J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
30-1 (1990) 1-32

Sur le théorème de Cauchy-Kowalevski

— Une remarque sur le mémoire du même titre de S.Mizohata —

— dédiée au professer Tosihusa Kimura à l'occasion de son soixantième anniversaire —

Par

Keiichiro KITAGAWA

§ 1. Introduction

Cette note a double buts comme un mémoire[6] de S.Mizohata. Dont le premier est principale et annoncé au titre et le deuxiéme est la conséquence du premier. Nous commençons par expliquer le premier but.

Il s'agit du problème de Cauchy *homogène*

$$\text{(PC)} \qquad \begin{cases} L(t, z; \partial_t, \partial_z)u(t, z) = 0 \\ \partial_t^{j-1}u(t_0, z) = \varphi_j(z) \qquad j = 1, \dots, m. \end{cases}$$

pour une équation linéaire aux dérivées partielles

$$\text{(1-1)} \qquad L(t, z; \partial_t, \partial_z)u(t, z) \equiv (\partial_t^m - \sum_{j=1}^{m} a_j(t, z; \partial_z)\partial_t^{m-j})u(t, z) = 0$$

où $a_j(t, z; \zeta)$ sont des polynômes en ζ à coefficients *holomorphes* dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^{d+1} = \mathbf{C}_t \times \mathbf{C}_z^d$,

Nous disons que le problème de Cauchy (PC) est *bien posé à un point* (t_0, z_0), si pour toutes les données $\varphi_j(z)$ holomorphes à z_0, il existe une et une seule solution $u(t, z)$ holomorphe *à* (t_0, z_0) satisfaisant au (PC) au voisinage de (t_0, z_0).

Soit p_0 *le poids* de L

$$p_0 \equiv \operatorname*{Sup}_{j,(t,z)} \frac{1}{j} \operatorname*{ordre}_{\zeta} a_j(t, z, \zeta)$$

L'opérateur $L(t, z; \partial_t, \partial_z)$ dont $p_0 \leq 1$ est dit *kowalevskien* et l'équation $L(t, z; \partial_t, \partial_z)u(t, z) = 0$ est dite *kowalevskienne* si $L(t, z; \partial_t, \partial_z)$ est kowalevskien.

Par cette terminologie, le théorème bien connu de Cauchy-Kowalevski est le suivant.

Théorème de Cauchy-Kowalevski. *Si $L(t, z; \partial_t, \partial_z)$ est kowalevskien, alors le*

Communicated by Prof. S.Mizohata March 23 1988

(PC) *est bien posé à* (t_0, z_0), *pour tout* (t_0, z_0) *au voisinage de l'origine, donc à fortiori bien posé à l'origine.*

En 1981, S.Mizohata[9] a montré l'inverse de ce théorème de Cauchy-Kowalevski:

Théorème 1 (Mizohata). *Si le* (PC) *est bien posé à l'origine, alors* $L(t, z, \partial_t, \partial_z)$ *est kowalevskien.*

Le premier but de cette note est de modifier sa démonstration. Cela ne signifie pas que sa démonstration a un défaut: Dans le mémoire de 1981, S.Mizohata se place au cas crucial mais particulier où la condition [K-S] est réalisée. La nécessité de cette condition [K-S] étant démontrée par une autre méthode, sa démonstration est bien légitime. (Nous expliquerons ceci en détail *à* la section suivante.) Mais il semble que cette restriction est indispensable à sa démonstration. C'est ainsi dommage pour ce théorème si fin qu'il n'est démontré que par deux méthodes toutes différentes l'une de l'autre. C'est d'ailleurs bizarre que sa méthode si élaborée qui démontre le théorème au cas crucial le plus difficile n'arrive pas à le démontrer aux autres cas plus faciles. Nous avons examiné à quel point cette condition [K-S] est utilisée. Et nous avons trouvé que, bien que cette condition soit indispensable à son mémoire, si on change un peu le point de vue, et qu'on *y* ajoute quelques considérations soignées, on peut démontrer le théorème généralement, sans telle restriction, et ceci sans modifier essentiellement sa démonstration. C'est ce que nous voulons montrer dans cette note. Nous redémontrons ainsi le théorème tout en suivant l'idée de S.Mizohata. On dirait qu'il suffirait de faire quelques remarques sur le mémoire de S.Mizohata, mais nous préférons refaire la démonstration. C'est parce que d'une part nous voudrions que cette note soit compréhensible et qu'elle serve á la compréhension de ce mémoire trẽs intéressant de S.Mizohata, et d'autre part qu'elle est nécéssaire à aboutir à notre deuxième but.

Comme on voit dans le mémoire[6] de S.Mizohata, il *y* a un autre problème de même nature: *caractérisation de l'équation à la vitesse finie de propagation.* C'est notre deuxième but.

En 1972, S.Mizohata[5] a montré que *si l'équation linéaire aux dérivées partielles, pour laquelle le problème de Cauchy homogène est uniformément bien posé dans un certain espace de fonctions indéfiniment-différentiables, a la vitesse finie de propagation, elle est kowalevskienne.* Sur ce sujet, notre démonstration du théorème de Mizohata (théorème 1) montre parallèlement les suivants.

Nous considérons le problème de Cauchy *homogène*

$$(\mathrm{PC})_{\mathbf{R}} \qquad \begin{cases} L(t, x; \partial_t, \partial_x)u(t, x) = 0 \\ \partial_t^{j-1} u(0, x) = \varphi_j(x) \qquad j = 1, \dots, m. \end{cases}$$

pour une équation linéaire aux dérivées partielles

$$L(t, x; \partial_t, \partial_x)u(t, x) \equiv (\partial_t^m - \sum_{j=1}^{m} a_j(t, x; \partial_x)\partial_t^{m-j})u(t, x) = 0$$

où $a_j(t, x; \zeta)$ sont des polynômes en ζ à coefficients *analytiques réels* dans un domaine $(-T_0, T_0) \times \Omega_0$ de $\mathbf{R}^{d+1} = \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^d$.

Nous disons par abus de terminologie que le problème de Cauchy $(\mathrm{PC})_{\mathbf{R}}$ est *bien posé avec le domaine commun d*'existence s'il existe un domaine $\Omega(\Omega \subset \Omega_0)$ et un $T(0 < T \leq T_0)$ tels que pour toutes les données $\varphi_j(x) \in D_{L^2}^{\infty}(\mathbf{R}^d)(j = 1, \ldots, m)$, il existe une et une seule solution $u(t, x) \in C^{m-1}([0, T], C^{\infty}(\Omega)) \cap C^m((0, T], C^{\infty}(\Omega))$ du $(\mathrm{PC})_{\mathbf{R}}$.

Nous disons aussi par abus de terminologie que le $(\mathrm{PC})_{\mathbf{R}}$ a *la propriété de l*'unicité *d*'ordre τ $(0 < \tau)$, si pour tout $\Omega^{\sim}(\subset \Omega)$ relativement compact et tout $T^{\sim}(\in [0, T])$, il existe un nombre fini $\lambda_0 \equiv \lambda(T^{\sim}, \Omega^{\sim})$ tel que, pour tous $t \in [0, T^{\sim}])$ et $x \in \Omega^{\sim}$, la valeur $u(t, x)$ de la solution du $(\mathrm{PC})_{\mathbf{R}}$ s'annule si les données initiales s'annulent dans l'ensemble $\{y; |y - x| \leq \lambda_0 t^{\tau}]$.

Théme 2. [cf. [2]] *Supposons que le* $(\mathrm{PC})_{\mathbf{R}}$ *soit bien posé avec le domaine commun d*'existence. *Si le* $(\mathrm{PC})_{\mathbf{R}}$ *a la propriété de l*'unicité *d*'ordre τ $(0 < \tau)$, *alors* $L(t, x; \partial_t, \partial_x)$ *est kowalevskien.*

Remarque. Si l'équation a la vitesse finie de propagation et que le problème de Cauchy est uniformément bien posé, alors le $(\mathrm{PC})_{\mathbf{R}}$ a la propriété de l'unicité d'ordre 1. Ce théorème est donc un raffinement du travil ci-haut de S.Mizohata[5] au cas de coefficients analytiques.

Nous soulignons que *le* $(\mathrm{PC})_{\mathbf{R}}$ *n'est pas supposé uniformément bien posé.*

Nous remercions Professeur S.Mizohata de nous avoir invité à publier cette note-ci, aussi bien de nous avoir donné de précieux conseils.

§2. L'historique et l'esquisse de la méthode de S.Mizohata

Nous commençons par esquisser l'historique de cette recherche pour le convenient de la compréhension. A 1974, S.Mizohata[6] a proposé la recherche sur le problème inverse du théorème de Cauchy-Kowalevski:

"*Chercher des conditions nécessaires pour que le problème de Cauchy* (PC) *soit bien posé dans le cadre des fonctions holomorphes.*"

Et il *y* a donné une condition nécessaire. Celle-ci montre l'inverse du théorème de Cauchy-Kowalevski sous la forme moins fine: "*Si le* (PC) *est bien posé à tout point* (t_0, z_0) *du voisinage de l*'origine, *alors on a* $p_0 \leq 1$"

Convoqué par ce mémoire, c'est M.Miyake[4] qui a démontré le premier, en 1974, ce théorème fin de S.Mizohata pour une équation d'ordre 1 en ∂_t. S.Mizohata,[7] stimulé cette fois par ce mémoire de M.Miyake, a donné, en 1975, une condition nécessaire plus fine que celle de 1974, condition qui se rend compte de la dégénérescence représentée en la puissance de t. La voici:

Soit

$$a_j(t, z; \zeta) = \sum_k t^{\sigma(j,k)} a_{j,k}(t, z; \zeta) \tag{2-1}$$

où $a_{j,k}(t, z; \zeta)$ sont des polynômes homogènes d'ordre k en ζ, à coefficients holomorphes au voisinage de l'origine, tels que $a_{j,k}(0, z; \zeta) \not\equiv 0$. Quant à $\sigma(j, k)$, nous convenons $\sigma(j, k) = +\infty$ si la partie homogène d'ordre k de $a_j(t, z; \zeta)$ est identiquement nulle. Soit p_m *le poids modifié de* L:

$$p_m = \operatorname*{Max}_{j,k} \frac{k}{j + \sigma(j, k)}. \tag{2-2}$$

"*Pour que le* (PC) *soit bien posé à l*'origine, *il faut que l*'on ait $p_m \leq 1$."

Cette condition est encore améliorée par K.Kitagawa-T.Sadamatsu[1] en 1976. La voici:

Soit

$$p_k = \operatorname*{Max}_{k \leq j} \frac{k}{j + \sigma(j, k)} (\leq 1), \qquad p_v = \operatorname*{Max}_{k > j} \frac{k}{j + \sigma(j, k)}. \tag{2-3}$$

"*Pour que le* (PC) *soit bien posé à l'origine, il faut que l*'on ait $p_v < p_k$."

Jusqu'ici la méthode employée est celle de *la solution formelle*. En 1978, S.Mizohata[8] a montré le théorème, cette fois par la *méthode de l'énergie*, au cas où les coefficients ne dépendent que d'une variable t. Et il l'a montré au cas général, en 1981, par la méthode de micro-localisation dite la $\alpha_n - \beta$ méthode. C'est cette démonstration que nous voudrions modifier. Nous esquissons par la suite sa démonstration.

La démonstration est faite par l'absurde: Par nier le résultat on suppose d'une part que le problème de Cauchy (PC) soit bien posè à l'origine et d'autre part que l'on ait $p_0 > 1$.

De la première hypothèse on déduit une estimation majorante à priori. D'autre part on montre, grâce à ces deux hypothèses, l'existence d'une solution ayant une estimation minorante contradictoire à la précédente. Or celle-ci est obtenue par la micro-localisation:

Par l'introduction de quelques poids la micro-localisation met en relief quelques quantités cruciales provenant de la deuxième hypothèse, mais celles-ci ne jouent pas leur rôle à tout près de $t = 0$, ni non plus pour t bien à part de $t = 0$, à cause de la dégénérescence éventuelle, représentée en la puissance de t, de ces quantités cruciales. On est donc forcé à micro-localiser même en t, c'est-à-dire à considérer pour t; $t_n \leq t \leq t'_n$ où t_n et t'_n sont de certains nombres positifs dépendant du paramètre n de micro-localisation. On voit alors que si la solution satisfait à une certaine condition à $t = t_n$, elle a une estimation minorante désirable pour $t = t'_n$. Il faut donc assurer l'existence de telle solution satisfaisant à cette condition à $t = t_n$. Pour cela on compte sur la première hypothèse que le (PC) soit bien posé. Il faut alors déterminer les données initiales du (PC). Pour cela on résoud d'abord approximativement un problème de Cauchy pour $L(t, z; \partial_t, \partial_z)u(t, z) = 0$ avec les données initiales satisfaisant à telle condition à $t = t_n$. (Pour avoir cette solution approximative, il est plus aisé de demander de l'aide à l'existence de solution du problème de Cauchy pour l'equation micro-localisée de celle-ci[11]. Nous le faisons dans cette note.) On se repose ensuite sur la première hypothèse pour assurer l'existence d'une solution du (PC) pour les données initiales définies par des quantités à $t = 0$ de cette solution approximative. Ainsi nous avons une solution du (PC).

On fait ensuite un calcul d'évaluation de ces erreurs d'approximation ainsi que celles de la micro-localisation pour affirmer que ces érreurs, mesurées par l'énérgie micro-locale, sont négligibles et que la valeur à $t = t_n$ de cette solution-ci satisfait la condition imposée à $t = t_n$ pour avoir l'estimation minorante désirable.

Or pour pratiquer cette recette, S.Mizohata sa place au cas crucial mais particulier où $p_v < p_k$. Evidemment ceci est permis par l'hypothèse que le (PC) est bien posé, grâce au travail de Kitagawa-Sadamatsu[1], et sa démonstration est ainsi clair et sans doute. Mais comme on a déjà dit á l'introduction, on est confus de savoir que cette restriction paraît essentielle à sa démonstration et que son raisonnement ne s'applique plus aux cas exclus qui seraient plus faciles. La cause de ce trouble est le poids qu'il y introduit. Si l'on ne tient pas à ce poids et qu'on chisit un nouveau poids, sa recette s'applique à tout le cas sans excéption. C'est ce que nous faisons dans cette note.

Avant de terminer cette section, nous voudrions remarquer une chose: Pour envisager génériquement le problème de Cauchy pour une équation différentielle, il'y a deux attitudes; celle de considérer le deuxième membre arbitrairement donné comme les données initiales, et celle de le considérer fixé (comme la force extérieure). Ainsi à la considération des conditions nécessaires, on est amené à deux formulations génériques du problème de Cauchy: Problème de Cauchy non homogène et celui homogène. Parmi ces travaus cités ci-haut, M.Miyake[4] a envisagé le (PC) homogène, mais S.Mizohata[7] et K.Kitagawa-T.Sadamatsu[1] ont considéré le (PC) non homogène. Donc si on tient au (PC) homogène au théorème de S.Mizohata, sa démonstration a une lacune; il faudrait où bien démontrer la nécéssité de $p_v < p_k$ pour le (PC) homogène, où bien modifier sa démonstration. Ceci donnerait encore une raison d'être à cette note.

§ 3. Préliminaire (Départ à la démonstration du théorème 1)

Avant de commencer la démonstration nous remarquons deux choses sur l'écriture de cette note:

Dans cette note chaque écriture est, en principe, fixée une fois définie. Pour faire signifier une autre chose on ajoute un suffixe. Par exemple p, p_0, p_m etc. Mais il y a un abus par manque de l'écriture. Pour les multi-indices nous employons même les écritures déjà définies. Par exemple p, q, α, β, qui sont définies comme $P = (1 + q, p)$, $\alpha(\xi)$, $\beta(x)$, sont fréquemment utilisées pour les multi-indices, par exemple $\nabla^{(p+\alpha)}_{n(q+\beta)}(x, \xi)$.

Quant à la constante, quand il n'y a pas d'importance à sa grandeur, elle sera désignée génériquement par ${}^{\exists}C$. par exemple:

$$E_n^2(U_n^2)(n^{-\gamma_1}) \geq {}^3Cn^{d/2} - {}^3C \exp(-{}^3Cn^{1/s}),\ {}^3P(n, N) \text{ etc..}$$

Quand la grandeur de la constante est comptée, nous y ajoutons un suffixe en bas. Par exemple: C_0, C_1, etc.

Nous montrons le théorème par l'absurde. Donc nous faisons deux hypothèses.

[H-1] *Le* (PC) *soit bien posé à l'origine.*

[H-2] *Le poids* p_0 *de* L *soit* $p_0 > 1$.

Nous rendons ce problème à celui pour un système d'ordre 1 en ∂_t.

Soient

(3-1) $$U(t, z) = {}^t(u_1(t, z), \dots, u_m(t, z)) \colon u_j(t, z) = \partial_t^{j-1} u(t, z) \colon j = 1,.., m$$

(3-2) $$\Phi(z) = {}^t(\varphi_1(z), \dots, \varphi_m(z)).$$

Le problème de Cauchy (PC) est équivalent au suivant.

(PCS) $$\begin{cases} [\partial_t I - A(t, z; \partial_z)]\, U(t, z) = 0 \\ U(0, z) = \Phi(z) \end{cases}$$

où

(3-3) $$A(t, z; \partial_z) = \begin{pmatrix} 0 \dots 1 \dots 0 \\ 0 \quad \ddots \quad 0 \quad \ddots \quad 1 \\ a_m(t, z; \partial_z), \dots, a_1(t, z; \partial_z) \end{pmatrix}$$

Alors d'après l'hypothèse [H-1], nous avons

$[\text{H-1}]_{bis}$ *Le problème* (PCS) *soit bien posé à l'origine.*

Citons ici deux propositions suivantes sans démonstration: On trouvera ces démonstrationas dans [6], [7].

Proposition1. *Si le* (PCS) *est bien posé à l'origine, alors pour un voisinage* $\mathfrak{U}$ *de l'origine de* $\mathbf{C}^d$, *il existe un voisinage* $\mathfrak{V}$ *de l'origine de* $\mathbf{C}^{d+1}$ *tel que, pour toute la donnée* $\Phi(z)$ *holomorphe dans* $\mathfrak{U}$, *il existe une et une seule solution* $U(t, z)$ *du* (PCS) *holomorphe dans* $\mathfrak{V}$.

Soit $\mathscr{H}(\Omega)$ l'espace de toutes fonctions holomorphes dans un domaine Ω. Il est un espace de Frechet avec la topologie de la convergeance uniforme sur tout compact.

Proposition 2. *L'application*: $\Phi \in \mathscr{H}(\mathfrak{U})^m \to U \in \mathscr{H}(\mathfrak{V})^m$ *est continue.*

Alors par l'application de la proposition 2, on a l'estimation suivante:

Il existe des nombres $r > 0$, $R > 0$, $R^{\sim} > 0$ *et* $C_0 > 0$ *tels que l'on ait*

(3-4) $$|||\, U \,|||_{r,R} \equiv \sum_{j=1}^{m} \sup_{\substack{|t| \leq r \\ |z| \leq R}} |u_j(t, z)| \leq C_0\, |||\, \Phi \,|||_{R^{\sim}} \equiv C_0 \sum_{j=1}^{m} \sup_{|z| \leq R^{\sim}} |\varphi_j(z)|$$

où $|z| = \operatorname*{Max}_{j=1,.,d} |z_j|$.

La première astuce de S.Mizohata est l'amélioration de cette estimation. Nous allons la voir à la section suivante.

§4. Poids modifié et l'amélioration de l'estimation à priori

Nous montrons, dans cette section, l'amélioration suivante de l'estimation précédente (3-4).

Proposition 3. *Soit $z^0; |z^0| < R$ fixé. Pour la donnée $\Phi(z)$ telle que*

$$|\partial_z^\alpha \varphi_j(z^0)| \le C_1 B^{|\alpha|} \qquad (j = 1,.,m,\ \alpha) \tag{4-1}$$

la solution $U(t, z)$ du (PC) *satisfait*

$$|U_j(t, z^0)| \le M \frac{C_0 C_1 r}{r - |t|} \exp\left[Bd(R^\sim + |z^0|)\left(\frac{|t|}{r}\right)^{1/p_m}\right] \qquad (|t| < r, j = 1,.., m) \tag{4-2}$$

où C_0, r, R et $R^\sim$ sont des constantes à la proposition 2, que M est une constante ne dépendant que de r, R, $R^\sim$ et B et que p_m est celui à (2-2).

Preuve. Soient $A(t, z; \zeta) \equiv (a_{ij}(t, z; \zeta))$

$$a_{ij}(t, z; \zeta) = \sum_\alpha \sum_{k \ge \sigma(ij\alpha)} \frac{t^k}{k!} a_{ij}^{\alpha k}(z)\zeta^\alpha \qquad (a_{ij}^{\alpha\sigma(ij\alpha)}(z) \not\equiv 0)$$

oú $\sigma(ij\alpha) = \infty$ si $a_{ij}(t, z; \zeta)$ ne contient pas la partie ζ^α, et soient $t_j = p_m(m-j)$ ($j = 1,., m$).

Remarquons que l'on a $|\alpha| - p_m\sigma(ij\alpha) \le t_j - t_i + p_m$ ($i, j = 1,.,m$).

Soit $$U(t, z) = \sum_{n \ge 0} \frac{t^n}{n!} u^n(z) \qquad (u^n(z) = {}^t(u_1^n(z), \dots, u_m^n(z)).$$

Alors on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} u_i^{n+1}(z) = \sum_{\substack{n \ge 0, j = 1,.,m \\ |\alpha| \le t_j - t_i + p_m(k+1) \\ h+k=n, h \ge 0, k \ge 0}} \frac{t^n}{h!k!} a_{ij}^{\alpha k}(z)\partial_z^\alpha u_j^h(z) \qquad (i = 1, \dots, m)$$

D'où on a la formule de récurrence

$$u_i^{n+1}(z) = \sum_{\substack{j=1,.,m, k=0,1,.,n \\ |\alpha| \le t_j - t_i + p_m(k+1)}} \frac{n!}{k!(n-k)!} a_{ij}^{\alpha k}(z)\partial_z^\alpha u_j^{n-k}(z) \qquad \begin{pmatrix} i = 1,.,m \\ n \ge 0 \end{pmatrix}.$$

Par récurrence on a des $b_{ij}^{\alpha n}(z)(n \ge 0, |\alpha| \le t_j - t_i + p_m n, i,j = 1,., m)$ telles que l'on ait

$$u_i^n(z) = \sum_{\substack{j=1,.,m \\ |\alpha| \le t_j - t_i + p_m n}} b_{ij}^{\alpha n}(z)\partial_z^\alpha \varphi_j(z) \qquad (|z| \le R,\ i = 1,., m).$$

Soit

$$\varphi_j(z) = \sum_\alpha \varphi_j^\alpha \frac{(z-z^0)^\alpha}{\alpha!}. \ (j = 1, \ldots, m).$$

Alors nous avons

$$u_i^n(z^0) = \sum_{\substack{j=1,.,m \\ |\alpha| \le t_j - t_i + p_m n}} b_{ij}^{\alpha n}(z^0)\varphi_j^\alpha. \qquad (i = 1,.,m,\ n \ge 0).$$

Fixons maintenant α, n, i et j une fois pris tels que $|\alpha| \le t_j - t_i + p_m n$.

Soit $U_j^\alpha(t,z) = \sum_{n \ge 0} \frac{t^n}{n!} u_j^{\alpha n}(z)$ la solution du (PCS) pour la donnée

$$\Phi_j^\alpha(z) = {}^t\Bigg(0,.,0, \overset{\overset{j}{\wedge}}{\left(\frac{1}{\alpha!}(z-z^0)^\alpha\right)}, 0,.,0\Bigg).$$

Alors nous avons

$$u_{ji}^{\alpha n}(z^0) = b_{ij}^{\alpha n}(z^0) \qquad (i, j = 1,.,m,\ n \ge 0,\ |\alpha| \le t_j - t_i + p_m n).$$

Or d'après l'inégalité de Cauchy on a

$$|u_{ji}^{\alpha n}(z)| \le \frac{n!}{r^n} \operatorname*{Sup}_{|t| \le r} |u_{ji}^\alpha(t,z)| \le \frac{n!}{r^n} |||\, U_j^\alpha \,|||_{r,R} \qquad (|z| < R).$$

Et par l'inégalité d'estimaion à priori (3-4) on a

$$|u_{ji}^{\alpha n}(z)| \le C_0 \frac{n!}{r^n} |||\, \Phi_j^\alpha \,|||_{R^\sim} \qquad (|z| < R).$$

Or pour la donnée actuelle celle-ci est estimée par

$$C_0 \frac{n!}{r^n} \frac{1}{\alpha!} (R^\sim + |z^0|)^{|\alpha|}.$$

Ainsi nous avons eu

$$|b_{ij}^{\alpha n}(z^0)| \le C_0 \frac{n!}{r^n} \frac{1}{\alpha!} (R^\sim + |z^0|)^{|\alpha|}.$$

Maintenant prenons la donnée $\Phi(z)$ telle que

$$|\partial_z^\alpha \varphi_j(z^0)| \le C_1 B^{|\alpha|} \qquad (^\forall \alpha).$$

Alors la solution $U(t,z)$ du (PCS) pour cette donnée peut être estimée par

$$|U_i(t,z^0)| \le \sum_{n \ge 0} \frac{|t^n|}{n!} \sum_{\substack{j=1,.,m \\ |\alpha| \le t_j - t_i + p_m n}} C_0 \frac{n!}{r^n} \frac{1}{\alpha!} (R^\sim + |z^0|)^{|\alpha|} C_1 B^{|\alpha|}$$

$$= C_0 C_1 \sum_{\substack{k \ge 0 \\ j=1,.,m}} \frac{1}{k!} [Bd(R^\sim + |z^0|)]^k \sum_{n \ge \operatorname{Max}\{0, (k - t_j + t_i)p_m^{-1}\}} \left(\frac{|t|}{r}\right)^n$$

Or on a, pour $|t| \le r$,

$$\sum_{n \ge \operatorname{Max}\{0,(k-t_j+t_i)p_m^{-1}\}} \left(\frac{|t|}{r}\right)^n \le \begin{cases} \dfrac{r}{r-|t|} & k \le t_j - t_i \\[2ex] \dfrac{r}{r-|t|}\left(\dfrac{|t|}{r}\right)^{(k-t_j+t_i)p_m^{-1}} & k > t_j - t_i. \end{cases}$$

Donc on a

$$\begin{aligned} |U_i(t, z^0)| &\le \frac{C_0C_1 r}{r-|t|}\sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{0\le k\le k_{ij}}\frac{1}{k!}[Bd(R^{\sim}+|z^0|)]^k \right.\\ &\quad \left. + \sum_{k>k_{ij}}\frac{1}{k!}[Bd(R^{\sim}+|z^0|)]^k\left(\frac{|t|}{r}\right)^{(k-t_j+t_i)p_m^{-1}}\right] \\ &= \frac{C_0C_1 r}{r-|t|}\sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{0\le k\le k_{ij}}\frac{1}{k!}[Bd(R^{\sim}+|z^0|)]^k \right.\\ &\quad + \sum_{k>k_{ij}}\frac{1}{(k-k_{ij})!}\left[Bd(R^{\sim}+|z^0|)\left(\frac{|t|}{r}\right)^{p_m^{-1}}\right]^{k-k_{ij}} \\ &\quad \left. \times \frac{(k-k_{ij})!}{k!}[Bd(R^{\sim}+|z^0|)]^{k_{ij}}\left(\frac{|t|}{r}\right)^{(k_{ij}-t_j+t_i)p_m^{-1}}\right] \end{aligned}$$

où k_{ij} est l'entier non négatif le plus petit majorant $t_j - t_i$. Celle-ci est donc majoré par

$$\frac{C_0C_1 r}{r-|t|}\sum_{j=1}^{m}\left\{\sum_{0\le k\le k_{ij}}\frac{1}{k!}[Bd(R^{\sim}+|z^0|)]^k + \sum_{k>0} C_2^{k_0}\frac{1}{k!}\left[Bd(R^{\sim}+|z^0|)\left(\frac{|t|}{r}\right)^{p_m^{-1}}\right]^k\right\}$$

où $k_0 = \operatorname{Max} k_{ij}$, $C_2 = \operatorname{Max}\{1, [Bd(R^{\sim}+R)]\}$.

Soit $M = 2m \operatorname*{Sup}_{i,j=1,..,m}\left\{\sum_{0\le k\le k_{ij}}\frac{1}{k!}[Bd(R^{\sim}+R)]^k, C_2^{k_0}\right\}$.

Alors on a

$$|U_j(t, z^0)| \le M\frac{C_0C_1 r}{(r-|t|)}\exp\left[Bd(R^{\sim}+|z^0|)\left(\frac{|t|}{r}\right)^{p_m^{-1}}\right] \qquad (|t| < r, j = 1,.., m).$$

C.Q.F.D.

§5. Polygône de Newton et des quantités clefs

Nous faisons correspondre à $t^{\sigma(jk)}a_{jk}(t, z;\zeta) \not\equiv 0$ le point $\left(1 + \dfrac{\sigma(jk)}{j}, \dfrac{k}{j}\right)$ au plan XY. Nous y ajoutons *un point* $(1, 0)$ *exprès*. Nous appelons *le polygône de Newton*, noté par (Δ), le plus petit polygône à côtés de pente non négative contenant tous ces points.

Soit $P_0^{\sim}$ le point de contact de la tangente au (Δ) tiré de l'origine; quand cette tangente a un côté commun avec le (Δ), $P_0^{\sim}$ est convenu d'être le sommet à l'extrémité droite de ce côté. Soit P_0 le premier sommet à la droite du $\tilde{P}_0$, $\tilde{P}_0$ inclus, tel que son ordonnée soit supérieure à 1. Soit P_1 le point de contact de la tangente au (Δ) tiré du point (0, 1); quand cette tangente a un côté commun avec le (Δ), P_1 est convenu d'être le sommet à l'extrémité gauche de ce côté. Soit $[P_0, P_1]$ l'ensemble de tous les sommets du (Δ) entre ces deux sommets, P_0, P_1 inclus.

L'hypothèse [H-2] assure que cet ensemble $[P_0, P_1]$ n'est pas vide.

Prenons donc *un point* $P \equiv P(1 + q.p) \in [P_0, P_1]$.

Remarque. Tous les points de $[P_0, P_1]$ nous emmènent à la contraduction. Et pour montrer le théorème 1, il suffit de considérer seulement le point P_0. Mais pour montrer le théorème 2, il nous faut considérer le point P_1. Nous raisonnons donc dans le cadre général.

Soient σ_1, σ_2 les pentes des côtés du (Δ) à la gauche et à la droite respectivement de P:

(5-1) $$0 \leq \sigma_2 < \sigma_1 \leq +\infty.$$

Fig.1

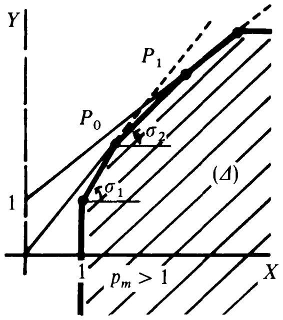


Fig.2

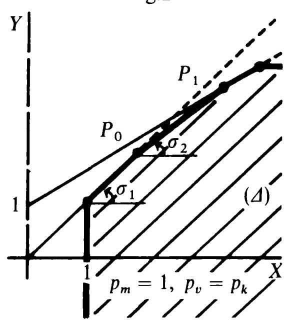
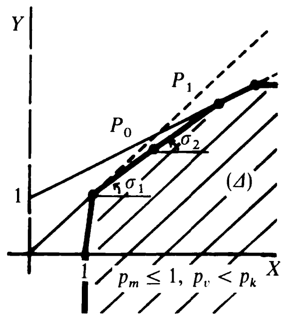


Fig.3



(cas considéré par S. Mizohata)

On remarquera que si l'on prend un $\gamma; \sigma_2 < \gamma < \sigma_1$, alors la droite $Y = \gamma(X - (q + 1)) + p$, passant par P à pente γ a le (Δ) à son bas avec le seul point commun P, c'est-à-dire, quand on pose

(5-2) $$\Gamma_P = \left\{(jk); \left(1 + \frac{\sigma(jk)}{j}, \frac{k}{j}\right) = (1 + q, p)\right\}.$$

on a

(5-3) $$\begin{cases} k - pj - \gamma(\sigma(jk) - qj) < 0 & (jk) \notin \Gamma_P \\ k - pj - \gamma(\sigma(jk) - qj) = 0 & (jk) \in \Gamma_P. \end{cases}$$

Choisissons alors γ_1, γ_2 en sorte que l'on ait

(5-4) $$\sigma_2 < \gamma_2 < \gamma_1 < \sigma_1,$$

(5-5) $$0 < p - \gamma_1(q+1),$$

$(5\text{-}5)_{bis}$ $$p - \gamma_1(q+1) < 1,$$

(5-6) $$1 < p - \gamma_2\left(q + 1 - \frac{1}{p_m}\right).$$

On peut en effet les choisir; $p - \gamma_1(q+1)$ étant la ordonnée Y du point, à l'abscisse $X = 0$, sur la droite $Y = \gamma_1(X - (q+1)) + p$, passant par P, à pente γ_1 et $p - \gamma_2\left(q + 1 - \frac{1}{p_m}\right)$ étant celle Y du point, à l'abscisse $X = \frac{1}{p_m}$, sur la droite $Y = \gamma_2(X - (q+1)) + p$, passant par P, à pente γ_2, on peut les choisir grâce au choix de P et à la définition de p_m. Soit encore

(5-7) $$p_1 \equiv p - \gamma_1 q.$$

Alors on a, grâce à $(5\text{-}5)_{bis}$,

(5-8) $$p_1 - \gamma_1 < 1.$$

Pour l'indice s ($s > 1$) de Gevrey pour la micro-localisation, compte tenu de (5-8), on le choisit, en sorte que l'on ait

(5-9) $$\mathrm{Max}\left\{p_1 - \gamma_1,\ 1 - \frac{\gamma_2}{p_m}\right\} < \frac{1}{s}.$$

Remarque. Au cas $P = P_1$, on peut choisir ces nombres γ_1, γ_2 et s pour un nombre τ donné positif d'ailleurs arbitraire qui remplace p_m^{-1}. Cette remarque sert à la démonstration du théorème 2.

Remarque. Expliquons ici la signification de ces nombres clefs avec les expressions à la section 2: On choisit $t_n = n^{-\gamma_1}$ et $t_n' = n^{-\gamma_2}$. (5-4) montre que la partie provenant du P est principale dans $[t_n, t_n']$. (5-5) assure que l'irrégularité du changement considéré à la section 7 n'est pas grave. (5-4) et (5-9) montrent que les érreurs sont négligibles. (5-6) entraine la contraduction à $t = t_n'$.

Les racines de l'équation:

$$\lambda^m - \sum_{(jk)\in \Gamma_P} a_{jk}(0, z; \zeta)\lambda^{m-j} = 0$$

ne sont pas triviales. Remarquons que ces racines sont homogènes d'ordre p en ζ. Alors, il existe un $x_0 \in \mathbf{R}^d$ au voisinage de l'origine (que l'on peut choisir autant proche de l'origine que l'on veut), un $\zeta_0; |\zeta_0| = 1$, un $\delta_0 > 0$ et un numérotage des racines tels que l'on ait

(5-10) $$\begin{cases} \mathrm{Re}\ \lambda_j(0, x_0; \zeta_0) \geq 4\delta_0 & j = 1,.., m_0 \\ \mathrm{Re}\ \lambda_j(0, x_0; \zeta_0) \leq 0 & j = m_0 + 1,.., m. \end{cases}$$

Soit

(5-11) $$\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0. \qquad (\xi_0, \eta_0 \in \mathbf{R}^d)$$

Les nombres clefs $p, q, p_1, \gamma_1, \gamma_2, s, \delta_0, m_0, x_0$ et $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$ étant ainsi choisis, nous allons envisager la micro-localisation avant de revenir de nouveau au (Δ).

§6. Estimation à priori et micro-localisation

A partir d'ici nous envisageons dans l'espace réel $\mathbf{R}^d$. Nous envisageons, avec un paramètre n de localisation,

$$(\mathrm{PCS})_n \qquad \begin{cases} [\partial_t I - A(t, x; n\xi_0 + \partial_x)]\, U_n^0(t, x) = 0 \\ U_n^0(0, x) = \Phi(x). \end{cases}$$

Le $(\mathrm{PCS})_n$ est lié au (PCS) par $U_n^0(t, x) = \exp(-n\xi_0 x) U(t, x)$.
Et grâce à la proposition 3 on a

Proposition 3-bis. *Pour la donnée $\Phi(x)$ telle que $|\partial^\alpha \varphi_j(x)| \le C_1 B^{|\alpha|}$ $(j = 1,.., m,$ α, $|x| \le R^\sim)$, la solution $U_n^0(t, x)$ du* $(\mathrm{PCS})_n$ *satisfait*

$$|U_{nj}^0(t, x)| \le M \frac{C_0 C_1 r}{r - |t|} \exp\left[d(B + n|\xi_0|)(R + R^\sim)\left(\frac{|t|}{r}\right)^{1/p_m} \right] \qquad \begin{pmatrix} j = 1, \dots, m \\ |t| < r,\ |x| < R \end{pmatrix}$$

où C_0, r, R, $R^\sim$ et M sont des constants à la proposition 3.

Preuve. Soit $x^0; |x^0| < R$, fixé une fois choisi arbitrairement. Soit $U(t, z)$ la solution du (PCS) pour la donnée $\exp(n\xi_0(z - x^0))\Phi(z)$, où $\Phi(z)$ est le complexifié de $\Phi(x)$. Soit

$$U_n^0(t, x) = \exp(-n\xi_0(x - x^0)) U(t, x).$$

Alors $U_n^0(t, x)$ est la solution du $(\mathrm{PCS})_n$ pour la donnée $\Phi(x)$. Ayant $|\partial_z^\alpha(\exp(n\xi_0(z - x^0))\varphi_j(z)\,||_{z=x^0} \le C_1(B + n|\xi_0|)^{|\alpha|}$, on a, grâce à la proposition 3,

$$|U_j(t, x^0)| \le M \frac{C_0 C_1 r}{r - |t|} \exp\left[d(B + n|\xi_0|)(R^\sim + |x^0|)\left(\frac{|t|}{r}\right)^{1/p_m} \right] \qquad \begin{pmatrix} j = 1, \dots, m \\ |t| < r,\ |x| < R \end{pmatrix}$$

et par conséquent

$$|U_{nj}^0(t, x^0)| \le M \frac{C_0 C_1 r}{r - |t|} \exp\left[d(B + n|\xi_0|)(R^\sim + |x^0|)\left(\frac{|t|}{r}\right)^{1/p_m} \right] \qquad \begin{pmatrix} j = 1, \dots, m \\ |t| < r,\ |x| < R \end{pmatrix}$$

Etant $x^0; |x^0| < R$ arbitraire, on a l'estimation voulue. C.Q.F.D.

Nous micro-localisons l'opérateur $\partial_t I - A(t, x; n\xi_0 + \partial_x)$. Nous utiliserons dans la suite l'écriture usuelle de dérivation:

$$a_{(\nu)}^{(\mu)}(x, \eta) = \partial_\eta^\mu \left(\frac{1}{i} \partial_x \right)^\nu a(x, \eta).$$

Soit $\chi(x) = (\chi_1(x), \dots, \chi_d(x))$ un vecteur de fonctions de la classe de Gevrey d'indice s satisfaisant à

$$(6\text{-}1) \qquad \begin{cases} |\chi_{k(\alpha)}(x)| \le {}^{\exists}C\alpha!\,{}^{s}\rho_0^{|\alpha|} & ({}^{\forall}\alpha,\ {}^{\forall}x) \\ \chi_k(x) = x_k \quad |x - x_0| \le r_0, & \chi_k(x) = x_{0k} \quad |x - x_0| \ge 2r_0 \\ |\chi_k(x) - x_{0_k}| \le 2r_0 \quad ({}^{\forall}x) & (k = 1, \dots, d). \end{cases}$$

Soit $\Xi(\eta) = (\Xi_1(\eta), \dots, \Xi_d(\eta))$ un vecteur de fonctions de la classe de Gevrey d'indice s satisfaisant à

$$(6\text{-}2) \qquad \begin{cases} |\Xi_k^{(\alpha)}(\eta)| \le {}^{\exists}C\alpha!^{s}\rho_0^{|\alpha|} & ({}^{\forall}\alpha,\ {}^{\forall}\eta) \\ \Xi_k(\eta) = \eta_k \quad |\eta - \eta_0| \le r_0, & \Xi_k(\eta) = \eta_{0k} \quad |\eta - \eta_0| \ge 2r_0 \\ |\Xi_k(\eta) - \eta_{0k}| \le 2r_0 & ({}^{\forall}\eta)\ (k = 1, \dots, d). \end{cases}$$

Le micro-localisé de l'opérateur différentiel $a(x; \partial_x)$ est l'opérateur pseudo-différentiel de symbol

$$(6\text{-}3) \qquad a_{n\,loc}(x; \eta) = a\left(\chi(x),\ in\,\Xi\left(\frac{\eta}{n}\right)\right).$$

Alors, pour $a(x; \partial_x)$ d'ordre k, on peut bien supposer

$$(6\text{-}4) \qquad |a_{n\,loc}{}^{(\mu)}_{(\nu)}(x, \eta)| \le {}^{\exists}C(\mu!\,\nu!)^s \rho_0^{|\mu+\nu|} n^{k-|\mu|} \qquad ({}^{\forall}\mu, \nu, {}^{\forall}x, {}^{\forall}\eta).$$

Remarquons que, compte tenu du théorème de Calderón-Vaillancourt, on peut supposer la même estimation que (6-4) pour la norme d'opérateur de $a_{n\,loc}{}^{(\mu)}_{(\nu)}(x, D)$,

$$(6\text{-}5) \qquad \| a_{n\,loc}{}^{(\mu)}_{(\nu)}(x, D) \| \le {}^{\exists}C(\mu!\,\nu!)^s \rho_0^{|\mu+\nu|} n^{k-|\mu|} \qquad ({}^{\forall}\mu, \nu)$$

où $\|\cdot\|$ est la norme d'operateur dans $L(L^2, L^2)$. Remarquons encore que l'on a, pour $a(x; \partial_x)$ homogène d'ordre k en ∂_x,

$$(6\text{-}6) \qquad n^{-k} |a_{n\,loc}(x; \eta) - a(x_0, in\eta_0)| \longrightarrow 0 \qquad (r_0 \longrightarrow 0)$$

A cette analyse, ce qui est fondamental, c'est la micro-localisation de l'opérateur, mais pour la faire fonctionner il faut micro-localiser la solution. Le problème étant local il faut d'abord le rendre global. On le fait par la localisaion en x. Soit $\theta(x)$ une fonction de la classe de Gevrey d'indice s telle que

$$(6\text{-}7) \qquad \begin{cases} |\theta_{(\alpha)}(x)| \le {}^{\exists}C(\alpha!)^s \rho_0^{|\alpha|} & ({}^{\forall}\alpha,\ {}^{\forall}x) \\ \theta(x) = 1 \quad |x - x_0| \le r_0, & \theta(x) = 0 \quad |x - x_0| \ge 2r_0 \\ 0 \le \theta(x) \le 1 & ({}^{\forall}x). \end{cases}$$

Soit $\beta(x)$ une fonction de la classe de Gevrey d'indice $s^{[8]}$ telle que

$$
(6\text{-}8)\quad \begin{cases} 0 \leq \beta(x) \leq 1,\ \beta(x) = 1 \text{ sur } \left\{x; |x - x_0| \leq \dfrac{1}{2} r_0\right\},\ \text{Supp}\ \beta \subset \{x; |x - x_0| \leq r_0\}, \\ |\beta_{(\mu+\nu)}(x)| \leq {}^{\exists}C\, N_n^{|\mu|} (\nu!)^s \rho_0^{|\mu+\nu|} \qquad ({}^{\forall}|\mu| \leq N_n,\ {}^{\forall}\nu,\ {}^{\forall}x) \\ \textit{où } N_n = {}^{\exists}C_n{}^{1/s} \textit{ sera précisément défini ultérieurement.} \end{cases}
$$

Remarque: Ici ρ_0 et r_0 ne sont plus indépendants mais liés par $\rho_0 = {}^{\exists}Cr_0^{-1}$. Mais dans cette note on est indifférent de cette dépendance.

Opérons $\beta(x)$ de gauche à $(\partial_t I - A(t, x; n\xi_0 + \partial_x))\, U_n^0(t, x) = 0$.
Alors ayant

$$
\begin{aligned} \beta(x) A(t, x; n\xi_0 + \partial_x) &= \beta(x) A(t, \chi(x); n\xi_0 + \partial_x) \\ &= A(t, \chi(x); n\xi_0 + \partial_x)\beta(x) + [\beta(x), A(t, \chi(x); n\xi_0 + \partial_x)] \end{aligned}
$$

et $$[\beta(x), A(t, \chi(x); n\xi_0 + \partial_x)] = \sum_{1 \leq |\mu|}^{fini} \frac{(-1)^{|\mu|}}{\mu!} A^{(\mu)}(t, \chi(x); n\xi_0 + \partial_x)\beta_{(\mu)}(x),$$

on a $$\begin{aligned} &\beta(x)(\partial_t I - A(t, x; n\xi_0 + \partial_x))\, U_n^0(t, x) \\ &\quad = \beta(x)[\partial_t I - A(t, \chi(x); n\xi_0 + \partial_x)]\theta(x) U_n^0(t, x) \end{aligned}$$

Soit $\alpha(\eta)$ une fonction de la classe de Gevrey d'indice s telle que

$$
(6\text{-}9)\quad \begin{cases} 0 \leq \alpha(\eta) \leq 1,\ \alpha(\eta) = 1 \text{ sur } \left\{\eta; |\eta - \eta_0| \leq \dfrac{1}{2} r_0\right\},\ \text{Supp}\,\alpha \subset \{\eta; |\eta - \eta_0| \leq r_0\} \\ |\alpha^{(\mu+\nu)}(\eta)| \leq {}^{\exists}C N_n^{|\mu|}\, \nu!^s \rho_0^{|\mu+\nu|} \qquad ({}^{\forall}|\mu| \leq N_n, {}^{\forall}\nu). \end{cases}
$$

Soit $$\alpha_n(\eta) = \alpha\left(\frac{\eta}{n}\right).$$

Nous opérons $\alpha_n(D)$ de gauche à

$$\beta(x)[\partial_t I - A(t, \chi(x); n\xi_0 + iD)]\theta(x)\, U_n^0(t, x) = 0.$$

Alors on a

$$
\begin{cases} [\partial_t I - A_{n\,loc}(t, x; D)]\alpha_n(D)\beta(x)\theta(x)\, U_n^0(t, x) = \mathfrak{F}(t, x; D)\theta(x) U_n^0(t, x) \\ \mathfrak{F}(t, x; D) = \begin{pmatrix} 0 \\ f_m(t, x; D), \dots, f_1(t, x; D) \end{pmatrix} \\ f_j(t, x; D) = \alpha_n(D)\beta(x)(a_j(t, \chi(x); n\xi_0 + iD) - a_{j\,n\,loc}(t, x; D)) \\ \qquad\qquad + [\alpha_n(D)\beta(x), a_{j\,n\,loc}(t, x, D)]. \end{cases}
$$

Remarquons une chose à ces localiseurs. Soit

$$(6\text{-}10)\qquad \nabla_n(x, D) = \alpha_n(D)\beta(x).$$

On a, pour son symbol $\nabla_n(x, \eta)$,

$$\nabla^{(\mu)}_{n(\nu)}(x, \eta) = Os - \iint e^{-iy\zeta}\alpha^{(\mu)}_n(\eta + \zeta)\beta_{(\nu)}(x + y)dy\bar{d}\zeta \qquad \left(\bar{d}\zeta = \frac{1}{(2\pi)^d}d\zeta\right).$$

Et l'opérateur pseudo-différentiel à ce symbole $\nabla^{(\mu)}_{n(\nu)}(x, \eta)$ est

(6-11) $$\nabla^{(\mu)}_{n(\nu)}(x, D) = \alpha^{(\mu)}_n(D)\beta_{(\nu)}(x).$$

On a d'ailleurs

(6-12) $$|\nabla^{(p+\mu)}_{n(q+\nu)}(x, \eta)| \leq {}^{\exists}CN_n^{|p+q|}(\mu!\nu!)^s\rho_0^{|p+q+\mu+\nu|}n^{-|p+\mu|} \quad (\forall|p|,|q| \leq N_n, \forall\mu,\nu)$$

Et par remplacer $\alpha_n(D)$ et $\beta(x)$ par $\alpha^{(\mu)}_n(D)$ et $\beta_{(\nu)}(x)$, on a de même

(6-13) $$\begin{cases} [\partial_t I - A_{n\,loc}(t, x; D)]\nabla^{(\mu)}_{n(\nu)}(x; D)\theta(x)U^0_n(t, x) \\ \quad = \mathfrak{F}^{\mu\nu}(t, x; D)\theta(x)U^0_n(t, x) \\ \mathfrak{F}^{\mu\nu}(t, x; D) = \begin{pmatrix} 0 \\ f^{\mu\nu}_m(t, x; D), \dots, f^{\mu\nu}_1(t, x; D) \end{pmatrix} \\ f^{\mu\nu}_j(t, x; D) = \alpha^{(\mu)}_n(D)\beta_{(\nu)}(x)(a_j(t, \chi(x); n\xi_0 + iD) - a_{j\,n\,loc}(t, x; D)) \\ \qquad + [\nabla^{(\mu)}_{n(\nu)}(x; D), a_{j\,n\,loc}(t, x; D)]. \end{cases}$$

§ 7. Deux systèmes

Revenons au (Δ). D'après (5-3), (5-4) et (5-7) on a

$$k - \sigma(jk)\gamma_1 \leq jp_1 \qquad (\forall j, k).$$

Donc pour tout $t \in [0, n^{-\gamma_1}]$, $t^{\sigma(jk)}n^{k-jp_1}$ étant bornée (quand $n \to \infty$), on a

$$a_{j\,n\,loc}(t, x; \eta) = n^{jp_1}\, a_j^{\sim}(t, x, \eta; n)$$

où

(7-1) $$a_j^{\sim}(t, x, \eta; n) \equiv \sum_k t^{\sigma(jk)}n^{k-p_1 j}[a_{jk}(t, x_0; \zeta_0) + n^{-k}[a_{jk\,n\,loc}(t, x; \eta) - a_{jk}(t, x_0; n\zeta_0)]]$$

satisfait à

(7-2) $$|a^{\sim(\mu)}_{j(\nu)}(t, x; \eta; n)| \leq {}^{\exists}C(\mu!\nu!)^s\rho_0^{|\mu+\nu|}n^{-|\mu|} \qquad (\forall t \in [0, n^{-\gamma_1}], \forall x).$$

Nous posons

(7-3) $$U^1_n(t, x) = \mathrm{diag}[1, n^{-p_1}, ., n^{-p_1(m-1)}]\theta(x)U^0_n(t, x)$$

Alors on a le premier système: $t \in [0, n^{-\gamma_1}]$

$$\begin{cases} \partial_t \nabla^{(\mu)}_{n(\nu)}(x, D)U^1_n(t, x) = n^{p_1}[A^1(t, x; D; n)\nabla^{(\mu)}_{n(\nu)}(x, D)U^1_n(t, x) \\ \qquad + F^1(\nabla^{(\mu)}_{n(\nu)}; U^1_n)(t, x)] \end{cases}$$

$$[\mathrm{I}]\begin{cases} A^1(t,x;D;n)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ a_m^{\sim}(t,x;D;n), & \dots, & & a_1^{\sim}(t,x;D;n) \end{pmatrix}\equiv (A^1_{ij}(t,x;D;n)) \\ F^1(\nabla^{(\mu)}_{n(\nu)};U^1_n)(t,x)=\begin{pmatrix} 0 \\ n^{-p_1m}f^{\mu\nu}_m(t,x;D),\dots,n^{-p_1}f^{\mu\nu}_1(t,x;D)\end{pmatrix}U^1_n(t,x)\end{cases}$$

D'après (5-3) nous avons, pour tout $\gamma\in[\gamma_2,\gamma_1]$,
$k-(\sigma(jk)-qj)\gamma\le pj$ avec l'égalité aux $(jk)\in\Gamma_p$.

Donc nous savons que, pour tout $t\in[n^{-\gamma_1},n^{-\gamma_2}]$, $t^{\sigma(jk)-qj}n^{k-pj}$ tend vers zéro pour $(jk)\notin\Gamma_p$ et ceci reste borné et tend vers 1 pour $(jk)\in\Gamma_p$ quand n tend vers ∞. Et nous avons

$$a_{j\,n\,loc}(t,x;D)=n^{pj}t^{qj}a^*_j(t,x;D;n)$$

où

$$a^*_j(t,x;D;n)=\sum_k t^{\sigma(jk)-qj}n^{k-pj}\{a_{jk}(0,x_0;\zeta_0)+[n^{-k}a_{jk\,n\,loc}(t,x;D)-a_{jk}(0,x_0;\zeta_0)]\}\tag{7-4}$$

satisfait à

$$\begin{cases}|a^{*(\mu)}_{j(\nu)}(t,x;\eta;n)|\le{}^{\exists}C(\mu!\nu!)^s\rho_0^{|\mu+\nu|}n^{-|\mu|}\quad({}^{\forall}t\in[n^{-\gamma_1},n^{-\gamma_2}],\ {}^{\forall}x,\ {}^{\forall}\mu,\nu)\\ a^*_j(t,x;\eta;n)=\sum_{(jk)\in\Gamma_p}a_{jk}(0,x_0;\zeta_0)+o_{r_0,n}(1)\end{cases}\tag{7-5}$$

où $or_{0,n}(1)$ est la quantité tendant vers zéro quand on fait tendre r_0 vers zéro et n vers ∞.

Soit T une matrice telle que l'on ait

$$T\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ \sum_{(mk)\in\Gamma_p}a_{mk}(0,x_0;\zeta_0), & \dots, & & \sum_{(1k)\in\Gamma_p}a_{1k}(0,x_0;\zeta_0)\end{pmatrix}T^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1(0,x_0;\zeta_0) & & 0\\ \lambda_{ij} & \ddots & \lambda_m(0,x_0;\zeta_0)\end{pmatrix}\quad\text{avec } |\lambda_{ij}|\le\frac{\delta_0}{2}.$$

Posons

$$(7\text{-}6)\qquad \begin{cases} U_n^2(t,x) = T\,\mathrm{diag}[1, (n^p t^q)^{-1}, \dots, (n^p t^q)^{-(m-1)}]\,\theta(x) U_n^0(t,x) \\ \qquad = T\,\mathrm{diag}[1, (n^{p-p_1}t^q)^{-1}, \dots, (n^{p-p_1}t^q)^{-(m-1)}]\, U_n^1(t,x). \end{cases}$$

Alors bien qu'il y ait la singularité d'ordre t^{-1} causé par ce changement (7-6), tant qu'on considère pour $t \in [n^{-\gamma_1}, n^{-\gamma_2}]$, l'influence de cette singularité est négligible grâce à (5-5). Et on a le deuxième système: $t \in [n^{-\gamma_1}, n^{-\gamma_2}]$

$$[\mathrm{II}]\quad \begin{cases} \partial_t \nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(x, D) U_n^2(t,x) = n^p t^q [A^2(t, x; D; n) \nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(x, D)\, U_n^2(t,x) \\ \quad + F^2(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}; U_n^2)(t,x)] \\ A^2(t, x; D; n) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1(0, x_0; \zeta_0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m(0, x_0; \zeta_0) \end{pmatrix} + (\lambda_{ij}(t, x; D; n)) \right\} \\ \\ \text{avec } |\lambda_{ij}(t, x; \eta; n)| \le \dfrac{\delta_0}{2m} \qquad ({}^{\exists}n_0; {}^{\forall}t \in [n^{-\gamma_1}, n^{-\gamma_2}], {}^{\forall}x, {}^{\forall}\eta, {}^{\forall}n \ge n_0 \\ \qquad |\lambda_{ij(\nu)}^{(\mu)}(t, x; \eta; n)| \le {}^{\exists}C(\mu!\nu!)^s \rho_0^{|\mu+\nu|} n^{-|\mu|} \\ F^2(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}; U_n^2)(t,x) \\ \quad = T\begin{pmatrix} 0 \\ n^{-pm}t^{-qm} f_m^{\mu\nu}(t, x; D), \dots, n^{-p}t^{-q} f_1^{\mu\nu}(t, x; D) \end{pmatrix} T^{-1} U_n^2(t,x). \end{cases}$$

§ 8. Remarques sur l'opérateur pseudo-differentiel

A la démonstration du Prof. S. Mizohata, donc à la nôtre, l'expension asymptotique de l'opérateur pseudo-différentiel joue un rôle important. Nous exposons ici quelques remarques dont nous nous servirons dans la suite, mais leur démonstration n'étant pas courte, nous l'envoyons à l'appendice.

Proposition 4. *Soient $a(x; D)$, $b(x; D)$ deux opérateurs pseudo-différentiels. Alors on a*

$$(1)\qquad a(x; D)\, b(x; D) = \sum_{|\alpha| \le N} \frac{1}{\alpha!} a^{(\alpha)} \circ b_{(\alpha)}(x; D) + J_N(a, b)(x; D)$$

où
$$a^{(\alpha)} \circ b_{(\alpha)}(x; \xi) = a^{(\alpha)}(x; \xi) b_{(\alpha)}(x; \xi)$$

et
$$J_N(a, b)(x; \xi) = \sum_{|\alpha| = N+1} \frac{|\alpha|}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{|\alpha|-1} dt\ os-\iint e^{-iy\eta} a^{(\alpha)}(x; \xi + \eta) \times b_\alpha(x + ty; \xi) dy \bar{d}\eta$$

$$(2)\qquad a \circ b(x; D) = \sum_{|\alpha| \le N} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} a^{(\alpha)}(x; D) b_{(\alpha)}(x; D) + J_N^{\sim}(a, b)(x, D)$$

où
$$a \circ b(x; \xi) = a(x; \xi) b(x; \xi)$$

et $J_N^{\sim}(a, b)(x; \xi) = \sum_{|\alpha| = N+1} \frac{(-1)^{|\alpha|}|\alpha|}{\alpha!} \int_0^1 t^{|\alpha|-1} dt \ os-\iint e^{-iy\eta} a^{(\alpha)}(x; \xi + \eta)$

$\times b_\alpha(x + ty; \xi) dy đ\eta$

(3) $$[a(x; D), b(x; D)] \equiv a(x; D)b(x; D) - b(x; D)a(x; D)$$

$$= \sum_{1 \le |\alpha+\beta| \le N} \frac{(-1)^{|\beta|}}{\alpha!\beta!} b_{(\alpha)}^{(\beta)}(x; D) a_{(\beta)}^{(\alpha)}(x; D) + J_N^*(a, b)(x; D)$$

où $J_N^*(a, b)(x; \xi) = \sum_{|\alpha+\beta| = N+1} \frac{(-1)^{|\beta|}|\beta|}{\alpha!\beta!} \int_0^1 t^{|\beta|-1} dt \ os-\iint e^{-iy\eta} b_{(\alpha)}^{(\beta)}(x; \xi + \eta)$

$\times a_{(\beta)}^{(\alpha)}(x + ty; \xi) dy đ\eta + \sum_{|\beta| = N+1} \frac{|\beta|}{\beta!} \int_0^1 (1 - t)^{|\beta|-1} dt \ os-\iint e^{-jy\eta}$

$\times a^{(\beta)}(x; \xi + \eta) b_{(\beta)}(x + ty; \xi) dy đ\eta.$

Soient $0 \le \delta < \rho \le 1$, $\hat{\rho}_0 > 0$, $\rho_0 > 0$ *et* $\kappa > 1$. Et soient

(8-1) $$N_n^{\sim} \equiv N_n(\hat{\rho}_0\rho_0\kappa) = \left[\frac{1}{e}\left(\frac{n^{\rho-\delta}}{\hat{\rho}_0\rho_0\kappa}\right)^{1/s}\right], \qquad C(\hat{\rho}_0\rho_0\kappa) = \frac{s}{e}\left(\frac{1}{\hat{\rho}_0\rho_0\kappa}\right)^{1/s}$$

(8-2) $$M_n^{\rho\delta}(\mu\nu : \kappa) = N_n^{\sim(s-1)|\mu+\nu|} (\hat{\rho}_0\kappa)^{|\nu|} (\rho_0\kappa)^{|\mu|} n^{-\rho|\nu| + \delta|\mu|}$$

(8-3) $$E_n(a; g; \kappa) = \sum_{|\mu+\nu| \le N_n^{\sim}} M_n^{\rho\delta}(\mu\nu; \kappa) \| a_{(\nu)}^{(\mu)}(\circ; D) g(\circ) \| \qquad (g \in H^\infty)$$

(8-4) $$\begin{cases} R_N(a, b)(x; D) = \sum_{|\mu+\nu| \leqq N} M_n^{\rho\delta}(\mu\nu : \kappa) \ J_{N-|\mu+\nu|}(a_{(\nu)}^{(\mu)}, b)(x; D) \\ R_N^{\sim}(a, b)(x; D) = \sum_{|\mu+\nu| \le N} M_n^{\rho\delta}(\mu\nu : \kappa) \ J_{N-|\mu+\nu|}^{\sim}(a_{(\nu)}^{(\mu)}, b)(x; D) \\ R_N^*(a, b)(x; D) = \sum_{|\mu+\nu| \le N} M_n^{\rho\delta}(\mu\nu : \kappa) \ J_{N-|\mu+\nu|}^*(a_{(\nu)}^{(\mu)}, b)(x; D). \end{cases}$$

Proposition 5. *Soient $a_n(x; D)$, $b(x; D)$ les opérateurs pseudo-différentiels tels que l'on ait*:

$$\mathrm{Supp}\ a_n(x; \xi) \subset \mathbf{R}_x^d \times \{\xi ; |\xi| \leqq nr_0\} \qquad (r_0 > 0)$$

$$|a_{n(\beta+\nu)}^{(\alpha+\mu)}(x; \xi)| \le C_a(\alpha!\beta!)^s N_n^{\sim|\mu+\nu|} \hat{\rho}_0^{|\alpha+\mu|} \rho_0^{|\beta+\nu|} n^{m^{\sim} - \rho|\alpha+\mu| + \delta|\beta+\nu|} \qquad ({}^\forall\alpha, \beta; |\mu+\nu| \le N_n^{\sim})$$

$$|b_{(\nu)}^{(\mu)}(x; \xi)| \le C_b(\mu!\nu!)^s \hat{\rho}_0^{|\mu|} \rho_0^{|\nu|} \langle \xi \rangle^{m^* - |\mu|} \qquad ({}^\forall\mu, \nu).$$

Alors on a, avec un certain polynôme absolu $P(n)$ en n:

$$\| R_{N_n^{\sim}}(a_n, b)(x; D) \|, \ \| R_{N_n^{\sim}}^{\sim}(a_n, b)(x; D) \|$$

$$\le C_a C_b{}^3 P(n) \left(\frac{\kappa}{\kappa - 1}\right)^d \exp(-C(\hat{\rho}_0\rho_0\kappa) n^{(\rho-\delta)/s}).$$

Propositon 6. *Soient $a_n(x; D)$ et $b_n(x; D)$ les opérateurs pseudo-différentiels tels que l'on ait*:

$$|a_{n(\beta+\nu)}^{(\alpha+\mu)}(x; \xi)| \leq C_a(\alpha!\beta!)^s N_n^{\sim|\mu+\nu|} \hat{\rho}_0^{|\alpha+\mu|} \rho_0^{|\beta+\nu|} n^{m^\sim - \rho|\alpha+\mu| + \delta|\beta+\nu|} \quad ({}_\forall\alpha, \beta; |\mu+\nu| \leq N_n^\sim)$$

et $$|b_{n(\nu)}^{(\mu)}(x; \xi)| \leq C_b(\mu!\nu!)^s \hat{\rho}_0^{|\mu|} \rho_0^{|\nu|} n^{m^* - \rho|\mu| + \delta|\nu|} \qquad (^\forall\mu, \nu).$$

Alors on a, avec un certain polynôme absolu $P(n)$ en n:

$$\| R_{N_{\tilde{n}}}(a_n, b_n)(x; D) \|, \; \| R_{N_{\tilde{n}}}^{\sim}(a_n, b_n)(x; D) \|, \; \| R_{N_{\tilde{n}}}^{*}(a_n, b_n)(x; D) \|$$
$$\leq C_a C_b{}^3 P(n) \left(\frac{\kappa}{\kappa - 1} \right)^d \exp(-C(\hat{\rho}_0 \rho_0 \kappa) n^{(\rho-\delta)/s}).$$

Et on a

$$E_n(a_n; g; \kappa) \leq C_a n^{m^\sim} \left(\frac{e}{e-1} \right)^d \| g \|.$$

§ 9. Estimation d'énérgie

Soit

$$\text{(9-1)} \qquad ||| g ||| \equiv \sum_{j=1}^{m} \| g_j \| \quad \text{pour } g = (g_1, \ldots, g_m).$$

Estimons $U_n^1(t, x)$ au système [I]:

On a:

$$\partial_t ||| \nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(\circ; D) U_n^1(t, \circ) ||| \leq n^{p_1}[{}^3C ||| \nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(\circ; D) U_n^1(t, \circ) |||$$
$$+ ||| F^1(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}; U_n^1)(t, \circ) |||]$$

et $$||| F^1(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}; U_n^1)(t, \circ) ||| \leq \sum_{j=1}^{m} n^{-p_1 j} \| f_j^{\mu\nu}(t, \circ; D) U_{nm-j+1}^1(t, \circ) \|$$

Or grâce à la proposition 4, et compte tenu du choix de α_n, β, χ et de la définition de $a_{j\,n\,loc}(t, x; D)$, on a

$$f_j^{\mu\nu}(t, x; D) = J_{N_n - |\mu+\nu|}(\alpha_n^{(\mu)}, \beta_{(\nu)}(a_j - a_{j\,n\,loc}))(t, x; D)$$
$$+ \sum_{1 \leq |p+q| \leq N_n - |\mu+\nu|} \frac{(-1)^{|q|}}{p!q!} a_{j\,n\,loc}{}_{(p)}^{(q)}(x; D) \nabla_{n(q+\nu)}^{(p+\mu)}(x; D)$$
$$+ J_{N_n - |\mu+\nu|}^{*}(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}, a_{j\,n\,loc})(t, x; D).$$

Donc on a pour tout κ: $\kappa > 1$

$$\sum_{|\mu+\nu| \leq N_n} M_n(\mu\nu; \kappa) ||| F^1(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}; U_n^1)(t, \circ) |||$$

$$\leq \sum_{\substack{|\mu+\nu| \leq N_n, j=1,..,m \\ 1 \leq |p+q| \leq N_n - |\mu+\nu|}} M_n(\mu\nu; \kappa) \frac{n^{-p_1 j}}{p!q!} \| a_{j\,n\,loc}{}_{(p)}^{(q)}(\circ; D) \| \; \| \nabla_{n(\nu+q)}^{(p+\mu)}(\circ; D) U_{nm-j+1}^1(t, \circ) \|$$

$$+ \sum_{|\mu+\nu|\leq N_n, j., m} M_n(\mu\nu\ \kappa) \| J_{N_n - |\mu+\nu|}(\alpha_n^{(\mu)}, \beta_{(\nu)}(a_j - a_{j\,n\,loc}))(t, \circ; D) \| \ \| U^1_{nm-j+1}(t, \circ) \|$$

$$+ \sum_{|\mu+\nu|\leq N_n, j=1,..,m} M_n(\mu\nu;\ \kappa) \| J^*_{N_n - |\mu+\nu|}(\nabla^{(\mu)}_{n(\nu)}, a_{j\,n\,loc})(t, \circ; D) \| \ \| u^1_{nm-j+1}(t, \circ) \|$$

où $$M_n(\mu\nu;\ \kappa) \equiv M_n^{10}(\mu\nu;\ \kappa) \equiv N_n^{(s-1)|\mu+\nu|}(\rho_0\kappa)^{|\mu+\nu|} n^{-|\nu|}.$$

Soit

$$E_n^1(U_n^1)(t) = \sum_{|\mu+\nu|\leq N_n} M_n(\mu\nu;\ \kappa) ||| \nabla^{(\mu)}_{n(\nu)}(\circ;\ D) U_n^1(t, \circ) ||| \tag{9-2}$$

Alors on a, grâce aux propositions 5 et 6, tant que l'on choisit $N_n = N_n(\rho_0\rho_0\kappa)$,

$$\partial_t E_n^1(U_n^1)(t) \leq n^{p_1}[{}^3C\, E_n^1(U_n^1)(t)$$

$$+ \sum_{\substack{|\mu+\nu|\leq N_n, j=1,..,m \\ 1\leq|p+q|\leq N_n - |\mu+\nu|}} M_n(\mu\nu;\ \kappa) \frac{n^{-p_1 j}}{p!q!} \| a_{j\,n\,loc(p)}^{(q)}(\circ;\ D) \| \ \| \nabla^{(p+\mu)}_{n(q+\nu)}(\circ;\ D) U^1_{nm-j+1}(t, \circ) \|$$

$$+ {}^3P(n)\exp(-C(\rho_0\rho_0\kappa)n^{1/s}) ||| U_n^1(t, \circ) |||]$$

Or on a, compte tenu de (7-2):

$$\sum_{\substack{|\mu+\nu|\leq N_n, j=1,..,m \\ 1\leq|p+q|\leq N_n - |\mu+\nu|}} M_n(\mu\nu;\ \kappa) \frac{n^{-p_1 j}}{p!q!} \| a_{j\,n\,loc(p)}^{(q)}(\circ;\ D)\, \nabla^{(p+\mu)}_{n(q+\nu)}(\circ;\ D) U^1_{nm-j+1}(t, \circ) \|$$

$$\leq {}^3C\kappa^{-1} E_n^1(U_n^1)(t)$$

Donc on a

(9-3)

$$\partial_t E_n^1(U_n^1)(t) \leq n^{p_1}({}^3C + {}^3C\kappa^{-1}) E_n^1(U_n^1(t) + {}^3P(n)\exp(-C(\rho_0\rho_0\kappa)n^{1/s}) ||| U_n^1(t, \circ) |||$$

Nous estimons $U_n^2(t, x)$ du système [II]:
On a:

$$\partial_t[\sum_{j=1}^{m_0} \| \nabla^{(\mu)}_{n(\nu)}(\circ;\ D) U^2_{nj}(t, \circ) \| - \sum_{j=m_0+1}^{m} \| \nabla^{(\mu)}_{n(\nu)}(\circ;\ D) U^2_{nj}(t, \circ) \|]$$

$$\geq n^p t^q [2\delta_0 (\sum_{j=1}^{m_0} \| \nabla^{(\mu)}_{n(\nu)}(\circ;\ D) U^2_{nj}(t, \circ) \| - \sum_{j=m_0+1}^{m} \| \nabla^{(\mu)}_{n(\nu)}(\circ;\ D) U^2_{nj}(t, \circ) \|)$$

$$+ (\delta_0 ||| \nabla^{(\mu)}_{n(\nu)}(\circ;\ D) U_n^2(t, \circ) ||| - ||| F^2(\nabla^{(\mu)}_{n(\nu)};\ U_n^2(t, \circ) |||)].$$

Soit

$$E_n^2(U_n^2)(t) = \sum_{|\mu+\nu|\leq N_n} M_n(\mu\nu;\ \kappa)[\sum_{j=1}^{m_0} \| \nabla^{(\mu)}_{n(\nu)}(\circ;\ D) U^2_{nj}(t, \circ) \| - \sum_{j=m_0+1}^{m} \| \nabla^{(\mu)}_{n(\nu)}(\circ;\ D) U^2_{nj}(t, \circ) \|]. \tag{9-4}$$

Alors on a

$$\partial_t E_n^2(U_n^2)(t) \geq n^p t^q [2\delta_0 E_n^2(U_n^2)(t) + \delta_0 \sum_{|\mu+\nu| \leq N_n} M_n(\mu\nu; \kappa) \||| \nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(\circ; D) U_n^2(t, \circ) \|||$$

$$- \sum_{|\mu+\nu| \leq N_n} M_n(\mu\nu; \kappa) \||| F^2(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}; U_n^2)(t, \circ) \|||].$$

Or grâce aux propositions 4, 5 et 6, on a, comme au précédent, avec une constante C_3,

$$\sum_{|\mu+\nu| \leq N_n} M_n(\mu\nu; \kappa) \||| F^2(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}; U_n^2)(t, \circ) \|||$$

$$\leq C_3 \kappa^{-1} \sum_{1 \leq |\mu+\nu| \leq N_n} M_n(\mu\nu; \kappa) \||| \nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(\circ; D) U_n^2(t, \circ)) \|||$$

$$+ {}^3P(n) \exp(-C(\rho_0 \rho_0 \kappa) n^{1/s}) \||| U_n^2(t, \circ) \||| .$$

Donc on a, tant que l'on choisit $N_n = N_n(\rho_0 \rho_0 \kappa)$,

$$\partial_t E_n^2(U_n^2)(t) \geq n^p t^q [2\delta_0 E_n^2(U_n^2)(t) \tag{9-5}$$

$$+ (\delta_0 - C_3 \kappa^{-1}) \sum_{1 \leq |\mu+\nu| \leq N_n} M_n(\mu\nu; \kappa) \||| \nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(\circ; D) U_n^2(t, \circ) \|||$$

$$+ {}^3P(n) \exp(-C(\rho_0 \rho_0 \kappa) n^{1/s}) \||| U_n^2(t, \circ) \|||].$$

Nous choisissons ici κ et N_n en sorte que l'on ait

$$\delta_0 - \kappa^{-1} C_3 \geq 0 \tag{9-6}$$

$$N_n = N_n(\rho_0 \rho_0 \kappa) \equiv \left[\frac{1}{e} \left(\frac{n^{\rho-\delta}}{\rho_0^2 \kappa} \right)^{1/s} \right] \tag{9-7}$$

Alors on a:

$$\begin{cases} \partial_t E_n^1(U_n^1)(t) \leq n^{p_1} [{}^3C\, E_n^1(U_n^1)(t) + {}^3C \exp(-{}^3C\, n^{1/s}) \||| U_n^1(t, \circ) \|||] \\ \partial_t E_n^2(U_n^2)(t) \geq n^p t^q [2\delta_0 E_n^2(U_n^2)(t) - {}^3C \exp(-{}^3C\, n^{1/s}) \||| U_n^2(t, \circ) \|||]. \end{cases}$$

Par les intégrer on a, compte tenu de (5-9),

$$\begin{cases} E_n^1(U_n^1)(n^{-\gamma_1}) \leq \exp({}^3C\, n^{p_1-\gamma_1}) [E_n^1(U_n^1)(0) \\ \qquad + {}^3C \exp(-{}^3C\, n^{1/s}) \sup_{t \in [0, n^{-\gamma_1}]} \||| U_n^1(t, \circ) \|||] \\ E_n^2(U_n^2)(n^{-\gamma_2}) \geq \exp\left(\dfrac{\delta_0}{q+1} n^{p-\gamma_2(q+1)} \right) [E_n^2(U_n^2)(n^{-\gamma_1}) \\ \qquad - {}^3C \exp(-{}^3C\, n^{1/s}) \sup_{t \in [n^{-\gamma_1}, n^{-\gamma_2}]} \||| U_n^2(t, \circ) \|||] \end{cases} \tag{9-8}$$

Remarquons que pour la solution $W_n(t, x)$ de l'équation localisée

$$\partial_t W_n(t, x) = n^{p_1} A^1(t, x; D; n) \mathrm{W}_n(t, x) \tag{9-9}$$

on a

$$(9\text{-}10) \qquad |||W_n(n, \circ)||| \lesseqgtr \exp(\pm Cn^{p_1}t)\,|||W_n(0, \circ)|||.$$

§10. Construciton de la solution

Soit $\hat{\Phi}(\eta)$ une fonction telle que l'on ait

$$(10\text{-}1) \qquad \begin{cases} 0 \le \hat{\Phi}(\eta) \le 1,\ \hat{\Phi}(\eta) = 1 \text{ sur } \left\{\eta;\ |\eta - \eta_0| \le \dfrac{1}{4}r_0\right\} \\ \operatorname{supp} \hat{\Phi} \subset \{\eta;\ |\eta - \eta_0| \le \dfrac{1}{2}r_0\},\ |\hat{\Phi}(\eta)^{(\alpha)}(\eta)| \le {}^3C\ \alpha!^s\rho_0^{|\alpha|} \quad (^\forall\alpha). \end{cases}$$

Soient

$$(10\text{-}2) \qquad \begin{cases} \hat{\Phi}_n(\eta) = \hat{\Phi}\left(\dfrac{\eta}{n}\right) \qquad \text{et} \\ \Phi_n(x) = \dfrac{1}{(2\pi)^d}\displaystyle\int e^{-i(x-x_0)\eta}\,\hat{\Phi}_n(\eta)d\eta. \end{cases}$$

Soit $W_n(t, x)$ la solution du problème de Cauchy

$$(10\text{-}3) \qquad \begin{cases} \partial_t W_n(t, x) = n^{p_1}A^1(t, x; D; n)W_n(t, x) \\ W_n(n^{-\gamma_1}, x) = T^{-1}\,{}^t(\Phi_n(x), 0, \dots, 0) \end{cases}$$

Soit

$$(10\text{-}4) \qquad W_n^0(x) = \operatorname{diag}[1, n^{p_1}, \dots, n^{p_1(m-1)}]\,W_n(0, x)$$

Soit $\psi(\eta)$ une fonction de la classe Gevrey d'indice s, telle que

$$(10\text{-}5) \qquad \begin{cases} 0 \le \psi(\eta) \le 1,\ \psi(\eta) = 1 \text{ sur } \left\{\eta;\ |\eta - \eta_0| \le \dfrac{3}{2}r_0\right\}, \\ \operatorname{Supp} \psi(\eta) \subset \{\eta;\ |\eta - \eta_0| \le 2r_0\},\ |\psi^{(\alpha)}(\eta)| \le {}^3C\ \alpha!^s\rho_0^{|\alpha|} \qquad (^\forall\alpha) \end{cases}$$

Soit $\psi_n(\eta) = \psi\left(\dfrac{\eta}{n}\right)$. On remarque alors que $\psi_n(D)\ W_n^0(x)$ est analytique. Soit $U_n^0(t, x)$ la solution du problème de Cauchy $(\mathrm{PCS})_n$:

$$(10\text{-}6) \qquad \begin{cases} [\partial_t I - A(t, x; n\xi_0 + \partial_x)]\,U_n^0(t, x) = 0 \\ U_n^0(0, x) = \psi_n(D)\,W_n^0(x) \end{cases}$$

C'est cette solution-ci qui nous mène à la contradiction.

§11. Estimation majorante de la solution

Souvenons-nous que l'on a défini $U_n^1(t, x)$, $U_n^2(t, x)$ par

$$U_n^1(t, x) = \mathrm{diag}[1, n^{-p_1}, ., n^{-p_1(m-1)}]\theta(x) U_n^0(t, x)$$

$$U_n^2(t, x) = T\,\mathrm{diag}[1, (n^{p-p_1}t^q)^{-1}, \ldots, (n^{p-p_1}t^q)^{-(m-1)}] U_n^1(t, x)$$

où $U_n^0(t, x)$ est la solution du (10-6).

Et $W_n(t, x)$ étant la solution du (10-3), on a

$$\text{(11-1)} \qquad |||\, W_n(n^{-\gamma_1}, \circ)\, ||| \leq {}^3C \| \Phi_n \| \leq {}^3Cn^{d/2}.$$

Et d'après l'inégalité d'énergie pour $W_n(t, x)$: (9-10), on a

$$|||\, W_n^0(\circ)\, ||| \leq n^{p_1(m-1)}\, |||\, W_n(0, \circ)\, ||| \leq n^{p_1(m-1)} \exp({}^3C\, n^{p_1 - \gamma_1})\, |||\, W_n(n^{-\gamma_1}, \circ)\, |||$$
$$\leq {}^3C \exp({}^3C\, n^{p_1 - \gamma_1}).$$

Alors on a

$$|\partial_x^\alpha U_{nj}^0(0, 0)| \equiv |\partial_x^\alpha \psi_n(D) W_{nj}^0(x) \mid_{x=0} | = \left| \int (i\eta)^\alpha \psi_n(\eta) \hat{W}_{nj}^0(\eta) d\eta \right|$$
$$\leq ({}^3Cn)^{|\alpha| + d/2}\, |||\, W_n^0(\circ)\, ||| \leq ({}^3Cn)^{|\alpha|} \exp({}^3C\, n^{p_1 - \gamma_1}) \qquad (j = 1, ., m)$$

Et grâce à la proposition 3_{bis}, on a

$$\text{(11-2)} \quad \begin{cases} |U_{ni}^0(t, x)| \leq \dfrac{{}^3C}{r - |t|} n^{p_1(m-1)+d} \exp({}^3Cn^{p_1 - \gamma_1}) \exp({}^3Cn|t|^{1/p_m}) \\ \\ \leq {}^3C \exp({}^3C \max\{n|t|^{1/p_m}, n^{p_1 - \gamma_1}\}) \qquad ({}^\forall t, {}^\forall x, {}^\forall j) \end{cases}$$

et par suite

$$\text{(11-3)} \qquad \sup_{t \in [0, n^{-\gamma}]} |||\, U_n^1(t, \circ)\, ||| \leq {}^3C \exp({}^3C n^{\max\{p - \gamma_1(q+1), 1 - \gamma/p_m\}}) \qquad ({}^\forall \gamma).$$

Donc, grâce à la proposition 6, on a

$$E_n^2(U_n^2)(n^{-\gamma_2}) \leq \sum_{|\mu + \nu| \leq N_n} M_n(\mu\nu; \kappa)\, |||\, \nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(\circ; D) U_n^2(n^{-\gamma_2}, \circ)\, ||| \leq {}^3C\, |||\, U_n^2(n^{-\gamma_2}, \circ)\, |||$$
$$\leq {}^3Cn^{3C}\, |||\, U_n^1(n^{-\gamma_2}, \circ)\, ||| \leq {}^3C \exp({}^3C\, n^{\max\{p - \gamma_1(q+1), 1 - \gamma_2/p_m\}})$$

On a finalement eu l'estimation majorante

$$\text{(11-4)} \qquad E_n^2(U_n^2)(n^{-\gamma_2}) \leq {}^3C \exp({}^3C\, n^{\max\{p - \gamma_1(q+1), 1 - \gamma_2/p_m\}})$$

§12. Estimation minorante (Fin de la démonstration du théorème 1)

Nous voulons, au premier lieu, assurer la positivité de l'énergie $E_n^2(U_n^2)(t)$ à $t = n^{-\gamma_1}$. Celle-ci étant assurée pour $\mathrm{TW}_n(t, x)$, il faut estimer $U_n^1(t, x) - W_n(t, x)$. Commençons par ceci.

On a d'une part

$$\begin{cases}(\partial_t I - n^{p_1}A^1(t, x; D; n))\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(x; D)U_n^1(t, x) = n^{p_1}F^1(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}; U_n^1)(t, x)\\ U_n^1(0, x) = \theta(x)\psi_n(D)W_n(0, x)\end{cases}$$

et d'autre part

$$(\partial_t I - n^{p_1}A^1(t, x; D; n))\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(x; D)W_n(t, x) = n^{p_1}G(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}; W_n)(t, x)$$

où $\qquad G(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}; W_n)(t, x) = [\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(x; D),\ A^1(t, x; D; n)]W_n(t, x).$

Donc

$$\begin{aligned}(\partial_t - n^{p_1}A_1(t, x; D; n))\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(x; D)(U_n^1(t, x) - W_n(t, x))\\ = n^{p_1}[F^1(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}; U_n^1)(t, x) - G(\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}; W_n)(t, x)].\end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité d'énérgie on a, pareillement à (9-8),

$$\begin{aligned}E_n^1(U_n^1 - W_n)(n^{-\gamma_1}) &\leq \exp({}^3C\ n^{p_1-\gamma_1})[E_n^1(U_n^1 - W_n)(0)\\ &+ {}^3C\ \exp(-{}^3C\ n^{1/s})\{\sup_{t\in[0,n^{-\gamma_1}]} |||U_n^1(t, \circ)||| + \sup_{t\in[0,n^{-\gamma_1}]} |||W_n(t, \circ)|||\}].\end{aligned}$$

Compte tenu de (5-9), (9-10) et (11-3) on a

$$E_n^1(U_n^1 - W_n)(n^{-\gamma_1}) \leq \exp(-{}^3C\ n^{p_1-\gamma_1})[E_n^1(U_n^1 - W_n)(0) + {}^3C\ \exp(-{}^3Cn^{1/s})].$$

Or on a

$$E_n^1(U_n^1 - W_n)(0) = \sum_{|\mu+\nu|\leq N_n} M_n(\mu\nu; \kappa)|||\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(\circ; D)(\theta(\circ)\psi_n(D) - 1)W_n(0, \circ)|||.$$

Soit $\overset{*}{\alpha}(\eta)$ une fonction de la classe de Gevrey d'indice s telle que

$$\begin{cases}0 \leq \overset{*}{\alpha}(\eta) \leq 1,\ \overset{*}{\alpha}(\eta) = 1\ \mathit{sur}\ \{\eta; |\eta - \eta_0| \leq r_0\},\ \mathrm{Supp}\ \overset{*}{\alpha} \subset \left\{\eta; |\eta - \eta_0| \leq \dfrac{3}{2}r_0\right\}\\ |\overset{*}{\alpha}{}^{(\mu+\nu)}(\eta)| \leq {}^3CN_n^{|\mu|}\nu!^s\rho_0^{|\mu+\nu|} \quad ({}^\forall|\mu| \leq N_n,\ {}^\forall\nu,\ {}^\forall\eta).\end{cases}$$

Soit $$\overset{*}{\alpha}_n(\eta) = \overset{*}{\alpha}\left(\frac{\eta}{n}\right).$$

Alors on a

$$\nabla_{n(\nu)}^{(\mu)}(x; D)(\theta(x)\psi_n(D) - 1) = \alpha_n^{(\mu)}(D)\overset{*}{\alpha}_n(D)\beta_{(\nu)}(x)(\theta(x)\psi_n(D) - 1)$$

et grâce à la proposition 4 et le choix des $\overset{*}{\alpha}(\eta)$, $\psi(\eta)$, $\beta(x)$ et $\theta(x)$

$$\overset{*}{\alpha}_n(D)\beta_{(\nu)}(x)(\theta(x)\psi_n(D) - 1) = J_N(\overset{*}{\alpha}_n, \beta_{(\nu)}(\theta\psi_n - 1))(x; D) \quad ({}^\forall N).$$

Et par conséquent, ayant

$$\begin{aligned}E_n^1(U_n^1 - W_n)(0) \leq \sum_{|\mu+\nu|\leq N_n} N_n^{(s-1)|\mu+\nu|}(\rho_0\kappa)^{|\mu+\nu|}n^{-|\mu+\nu|}N_n^{|\mu+\nu|}\rho_0^{|\mu+\nu|}\\ \times N_n^{-|\nu|}\rho^{-|\nu|}|||J_{N_n}(\overset{*}{\alpha}_n, \beta_{(\nu)}(\theta\psi_n - 1))(\circ; D)W_n(0, \circ)|||\end{aligned}$$

on a, grâce à la proposition 6 et le choix de N_n,

$$E_n^1(U_n^1 - W_n)(0) \leq \exp(-{}^3Cn^{1/s}).$$

Et on a alors

$$E_n^2(U_n^2 - W_n^{\sim})(n^{-\gamma_1}) \leq {}^3CE_n^1(U_n^1 - W_n)(n^{-\gamma_1}) \leq {}^3C\exp(-{}^3C\ n^{1/s})$$

où $\qquad W_n^{\sim}(t, x) = T\mathrm{diag}[1, n^{p-p_1}t^q)^{-1}, \ldots, (n^{p-p_1}t^q)^{-(m-1)}]\, W_n(t, x).$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} E_n^2(W_n^{\sim})(n^{-\gamma_1}) &\geq \|\nabla_n(\circ, D)\Phi_n(\circ)\| \equiv \|\alpha_n(D)\beta(\circ)\Phi_n(\circ)\| \\ &\geq \|\beta(\circ)\alpha_n(D)\Phi_n(\circ)\| - \|J_{N_n}(\alpha_n, \beta)(\circ; D)\Phi_n(\circ)\| \\ &\geq \|\beta\Phi_n\| - {}^3C\exp(-{}^3C\ n^{1/s})\|\Phi_n\|. \end{aligned}$$

Or ayant

$$|\Phi_n(x_0)| = \frac{1}{(2\pi)^d}\left|\int \hat{\Phi}_n(\eta)d\eta\right| \geq {}^3Cn^d$$

$$|\partial_x^\alpha \Phi_n(x)| = \frac{1}{(2\pi)^d}\left|\int e^{i(x-x_0)\eta}(i\eta)^\alpha\hat{\Phi}_n(\eta)d\eta\right| \leq {}^3Cn^{d+1} \qquad (|\alpha| = 1),$$

on a, pour x; $|x - x_0| \leq C_4/n$ avec un ${}^3C_4 > 0$,

$$|\Phi_n(x)| \geq {}^3Cn^d.$$

On a par conséquent

$$\|\beta\Phi_n\| \geq \left(\int_{|x-x_0|\leq C_4/n} |\Phi_n(x)|^2dx\right)^{1/2} \geq {}^3Cn^{d/2}.$$

Ainsi on a

$$E_n^2(W_n)(n^{-\gamma_1}) \geq {}^3C\ n^{d/2}$$

et donc

$$E_n^2(U_n^2)(n^{-\gamma_1}) \geq {}^3Cn^{d/2} - {}^3C\exp(-{}^3C\ n^{1/s}) \geq {}^3C\ n^{d/2} > 0. \tag{12-1}$$

Grâce aux (5-9), (9-8) et (11-3), on a

$$E_n^2(U_n^2)(n^{-\gamma_2}) \geq {}^3C\exp({}^3C\ n^{p-\gamma_2(q+1)}). \tag{12-2}$$

Cette estimation-ci est, grâce à (5-4) et (5-6), contradictoire à (11-4) et le théorème 1 est démontré.

§ 13. Vitesse finie de propagation (Ďmonstration du théorème 2)

Nous montrons le théorème 2 aussi par l'absurde. Nous supposons d'une part

[H-2] *Le poids* p_0 *de* L *soit* $p_0 > 1$.

Et nous supposons d'autre part

[H-3] *Il existe un domaine* $\Omega(\Omega \subset \Omega_0)$ *et un* $T(0 < T \leq T_0)$ *tels que pour toutes les données* $\varphi_j(x) \in D_{L^2}^{\infty}(\boldsymbol{R}^d)(j = 1, \ldots, m)$, *il existe une et une seule solution* $u(t, x) \in C^{m-1}([0, T], C^{\infty}(\Omega)) \cap C^m((0, T], C^{\infty}(\Omega))$ *du* $(PC)_{\mathrm{R}}$.

[H-4] *Le problème de Cauchy* $(PC)_{\mathrm{R}}$ *ait la propriété de l'unicité d'ordre* $\tau(0 < \tau)$.

Nous choisissons alors les nombres clefs p, q, p_1, γ_1, γ_2, s, δ_0, m_0, $x_0(x_0 \in \Omega)$ et $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$ comme à la section 5 mais cette fois pour $p_m^{-1} \equiv \tau$. Comme nous avons déjà remarqué, ceci est possible par choisir $P \equiv (1 + q, p) \equiv P_1$.

Nous suivons le raisonnement de la démonstration du théorème 1 et nous envisageons, comme à la section 6, avec un paramètre n de localisation,

$$(\mathrm{PCS})_n \begin{cases} [\partial_t I - A(t, x; n\xi_0 + \partial_x)] \, U_n^0(t, x) = 0 \\ U_n^0(0, x) = \Phi(x). \end{cases}$$

Alors la proposition suivante qui remplace la proposition 3-bis est due à S. Mizohata[5].

Proposition 7 (S. Mizohata). *Pour tout domaine relativement compact* $\Omega^{\sim}(x_0 \in \Omega^{\sim} \subset \Omega)$ *et tout* $T^{\sim}(0 < T^{\sim} \leq T)$, *il existe un entier positif* M *et des nombres positifs* $\lambda_0 > 0$, $C > 0$, *tels que la solution* $U_n^0(t, x)$ *du* $(PCS)_n$ *satisfait, pour tout* $t \in [0, T^{\sim}]$,

$$\sum_{j=1}^{m} \operatorname*{Sup}_{x \in \Omega^{\sim}} |U_{nj}^0(t, x)| \leq C n^M \exp(C|\xi_0| n t^{\tau}) \sum_{\substack{|\alpha| \leq M \\ j = 1,..,m}} \operatorname*{Sup}_{\substack{|y - x| \leq \lambda_0 t^{\tau} \\ t \in [0, T^{\sim}], x \in \Omega^{\sim}}} |\partial_y^{\alpha} \Phi_j(y)|$$

Preuve. Sous l'hypothèse (H-3), l'application $\{\varphi_j\} \to u$, qui donne la solution $u(t, x)$ *du* $(\mathrm{PC})_{\mathrm{R}}$ aux données initiales $\varphi_j(x)(j = 1, \ldots, m)$, est, grâce au théorème du graphe fermé, continue du $D_{L^2}^{\infty}(R^d)^m$ à $C^{m-1}([0, T], C^{\infty}(\Omega))$. Donc on a l'estimation suivante:

Pour tout $\Omega^{\sim}(\subset \Omega)$ relativement compact et $T^{\sim} \in [0, T]$, il existe un entier M et une constante positive C tels que l'on ait

$$\sum_{k=0}^{m-1} \operatorname*{Sup}_{t \in [0, T^{\sim}]} \operatorname*{Sup}_{x \in \Omega^{\sim}} |\partial_t^k u(t, x)| \leq C \sum_{k=1}^{m} \sum_{|\alpha| \leq M} \|\partial_x^{\alpha} \varphi_k\|.$$

Grâce à l'hypothèse (H-4), le changement de la valeur de $\varphi_j((x)(j = 1, \ldots, m)$ au dehors d'un certain compact K, dépendant de $T^{\sim}$ et $\Omega^{\sim}$, ne change pas la valeur de $\partial_t^k u(t, x)$ dans $[0, T^{\sim}] \times \Omega^{\sim}$. Donc on a

$$\sum_{k=0}^{m-1} \operatorname*{Sup}_{t \in [0, T^{\sim}]} \operatorname*{Sup}_{x \in \Omega^{\sim}} |\partial_t^k u(t, x)| \leq {}^3C \sum_{k=1}^{m} \sum_{|\alpha| \leq M} \operatorname*{Sup}_{x \in k} |\partial_x^{\alpha} \varphi_k(x)|.$$

Fixons $\Omega^{\sim}$ et $T^{\sim}$ une fois pris de telle sorte et fixons encore j, k et (t, x) tels que l'on ait j, $k = 1, \ldots, m$, $t \leq T^{\sim}$ et $x \in \Omega^{\sim}$. Et nous envisageons l'application qui donne à une fonction $\varphi(x)$ la valeur $\partial_t^k u(t, x)$ de la solution $u(t, x)$ du $(\mathrm{PC})_{\mathrm{R}}$ avec la donnée $\varphi_i(x) = \delta_{ij}\varphi(x)$ $i = 1,\dots,m$. Celle-ci donne une distribution $T^{jk}(t, x)$:

$$\langle T^{jk}(t, x), \varphi\rangle = \partial_t^k u(t, x);\ \varphi \in D$$

telle que

$$|\langle T^{jk}(t, x), \varphi\rangle| \leq {}^3C \sum_{|\alpha| \leq M} \operatorname*{Sup}_{y \in K} |\partial_y^\alpha \varphi(y)|.$$

D'après l'hypothèse [H-4] cette distribution a son support dans $\{y;\ |y\text{-}x| \leq \lambda_0 t^\tau,\ t \geq 0\}$ où $\lambda_0 = \lambda(T^\sim, \Omega^\sim)$. Grâce alors au théorème de Whitney[5], on a

$$|\langle T^{jk}(t, x), \varphi\rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq M} \operatorname*{Sup}_{|y-x| \leq \lambda_0 t^\tau} |\partial_y^\alpha \varphi(y)|.$$

Ainsi on a l'estimation suivante pour la solution du $(\mathrm{PC})_{\mathrm{R}}$ pour les données $\varphi_j(x)$ $(j = 1,\dots,m)$;

$$(13\text{-}1) \qquad |\partial_t^k u(t, x)| \leq {}^3C \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha| \leq M} \operatorname*{Sup}_{|y-x| \leq \lambda_0 t^\tau} |\partial_y^\alpha \varphi_j(y)| \begin{pmatrix} \mathrm{k} = 0, 1,.., m-1 \\ t \in [0, T^\sim],\ x \in \Omega^\sim \end{pmatrix}$$

Appliquons cette inégalité (13-1) à la solution $u_n(t, x)$ du $(\mathrm{PC})_{\mathrm{R}}$ Pour la donnée $\exp(-n\xi_0 x)\varphi_j(x)$ $(j = 1,\dots,m)$. Alors on a

$$\begin{aligned} &\exp(n\xi_0 x)|\partial_t^k u(t, x)| \\ &\leq C \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha| \leq M} \operatorname*{Sup}_{|y-x| \leq \lambda_0 t^\tau} \exp(n\xi_0 x)|\partial_y^\alpha(\exp(-n\xi_0 y)\varphi_j(y))| \\ &\leq {}^3Cn^M \exp(n|\xi_0|t^\tau) \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha| \leq M} \operatorname*{Sup}_{|y-x| \leq \lambda_0 t^\tau} |\partial_y^\alpha \varphi_j(y)|. \end{aligned}$$

La solution $U_n^0(t, x)$ du $(\mathrm{PCS})_n$ pour la donnée $\Phi(x) = (\varphi_1(x),.., \varphi_m(x))$ étant donnée par $U_n(t, x) = \exp(-n\xi_0 x)U_n^0(t, x)$ avec la solution $U_n(t, x)$ du (PCS) pour la donnée $\exp(-n\xi_0 x)\Phi(x) = (\exp(-n\xi_0 x)\varphi_1(x),\dots,\exp(-n\xi_0 x)\varphi_m(x))$, on a l'estimation voulue. C.Q.F.D.

Cette proposition 7 jouant le rôle de la proposition 3-bis, on suit le raisonnement à partir de la section 6. On arrive alors à la contraduction par ce même raisonnement qu'au théorème 1. Ce qui montre le théorème 2.

§ 14. Appendice (Preuves des propositions 4, 5 et 6)

Preuve de la proposition 4. La première partie étant bien connue[3], nous montrons la deuxième partie: D'après (1) on a

$$\begin{aligned} a^{(\alpha)}(x; D)b_{(\alpha)}(x; D) = &\sum_{|\beta| \leq N-|\alpha|} \frac{1}{\beta!} a^{(\alpha+\beta)} \circ b_{(\alpha+\beta)}(x; D) \\ &+ J_{N-|\alpha|}(a^{(\alpha)}, b_{(\alpha)})(x; D) \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{|\alpha|\leq N}\frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}a^{(\alpha)}(x;D)b_{(\alpha)}(x;D)$$
$$=\sum_{|\alpha|\leq N,|\beta|\leq N-|\alpha|}\frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\frac{1}{\beta!}a^{(\alpha+\beta)}\circ b_{(\alpha+\beta)}(x;D)$$
$$+\sum_{|\alpha|\leq N}\frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}J_{N-|\alpha|}(a^{(\alpha)},b_{(\alpha)})(x;D).$$

Or

$$\sum_{\substack{|\alpha|\leq N\\|\beta|\leq N-|\alpha|}}\frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\frac{1}{\beta!}a^{(\alpha+\beta)}\circ b_{(\alpha+\beta)}(x;\xi)$$
$$=\sum_{|\gamma|\leq N}\left(\sum_{\alpha+\beta=\gamma}\frac{\gamma!}{\alpha!\beta!}(-1)^{|\alpha|}\right)\frac{1}{\gamma!}a^{(\gamma)}(x;\xi)b_{(\gamma)}(x;\xi)$$
$$=a(x;\xi)b(x;\xi)=c(x;\xi)$$

et

$$J_N^{\sim}(a,b)(x;\xi)=-\sum_{|\alpha|\leq N}\frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}J_{N-|\alpha|}(a^{(\alpha)},b_{(\alpha)})(x;\xi)$$
$$=\sum_{|\gamma|=N+1}\frac{1}{\gamma!}\int_0^1 d\left(\sum_{\alpha+\beta=\gamma}\frac{\gamma!}{\alpha!\beta!}(-1)^{|\alpha|}(1-t)^{|\beta|}\right)$$
$$\times\, os-\iint e^{-iy\eta}a^{(\gamma)}(x;\xi+\eta)b_{(\gamma)}(x+ty;\xi)dy đ\eta$$
$$=\sum_{|\gamma|=N+1}\frac{(-1)^{|\gamma|}|\gamma|}{\gamma!}\int_0^1 t^{|\gamma|-1}dt\ os-\iint e^{-iy\eta}a^{(\gamma)}(x;\xi+\eta)b_{(\gamma)}(x+ty;\xi)dy đ\eta$$

Troisième partie est alors claire. C.Q.F.D.

Preuve de la proposition 5. On a

$$J_N(a_n,b)^{(\mu)}_{(\nu)}(x;\xi)=\sum_{\substack{\mu_1+\mu_2=\mu\\\nu_1+\nu_2=\nu}}\sum_{|\alpha|=N+1}\frac{\mu!}{\mu_1!\mu_2!}\frac{\nu!}{\nu_1!\nu_2!}\frac{|\alpha|}{\alpha!}\int_0^1(1-t)^{|\alpha|-1}dt$$
$$\times\, I(\alpha+\mu_1,\mu_2,\nu_1,\alpha+\nu_2)(x,\xi;t)$$

où
$$I(p,q,r,s)(x,\xi;t)=os-\iint e^{-iy\eta}a_{n(r)}^{(p)}(x;\xi+\eta)b_{(s)}^{(q)}(x+ty;\xi)dy đ\eta$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\iint e^{-iy\eta}\Phi_\varepsilon(y)\Phi_\varepsilon(\eta)a_{n(r)}^{(p)}(x;\xi+\eta)b_{(s)}^{(q)}(x+ty;\xi)dy đ\eta$$

où $\Phi_\varepsilon(y)=\Phi(\varepsilon y)$ et que $\Phi(y)$ est une fonction à décroissance rapide telle que $\Phi(0)=1$.

Nous fixons un ℓ; $2\ell>d$. On a, par l'intégrale par partie par rapport à η,

$$I(p, q, r, s)(x, \xi; t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint e^{-iy\eta} J_\varepsilon(p, q, r, s; \ell, 0)(x, \xi; y, \eta; t)\, dy đ\eta$$

$$J_\varepsilon(p. q, r, s; \ell, \ell^{\sim})(x, \xi; y, \eta; t)$$

$$= (\triangle_y)^{\ell^{\sim}} \left(\Phi_\varepsilon(y) \frac{b_{(s)}^{(q)}(x + ty; \xi)}{(1 + |y|^2)^\ell} \right) \frac{(1 - \triangle_\eta)^\ell (\Phi_\varepsilon(\eta) a_{n(r)}^{(p)}(x: \xi + \eta))}{(-|\eta|^2)^{\ell^{\sim}}}$$

Nous envisageons $I(p, q, r, s)(x, \xi; t)$ pour $\xi; |\xi| \leq 2nr_0$. On a

$$I(p, q, r, s)(x, \xi; t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\iint_{\Omega_1} e^{-iy\eta} J_\varepsilon(p, q, r, s; \ell, 0)(x, \xi; y, \eta; t) dy đ\eta \right.$$
$$\left. \iint_{\Omega_2} e^{-iy\eta} J_\varepsilon(p, q, r, s; \ell, 0)(x, \xi; y, \eta; t)\, dy đ\eta \right)$$

où $\Omega_1 = \mathbf{R}^d \times \{\eta; |\eta| \leq 1\}$, $\Omega_2 = \mathbf{R}^d \times \{\eta; |\eta| > 1\}$. Par l'intégrale par partie par rapport à y, on a

$$I(p, q, r, s)(x, \xi; t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{\Omega_1} e^{-iy\eta} J_\varepsilon(p, q, r, s; \ell, 0)(x, \xi; y, \eta; t) dy đ\eta$$
$$+ \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{\Omega_2} e^{-iy\eta} J_\varepsilon(p, q, r, s; \ell, \ell^{\sim})(x, \xi; y, \eta; t) dy đ\eta$$
$$= \iint_{\Omega_1} e^{-iy\eta} J(p, q, r, s; \ell, 0)(x, \xi; y, \eta; t)\, dy đ\eta$$
$$+ \iint_{\Omega_2} e^{-iy\eta} J(p, q, r, s; \ell, \ell^{\sim})(x, \xi; y, \eta; t)\, dy đ\eta$$

où $\ell^{\sim}$ est choisi en sorte que l'on ait $2\ell^{\sim} > d$ et

$$J(p, q, r, s; \ell, \ell^{\sim})(x, \xi; y, \eta; t) = (\triangle_y)^{\ell^{\sim}} \left(\frac{b_{(s)}^{(q)}(x + ty; \xi)}{(1 + |y|^2)^\ell} \right) \frac{(1 - \triangle_\eta)^\ell a_{n(r)}^{(p)}(x: \xi + \eta)}{(-|\eta|^2)^{\ell^{\sim}}}.$$

Or par un calcul banal on a, pour α; $|\alpha| = N + 1$, $N \leq N_n^{\sim}$, $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$; $|\mu_1 + \mu_2|$, $|\nu_1 + \nu_2| \leq L_0 \equiv 2[d/2 + 1]$,

$$|J(\alpha + \mu_1, \mu_2, \nu_1, \alpha + \nu_2; \ell, \ell^{\sim})(x, \xi; y, \eta; t)|$$
$$\leq C_a C_b{}^3 P(n, N, \hat{\rho}_0, \rho_0; \ell, \ell^{\sim}) N_n^{\sim N} \alpha!^s (\hat{\rho}_0 \rho_0)^N n^{-\rho N} \frac{1}{(1 + |y|^2)^\ell} \frac{1}{|\eta|^{2\ell^{\sim}}}$$

avec un polynôme $P(n, N, \hat{\rho}_0, \rho_0; \ell, \ell^{\sim})$ en n, N, $\hat{\rho}_0$ et ρ_0 dépendant de ℓ et $\ell^{\sim}$. Donc on a pour ξ; $|\xi| \leq 2nr_0$, ${}^\forall\mu, \nu$; $|\mu|, |\nu| \leq L_0$,

$$|J_N(a_n, b)_{(\nu)}^{(\mu)}(x; \xi) \langle \xi \rangle^{|\mu|}| \leq C_a C_b{}^3 P(n, N) N_n^{\sim sN} (\hat{\rho}_0 \rho_0)^N n^{-\rho N}$$

avec un polynôme $P(n, N)$ en n et N.

Envisageons ensuite pour ξ; $|\xi| > 2nr_0$. Dans ce cas-ci, grâce à la condition sur le support de $a_n(x; \xi)$, l'intégrale à la définition de $I(p, q, r, s)(x, \xi; t))$ est prise pour η; $|\xi + \eta| \leq nr_0$.

Or on a

$$\{\eta;\, |\xi+\eta| \le nr_0\} \subset \left\{\eta;\, |\eta| \ge \frac{1}{2}|\xi|\right\}.$$

Soit $\Omega_3 = \mathbf{R}^d \times \left\{\eta;\, |\eta| \ge \frac{1}{2}|\xi|\right\}$. Alors on a, pareillement au cas précédent,

$$|I(p, q, r, s)(x, \xi; t)| \le \iint_{\Omega_3} |J(p, q, r, s; \ell, \ell^{\sim})(x, \xi; y, \eta; t)|\, dy d\!\!{}^-\eta$$

où $\ell^{\sim}$ est choisi en sorte que l'on ait $2\ell^{\sim} > d$ et $2\ell^{\sim} \ge m + d + L_0$.
Donc on a pour $\xi;\, |\xi| > 2nr_0$,

$$\begin{aligned} |J_N(a_n, b)^{(\mu)}_{(\nu)}(x; \xi)\langle \xi \rangle^{|\mu|}| &\le C_a C_b{}^3 P(n, N) N_n^{\sim sN} (\hat{\rho}_0 \rho_0)^N n^{-\rho N} \langle \xi \rangle^{m+d-2\ell^{\sim}+|\mu|} \\ &\le C_a C_b{}^3 P(n, N) N_n^{\sim sN} (\hat{\rho}_0 \rho_0)^N n^{-\rho N} \qquad ({}^\forall \mu, \nu;\, |\mu| \le L_0) \end{aligned}$$

avec un polynôme $P(n, N)$ en n et N.
Ainsi on a pour tout $\mu, \nu;\, |\mu|, |\nu| \le L_0$,

$$|J_N(a_n, b)^{(\mu)}_{(\nu)}(x; \xi)\langle \xi \rangle^{|\mu|}| \le C_a C_b{}^3 P(n, N)\, N_n^{\sim sN} (\hat{\rho}_0 \rho_0)^N\, n^{-\rho N}$$

et par conséquent, grâce au théorème de Calderón-Vaillancourt, on a

$$\| J_N(a_n, b)(x; D) \| \le C_a C_b{}^3 P(n, N)\, N_n^{\sim sN} (\hat{\rho}_0 \rho_0)^N\, n^{-\rho N}.$$

On a la même estimation pour $J_N^{\sim}(a_n, b)(x; D)$.
Estimons

$$\begin{aligned} R_N(a_n, b)(x; D) = \sum_{|\mu+\nu| \le N} & N_n^{\sim (s-1)|\mu+\nu|} (\hat{\rho}_0 \kappa)^{|\nu|} (\rho_0 \kappa)^{|\mu|}\, n^{-\rho|\nu| + \delta|\mu|} \\ & \times J_{N-|\mu+\nu|}(a_{n(\nu)}^{(\mu)}, b)(x; D) \end{aligned}$$

Remarquons:

$$\begin{aligned} |a_{n(\nu)(\beta+q)}^{(\mu)(\alpha+p)}(x; \xi)| \equiv |a_{n(\nu+\beta+q)}^{(\mu+\alpha+p)}(x; \xi)| &\le C_a N_n^{\sim |\mu+\nu|}\, \hat{\rho}_0^{|\mu|}\, \rho_0^{|\nu|}\, n^{-\rho|\mu| + \delta|\nu|} \\ &\times N_n^{\sim |\alpha+\beta|} (p!q!)^s\, \hat{\rho}_0^{|\alpha+p|}\, \rho_0^{|\beta+q|}\, n^{m^{\sim} - \rho|\alpha+p| + \delta|\beta+q|}. \end{aligned}$$

Donc on a

$$\begin{aligned} \| R_N(a_n, b)(x; D) \| &\le C_a C_b N_n^{\sim sN} (\hat{\rho}_0 \rho_0 \kappa)^N n^{-(\rho-\delta)N} \\ &\quad \times \sum_{|\mu+\nu| \le N} \kappa^{-(N-|\mu+\nu|)}\, {}^3P(n, N - |\mu+\nu|) \\ &\le C_a C_b{}^3 P(n, N) \left(\frac{\kappa}{\kappa - 1} \right)^d N_n^{\sim sN}\, (\hat{\rho}_0 \rho_0 \kappa)^N n^{-(\rho-\delta)N} \end{aligned}$$

avec un certain polynôme $P(n, N)$ en n et N.
On a la même estimation pour $R_N^{\sim}(a_n, b)(x; D)$.

La fonction en x: $x^{sx}(\hat{\rho}_0 \rho_0 \kappa)^x n^{-(\rho-\delta)x}$ prend son minimum exp

$\left(-\frac{s}{e}\left(\frac{1}{\hat{\rho}_0\rho_0\kappa}\right)^{1/s} n^{(\rho-\delta)/s}\right) \equiv \exp(-C(\hat{\rho}_0\rho_0\kappa)n^{(\rho-\delta)/s})$ à $x = \frac{1}{e}\left(\frac{n^{\rho-\delta}}{\hat{\rho}_0\rho_0\kappa}\right)^{1/s}$ et $N_n^{\sim}$ étant fixé à $N_n^{\sim} = N_n(\hat{\rho}_0\rho_0\kappa) \equiv \left[\frac{1}{e}\left(\frac{n^{\rho-\delta}}{\hat{\rho}_0\rho_0\kappa}\right)^{1/s}\right]$ on a $N_n^{\sim sN}(\hat{\rho}_0\rho_0\kappa)^N n^{-(\rho-\delta)N} \leq e^{-eN}$.

Ainsi on a le résultat voulu. C.Q.F.D.

Preuve de la proposition 6. On procède pareillement au preuve de la proposition précédente.
On a

$$J_N(a_n, b_n)_{(\nu)}^{(\mu)}(x;\xi) = \sum_{\substack{\mu_1+\mu_2=\mu \\ \nu_1+\nu_2=\nu}} \sum_{|\alpha|=N+1} \frac{\mu!}{\mu_1!\mu_2!}\frac{\nu!}{\nu_1!\nu_2!}\frac{|\alpha|}{\alpha!}\int_0^1 (1-t)^{|\alpha|-1}dt$$
$$\times I(\alpha+\mu_1, \mu_2, \nu_1, \alpha+\nu_2)(x, \xi; t)$$

où

$$I(p, q, r, s)(x, \xi; t) = os - \iint e^{-iy\eta} a_{n(r)}^{(p)}(x; \xi+\eta) b_{n(s)}^{(q)}(x+ty; \xi)dyd\eta$$

Nous fixons $\ell, \ell^{\sim}; 2\ell, 2\ell^{\sim} > d$. On a

$$I(p, q, r, s)(x, \xi; t) = \iint_{\Omega_1} e^{-iy\xi} J(p, q, r, s; \ell, 0)(x, \xi; y, \eta; t)dyd\eta$$
$$+ \iint_{\Omega_2} e^{-iy\xi} J(p, q, r, s; \ell, \ell^{\sim})(x, \xi; y, \eta; t)dyd\eta$$

où $\Omega_1 = \mathbf{R}^d \times \{\eta; |\eta| \leq 1\}$, $\Omega_2 = \mathbf{R}^d \times \{\eta; |\eta| > 1\}$, et

$$J(p, q, r, s; \ell, \ell^{\sim})(x, \xi; y, \eta; t) = (\triangle_y)^{\ell^{\sim}}\left(\frac{b_{n(s)}^{(q)}(x+ty;\xi)}{(1+|y|^2)^{\ell}}\right)\frac{(1-\triangle_\eta)^{\ell} a_{n(r)}^{(p)}(x:\xi+\eta)}{(-|\eta|^2)^{\ell^{\sim}}}.$$

Or par un calcul banal on a, pour $\alpha; |\alpha| = N+1$, $N \leq N_n$, $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$;

$|\mu_1+\mu_2|, |\nu_1+\nu_2| \leq L_0$,

$$|J(\alpha+\mu_1, \mu_2, \nu_1, \alpha+\nu_2; \ell, \ell^{\sim})(x, \xi; y, \eta; t)|$$
$$\leq C_aC_b{}^3P(n, N, \rho_0; \ell, \ell^{\sim}) N_n^{\sim N}\alpha!^s(\hat{\rho}_0\rho_0)^N n^{m+m^{\sim}-(\rho-\delta)N}\frac{1}{(1+|y|^2)^{\ell}}\frac{1}{|\eta|^{2\ell^{\sim}}}$$

avec un polynôme $P(n, N, \hat{\rho}_0, \rho_0; \ell, \ell^{\sim})$ en n, N, $\hat{\rho}_0$ et ρ_0 dépendant de ℓ et $\ell^{\sim}$. Ainsi on a pour tout $\mu, \nu; |\mu|, |\nu| \leq L_0$,

$$|J_N(a_n, b)_{(\nu)}^{(\mu)}(x;\xi)| \leq C_aC_b{}^3P(n, N)N_n^{\sim sN}(\hat{\rho}_0\rho_0)^N n^{-(\rho-\delta)N}$$

et par conséquent, grâce au théorème de Calderón-Vaillancourt, on a

$$\| J_N(a_n, b)(x; D)\| \leq C_aC_b{}^3P(n, N) N_n^{\sim sN}(\hat{\rho}_0\rho_0)^N n^{-(\rho-\delta)N}$$

avec un certain polynôme $P(n, N)$ en n et N.

Quant au reste sauf l'énoncé sur $E_n(a_n; g; \kappa)$, il est déjà clair. Sur ce dernier on a, tant que l'on choisit $N_n^{\sim} = N_n(\hat{\rho}_0 \rho_0 \kappa)$,

$$E_n(a_n; g; \kappa) \leq C_a n^{m^{\sim}} \sum_{|\mu+\nu| \leq N_n^{\sim}} N_n^{\sim\, s|\mu+\nu|} (\hat{\rho}_0 \rho_0 \kappa)^{|\mu+\nu|} n^{-(\rho-\delta)|\mu+\nu|} \|g(t, \circ)\|$$

$$\leq C_a n^{m^{\sim}} \sum_{|\mu+\nu| \leq N_n^{\sim}} e^{-s|\mu+\nu|} \|g\| \leq C_a n^{m^{\sim}} \left(\frac{e}{e-1}\right)^d \|g\|$$

C.Q.F.D.

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université d'Ehimé

Bibliographie

[1] K. Kitagawa-T. Sadamatsu, A necessary condition of Cauchy-Kowalevski's theorem, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **11** (1976), 523-534.

[2] K. Kajitani, On the $\mathscr{E}$-well posed evolution equations, Comm. Partial Differential Equations, **4**-6 (1979), 595-608.

[3] H. Kumano-go, Pseudo-differential operators, M.I.T. Press, 1981.

[4] M. Miyake, A remark on Cauchy-Kowalevski's theorem, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **10** (1974), 243-255.

[5] S. Mizohata, On evolution equations with finite propagation speed, Israel J. Math., **13**-1-2 (1972), 173-187.

[6] S. Mizohata, On Kowalevskian systems, Uspekhi Mat. Nauk, **29** [4] (1974), 216-227.

[7] S. Mizohata, On Cauchy-Kowalevski's theorem: a necessary condition, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **10** (1975), 509-519.

[8] S. Mizohata, Une Remarque sur le théorème de Cauchy-Kowalevski, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci., **5**-3 (1978), 559-566.

[9] S. Mizohata, On the Cauchy-Kowalevski theorem, Math. Anal. & Appl. part B Advances in Math. Suppl. Studies vol 7 B (1981) (Acad. Press), 617-652.

[10] S. Mizohata, On the hyperbolicity in the domain of real analytic functions and Gevrey classes, Hokkaido Math. J., **12**-3 (1983), 298-310.

[11] S. Mizohata, On the Cauchy problem for hyperbolic equations in C^∞ and Gevrey classes, Proc. of VIII Escola Latino-Americana de Matematica, Springer, 1986.

[12] S. Mizohata, On the Cauchy problem, (Lecture note at Wuhan) Acad. Press, 1986.