J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
39-2 (1999) 215-232

Equations fonctionnelles généralisées: transversalité et principalité de l'idéal de Bernstein-Sato

Par

J. BRIANÇON et H. MAYNADIER

Introduction

Notons $\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n,0}$ l'anneau des germes de fonctions holomorphes à l'origine de $\mathbf{C}^n$, $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0}$ (ou $\mathscr{D}$, s'il n'y a pas d'ambiguïté) l'anneau des germes d'opérateurs différentiels, $\mathbf{C}[s] = \mathbf{C}[s_1, \dots, s_p]$ les polynômes à p indéterminées, et $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0}[s] = \mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0} \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[s]$. A un germe $f = (f_1, \dots, f_p)$ de $\mathscr{O}^p_{\mathbf{C}^n,0}$ nous associons son "idéal de Bernstein-Sato" $\mathscr{B}(f)$, ensemble des polynômes $b(s)$ de $\mathbf{C}[s]$ satisfaisant une équation fonctionnelle de la forme:

$$b(s)f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p} \in \mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0}[s]f_1^{s_1+1} \cdots f_p^{s_p+1}$$

(en abrégé: $b(s)f^s \in \mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0}[s]f^{s+1}$). Dans [S1] et [S2], C. Sabbah a démontré l'existence de polynômes de $\mathscr{B}(f)$ qui sont des produits de formes affines à coefficients rationnels. Les questions de fond concernent bien sûr les liens entre l'idéal $\mathscr{B}(f)$ et la géométrie de l'application f (la monodromie par exemple, lorsque la fibre de Milnor de f existe). Nous n'abordons pas ici ces problèmes; nous essayons seulement de répondre à quelques questions naturelles qui viennent immédiatement à l'esprit, comme, en particulier, la question de la principalité de l'idéal $\mathscr{B}(f)$.

Dans [S3] (voir également [B-B-M-M] et [B]) C. Sabbah a démontré que, sous des conditions fortes de "transversalité", il existe dans $\mathscr{B}(f)$ un polynôme de la forme: $b_1(s_1)b_2(s_2) \cdots b_p(s_p)$. Le premier problème que nous abordons ici, est l'étude de la réciproque: l'existence dans $\mathscr{B}(f)$ d'un polynôme de la forme donnée ci-dessus suffit-elle à entraîner les conditions de transversalité?
Nous faisons un premier petit pas dans cette direction en montrant que f est lisse si et seulement si $\mathscr{B}(f)$ est engendré par $(s_1 + 1)(s_2 + 1) \cdots (s_p + 1)$. Puis nous faisons un second pas en démontrant la réciproque en question dans le cas particulier $n = p = 2$; en fait, dans ce cas, les conditions de transversalité sont équivalentes à la propriété suivante: les réduites des courbes définies par f_1 et f_2 sont lisses et transverses au sens usuel.

Revenons à la définition de l'idéal de Bernstein-Sato; une question naïve se pose tout de suite: l'idéal $\mathscr{B}(f)$ est-il principal? Dans [M], H. Maynadier a montré le résultat suivant plutôt étonnant: lorsque $n = p = 2$, et $f = (f_1, f_2)$ est

Communicated by Prof. K. Ueno, July 14, 1997

une intersection complète quasi-homogène formée de deux fonctions à singularité isolée, alors l'idéal de Bernstein-Sato de f est principal. Par ailleurs, dans [Gy], A. Gyoja montre que l'annulation de certains modules de cohomologie suffit pour assurer la principalité. La difficulté de la construction d'un contre-exemple réside donc dans le choix de f assez compliqué pour que $\mathscr{B}(f)$ ne soit pas principal, mais assez simple pour être capable de conduire le calcul de $\mathscr{B}(f)$ à son terme; ce calcul passe (évidemment?) par la détermination d'annulateurs, et utilise les résultats de [B-B-M-M] sur certaines variétés caractéristiques.

Nous nous plaçons sous les hypothèses de transversalité et nous commençons par dégager un critère de principalité pour l'idéal $\mathscr{B}(f)$; en fait, si $\mathscr{B}(f)$ est principal, il est engendré par le produit des polynômes de Bernstein, $b(f_1)(s_1)\cdots b(f_p)(s_p)$, des fonctions $f_1,\ldots,f_p$.

Au passage, nous démontrons, pour le polynôme de Bernstein d'une seule fonction F, le résultat d'équisingularité très satisfaisant suivant: ce polynôme est constant le long de chaque strate d'une stratification de la variété source de F compatible avec $F^{-1}(0)$ satisfaisant la condition de frontière et la condition a_F de Thom (donc, en particulier, pour une stratification de Whitney d'après [B-M-M]).

Nous prenons alors: $p=2$ et $f=(f_1,f_2)$ vérifiant des conditions entraînant la transversalité; précisément, nous supposons f_1 lisse et f_2 définissant une déformation à nombre de Milnor constant de la singularité isolée $f^{-1}(0)$; nous savons, par ce qui précède, que le polynôme de Bernstein $b_2(s_2)$ de f_2 est constant le long du lieu singulier de $f_2^{-1}(0)$, et que l'idéal de Bernstein-Sato de f est principal si et seulement si il contient le polynôme $(s_1+1)b_2(s_2)$. Finalement, dans ce cadre et pour $n=3$, nous donnons un contre-exemple à la principalité de $\mathscr{B}(f)$.

Rappels sur la transversalité et les équations fonctionnelles. W_f est l'espace conormal relatif à f supposée définie sur un voisinage Ω de l'origine: c'est l'adhérence dans l'espace cotangent $T^*\Omega$ des espaces conormaux aux fibres lisses de f:

$$W_f=\overline{\left\{\left(x,\sum_{j=1}^{p}\lambda_j df_j(x)\right);x\in\Omega,\lambda\in\mathbf{C}^p\right\}}$$

Nous introduisons également:

$$W_f^{\#}=\overline{\left\{\left(x,\sum_{j=1}^{p}\lambda_j df_j(x),\lambda_1 f_1(x),\ldots,\lambda_p f_p(x)\right);x\in\Omega,\lambda\in\mathbf{C}^p\right\}}$$

contenu dans $T^*\Omega\times\mathbf{C}^p$.

Enfin, π désigne la projection canonique de $T^*\Omega$ ou de W_f sur Ω.

Pour une partie I de l'ensemble d'indices $\{1,2,\ldots,p\}$ nous notons $f_I=(f_j)_{j\in I}$ l'application définie par la sous-famille de fonctions correspondant aux indices choisis.

Nous rappelons ici quelques résultats sur la transversalité dont nous allons nous servir; pour les détails nous renvoyons à [B-B-M-M].

W_f est la variété caractéristique du $\mathcal{D}_\Omega$-Module $\mathcal{D}_\Omega f^s$ (contenu dans $\mathcal{O}_\Omega\left[\frac{1}{f_1\cdots f_p}, s\right] f^s$), et $W_f^\#$ est la variété caractéristique du $\mathcal{D}_\Omega[s]$-Module $\mathcal{D}_\Omega[s]f^s$ (contenu dans le même module que précédemment).

(F): on dit que la condition (F) est satisfaite lorsque la projection naturelle de $W_f^\#$ sur W_f est finie.

La condition (F) implique que $\mathcal{D}_\Omega[s]f^s$ est un $\mathcal{D}_\Omega$-Module cohérent, et, pour tout indice j il existe un "bon" opérateur en s_j annulant f^s:

$$P_j = s_j^k + A_1 s_j^{k-1} + \cdots + A_k$$

avec, pour $l = 1, \ldots, k$, $A_l \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}^n,0}$ de degré au plus l.

(LS): on dit que la condition (LS) (condition dite de Loeser-Sabbah) est satisfaite si:

(L) le lieu critique de f est contenu dans la réunion des hypersurfaces $f_j^{-1}(0)$

(S) f est sans éclatement en codimension zéro (c'est-à-dire: $f \circ \pi : W_f \to \mathbf{C}^p$ est équidimensionnelle).

(T): nous disons que f vérifie les conditions de transversalité (T) si, pour deux parties disjointes quelconques I et J de $\{1, 2, \ldots, p\}$, les espaces conormaux relatifs W_{f_I} et W_{f_J} aux applicationss f_I et f_J correspondantes ne se rencontrent que suivant la section nulle du fibré cotangent.

Lorsque la condition (LS) est vérifiée, il existe, pour tout indice $j \in \{1, \ldots, p\}$, un polynôme non nul d'une variable, $c_j(s_j)$, satisfaisant une équation fonctionnelle:

$$c_j(s_j) f^s \in \mathcal{D}_{\mathbf{C}^n,0}[s] f_j f^s$$

C. Sabbah a démontré dans [S3] que la condition (LS) implique la condition de finitude (F), puis J. Briançon a prouvé l'équivalence entre (LS) et (T) (voir [B]).

1. Idéal de Bernstein-Sato et lissité

Rappelons le résultat suivant dans le cas d'une seule fonction:

Proposition 1.1. *Soit F un germe de fonction holomorphe à l'origine de $\mathbf{C}^n$, nulle en 0; les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *F est lisse*

(ii) *le polynôme de Bernstein de F est égal à $(t+1)$.*

Cette équivalence a été obtenue par J. Briançon et Ph. Maisonobe dans [B-M, Proposition 2.6 p. 226].

On considère maintenant un germe $f = (f_1, \ldots, f_p) : \mathbf{C}^n, 0 \to \mathbf{C}^p, 0$ analytique. On peut voir facilement que $\mathcal{B}(f)$ est contenu dans l'idéal $\mathbf{C}[s].(s_1+1)(s_2+1)\cdots(s_p+1)$ dès que f vérifie la propriété: $\forall j \in \{1, \ldots, p\}$, $f_j^{-1}(0) \not\subset \bigcup_{k\neq j} f_k^{-1}(0)$. En effet, pour cela, il suffit de spécialiser $s_1 = -1$ (par exemple) dans l'équation fonctionnelle, et de comparer les lieux polaires des deux membres dans $\mathcal{O}\left[\frac{1}{f_1 f_2 \cdots f_p}, s_2, \ldots, s_p\right] f_2^{s_2} \cdots f_p^{s_p}$.

Le but de cette partie est de montrer que l'égalité de ces idéaux $\mathscr{B}(f)$ et $\mathbf{C}[s].(s_1+1)(s_2+1)\cdots(s_p+1)$ caractérise les germes analytiques lisses. Supposons donc que le polynôme $w(s)=(s_1+1)\cdots(s_p+1)$ réalise une équation fonctionnelle de Bernstein: $w(s)f^s=Pf^{s+1}$ où $P=P(s_1,\dots,s_p)$ est un opérateur dans $\mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0}[s]$. On "ajoute" les variables $(y_1,\dots,y_p)$ et on pose:

$$F_j=\exp(y_j)f_j \qquad \text{pour } j=1,\dots,p; \qquad F^s=F_1^{s_1}\cdots F_p^{s_p}$$

$$\exp(y)=\exp(y_1+\cdots+y_p); \quad \text{on a :} \quad \frac{d}{dy_j}F^s=s_jF^s$$

On introduit de plus les variables $u=(u_1,\dots,u_p)$ et on note:

$$(uF)^s=u^sF^s \qquad \text{avec} \qquad u^s=u_1^{s_1}u_2^{s_2}\cdots u_p^{s_p}$$

Enfin: $\tau(u)=u_1u_2\cdots u_p$.

En multipliant l'équation fonctionnelle par $u^{s+1}\exp((s_1+1)y_1+\cdots+(s_p+1)y_p)$ on obtient:

$$\tau(u)\exp(y)w(s)(uF)^s=P(s)(uF)^{s+1}=Q(uF)^{s+1} \tag{1}$$

où Q est l'opérateur indépendant de $s: Q=P\left(\frac{d}{dy_1}-1,\dots,\frac{d}{dy_p}-1\right)$.

Etant donné un entier naturel N, une famille d'entiers $\sigma=(\sigma_1,\dots,\sigma_p)$ dans $\{-1,0,1,\dots,N+p-1\}^p$ satisfaisant à $|\sigma|=\sigma_1+\cdots+\sigma_p=N$, nous spécialisons l'équation (1) en σ; puis nous la multiplions par le coefficient binomial

$$C_{N+p}^{(\sigma_1+1,\dots,\sigma_p+1)}=\frac{(N+p)!}{(\sigma_1+1)!\cdots(\sigma_p+1)!}$$

pour obtenir:

$$\tau(u)\exp(y)\frac{(N+p)!}{N!}C_N^{(\sigma_1,\dots,\sigma_p)}(uF)^\sigma=QC_{N+p}^{(\sigma_1+1,\dots,\sigma_p+1)}(uF)^{\sigma+1} \tag{2}$$

Remarquons que dans cette formule, dès que l'un des entiers σ_j dépasse strictement N, l'un des autres est égal à -1 (pour respecter $|\sigma|=N$) et $w(\sigma)$ est nul; nous considérons la formule (2) comme valable en prenant le premier membre égal à 0 dès que l'un des entiers σ_j est égal à -1.

Faisons parcourir à σ les valeurs de $\{-1,0,1,\dots,N+p-1\}^p$ avec $|\sigma|=N$; alors $(\sigma_1+1,\dots,\sigma_p+1)$ parcourt l'ensemble des multi-indices positifs ou nuls de somme $N+p$, et en ajoutant toutes ces égalités (2) nous obtenons:

$$\tau(u)\exp(y)\frac{(N+p)!}{N!}G^N=QG^{N+p} \tag{3}$$

avec $G=u_1\exp(y_1)f_1+\cdots+u_p\exp(y_p)f_p$.

Nous déduisons alors de (3) l'équation fonctionnelle "formelle":

$$\tau(u)\exp(y)(t+1)(t+2)\cdots(t+p)G^t=QG^{t+p}$$

en remarquant que cette égalité est polynomiale en t, vérifiée lorsqu'on spécialise t en un entier naturel.

Nous pouvons maintenant écrire l'opérateur Q sous la forme:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{d}{dx_i} + \sum_{j=1}^{p} B_j \frac{d}{dy_j} + C$$

où les A_i et B_j sont des opérateurs, et C est une fonction holomorphe. En faisant opérer $\frac{d}{dx_i}$ et $\frac{d}{dy_j}$ puis en spécialisant $t = -p$ nous voyons que C est nulle et qu'on peut simplifier par $(t+p)$.

En poursuivant ce procédé, nous arrivons finalement à l'équation fonctionnelle:

$$\tau(u)\exp(y)(t+1)G^t = R\left(x, u, y, \frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}\right)G^{t+1}$$

Il en résulte que pour tout u fixé dans $(\mathbf{C}^*)^n$, $\tau(u)$ étant non nul, le polynôme de Bernstein de la fonction $G_u = u_1 \exp(y_1) f_1 + \cdots + u_p \exp(y_p) f_p$ à l'origine est trivial (égal à $(t+1)$). La proposition 1.1 nous assure alors que la fonction G_u est lisse à l'origine pour tout $u \in (\mathbf{C}^*)^n$.

Enonçons maintenant:

Proposition 1.2. *Etant donné un germe d'application holomorphe:*

$$f = (f_1, \ldots, f_p) : \mathbf{C}^n, 0 \to \mathbf{C}^p, 0$$

les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) *f est lisse*

(ii) *l'idéal de Bernstein-Sato de f est engendré par le produit:*

$$(s_1+1)(s_2+1)\cdots(s_p+1)$$

Terminons la démonstration dans le sens non évident: nous supposons que f vérifie (ii) et nous montrons que f est lisse par récurrence sur p; le cas $p=1$ est donné par la proposition 1.1. En "spécialisant" $s_j = 0$ dans l'équation fonctionnelle donnée par (ii) et en appliquant l'hypothèse de récurrence à $\phi_j = (f_k)_{k \neq j}$, nous savons que ϕ_j est lisse (et cela pour tout $j = 1, \ldots, p$). Si le germe f n'était pas lisse, il existerait une relation non triviale entre les différentielles des fonctions f_j à l'origine:

$$u_1 df_1(0) + \cdots + u_p df_p(0) = 0$$

Mais $u_j = 0$ est impossible puisque nous savons déjà que ϕ_j est une submersion. Donc u est dans $(\mathbf{C}^*)^n$ et d'après ce que nous avons vu plus haut, G_u est une fonction des variables x et y lisse à l'origine. Nous arrivons ainsi à la contradiction:

$$dG_u(0,0) = u_1 df_1(0) + \cdots + u_p df_p(0) = 0$$

2. Transversalité et équations fonctionnelles en dimension deux

Il s'agit ici de démontrer le résultat suivant:

Proposition 2.1. *Soit* $f = (f_1, f_2) : \mathbf{C}^2, 0 \to \mathbf{C}^2, 0$ *un germe d'intersection complète. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *il existe des polynômes non nuls* $c(s_1)$ *et* $d(s_2)$ *tels que* $c(s_1)d(s_2) \in \mathscr{B}(f)$,

(ii) f_1 *et* f_2 *sont transverses.*

D'après le lemme 1 et le théorème 4 de [B], la condition (ii) entraîne que, par changement de coordonnées, $f_1 = X_1^{a_1}$, $f_2 = X_2^{a_2}$. Il est alors clair que (ii) implique (i).

Nous allons maintenant donner quelques préliminaires à la preuve de la réciproque.

Les trois résultats suivants sont valables pour un nombre quelconque de variables.

Lemme 2.2. *Etant donné un morphisme* $f = (f_1, f_2) : \mathbf{C}^n, 0 \to \mathbf{C}^2, 0$, *la condition (i) est équivalente à*

(i′) il existe des polynômes non nuls $c(s_1)$ *et* $d(s_2)$ *tels que* $c(s_1)d(s_2) \in \mathscr{B}(f)$, *où* d *est sans racine dans* $\mathbf{N}$.

Preuve. L'équation de Bernstein de la fonction f_2 permet d'obtenir

$$\forall k \in \mathbf{N}^* \ \exists a \in \mathbf{C}[s_2] \ \exists P \in \mathscr{D}[s_2], \qquad a(s_2) f_2^{s_2} = P f_2^{s_2+k}$$

où a n'a que des racines strictement négatives (a est un itéré du polynôme de Bernstein de f_2). Soit r le degré en les dérivations de l'opérateur P. Alors, on déduit de l'équation précédente l'existence d'un opérateur $Q \in \mathscr{D}[s]$ tel que:

$$a(s_2) f_1^{s_1} f_2^{s_2} = Q f_1^{s_1 - r} f_2^{s_2+k}.$$

Par suite, si $c(s_1)d(s_2)$ est dans $\mathscr{B}(f)$, en itérant on obtient:

$$\left[\prod_{l=0}^{r} c(s_1 - l)\right]\left[\prod_{l=k}^{k+r} d(s_2 + l)\right] a(s_2) f_1^{s_1} f_2^{s_2} = R f_1^{s_1+1} f_2^{s_2+k+r+1} \subset \mathscr{D}[s] f_1^{s_1+1} f_2^{s_2+1}.$$

Il suffit alors de choisir k assez grand pour que $d(s_2 + k)$ n'ait pas de racine dans $\mathbf{N}$ pour conclure.

Lemme 2.3. *Si le morphisme* $f = (f_1, f_2) : \mathbf{C}^n, 0 \to \mathbf{C}^2, 0$ *vérifie la condition (i′), on a:*

$$\forall k \in \mathbf{N}, \qquad [c(s_1)]^k f_1^{s_1} \in \mathscr{D}[s] f_2^k f_1^{s_1}. \tag{1}$$

Preuve. Par hypothèse sur d, on peut spécialiser s_2 en 0 dans l'équation de Bernstein donnée par (i′), et écrire

$$c(s_1) f_1^{s_1} \in \mathscr{D}[s] f_2 f_1^{s_1}.$$

Après multiplication par $c(s_1)d(1)$, il vient

$$[c(s_1)]^2 f_1^{s_1} \in \mathscr{D}[s] f_2^2 f_1^{s_1},$$

et l'on recommence ... D'où le résultat.

Proposition 2.4. *Soit un germe analytique $f = (f_1, f_2) : \mathbf{C}^n, 0 \to \mathbf{C}^2, 0$, avec f_1 à singularité isolée, vérifiant la condition (i'). Alors f_1 est lisse.*

Preuve. Le morphisme f_1 étant à singularité isolée, son idéal jacobien contient une puissance f_2^N de f_2. Par suite,

$$(s_1 + 1) f_2^N f_1^{s_1} = P f_1^{s_1+1}$$

où $P \in \mathscr{D}$ est un opérateur de degré un. Alors, pour $k > N$,

$$(s_1 + 1) f_2^k f_1^{s_1} = f_2^{k-N} P f_1^{s_1+1} = Q f_2^{k-N-1} f_1^{s_1+1}$$

pour un opérateur Q de $\mathscr{D}$ de degré un. Ainsi, pour tout $l \geq 1$, et k assez grand $(k > lN + l - 1)$, on obtient:

$$(s_1 + 1)(s_1 + 2) \cdots (s_1 + l) f_2^k f_1^{s_1} \in \mathscr{D} f_2^{k-l(N+1)} f_1^{s_1+l}.$$

Multiplions maintenant par $(s_1 + 1)(s_1 + 2) \cdots (s_1 + l)$ l'équation (1) donnée par le lemme 2.3:

$$[c(s_1)]^k (s_1 + 1) \cdots (s_1 + l) f_1^{s_1} \in \mathscr{D}[s] f_1^{s_1+l},$$

soit encore

$$[c(s_1 - l + 1)]^k (s_1 - l + 2) \cdots (s_1 + 1) f_1^{s_1-l+1} \in \mathscr{D}[s] f_1^{s_1+1}.$$

On en déduit donc, après multiplication par f_1^{l-1}, que pour tout $l \in \mathbf{N}^*$, il existe $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $[c(s_1 - l + 1)]^k (s_1 - l + 2) \cdots (s_1 + 1)$ soit un multiple du polynôme de Bernstein de f_1. On peut alors choisir l assez grand pour que $c(s_1 - l + 1)$ n'ait que des racines à partie réelle positive, et conclure que $b(f_1)(s_1) = s_1 + 1$, c'est-à-dire que f_1 est lisse, d'après la proposition 1.1.

Exemple. Le germe analytique à l'origine de $\mathbf{C}^3$ donné par $\begin{cases} f_1 = y \\ f_2 = x^2 - yz \end{cases}$ (où f_2 est à singularité isolée) vérifie la condition **(F)**, mais pas la condition **(LS)** comme on peut le vérifier très facilement; il existe donc un bon opérateur en s_j $(j = 1, 2)$ annulant f^s, mais on ne sait pas *a priori* s'il existe un polynôme de Bernstein-Sato à variables séparées. En fait, il n'en existe pas: sinon, f_2 serait lisse, d'après la proposition 2.4.

Remarque. De même, l'application $\begin{cases} f_1 = y \\ f_2 = x^2 - y^2 z \end{cases}$ vérifie **(F)** et non **(LS)**. Bien que, ici, f_2 ne soit pas à singularité isolée, on arrive à la même conclusion (de l'inexistence d'un polynôme de Bernstein-Sato à variables séparées) car une puissance de f_1 appartient à l'idéal jacobien de f_2.

Lemme 2.5. *Soit une intersection complète à l'origine de* $\mathbf{C}^2$, $f = (f_1, f_2)$, *donnée par deux fonctions à singularité isolée, et vérifiant la condition (i). Alors f est une submersion.*

Preuve. D'après le lemme 2.2 et la proposition 2.4, f_1 et f_2 sont lisses. On peut toujours se ramener à $f_1 = x_1$.

Supposons maintenant par l'absurde que $f = (f_1, f_2)$ ne soit pas une submersion. Par le théorème des fonctions implicites, et un changement éventuel de coordonnées, nous avons donc

$$\begin{cases} f_1 = x_1 \\ f_2 = u(x_1, x_2)(x_1 + x_2^l) \end{cases}$$

pour un $l \geq 2$ et une unité u, et la condition (i) donne l'existence d'une équation fonctionnelle

$$c(s_1)d(s_2)x_1^{s_1}(x_1 + x_2^l)^{s_2} = Px_1^{s_1+1}(x_1 + x_2^l)^{s_2+1} \tag{2}$$

Nous sommes ainsi dans le cas d'une intersection complète quasi-homogène de poids $(1, 1)$ pour le système de poids $(1, 1/l)$, formée de f_1 et f_2 à singularité isolée. Alors, d'après [M, Théorème 1.4 p. 551], $(s_1 + s_2 + 1 + 1/l)$ est un facteur obligatoire de tout polynôme de Bernstein-Sato de f, ce qui contredit (2).

Nous allons maintenant mettre en œuvre ces résultats pour démontrer la proposition 2.1.

Preuve. Nous désignons par $\mathfrak{M}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^2,0}$, et par $J(h)$ l'idéal jacobien d'une fonction h.

Considérons tout d'abord le cas où f_1 n'est pas à singularité isolée:

$$f_1 = h_1^{r_1} \cdots h_q^{r_q},$$

où les h_j sont réduits, deux à deux premiers entre eux. D'après le lemme 2.2, nous pouvons supposer que d n'a pas de racine dans $\mathbf{N}$. Nous savons alors par le lemme 2.3 que

$$\forall\, l \in \mathbf{N}, \qquad [c(s_1)]^l f_1^{s_1} \in \mathcal{D}[s_1]\mathfrak{M}^l f_1^{s_1}.$$

Or, l'idéal $\prod_{j=1}^q [[J(h_j)]^m (h_j^k, h_1^k \cdots \widehat{h_j^k} \cdots h_q^k)]$ étant de colongueur finie (où le signe $\widehat{\ }$ signifie que l'on "oublie" le j-ième facteur), selon les hypothèses sur les h_j, on déduit de la propriété précédente que pour tous k et m entiers positifs, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$[c(s_1)]^N f_1^{s_1} \in \sum_{j=1}^q \mathcal{D}[s_1][J(h_j)]^m h_1^{r_1 s_1 + k} \cdots h_j^{r_j s_1} \cdots h_q^{r_q s_1 + k}$$

(en utilisant l'inclusion des idéaux suivants:

$$\prod_{j=1}^q (h_j^k, h_1^k \cdots \widehat{h_j^k} \cdots h_q^k) \subset \sum_{j=1}^q (h_1^k \cdots \widehat{h_j^k} \cdots h_q^k).)$$

En procédant par intégrations successives, nous obtenons d'autre part que, pour tous $j = 1, \dots, q$, $\tau \geq 1$, $m \geq 2\tau$, $k \geq \tau$,

$$\prod_{v=1}^{\tau}(r_j s_1 + v)[J(h_j)]^m h_1^{r_1 s_1 + k} \cdots h_j^{r_j s_1} \cdots h_q^{r_q s_1 + k}$$
$$\subset \mathscr{D}[s][J(h_j)]^{m-2\tau} h_1^{r_1 s_1 + k - \tau} \cdots h_j^{r_j s_1 + \tau} \cdots h_q^{r_q s_1 + k - \tau}.$$

En choisissant $\tau = \lambda r$, $k = 2\lambda r$, $m \geq 2\lambda r$, où $\lambda \in \mathbf{N}^*$ et $r = \max\{r_1, \dots, r_q\}$, nous en déduisons que pour tout λ, il existe N tel que

$$\left[\prod_{j=1}^{q}\prod_{v=1}^{\lambda r}(r_j s_1 + v)\right]_{\text{red}} [c(s_1)]^N f_1^{s_1} \in \mathscr{D}[s] f_1^{s_1+\lambda},$$

où $[\;]_{\text{red}}$ désigne le polynôme unitaire sans facteurs multiples ayant les mêmes racines. Après multiplication par $f_1^{\lambda-1}$, et en effectuant un décalage sur s_1, il s'ensuit que

$$v(s_1)[c(s_1 - \lambda + 1)]^N := \left[\prod_{j=1}^{q}\prod_{v=1}^{\lambda r}(r_j(s_1 - \lambda + 1) + v)\right]_{\text{red}} [c(s_1 - \lambda + 1)]^N$$

est un multiple du polynôme de Bernstein-Sato de f_1. Les racines de celui-ci étant des rationnels strictement négatifs, prenons λ assez grand pour que $c(s_1 - \lambda + 1)$ n'ait que des racines à partie réelle positive: on en conclut qu'il existe $P \in \mathscr{D}[s]$ tel que

$$v(s_1) f_1^{s_1} = P f_1^{s_1+1}.$$

Par division, P s'écrit

$$P = Q(s_1 + 1) + A\frac{d}{dx} + B\frac{d}{dy} + C,$$

où $Q \in \mathscr{D}[s]$, $A, B \in \mathscr{D}$, $C \in \mathscr{O}_{\mathbf{C}^2,0}$. En faisant opérer $\frac{d}{dx}$ et $\frac{d}{dy}$, et en spécialisant ensuite $s_1 = -1$, on constate que C est nulle, et que l'on peut alors simplifier l'égalité par $(s_1 + 1)$. Il vient

$$\tilde{v}(s_1)\frac{1}{f_1} f_1^{s_1+1} = \left[Q + \sum_{j=1}^{q} A r_j \frac{h'_{j_x}}{h_j} + \sum_{j=1}^{q} B r_j \frac{h'_{j_y}}{h_j}\right] f_1^{s_1+1},$$

où $\tilde{v}(-1) \neq 0$. Si l'on spécialise $s_1 = -1$, on en déduit

$$\frac{1}{h_1 \cdots h_q} \in \sum_{j=1}^{q} \mathscr{O}_{\mathbf{C}^2,0}\left[\frac{1}{h_j}\right] \subset \mathscr{O}_{\mathbf{C}^2,0}\left[\frac{1}{h_1}\right] + \mathscr{O}_{\mathbf{C}^2,0}\left[\frac{1}{h_2 \cdots h_q}\right].$$

Or ceci est impossible si $q \geq 2$, puisque la classe de $\frac{1}{h_1 \cdots h_q}$ est non nulle dans le $\mathscr{D}$-module de cohomologie locale algébrique de $\mathscr{O}_{\mathbf{C}^2,0}$ à support l'intersection complète définite par $(h_1, h_2 \cdots h_q)$:

$$\frac{\mathcal{O}_{\mathbf{C}^2,0}\left[\frac{1}{h_1 \cdots h_q}\right]}{\mathcal{O}_{\mathbf{C}^2,0}\left[\frac{1}{h_1}\right] + \mathcal{O}_{\mathbf{C}^2,0}\left[\frac{1}{h_2 \cdots h_q}\right]}$$

Ainsi, $q = 1, f_1 = h_1^{r_1}$ et, quitte à remplacer h_1 par f_1 (et $r_1 s_1$ par s_1), ce qui conserve l'hypothèse de la proposition, nous pouvons supposer f_1 réduit. En opérant de même avec f_2, nous sommes en mesure de conclure à la transversalité par le lemme 2.5.

3. Equisingularité et polynôme de Bernstein pour une seule fonction

Pour une fonction F définie sur une variété analytique complexe Ω de dimension n, nous pouvons considérer "la stratification de Ω par le polynôme de Bernstein de F": il existe une stratification analytique de Ω, $(X_\alpha)_{\alpha \in \mathscr{A}}$ vérifiant:

- $(X_\alpha)_{\alpha \in \mathscr{A}}$ est une partition localement finie de Ω par des strates lisses connexes
- $\overline{X_\alpha}$ est analytique et $\overline{X_\alpha} - X_\alpha$ est une réunion de strates
- l'application qui à $x \in \Omega$ associe le polynôme de Bernstein $b_x(F)$ du germe de F en x est constante sur chaque strate X_α.

La construction d'une telle stratification se fait aisément en considérant les supports Y_c des $\mathscr{D}_\Omega$-Modules cohérents:

$$c(t)\frac{\mathscr{D}_\Omega[t]F^t}{\mathscr{D}_\Omega[t]F^{t+1}}$$

lorsque $c(t)$ parcourt l'espace $\mathbf{C}[t]$ des polynômes d'une variable. L'ouvert de Zariski $U_c = \Omega - Y_c$ est l'ensemble des points x pour lesquels $b_x(F)$ divise c. Soit alors: $Z_c = U_c \cap (\bigcap_{c' \in \mathscr{C}} Y_{c'})$ où $\mathscr{C}$ désigne l'ensemble des diviseurs stricts de c. L'ensemble semi-analytique Z_c est exactement l'ensemble des points x de Ω pour lesquels $b_x(F) = c$.

Donnons-nous maintenant une autre fonction G sur Ω et définissons en tout point $x \in \Omega$ le polynôme $b_x^G(F)$ comme le générateur unitaire de l'idéal des polynômes $c(t) \in \mathbf{C}[t]$ vérifiant une équation fonctionnelle de la forme suivante: il existe un entier k tel que:

$$c(t)G^k F^t \in \mathscr{D}_{\Omega,x}[t]F^{t+1}$$

On pouvait aussi écrire l'équation fonctionnelle de manière classique, mais en autorisant les coefficients des opérateurs à être méromorphes à pôles le long de $G^{-1}(0)$.

Lemme 3.1. *$b_x^G(F)$ est le p.p.c.m. des polynômes $c(t)$ vérifiant: x est dans l'adhérence de $Z_c - G^{-1}(0)$.*

Preuve. Notons $e(t)$ le p.p.c.m. défini dans l'énoncé du lemme; il est évident que $e(t)$ divise $b_x^G(F)$. Réciproquement, considérons le $\mathscr{D}_\Omega$-Module cohérent:

$$e(t)\frac{\mathscr{D}_\Omega[t]F^t}{\mathscr{D}_\Omega[t]F^{t+1}}$$

Son support, au voisinage de x, est contenu dans l'hypersurface $G^{-1}(0)$; par le théorème des zéros on en déduit que $e(t)$ satisfait une équation fonctionnelle de la forme voulue (au voisinage de x), et est donc multiple de $b_x^G(F)$.

Lemme 3.2. *On suppose que G est une fonction lisse en x transverse à F; alors le polynôme $b_x^G(F)$ est égal au polynôme de Bernstein $b_x(F)$ de F en x.*

Preuve. De manière évidente $b_x(F)$ est toujours multiple de $b_x^G(F)$. Montrons l'inverse; complétons G en un système de coordonnées au voisinage de x. L'hypothèse de transversalité signifie que le vecteur cotangent $(x, dG(x))$ n'appartient pas à l'espace conormal relatif à F, W_F. Il en résulte ([B-L-M]) que le $\mathscr{D}_{\Omega,x}$-module $\mathscr{D}_{\Omega,x}[t]F^t$ est relativement cohérent par rapport à G. Il en est donc de même pour le sous-module du module quotient:

$$b_x^G(F)\frac{\mathscr{D}_{\Omega,x}[t]F^t}{\mathscr{D}_{\Omega,x}[t]F^{t+1}}$$

Or, le support de ce module est inclus dans les zéros de G par définition même de $b_x^G(F)$; on en déduit de façon simple que ce module est nul: si une section s est annulée par G, on montre qu'elle est nulle, en considérant le commutateur de G avec un opérateur unitaire en $\frac{d}{dG}$ annulant s. Le polynôme $b_x^G(F)$ est donc multiple de $b_x(F)$.

Théorème 3.3. *Soit F une fonction sur la variété Ω n'admettant que la valeur critique 0, et soit $(X_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ une stratification de Ω compatible à F satisfaisant la condition de frontière et la condition a_F de Thom.*

Alors, le polynôme de Bernstein de F est constant sur chaque strate X_α de la stratification.

Bien sûr, la stratification est toujours supposée analytique, localement finie, avec des strates lisses et connexes; "compatible à F" signifie que $F^{-1}(0)$ est une réunion de strates.

Pour deux strates contenues dans l'ensemble des zéros de F, la condition a_F se réduit à la condition a de Whitney; sinon, pour une strate X_α contenue dans $F^{-1}(0)$ et la strate générique, la condition a_F se traduit par l'inclusion $(W_F)_{|X_\alpha} \subset T^*_{X_\alpha}\Omega$ (de la restriction à X_α de l'espace conormal relatif à F dans l'espace conormal absolu à la strate X_α).

Preuve. La démonstration se fait par récurrence sur la codimension des strates. Soit donc X_α une strate et supposons le polynôme de Bernstein de F constant sur chaque strate X_β contenant X_α dans son adhérence; le polynôme de Bernstein de F en un point générique de X_α, $c(t)$, est donc multiple des polynômes $b_\beta(t)$ de F sur les strates en question (grâce à la condition de frontière). Supposons que le polynôme de Bernstein de F prenne la valeur $d(t)$, multiple strict de

$c(t)$, sur un sous-ensemble semi-analytique Y contenu dans X_α et supposons Y de dimension maximale pour cette propriété. Plaçons-nous en un point générique (donc lisse) x de Y; il existe une fonction G au voisinage de x, lisse et nulle sur Y, transverse à X_α. Par la condition a_F, G est transverse à F en x, et par le lemme 3.2 nous avons: $b_x^G(F)(t) = b_x(F)(t) = d(t)$; puis, par le lemme 3.1: $b_x^G(F)(t) = c(t)$ qui est bien le p.p.c.m. des polynômes de Bernstein aux points voisins de x non zéros de G, donc non situés dans Y. On conclut alors à l'absurdité: $d(t) = c(t)$. Donc, Y n'existe pas, et en tout point x de X_α, nous avons: $b_x(F)(t) = c(t)$ noté $b_\alpha(t)$.

Corollaire 3.4. *Supposons que le lieu singulier Y de l'hypersurface $F^{-1}(0)$ soit lisse, que ρ soit une rétraction de Ω sur Y, et que les fibres de ρ sur $F^{-1}(0)$ soient à singularité isolée et à nombre de Milnor constant le long de Y. Alors le polynôme de Bernstein de F est constant sur Y.*

En effet nous savons ([L-S]) que la stratification naturelle associée à $(\Omega, F^{-1}(0), Y)$ satisfait la condition a_F de Thom. Le théorème s'applique.

Corollaire 3.5. *Soit $(X_\alpha)_{\alpha \in \mathscr{A}}$ une stratification compatible à F et satisfaisant les conditions a et b de Whitney. Alors le polynôme de Bernstein de F est constant sur chaque strate X_α de la stratification.*

En effet, si la stratification vérifie les conditions de Whitney, ou même seulement les conditions de "trivialité topologique stratifiée", la condition a_F est satisfaite ([B-M-M, Théorème 4.2.1 p. 541]) et de nouveau le théorème s'applique.

4. Transversalité et principalité

4.1. Le générateur potentiel de l'idéal de Bernstein-Sato. Nous revenons à la situation d'intersection complète $f = (f_1, \ldots, f_p)$ définie au voisinage de l'origine dans $\mathbf{C}^n$; pour chaque indice j de $\{1, \ldots, p\}$ nous notons:

$$G_j = \prod_{l \neq j} f_l \qquad \text{et} \qquad b_j^* = b_0^{G_j}(f_j) \in \mathbf{C}[s_j]$$

Rappelons que $b_j^*(s_j)$ est le polynôme unitaire de degré minimum satisfaisant:

$$\exists k \in \mathbf{N} \qquad \text{tel que:} \quad c(s_j) G_j^k f_j^{s_j} \in \mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0} f_j^{s_j+1}$$

De manière évidente le polynôme de Bernstein $b_j(s_j)$ de f_j est multiple de $b_j^*(s_j)$; montrons l'inclusion de l'idéal de Bernstein-Sato de $f, \mathscr{B}(f)$, dans l'idéal engendré par le produit de ces polynômes: $\mathbf{C}[s] b_1^*(s_1) \cdots b_p^*(s_p)$. Soit $c(s) \in \mathbf{C}[s]$ satisfaisant:

$$c(s) f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p} \in \mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0}[s] f_1^{s_1+1} \cdots f_p^{s_p+1}.$$

En spécialisant dans l'équation, pour $l \neq j : s_l \in \mathbf{N}$, nous voyons que $c(s)$ est multiple de $b_j^*(s_j)$ pour tout j, donc du produit.

Proposition 4.1. *Soit $f = (f_1, \ldots, f_p)$ satisfaisant les conditions de transversalité; les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *l'idéal de Bernstein-Sato $\mathscr{B}(f)$ est principal*

(ii) *le polynôme $b_1^*(s_1) \cdots b_p^*(s_p)$ appartient à $\mathscr{B}(f)$*

De plus, si ces propriétés sont vérifiées, pour tout indice $j \in \{1, \ldots, p\}$ on a: $b_j^*(s_j) = b_j(s_j)$.

Preuve. D'après ce qui a été vu plus haut, "(ii) implique (i)" est toujours vraie. Supposons maintenant $\mathscr{B}(f)$ principal, donc engendré par un polynôme de la forme:

$$e(s) = u(s) b_1^*(s_1) \cdots b_p^*(s_p)$$

Partons de la définition de $b_j^*(s_j)$: il existe un entier naturel l et un opérateur $P \in \mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0}[s]$ tels que: $b_j^*(s_j) G_j^l f_j^{s_j} = P f_j^{s_j+1}$.

En multipliant par $\prod_{k \neq j} f_k^{s_k - l}$ on obtient:

$$b_j^*(s_j) f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p} \in \mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0}[s] G_j^{-m} f_1^{s_1+1} \cdots f_p^{s_p+1}$$

où m est un nouvel entier positif qui dépend de l et du degré de l'opérateur P.

Nous pouvons alors appliquer autant de fois qu'il le faut l'existence d'équations fonctionnelles particulières qui résultent de la transversalité ([B-B-M-M, Théorème 3 p. 132] et [B, Théorème 1 p. 679]); on en déduit l'existence d'un polynôme $w(s)$ indépendant de s_j tel que: $w(s) b_j^*(s_j)$ est dans l'idéal $\mathscr{B}(f)$, donc multiple de $e(s)$. Il en résulte que $u(s)$ ne dépend pas de la variable s_j. En échangeant le rôle des indices on aboutit à $u(s) = 1$.

Ce qui prouve (ii).

Nous avons alors:

$$b_1^*(s_1) \cdots b_p^*(s_p) f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p} \in \mathscr{D}_{\mathbf{C}^n,0}[s] f_1^{s_1+1} \cdots f_p^{s_p+1}.$$

Mais comme $b_k^*(s_k)$ divise $b_k(s_k)$ qui n'a que des racines (rationnelles) strictement négatives, en "spécialisant $s_k = 0$" pour $k \neq j$ on obtient: $b_j^*(s_j)$ multiple de $b_j(s_j)$ (donc égal).

Corollaire 4.2. *Soit $f = (f_1, f_2)$ une intersection complète à singularité isolée à l'origine de $\mathbf{C}^n$, où f_1 est lisse et où $f_2^{-1}(0)$ est une déformation à nombre de Milnor constant de $f^{-1}(0)$; et soit $b_2(s_2)$ le polynôme de Bernstein de f_2. L'idéal $\mathscr{B}(f)$ est principal si et seulement si il contient le polynôme $(s_1 + 1) b_2(s_2)$.*

En effet, nous sommes dans les conditions d'application de la proposition, et nous savons (lemme 3.2) que $b_2^*(s_2) = b_2(s_2)$.

En fait, si $f = (f_1, f_2)$ est une intersection complète à singularité isolée satisfaisant les conditions de transversalité, on est dans la situation du corollaire (quitte à échanger les deux indices): voir [B, Corollaire 2 p. 691].

4.2. Un contre-exemple à la principalité. Soit F le germe de fonction analytique à l'origine de $\mathbf{C}^3$ défini par: $F(x, y, z) = x^4 + y^4 + 2zx^2y^2$. Nous allons montrer que l'idéal de Bernstein-Sato de l'application $f = (z, F), \mathscr{B}(f)$, n'est pas principal.

F définit une déformation équisingulière le long de l'axe des z de la singularité isolée formée des quatre droites de $(\mathbf{C}^2, 0) : \{x^4 + y^4 = 0\}$. La dérivée partielle par rapport au paramètre, F'_z, est entière sur l'idéal (F'_x, F'_y); plus précisément, on a la relation de dépendance intégrale suivante:

$$16(1 - z^2)x^4y^4 = xyF'_xF'_y - 4zx^2y^2(xF'_x + yF'_y). \tag{1}$$

On construit ainsi un opérateur unitaire en $\frac{d}{dz}$ annulant F^t:

$$S = 4(1 - z^2)\left(\frac{d}{dz}\right)^2 + 2z\left(x\frac{d}{dx} + y\frac{d}{dy} - 2\right)\frac{d}{dz} - xy\frac{d}{dx}\frac{d}{dy}.$$

D'autre part, en utilisant l'inclusion $(x, y)^5 \subset (F'_x, F'_y)$ et en faisant monter les poids à l'aide de "l'opérateur d'Euler relatif" $x\frac{d}{dx} + y\frac{d}{dy}$ (voir par exemple [M]), on obtient un multiple du polynôme de Bernstein relatif (c'est-à-dire avec une équation fonctionnelle dans laquelle l'opérateur ne dépend pas de la dérivation par rapport à z):

$$b_r(t) = (t + 1) \prod_{j=2,\dots,6} \left(t + \frac{j}{4}\right)$$

(à z fixé, F est quasi-homogène de poids 1 pour le système de poids $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$). Remarquons que l'existence de b_r était assurée, puisque F est une déformation à μ-constant d'une hypersurface à singularité isolée [G].

De plus, la relation

$$\frac{d}{dz}F^{t+1} = (t + 1)(2x^2y^2)F^t$$

et la montée des poids fournissent un multiple du polynôme de Bernstein absolu:

$$b(t) = (t + 1) \prod_{j=2,\dots,5} \left(t + \frac{j}{4}\right).$$

Lemme 4.3. *Les polynômes $b_r(t)$ et $b(t)$ sont respectivement les polynômes de Bernstein relatif et absolu de F.*

Preuve. Il reste à montrer que si $c(t)F^t = PF^{t+1}$ où P est un opérateur différentiel relatif (resp. absolu), alors $c(t)$ est multiple de $b_r(t)$ (resp. $b(t)$). Dans le premier cas, en "spécialisant" en $z = 0$, on trouve que $c(t)$ est multiple du polynôme de Bernstein absolu de la singularité quasi-homogène $x^4 + y^4 = 0$, polynôme de Bernstein justement égal à $b_r(t)$ ([B-G-M-M]).

Supposons maintenant $c(t)F^t = P(t)F^{t+1}$ avec $P \in \mathscr{D}_{\mathbf{C}^3,0}[t]$ et $c(t)$ diviseur de $b(t)$; en itérant, il vient $c(t)c(t + 1)F^t = P(t)P(t + 1)F^{t+2}$; par division de $P(t)P(t + 1)$ par l'opérateur S, nous obtenons $c(t)c(t + 1)F^t = Q(t)F^{t+2}$ où Q est de degré au plus 1 en la dérivation $\frac{d}{dz}$; en faisant alors opérer $\frac{d}{dz}$, on trouve que

$c(t)c(t+1)$ est multiple de $b_r(t)$; or le seul facteur commun à $b_r(t)$ et $b(t+1)$ est $(t+\frac{6}{4})$; donc $c(t)(t+\frac{6}{4})$ est multiple de $b_r(t)$, donc $c(t)=b(t)$.

Proposition 4.4. *L'idéal de Bernstein-Sato de* $f=(z, F=x^4+y^4+2zx^2y^2)$ *n'est pas principal.*

Preuve. En faisant monter les poids avec l'opérateur d'Euler, nous obtenons:

$$(s_2+1)e(s_2)x^2y^2z^{s_1}F^{s_2}=Qz^{s_1}F^{s_2+1},$$

avec

$$e(s_2)=\prod_{j=6,\ldots,10}\left(s_2+\frac{j}{4}\right),$$

où les coefficients de Q sont dans $(x,y)^5\subset(F'_x,F'_y)$. Par suite,

$$(s_2+2)(s_2+1)e(s_2)x^2y^2z^{s_1}F^{s_2}=Rz^{s_1}F^{s_2+2}.$$

Alors, puisque

$$(s_1+1)z^{s_1}F^{s_2+2}=\frac{d}{dz}(z^{s_1+1}F^{s_2+2})-(s_2+2)F'_zz^{s_1+1}F^{s_2+1},$$

il vient:

$$(s_1+1)(s_2+2)(s_2+1)e(s_2)x^2y^2z^{s_1}F^{s_2}\in\mathscr{D}[s]z^{s_1+1}F^{s_2+1}. \tag{2}$$

Sous l'hypothèse de principalité, nous avons, d'après le corollaire 4.2:

$$(s_1+1)b(s_2)x^2y^2z^{s_1}F^{s_2}\in\mathscr{D}[s]z^{s_1+1}F^{s_2+1}. \tag{3}$$

Or dans $\mathbf{C}[s_2]$, $(s_2+2)e(s_2)$ et $\tilde{b}(s_2)$ sont premiers entre eux. On déduit donc de (2) et (3) que:

$$(s_1+1)(s_2+1)x^2y^2z^{s_1}F^{s_2}\in\mathscr{D}[s]z^{s_1+1}F^{s_2+1}. \tag{4}$$

Il s'agit à présent de prouver que (4) est impossible.

Considérons les espaces conormaux relatifs suivants:

$$W^{\#}_{z,F}=\overline{\{((x,y,z);\lambda(0,0,1)+\nu(F'_x,F'_y,F'_z);\lambda z,\nu F)\}}\subset\mathbf{C}^3\times\check{\mathbf{C}}^3\times\mathbf{C}^2$$

$$W^{\#,1}_{z,F}=\overline{\{((x,y,z);\lambda(0,0,1)+\nu(F'_x,F'_y,F'_z);\lambda z)\}}\subset\mathbf{C}^3\times\check{\mathbf{C}}^3\times\mathbf{C}$$

$$W_{z,F}=\overline{\{((x,y,z);\lambda(0,0,1)+\nu(F'_x,F'_y,F'_z))\}}\subset\mathbf{C}^3\times\check{\mathbf{C}}^3$$

et les projections naturelles:

$$p_1^{\#}:W^{\#}_{z,F}\to W^{\#,1}_{z,F}$$

$$p_1:W^{\#,1}_{z,F}\to W_{z,F}$$

et $p=p_1\circ p_1^{\#}$.

La transversalité de z et F entraîne la finitude du morphisme p (voir [B, Théorème 1 p. 679]), et $p_1^{\#}$ est toujours fini, d'après la remarque pp. 133–134 de [B-B-M-M]. Par suite, p_1 est lui aussi fini. C'est dire qu'il existe un "bon" opérateur unitaire en s_1 qui annule $z^{s_1}F^{s_2}$. On trouve par exemple, dans cet annulateur, l'opérateur:

$$\left(s_1 + 1 - z\frac{d}{dz}\right)\left(s_1 - z\frac{d}{dz}\right)$$
$$- \frac{z^2}{4(1-z^2)}\left\{xy\frac{d}{dx}\frac{d}{dy} + \left[2\left(\frac{d}{dx}x + \frac{d}{dy}y\right) - 8\right]\left[s_1 - z\frac{d}{dz}\right]\right\}$$

et l'on a donc, pour un $Q \in \mathscr{D}[s_1]$:

$$\left(s_1 + 1 - z\frac{d}{dz}\right)\left(s_1 - z\frac{d}{dz}\right) - Qz^2 \in \mathrm{Ann}_{\mathscr{D}[s_1]} z^{s_1}F^{s_2}. \tag{5}$$

Le calcul de cet opérateur fait notamment appel à la relation suivante:

$$\left(s_1 - z\frac{d}{dz}\right)z^{s_1}F^{s_2} = -s_2(2x^2y^2)z^{s_1+1}F^{s_2-1}. \tag{6}$$

Revenons à la relation (4); nous pouvons récrire le membre de gauche:

$$\begin{aligned}
&(s_1+1)(s_2+1)2x^2y^2z^{s_1}F^{s_2}\\
&= \left(s_1 + 1 - \frac{d}{dz}z\right)(s_2+1)2zx^2y^2z^{s_1-1}F^{s_2} + \frac{d}{dz}z(s_2+1)2x^2y^2z^{s_1}F^{s_2}\\
&= -\left(s_1 - z\frac{d}{dz}\right)\left(s_1 - 1 - z\frac{d}{dz}\right)z^{s_1-1}F^{s_2+1}\\
&\quad + \frac{d}{dz}\left(\frac{d}{dx}x + \frac{d}{dy}y - 2\right)\frac{1}{2}x^2y^2z^{s_1+1}F^{s_2}\\
&= Pz^2z^{s_1-1}F^{s_2+1} + \frac{d}{dz}\left(\frac{d}{dx}x + \frac{d}{dy}y - 2\right)\frac{1}{2}x^2y^2z^{s_1+1}F^{s_2},
\end{aligned}$$

pour un $P \in \mathscr{D}[s_1]$. Pour cela on utilise (6) avec s_1 remplacé par $s_1 - 1$ et s_2 par $s_2 + 1$, puis (5), d'une part, et l'homogénéité en (x, y) d'autre part. Or (4) permet d'en déduire qu'il existe $T \in \mathscr{D}[s]$ tel que:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{d}{dx}x + \frac{d}{dy}y - 2\right)\frac{1}{2}x^2y^2z^{s_1+1}F^{s_2} = Tz^{s_1+1}F^{s_2+1}.$$

Quitte à diviser par $\left[s_2 + 1 - \frac{1}{4}\left(x\frac{d}{dx} + y\frac{d}{dy}\right)\right]$, qui annule $z^{s_1+1}F^{s_2+1}$, on peut supposer T indépendant de s_2; de plus, d'après (5) (par division encore), on peut aussi supposer que le degré de T en s_1 est au plus égal à 1. Divisons: il existe $U, V \in \mathscr{D}$ tels que

$$T = U\left(s_1 + 1 - z\frac{d}{dz}\right) + V.$$

D'où

$$Tz^{s_1+1}F^{s_2+1} = -U(s_2+1)2zx^2y^2z^{s_1+1}F^{s_2} + Vz^{s_1+1}F^{s_2+1}$$
$$= -U\left[\frac{d}{dx}x + \frac{d}{dy}y - 2\right]\frac{1}{2}zx^2y^2z^{s_1+1}F^{s_2} + Vz^{s_1+1}F^{s_2+1}$$

et

$$\left(\frac{d}{dz} + Uz\right)\left(\frac{d}{dx}x + \frac{d}{dy}y - 2\right)\frac{1}{2}x^2y^2 - VF \in \mathrm{Ann}_{\mathscr{D}} z^{s_1+1}F^{s_2}.$$

Puisque l'application $f = (z, F)$ définit une intersection complète à singularité isolée, nous savons par [B-B-M-M, Théorème 2 p. 129] que cet annulateur est l'idéal

$$\mathscr{D}\left(\frac{d}{dx}F'_y - \frac{d}{dy}F'_x\right).$$

Identifions alors les coefficients (à droite) dans la relation précédente; celui de $\frac{d}{dz}$ fournit:

$$(1+\varphi z)x^2y^2 \in (F, F'_x, F'_y) = (4x^3 + 4zxy^2, 4y^3 + 4zx^2y, x^4 + y^4 + 2zx^2y^2),$$

pour une certaine fonction φ; d'où, en "spécialisant" en $z = 0$:

$$x^2y^2 \in (x^3, y^3),$$

ce qui est bien évidemment faux.

L'idéal $\mathscr{B}(z, F)$ n'est donc pas principal.

UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIGUES
UNIVERSITÉ D'ANGERS

Références

[B] J. Briançon, Espaces conormaux relatifs I: conditions de transversalité, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 4e série, **30** (1997), 675–692.

[B-B-M-M] H. Biosca-J. Briançon-Ph. Maisonobe-H. Maynadier, Espaces conormaux relatifs II Modules Différentiels, Publ. RIMS Kyoto Univ., **34** (1998), 123–134.

[B-G-M-M] J. Briançon-M. Granger-Ph. Maisonobe-M. Miniconi, Algorithme de calcul du polynôme de Bernstein: cas non dégénéré, Annales de l'Institut Fourier, Grenoble **39**-3 (1989), 553–610.

[B-L-M] J. Briançon-Y. Laurent-Ph. Maisonobe, Sur les modules différentiels holonomes réguliers, cohérents relativement à une projection, Note aux CRAS, **313** (1991), 285–288.

[B-M] J. Briançon-Ph. Maisonobe, Caractérisation géométrique de l'existence du polynôme de Bernstein relatif, Progress in Mathematics **134** (1996), 215–236.

[B-M-M] J. Briançon-Ph. Maisonobe-M. Merle, Localisation de systèmes différentiels, stratifications de Whitney et condition de Thom, Inven. math., **117** (1994), 531–550.

[G] F. Geandier, Polynômes de Bernstein et déformations à nombre de Milnor constant, Note aux CRAS, **309** (1989), 831–834.

[Gy] A. Gyoja, A remark on principality of Bernstein-Sato ideals, Department of Fundamental Sciences Kyoto University, Japan, 1997.

[L-S] Lê D. T.-K. Saïto, La constance du nombre de Milnor donne des bonnes stratifications, Note aux CRAS, **277** (1973), 793–796.

[M] H. Maynadier, Polynômes de Bernstein-Sato associés à une intersection complète quasi-homogène à singularité isolée, Bull. Soc. math. France, **125** (1997), 547–571.

[S1] C. Sabbah, Proximité évanescente I. La structure polaire d'un $\mathscr{D}$-module, Compositio Math., **62** (1987), 283–328.

[S2] C. Sabbah, Proximité évanescente II. Equations fonctionnelles pour plusieurs fonctions analytiques, Compositio Math., **64** (1987), 213–241.

[S3] C. Sabbah, Appendice à Proximité évanescente II, Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique Palaiseau, 1988.