Delta, |y| < R) \ (R > 0)$$

dans l'espace de $n+1$ variables complexes $x_1, x_2, \cdots, x_n, y$. Soit $\boldsymbol{F}$ une famille d'ensembles analytiques de dimension λ dans D. Supposons que pour un nombre positif $R_0(<R)$ la projection de tout ensemble analytique de la famille sur le plan y n'existe pas effectivement dans $|y| \geqq R_0$. Alors

$$\underline{\boldsymbol{F}} = \{\underline{\Sigma}\}, \ \Sigma \in \boldsymbol{F}$$

est une famille d'ensembles analytiques de dimension λ dans Δ, où $\underline{\Sigma}$ est la projection de Σ sur l'espace (x).

Nous appellerons $\underline{\boldsymbol{F}}$ la projection de la famille $\boldsymbol{F}$ d'ensembles analytiques sur l'espace (x).

PROPOSITION 4. *Soit $\boldsymbol{F}$ une famille d'ensembles analytiques de dimension λ dans $D=(\Delta, |y|<R)$. Supposons que, pour un nombre positif $R_0(<R)$, la projection de tout ensemble analytique de la famille sur le plan y n'existe pas*

effectivement dans $|y| \geqq R_0$. *Si la famille* $\boldsymbol{F}$ *est normale dans* D, *la projection* $\underline{\boldsymbol{F}}$ *de* $\boldsymbol{F}$ *sur l'espace* (x) *est normale dans* Δ.

Soient (γ) un polycylindre dans l'espace $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ et (Γ) un cercle dans le plan y de la forme suivante:

$$(\gamma),\ |x_i| < r\ (i=1, 2, \cdots, n);\ (\Gamma),\ |y| < \rho\,.$$

Considérons une suite infinie de polynômes en y de degrés m

$$F_\nu(x, y) = y^m + A_{\nu,1} y^{m-1} + \cdots + A_{\nu,m}\ (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

telle que les coefficients $A_{\nu,i}$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots;\ i = 1, 2, \cdots, m)$ soient holomorphes dans (γ). Soit ρ_0 un nombre positif plus petit que ρ. Supposons que pour tout point (x') de (γ) les equations $F_\nu(x', y) = 0$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ aient toutes les racines $y_1^\nu(x'), y_2^\nu(x'), \cdots, y_m^\nu(x')$ dans $|y| < \rho_0$.

Soit $\{g_\nu(x, y)\}$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ une suite infinie de fonctions holomorphes dans $((\gamma), (\Gamma))$ et considérons pour un point quelconque (x') de (γ) les produits

$$h_\nu(x') = \prod g_\nu(x', y_i^\nu(x'))\ (i = 1, 2, \cdots, m)\ (\nu = 0, 1, 2, \cdots)\,.$$

Alors $h_\nu(x)$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ sont des fonctions holomorphes dans (γ).

Nous allons démontrer d'abord la proposition suivante:

PROPOSITION 5. *Dans les circonstances ci-dessus, si les suites de fonctions* $\{F_\nu\}$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$ *et* $\{g_\nu\}$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$ *convergent uniformément dans* $((\gamma), (\Gamma))$ *respectivement vers* F_0 *et* g_0, *la suite de fonctions* h_ν $(\nu = 1, 2, \cdots)$ *converge uniformément vers* h_0 *à l'intérieur de* (γ).

En effet, soit (x') un point quelconque de (γ) et soient $y_i^\nu(x')$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ les racines des equations $F_\nu(x', y) = 0$. Car la suite $\{F_\nu\}$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$ converge uniformément vers F_0 dans $((\gamma), (\Gamma))$, en changeant convenablement l'arrangement des indices, on peut supposer que les suites de nombres $\{y_i^\nu(x')\}$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ convergent respectivement vers $y_i^0(x')$.

La suite de fonctions $\{g_\nu\}$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$ convergeant uniformément vers g_0 dans $((\gamma), (\Gamma))$, pour un nombre positif quelconque ε il existe un nombre entier N_1 suffisamment grand tel que pour tout $\nu \geqq N_1$

$$|g_\nu(x', y_i^\mu(x')) - g_0(x', y_i^\mu(x'))| < \varepsilon$$

$(i = 1, 2, \cdots, m)$ $(\mu = 1, 2, \cdots)$. $g_0(x, y)$ étant continue aux points $(x', y_i^0(x'))$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$, pour le nombre ε il existe un nombre entier N_2 suffisamment grand tel que pour tout $\mu \geqq N_2$

$$|g_0(x', y_i^\mu(x')) - g_0(x', y_i^0(x'))| < \varepsilon\ (i = 1, 2, \cdots, m)\,.$$

Par suite pour tout $\nu \geqq \max(N_1, N_2)$

$$|g_\nu(x', y_i^\nu(x')) - g_0(x', y_i^0(x'))| < 2\varepsilon\ (i = 1, 2, \cdots, m)\,.$$

Donc, les suites de nombres $\{g_\nu(x', y_i^\nu(x'))\}$ $(\nu=1, 2, \cdots)$ $(i=1, 2, \cdots, m)$ convergent respectivement vers $g_0(x', y_i^0(x'))$. Car

$$h_\nu(x')=\prod g_\nu(x', y_i^\nu(x'))\ (i=1, 2, \cdots, m),$$

la suite de nombres $\{h_\nu(x')\}$ $(\nu=1, 2, \cdots)$ converge vers $h_0(x')$.

Soit δ un domaine quelconque à l'intérieur de (γ). La suite de fonctions $\{g_\nu\}$ convergeant vers g_0 dans $((\gamma), (\Gamma))$, les modules de fonctions g_ν $(\nu=1, 2, \cdots)$ sont bornés dans $(\delta, |y| \leqq \rho_0)$. Il s'ensuit que les modules de fonctions $h_\nu(x)$ $(\nu=1, 2, \cdots)$ sont bornés dans δ. Donc la famille $\{h_\nu(x)\}$ $(\nu=1, 2, \cdots)$ est normale dans δ. De plus, d'après ce que nous venons de voir, pour tout point (x') de δ la suite de nombres $\{h_\nu(x')\}$ $(\nu=1, 2, \cdots)$ converge vers $h_0(x')$. Donc la suite de fonctions $\{h_\nu(x)\}$ $(\nu=1, 2, \cdots)$ converge uniformément vers $h_0(x)$ à l'intérieur de δ.

Le domaine δ étant quelconque à l'intérieur de (γ), la suite $\{h_\nu(x)\}$ $(\nu=1, 2, \cdots)$ converge uniformément vers $h_0(x)$ à l'intérieur de (γ). C. Q. F. D.

(*La démonstration de la proposition* 4). Soit

$$(1) \qquad \underline{\Sigma}_1, \underline{\Sigma}_2, \cdots, \underline{\Sigma}_\nu, \cdots$$

une suite infinie quelconque d'ensembles analytiques de la famille $\underline{\boldsymbol{F}}$ et soit,

$$(2) \qquad \Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_\nu, \cdots$$

une suite d'ensembles analytiques de la famille $\boldsymbol{F}$, telle que les projections de Σ_ν $(\nu=1, 2, \cdots)$ sur l'espace (x) soient $\underline{\Sigma}_\nu$. La famille $\boldsymbol{F}$ étant normale dans D, il existe une suite partielle de (2)

$$(3) \qquad \Sigma_{\nu_1}, \Sigma_{\nu_2}, \cdots, \Sigma_{\nu_\mu}, \cdots$$

qui converge analytiquement dans D. Pour démontrer que la famille $\underline{\boldsymbol{F}}$ est normale dans Δ, il suffit de voir que la suite

$$(4) \qquad \underline{\Sigma}_{\nu_1}, \underline{\Sigma}_{\nu_2}, \cdots, \underline{\Sigma}_{\nu_\mu}, \cdots$$

converge analytiquement dans Δ. Pour simplifier l'écriture, nous allons voir que si une suite

$$(5) \qquad \Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_\nu, \cdots$$

d'ensemble analytiques de la famille $\boldsymbol{F}$ converge analytiquement dans D, la suite

$$(6) \qquad \underline{\Sigma}_1, \underline{\Sigma}_2, \cdots, \underline{\Sigma}_\nu, \cdots$$

d'ensemble analytiques de la famille $\underline{\boldsymbol{F}}$ converge analytiquement dans Δ.

Soit Σ_0 la limite de la suite (5). Σ_0 est un ensemble analytique de dimension λ dans D (s'il existe effectivement), dont la projection sur le plan y est contenue à l'intérieur complet de $|y|<R$. Donc la projection $\underline{\Sigma}_0$ de Σ_0 sur l'espace (x) est un ensemble analytique de dimension λ dans Δ (s'il existe

effectivement).

Soit (x') un point quelconque de $\Delta-\underline{\Sigma}_0$. Alors il est évident que dans un polycylindre contenant (x') on peut associer à la suite (6) une suite de systèmes de fonctions satisfaisant à la condition (α') du No. 6.

Soit (x') un point quelconque de $\underline{\Sigma}_0$. L'intersection de Σ_0 et l'ensemble analytique $x_1=x'_1, \cdots, x_n=x'_n$ est un nombre fini de points. Soient $(x', y'_1), \cdots, (x', y'_m)$ $(m \geqq 1)$ ces points. La suite (5) convergeant analytiquement dans D, il existe un polycylindre (γ) contenant (x', y'_1) tel que l'on puisse associer à la suite (5) une suite de systèmes de fonctions

$$\{(f^1_\nu, f^2_\nu, \cdots, f^l_\nu)\} \ (\nu=0, 1, 2, \cdots)$$

satisfaisant à la condition (α') du No. 6.

Σ_0 étant l'ensemble des zéros communs de $f^1_0, f^2_0, \cdots, f^l_0$ dans (γ), l'ensemble des zéros communs de $f^1_0(x', y), f^2_0(x', y), \cdots, f^l_0(x', y)$ est le point (x', y'_1) au voisinage de (x', y'_1). Donc au moins une fonction de $f^1_0(x', y), \cdots, f^l_0(x', y)$ ne s'annule pas identiquement. Supposons que $f^1_0(x', y) \neq 0$ identiquement, pour fixer les idées. Alors, pour des nombres positives convenables r, ρ, ρ_0 $(<\rho)$ on peut supposer que le polycylindre $(\delta, (\Gamma))$ de la forme

$$\delta, \ |x_i-x'_i|<r \ (i=1, 2, \cdots, n); \ (\Gamma), \ |y-y'_1| \leqq \rho,$$

soit contenu dans (γ) et dans la partie $|y-y'_1| \geqq \rho_0$ de $(\delta, (\Gamma))$ $f^1_0 \neq 0$, $f^1_\nu \neq 0$ $(\nu \geqq \nu'_0)$, ν'_0 étant un nombre entier suffisamment grand.

Grâce à Weierstrass, dans ce polycylindre $(\delta, (\Gamma))$

$$f^1_0=F_0\Omega_0, \ f^1_\nu=F_\nu\Omega_\nu \ (\nu \geqq \nu'_0),$$

où $\Omega_0(x, y)$ et $\Omega_\nu(x, y)$ $(\nu \geqq \nu'_0)$ sont des fonctions holomorphes qui ne s'annulent pas dans $(\delta, (\Gamma))$. F_0 et F_ν $(\nu \geqq \nu'_0)$ sont des polynômes en y de la forme:

$$F_\nu=y^{m_\nu}+A_{\nu,1}y^{m_\nu-1}+\cdots+A_{\nu,m_\nu} \ (\nu=0 \ ou \ \nu \geqq \nu'_0)$$

où les coefficients $A_{\nu,i}(x)$ $(i=1, 2, \cdots, m_\nu)$ sont des fonctions holomorphes dans δ.

La suite f^1_ν $(\nu=1, 2, \cdots)$ convergeant uniformément vers f^1_0 dans (γ), pour un nombre entier ν_0 $(\geqq \nu'_0)$ suffisamment grand les degrés m_ν de F_ν $(\nu \geqq \nu_0)$ sont égaux au degré m_0 de F_0, et les suites

$$\{A_{\nu,i}(x)\} \ (\nu=\nu_0, \nu_0+1, \cdots) \ (i=1, 2, \cdots, m_0)$$

des fonctions holomorphes dans δ convergent uniformément vers $A_{0,i}(x)$ à l'intérieur de δ. Donc la suite

$$\{F_\nu\} \ (\nu=\nu_0, \nu_0+1, \cdots)$$

des polynômes en y converge uniformément vers F_0 dans $(\delta_0, (\Gamma))$, où δ_0 est un polycylindre $|x_i-x'_i|<r_0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ $(0<r_0<r)$ dans l'espace (x).

Soit (x'') un point quelconque de δ_0 et soient $y^\nu_1(x''), \cdots, y^\nu_{m_0}(x'')$ toutes les

racines des equations $F_\nu(x'', y)=0$ ($\nu=0$ ou $\nu \geqq \nu_0$). Soient $u_2, \cdots, u_l$ des variables complexes nouvelles et considérons les produits

$$h_\nu(x'', u)=\prod[f_\nu^2(x'', y_i^\nu(x''))u_2+\cdots+f_\nu^l(x'', y_i^\nu(x''))u_l]$$

($i=1, 2, \cdots, m_0$) ($\nu=0$ ou $\nu \geqq \nu_0$). D'après la proposition 5, $h_\nu(x, u)$ ($\nu=0$ ou $\nu \geqq \nu_0$) sont des fonctions holomorphes dans

$$(x) \in \delta_0, \ |u_2|<\infty, \cdots, \ |u_l|<\infty,$$

et la suite de fonctions $\{h_\nu\}$ ($\nu=\nu_0, \nu_0+1, \cdots$) converge uniformément vers h_0 à l'intérieur du domaine. $h_\nu(x, u)$ sont des polynômes en $u_2, \cdots, u_l$. Soient $g_{\nu,1}(x), \cdots, g_{\nu,p}(x)$ tous les coefficients de $h_\nu(x, u)$. Alors les suites des coefficients correspondants

$$\{g_{\nu,j}(x)\} \ (\nu=\nu_0, \nu_0+1, \cdots) \ (j=1, 2, \cdots, p)$$

convergent uniformément vers $g_{0,j}(x)$ à l'intérieur de δ_0.

De plus la projection de $\Sigma_0 \cap (\delta_0, (\Gamma))$ sur l'espace (x) est l'ensemble des zéros communs de $g_{0,1}, \cdots, g_{0,p}$, et celles de $\Sigma_\nu \cap (\delta_0, (\Gamma))$ ($\nu \geqq \nu_0$) sont contenues dans l'ensemble des zéros communs de $g_{\nu,1}, \cdots, g_{\nu,p}$ (voir la démonstration de la proposition 1).

De même pour tout point (x', y_i') ($i=1, 2, \cdots, m$) il existe un polycylindre $(\delta_0^i, (\Gamma)^i)$ de la forme

$$\delta_0^i, \ |x_j-x_j'|<r_i \ (j=1, 2, \cdots, n); \ (\Gamma)^i, \ |y-y_i'|<\rho_i,$$

et une suite

$$\{(g_{\nu,1}^i, \cdots, g_{\nu,p_i}^i)\} \ (\nu=\nu_0^i, \nu_0^i+1, \cdots)$$

de systèmes de fonctions holomorphes dans δ_0^i satisfaisant aux conditions suivantes:

1° Les suites de fonctions

$$\{g_{\nu,j}^i\} \ (\nu=\nu_0^i, \nu_0^i+1, \cdots) \ (j=1, 2, \cdots, p)$$

convergent uniformément vers $g_{0,j}^i$ à l'intérieur de δ_0^i.

2° La projection de $\Sigma_0 \cap (\delta_0^i, (\Gamma)^i)$ sur l'espace (x) soit l'ensemble des zéros communs des fonctions $g_{0,j}^i, \cdots, g_{0,p}^i$ et celles de $\Sigma_\nu \cap (\delta_0^i, (\Gamma)^i)$ ($\nu \geqq \nu_0^i$) soient contenues dans l'ensemble des zéros communs de $g_{\nu,1}^i, \cdots, g_{\nu,p_i}^i$.

Soit r_0 un nombre positif plus petit que $\min(r_i)$ ($i=1, 2, \cdots, m$) et soit ν_0 un nombre entier plus grand que $\max(\nu_0^i)$ ($i=1, 2, \cdots, m$). Soit $p=\max(p_i)$ ($i=1, 2, \cdots, m_0$) et soient $v_1, v_2, \cdots, v_p$ des variables complexes nouvelles. Considérons les produits

$$k_\nu(x, v)=\prod(g_{\nu,1}^i v_1+\cdots+g_{\nu,p_i}^i v_{p_i})$$

($i=1, 2, \cdots, m$) ($\nu=0$ ou $\nu \geqq \nu_0$). $k_\nu(x, v)$ sont des polynômes en $v_1, \cdots, v_p$, dont tous les coefficients $\varphi_{\nu,1}, \varphi_{\nu,2}, \cdots, \varphi_{\nu,q}$ sont des fonctions holomorphes des varia-

bles (x) dans δ_0, $|x_i - x'_i| < r_0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$. Les suites des coefficients correspondants

$$\{\varphi_{\nu,j}\} \ (\nu=\nu_0, \nu_0+1, \cdots) \ (j=1, 2, \cdots, q)$$

convergent uniformément vers $\varphi_{0,j}$ dans δ_0. De plus, dans δ_0, $\underline{\Sigma}_0$ est l'ensemble des zéros communs de $\varphi_{0,1}, \cdots, \varphi_{0,q}$ et Σ_ν $(\nu \geqq \nu_0)$ sont contenus dans l'ensemble des zéros communs de $\varphi_{\nu,1}, \cdots, \varphi_{\nu,q}$.

Ainsi, dans δ_0, on peut associer à la suite $\{\underline{\Sigma}_\nu\}$ $(\nu=1, 2, \cdots)$ une suite de systèmes de fonctions satifaisant à la condition (α') du No. 6.

Par suite, d'après la définition même, la suite $\{\underline{\Sigma}_\nu\}$ $(\nu=1, 2, \cdots)$ converge analytiquement dans Δ. Donc la famille $\underline{\boldsymbol{F}}$ est normale dans Δ. (Dans le cas où $\lambda=n-1$, la suite $\{\underline{\Sigma}_\nu\}$ $(\nu=1, 2, \cdots)$ de surfaces analytiques converge analytiquement dans Δ au sens du No. 6. Par suite la projection $\underline{\boldsymbol{F}}$ est normale dans Δ au sens du No. 6. Donc, d'après la proposition 3, elle est normale dans Δ au sens du No. 1.) C. Q. F. D.

8. Lemme 2. Soit Δ un domaine dans l'espace de $\lambda(\geqq 1)$ variables complexes $x_1, x_2, \cdots, x_\lambda$. Considérons dans l'espace de $\lambda+\mu$ $(\mu \geqq 2)$ variables complexes $x_1, x_2, \cdots, x_\lambda, y_1, \cdots, y_\mu$ un domaine D de la forme

$$(x) \in \Delta, \ |y_1| < R, \cdots, |y_\mu| < R,$$

R étant un nombre positif. Soit $\boldsymbol{F}$ une famille d'ensembles analytiques de dimension λ dans D satisfaisant à *la condition* (β') suivante:

(β') *Pour* $\boldsymbol{F}$ *il existe un nombre positif* R_0 *plus petit que* R *tel que la projection de tout ensemble analytique* Σ *de la famille* $\boldsymbol{F}$ *sur le plan* y_i *n'existe pas dans la partie* $|y_i| \geqq R_0$, i *étant quelconque.*

Alors, d'après la proposition 1, la projection $\underline{\Sigma}^i$ d'un ensemble analytique quelconque Σ de $\boldsymbol{F}$ sur l'espace (x, y_i) est une surface analytique dans le domaine $D^i=(\Delta, |y_i|<R)$ et la projection de $\underline{\Sigma}^i$ sur le plan y_i n'existe pas dans $|y_i| \geqq R_0$, i étant quelconque. Donc la famille

$$\underline{\boldsymbol{F}}^i = \{\underline{\Sigma}^i\}, \ \Sigma \in \boldsymbol{F}$$

de surfaces analytiques dans D^i satisfait à la condition (β) du No. 2.

La famille $\underline{\boldsymbol{F}}^i$ sera appelée la projection de la famille $\boldsymbol{F}$ sur l'espace (x, y_i).

LEMME 2. *Soit* $\boldsymbol{F}$ *une famille d'ensembles analytiques de dimension* λ *dans* $D=(\Delta, |y_1|<R, \cdots, |y_\mu|<R)$ *satisfaisant à la condition* (β'). *Pour que la famille* $\boldsymbol{F}$ *soit normale dans* D, *il faut et il suffit que toutes les projections* $\underline{\boldsymbol{F}}^i$ *de la famille* $\boldsymbol{F}$ *sur l'espace* (x, y_i) $(i=1, 2, \cdots, \mu)$ *soient normales dans* D^i, *respectivement.*

En effet, d'après la proposition 4, il est évident que cette condition est nécessaire. Donc, il s'agit de montrer qu'elle est suffisante.

Supposons que toutes les projections $\underline{\boldsymbol{F}}^i$ $(i=1, 2, \cdots, \mu)$ soient normales

dans D^i, respectivement. Toute famille $\underline{\boldsymbol{F}}^i$ de surfaces analytiques satisfait à la condition (β) du No. 2 dans $D^i=(\Delta, |y_i|<R)$. Soit $\underline{\Sigma}^i$ une surface analytique quelconque de $\underline{\boldsymbol{F}}_i$, et soit $F^i(x, y_i)$ le polynôme en y_i correspondant à $\underline{\Sigma}^i$ (voir No. 2). $F^i(x, y_i)$ est un polynôme en y_i de degré positif sans facteurs multiples tel que le coefficient de la plus haute puissance soit 1 et les autres coefficients soient des fonctions holomorphes des variables (x) dans Δ. $\underline{\Sigma}^i$ est déterminé par $F^i(x, y_i)=0$ dans D^i et F^i ne s'annule pas dans la partie $|y_i|\geqq R_0$.

Soit

$$\underline{\Sigma}^i_1, \underline{\Sigma}^i_2, \cdots, \underline{\Sigma}^i_\nu, \cdots$$

une suite infinie quelconque de surfaces analytiques de la famille $\underline{\boldsymbol{F}}^i$, i étant quelconque. Soient F^i_ν $(\nu=1, 2, \cdots)$ les polynômes en y_i correspondant à $\underline{\Sigma}^i_\nu$, respectivement. $\underline{\boldsymbol{F}}^i$ étant normale dans D^i, d'après le lemme 1, les degrés des surfaces analytiques de $\underline{\boldsymbol{F}}^i$ sont bornés. Donc on peut extraire de la suite des polynômes

$$\{F^i_\nu\} \ (\nu=1, 2, \cdots)$$

une suite partielle

$$\{F^i_{\nu_p}\} \ (p=1, 2, \cdots)$$

qui converge uniformément à l'intérieur de D^i. (Voir la démonstration du lemme 1.)

Soit

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_\nu, \cdots \tag{1}$$

une suite infinie quelconque d'ensembles analytiques de la famille $\boldsymbol{F}$. Soient $F^i_\nu(x, y_i)$ $(i=1, 2, \cdots, \mu)$ $(\nu=1, 2, \cdots)$ les polynômes en y_i correspondant aux projections $\underline{\Sigma}^i_\nu$ de Σ_ν sur l'espaces (x, y_i). Alors, d'après ce qui précéde, on peut extraire de la suite (1) une suite partielle

$$\Sigma_{\nu_1}, \Sigma_{\nu_2}, \cdots, \Sigma_{\nu_p}, \cdots$$

telle que toutes les suites

$$F^i_{\nu_1}, F^i_{\nu_2}, \cdots, F^i_{\nu_p}, \cdots \ (i=1, 2, \cdots, \mu)$$

de polynômes en y_i convergent uniformément à l'intérieur de D^i, respectivement.

Pour simplifier l'écriture, supposons que pour la suite (1) toutes les suites

$$F^i_1, F^i_2, \cdots, F^i_\nu, \cdots \ (i=1, 2, \cdots, \mu) \tag{2}$$

convergent uniformément à l'intérieur de D^i, respectivement. Pour montrer que la famille $\boldsymbol{F}$ est normale dans D, il suffit de voir que l'on peut extraire de la suite (1) satisfaisant à ces conditions une suite partielle qui converge analytiquement dans D.

Soient F^i_0 $(i=1, 2, \cdots, \mu)$ les limites des suites (2), respectivement. F^i_0 est

un polynômes en y_i de degré positif dont tous les coefficients sont des fonctions holomorphes des variables (x) dans Δ, i étant quelconque. La limite $\underline{\Sigma}_0^i$ de la suite

$$\underline{\Sigma}_1^i, \underline{\Sigma}_2^i, \cdots, \underline{\Sigma}_\nu^i, \cdots$$

est déterminée par $F_0^i=0$ dans D^i. Soit Σ_0^* l'ensemble des zéros communs de $F_0^1, F_0^2, \cdots, F_0^\mu$ dans D. Σ_0^* est un ensemble analytique de dimension λ dans D. Donc, si on associe à la suite (1) la suite de systèmes de fonctions

$$(F_\nu^1, F_\nu^2, \cdots, F_\nu^\mu) \ (\nu=0, 1, 2, \cdots)$$

dans D, elle satisfait à la condition (α') du No. 6 à l'exception de 4°.

$\underline{\Sigma}_0^i$ est une surface analytique dans D^i, dont la projection sur le plan y_i n'existe pas dans $|y_i|>R_0$, i étant quelconque. Soient Φ_0^i $(i=1, 2, \cdots, \mu)$ les polynômes en y_i correspondant aux $\underline{\Sigma}_0^i$, respectivement. Φ_0^i est un polynôme de degré positif sans facteurs multiples et $\underline{\Sigma}_0^i$ est déterminée par $\Phi_0^i=0$ dans D^i, i étant quelconque. Soient m_i $(i=1, 2, \cdots, \mu)$ les degrés des polynômes Φ_0^i et soit (x^0) un point de Δ où aucun des discriminants de Φ_0^i $(i=1, 2, \cdots, \mu)$ ne s'annule. Alors les equations $\Phi_0^i(x^0, y_i)=0$ admettent m_i racines $y_{i,1}^0, y_{i,2}^0, \cdots, y_{i,m_i}^0$ distinctes, respectivement.

Pour un nombre positif ρ suffisamment petit tous les cercles fermés

$$(\bar{\Gamma}_j^i) \qquad |y_i-y_{i,j}^0| \leqq \rho \ (j=1, 2, \cdots, m_i)$$

sont contenus dans $|y_i|<R$, et $(\bar{\Gamma}_j^i)$ n'intersecte pas $(\bar{\Gamma}_k^i)$, où i, k $(\neq j)$ sont quelconque. La surface analytique $F_0^i=0$ étant identique à $\Phi_0^i=0$ dans D^i et la suite $\{F_\nu^i\}$ $(\nu=1, 2, \cdots)$ convergeant uniformément vers F_0^i à l'intérieur de D^i, pour un nombre entier suffisamment grand ν_i, $F_\nu^i(x^0, y_i)$ $(\nu \geqq \nu_i)$ ne s'annule que dans les cercles

$$(\Gamma_j^i) \qquad |y_i-y_{i,j}^0| < \rho \ (j=1, 2, \cdots, m_i).$$

Considérons dans l'espace $(y_1, y_2, \cdots, y_\mu)$ les polycylindres

$$(C)_{j_1, j_2, \cdots, j_\mu} \qquad |y_1-y_{1,j_1}^0| < \rho, \ |y_2-y_{2,j_2}^0| < \rho, \cdots, |y_\mu-y_{\mu,j_\mu}^0| < \rho$$

$(j_i=1, 2, \cdots, m_i; i=1, 2, \cdots, \mu)$. Tout $(C)_{j_1, \cdots, j_\mu}$ n'intersecte pas $(C)_{j'_1, \cdots, j'_\mu}$, si $(j_1, \cdots, j_\mu) \neq (j'_1, \cdots, j'_\mu)$. Soient $\Sigma_\nu(x^0)$ $(\nu=1, 2, \cdots)$ l'intersection de Σ_ν et de l'ensemble analytique $x_1=x_1^0, \cdots, x_\lambda=x_\lambda^0$, respectivement. Alors pour tout $\nu \geqq \nu_0=\max(\nu_i)$ $(i=1, 2, \cdots, \mu)$ la projection de $\Sigma_\nu(x^0)$ sur l'espace (y) n'existe que dans ces polycylindres. Il est facile à voir que l'on peut extraire de la suite (1) une suite partielle

$$(3) \qquad \Sigma_{\nu_1}, \Sigma_{\nu_2}, \cdots, \Sigma_{\nu_p}, \cdots$$

telle que la projection de tout $\Sigma_{\nu_p}(x^0)$ sur l'espace (y) existe effectivement dans $(C)_1, (C)_2, \cdots, (C)_q$ et qu'elle n'existe pas effectivement dans $(C)_{q+1}, \cdots, (C)_m$ $(m=m_1m_2\cdots m_\mu)$, où $(C)_i$ $(i=1, 2, \cdots, m)$ étant un arrangement de $(C)_{j_1, \cdots, j_\mu}$ et

q étant un nombre entier ($\geqq 1$) indépendant de ν_p.

Soient $(y^0)_i$ $(i=1, 2, \cdots, m)$ les centres de $(C)_i$, respectivement. Considérons une transformation linéaire non singulière de l'espace (x, y) de la forme suivante,

$$x_1 = x_1, \cdots, x_\lambda = x_\lambda, z = y_1 + \varepsilon_2 y_2 + \cdots + \varepsilon_\mu y_\mu, y_2 = y_2, \cdots, y_\mu = y_\mu,$$

où $\varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_\mu$ sont des constantes convenables telles que les projections de tous les points $((x^0), (y^0)_i)$ $(i=1, 2, \cdots, m)$ sur le plan z soient distinctes. Soient $R', R'_0 (< R')$ deux nombres positifs suffisamment grands. Alors tout Σ_{ν_p} $(p=1, 2, \cdots)$ est un ensemble analytique dans le domaine

$$(\Delta, |z| < R', |y_2| < R, \cdots, |y_\mu| < R)$$

de l'espace $(x_1, \cdots, x_\lambda, z, y_2, \cdots, y_\mu)$, dont les projections sur les plans z, y_i $(i=2, \cdots, \mu)$ n'existent pas effectivement dans les parties $|z| \geqq R'_0$, $|y_i| \geqq R_0$, respectivement. La projection $\underline{\Sigma}^z_{\nu_p}$ de Σ_{ν_p} sur l'espace (x, z) est une surface analytique dans

$$D^z = (\Delta, |z| < R'),$$

et la famille de surfaces analytiques

$$\{\underline{\Sigma}^z_{\nu_p}\} \ (p=1, 2, \cdots)$$

satisfait à la condition (β) du No. 2 dans D^z.

Soient $F^z_{\nu_p}(x, z)$ $(p=1, 2, \cdots)$ les polynômes en z correspondant aux $\underline{\Sigma}^z_{\nu_p}$. Les degrés de la famille étant bornés, on peut extraire de la suite

$$\{F^z_{\nu_p}\} \ (p=1, 2, \cdots)$$

une suite partielle

$$\{F^z_{\nu'_p}\} \ (p=1, 2, \cdots)$$

qui converge uniformément à l'intérieur de D^z.

Soit F^z_0 la limite de la suite, et soit Σ'_0 l'ensemble des zéros communs de $F^1_0, \cdots, F^\mu_0, F^z_0$ dans D de l'espace (x, y). Alors tous les points $((x^0), (y^0)_i)$ $(i=1, 2, \cdots, q)$ appartiennent à Σ'_0 et aucun de $((x^0), (y^0)_i)$ $(i \geqq q+1)$ n'appartient pas à Σ'_0. Soit Σ_0 l'ensemble analytique dans D consistant en toutes les composantes de dimension λ de Σ'_0. L'intersection de Σ_0 et de l'ensemble analytique $x_1 = x^0_1, \cdots, x_\lambda = x^0_\lambda$ est l'ensemble des points $((x^0), (y^0)_i)$ $(i=1, 2, \cdots, q)$.

Si on associe à la suite

$$\Sigma_{\nu'_1}, \Sigma_{\nu'_2}, \cdots, \Sigma_{\nu'_p}, \cdots \tag{4}$$

la suite de systèmes de fonctions

$$\{(F^1_{\nu'_p}, F^2_{\nu'_p}, \cdots, F^\mu_{\nu'_p}, F^z_{\nu'_p})\}$$

dans D, elle satisfait à la condition (α') 1°, 2°, 3° du No. 6. De plus, tout point de Σ_0 satisfait à la condition (α') 4°, car tous les points $((x^0), (y^0)_i)$ $(i=1, 2, \cdots, q)$ satisfont à la condition.

Soit D_0 un domaine quelconque à l'intérieur de D. D'après ce qui précède il est facile de voir que l'on peut associer à la suite (4) une suite de systèmes de fonctions dans D_0 satisfaisant à la condition (α'), de la forme suivante:

$$(F^1_{\nu' p}, \cdots, F^{\mu}_{\nu' p}, F^{2_1}_{\nu' p}, \cdots, F^{2k}_{\nu' p}) \quad (p=0, 1, 2, \cdots)$$

où k est un nombre entier ($1 \leqq k \leqq \lambda+1$).

D_0 étant quelconque à l'intérieur de D, la suite (4) converge analytiquement dans D. Donc la famille $\boldsymbol{F}$ est normale dans D. C. Q. F. D.

9. Ensembles pseudoconcaves et domaines pseudoconvexes d'ordre général. Soit D un domaine dans l'espace de n variables complexes $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Un ensemble de points de D sera appelé *ensemble pseudoconcave d'ordre* λ ($0 \leqq \lambda \leqq n-1$) *dans* D, s'il jouit des propriétés suivantes:

1° L'ensemble E est fermé à l'intérieur de D.

2° (Théorème de la continuité de dimension λ) Soit $\lambda \geqq 1$ et soit (ξ) un point de E. Si pour un nombre positif ρ l'ensemble

$$x_1=\xi_1, \cdots, x_\lambda=\xi_\lambda, \; 0<|x_{\lambda+1}-\xi_{\lambda+1}|^2+\cdots+|x_n-\xi_n|^2<\rho^2$$

reste extérieur à E, on peut trouver un nombre positif r de façon qu'à tout point $(x'_1, x'_2, \cdots, x'_\lambda)$ dans

$$|x_i-\xi_i|<r \quad (i=1, 2, \cdots, \lambda)$$

corresponde au moins un point $(x'_{\lambda+1}, \cdots, x'_n)$ dans

$$\sum |x_i-\xi_i|^2<\rho^2 \quad (i=\lambda+1, \cdots, n)$$

tel que le point (x') appartienne à E.

3° La propriété 2° de E admet toute transformation pseudoconforme biunivoque au voisinage d'un point quelconque de E.

En particulier tout ensemble satisfaisant à la condition 1° est un ensemble pseudoconcave d'ordre 0 dans D. Un ensemble pseudoconcave d'ordre $n-1$ est un ensemble pseudoconcave ordinaire. (Voir No. 3.)

Un ensemble pseudoconcave d'ordre λ' ($>\lambda$) est un ensemble pseudoconcave d'ordre λ. Un ensemble analytique de dimension m est un ensemble pseudoconcave d'ordre λ, si et seulement si $\lambda \leqq m$.

Soit D un domaine dans l'espace $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ et soit E le complément de D. Nous appellerons D *domaine pseudoconvexe d'ordre* λ *dans l'espace* (x), si l'ensemble E est un ensemble pseudoconcave d'ordre λ dans l'espace (x).

En particulier un domaine pseudoconvexe d'ordre $n-1$ dans l'espace $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est un domaine pseudoconvexe ordinaire. Tout domaine dans l'espace (x) est un domaine pseudoconvexe d'ordre 0.

Nous appliquons le terme 'domaine pseudoconvexe d'ordre λ' aussi aux domaines non connexes.

Soit D un domaine pseudoconvexe d'ordre λ $(0 \leqq \lambda \leqq n-1)$ dans l'espace $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ et soit E un ensemble pseudoconcave d'ordre λ dans D. Alors le domoine $D' = D - E$ est un domaine pseudoconvexe d'ordre λ dans l'espace (x).

La définition pour les domaines pseudoconvexes d'ordre général ci-dessus correspond à celle de domaines pseudoconvexes (A) ordinaire. On peut définir les domaines pseudoconvexes (B) et (C) d'ordre général, pareillement. (Voir Oka [7], No. 9 et No. 10.) Ces trois sortes de domaines pseudoconvexes d'ordre général signifieront une seule et la même sorte. (Voir Oka [7], No. 11.)

En particulier un domaine pseudoconvexe D d'ordre λ de l'espace $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ satisfera au *théorème de la continuité* (C) *de dimension* λ suivant.

Soit $\lambda \geqq 1$. Considérons dans l'espace (x) trois domaines de la forme suivante:

(Δ_1) $|x_i - a_i| < r$ $(i = 1, 2, \cdots, \lambda)$, $\rho_1^2 < |x_{\lambda+1} - a_{\lambda+1}|^2 + \cdots + |x_n - a_n|^2 < \rho^2$

(Δ_2) $|x_i - a_i| < r'$ $(i = 1, 2, \cdots, \lambda)$, $|x_{\lambda+1} - a_{\lambda+1}|^2 + \cdots + |x_n - a_n|^2 < \rho^2$

(Δ) $|x_i - a_i| < r$ $(i = 1, 2, \cdots, \lambda)$, $|x_{\lambda+1} - a_{\lambda+1}|^2 + \cdots + |x_n - a_n|^2 < \rho^2$

où (a) est un point quelconque à l'espace (x), et r, r' $(< r)$, ρ, ρ_1 $(< \rho)$ sont des nombres positifs quelconques. Alors, *si le domaine $\Delta_1 \cup \Delta_2$ est contenu dans D, le domaine Δ est nécessairement contenu dans D.*

Dans le cas où $\lambda = 0$, nous pouvons considérer que tout domaine satisfasse au théorème de la continuité (C) de dimension 0. Le théorème de la continuité (C) ordinaire est celui de dimension $n-1$.

W. Rothstein a indiqué le théorème de la continuité (C) de dimension λ $(\leqq n-2)$ dans le problème du prolongement d'ensembles analytiques[17].

10. Théorème 2. *Soit D un domaine dans l'espace de n variables complexes $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Soit $\boldsymbol{F}$ une famille d'ensembles analytiques de dimension λ $(0 \leqq \lambda \leqq n-2)$ dans D. L'ensemble J des points (J) de la famille $\boldsymbol{F}$ est un ensemble pseudoconcave d'ordre λ dans D. En particulier, si D est pseudoconvexe d'ordre λ, le domaine de normalité D_0 pour $\boldsymbol{F}$ est encore pseudoconvexe d'ordre λ.*

A l'aide du lemme 2 (No. 8) et du lemme de Grauert (No. 4), la démonstration peut se calquer sur celle qui est donnée dans No. 5 pour des familles de surfaces analytiques.

Université féminine de Nara

Bibliographie

[1] H. Grauert, Charakterisierung der holomorph vollständigen komplexen Räume, Math. Ann., **129** (1955), 233-259.

17) Rothstein [**10**], p. 346, Satz III et [**11**], p. 135, Satz 10.

[2] T. Nishino, Sur les familles de surfaces analytiques, J. Math. Kyoto Univ., **1** (1962), 357-377.

[3] T. Nishino, Sur les ensembles pseudoconcaves, J. Math. Kyoto Univ., **1** (1962), 225-245.

[4] T. Nishino, Les ensembles analytiques et les domaines, J. Math. Kyoto Univ., **1** (1962). 379-384.

[5] K. Oka, Note sur les familles de fonctions analytiques multiformes etc., J. Sci. Hiroshima Univ., **4** (1934), 93-98.

[6] K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables VI-Domaines pseudoconvexes, Tōhoku Math. J., **49** (1942), 15-52.

[7] K. Oka, IX-Domaines finis sans point critique intérieur, Jap. J. Math., **23** (1953), 97-155.

[8] K. Oka, X-Une mode nouvelle engendrant les domaines pseudoconvexes, Jap. J. Math., **32** (1962), 1-12.

[9] W.F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie II_1, 1929.

[10] W. Rothstein, Die Fortsetzung vier und höherdimensionaler analytisher Flächen des R_{2n} ($n \geqq 3$), Math. Ann., **121** (1950), 340-355.

[11] W. Rothstein, Zur Theorie der analytishen Mannigfaltigkeiten im Raume von n komplexen Veränderlichen, Math. Ann., **129** (1955), 96-138.