SUR LES POINTS SINGULIERS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES ; DOMAINE RÉEL

Par

Masuo HUKUHARA

TABLE DES MATIÈRES

Pour étudier les points singuliers des équations différentielles linéaires, j'ai déjà remarqué(1) l'importance des théorèmes d'existence des solutions du problème généralisé de CAUCHY :

Etant donnés un système différentiel ordinaire

$$(1) \qquad \frac{dx_p}{dt} = f_p(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

et les n paires de nombres

$$(2) \qquad (t_1, x_1^0), \quad (t_2, x_2^0), \quad \ldots, \quad (t_n, x_n^0),$$

(1) M. FUKUHARA, Sur les singularités des fonctions définies par des équations différentielles, I, II, Jap. Jour. Math., 8 (1931).

chercher s'il existe une solution de (1) *telle que*

$$x_p(t_p) = x_p^0 \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{3}$$

Dans mes deux mémoires précédents j'ai utilisé, pour traiter ce problème, la méthode des approximations successives, car la première méthode de CAUCHY qui possède une supériorité incontestable concernant le problème de CAUCHY (au sens strict) devient impuissante pour ce problème généralisé. Mais la méthode des approximations successives a, comme on le sait, ce point faible qu'elle exige, pour assurer la convergence des approximations successives, de certaines régularités sur les fonctions $f_p(t, x_1, \ldots, x_n)$ outre la continuité. Pour combler cette lacune j'ai été obligé d'introduire une autre méthode, qui se base sur un théorème d'existence des points invariants dans l'espace à un nombre fini de dimensions. A l'aide de ce théorème d'existence des points invariants, nous pouvons démontrer le théorème suivant qui a été énoncé sans démonstration dans mon ouvrage sur la théorie des équations différentielles ordinaires[(2)]: Soient $\varphi_p(t)$, $\omega_p(t)$ $(p = 1, 2, \ldots, n)$ des fonctions continues respectivement dans des intervalles I_p dont les intérieurs coïncident avec un intervalle ouvert I, les $\omega_p(t)$ ne prenant que des valeurs positives. Supposons que les $f_p(t, x)$ soient des fonctions continues par rapport à $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans le domaine

$$|x_p - \varphi_p(t)| \leqq \omega_p(t) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

quand t reste fixe dans I_p et mesurables dans I quand les x_p restent fixes. Supposons de plus que

$$|f_p(t, x)| \leqq F_p(t) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

$F_p(t)$ désignant une fonction sommable dans tout sous-intervalle fermé[(3)] de I_p. Soit t_p n nombres donnés appartenant respectivement

(2) 福原, 常微分方程式論 (岩波講座) 125頁. Ici nous avons supposé la continuité par rapport à t. Mais cette restriction n'est pas essentielle.

(3) Nous appellerons fermé tout intervalle de la forme $a \leqq t \leqq b$, l'une des extrémités a, b ou toutes les deux pouvant devenir infinies. Donc l'intervalle $a \leqq t < +\infty$ n'est pas fermé suivant notre terminologie.

à I_p et x_p^0 n nombres donnés satisfaisant aux conditions

$$(6) \qquad |x_p^0 - \varphi_p(t_p)| \leqq \omega_p(t_p) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n) .$$

Supposons enfin que l'on ait

$$(7) \qquad \left| x_p^0 + \int_{t_p}^{t} f_p(t, x(t))\, dt - \varphi_p(t) \right| \leqq \omega_p(t) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

quelles que soient les fonctions $x_p(t)$ continues dans I et satisfaisant aux conditions

$$(8) \qquad |x_p(t) - \varphi_p(t)| \leqq \omega_p(t) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n) .$$

Alors le système différentiel (1) admet au moins une solution[4] $x_p = x_p(t)$ telle que les fonctions $x_p(t)$ sont continues dans I_p respectivement et satisfont aux conditions

$$x_p(t_p) = x_p^0 \qquad (p = 1, 2, \ldots, n) .$$

Le chapitre premier est consacré à la démonstration de ce théorème. Dans le chapitre II nous appliquerons ce théorème aux équations de la forme

$$(9) \qquad \frac{dz_p}{dt} = \sum_{j=1}^{n} c_{pj}(t)\, e^{(\mu_j - \mu_p)t} z_j \qquad (p = 1, 2, \ldots, n) ,$$

les μ_p étant des constantes réelles. Désignons par μ un des nombres μ_p et supposons par exemple que l'on ait

$$(10) \qquad \mu_p' = \overline{\lim_{t \to +\infty}} \sum_{j=1}^{n} |c_{pj}(t)| < |\mu - \mu_p| - \mu' \qquad \text{pour } \mu_p \neq \mu,$$

en posant

$$(11) \qquad \max_{\mu_p = \mu} \left\{ \overline{\lim_{t \to +\infty}} \sum_{j=1}^{n} |c_{pj}(t)| \right\} = \max_{\mu_p = \mu} \left\{ \mu_p' \right\} = \mu' .$$

---

(4) Une solution du système différentiel est, par définition, un système des n fonctions continues $x_p(t)$ telles que $x_p(t)$ soient respectivement les intégrales indéfinies (au sens de M. LEBESGUE) des fonctions $f_p(t, x(t))$.

Nous chercherons d'abord s'il existe une solution $z_p(t)$ de (9) tell que

$$(12)\quad \begin{cases} \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} \dfrac{1}{t} \log |z_p(t)| < \mu-\mu_p-\max\limits_{\mu_q>\mu} \{\mu'_q\} & (p=1, 2, \ldots, n) \\ z_p(\tau) = z_p^0 & (\mu_p = \mu) \\ z_p(h) = z_p^0 & (\mu_p < \mu) \end{cases}$$

les h, $\tau\,(h \leqq \tau < +\infty)$ et les z_p^0 étant des nombres donnés. On verra l'existence et l'unicité de la solution pourvu que h soit assez grand, et obtiendra n inégalités qui donnent des limites supérieures des modules $|z_p(t)-z_p^0|$, où nous supposons $z_p^0 = 0$ pour $\mu_p > \mu$. Donc si l'on pose

$$(13)\quad \begin{cases} M(t) = \max\limits_{p=1}^{n} \left\{|z_p(t)|\, e^{\mu_p t}\right\} \\ M_1(t) = \max\limits_{\mu_p=\mu} \left\{|z_p(t)|\, e^{\mu_p t}\right\} \\ M_2(t) = \max\limits_{\mu_p\neq\mu} \left\{|z_p(t)|\, e^{\mu_p t}\right\} \end{cases}$$

et si l'on suppose $z_p^0 = 0$ pour $\mu_p < \mu$, ces n inégalités donneront des relations entre $|z_p(t)-z_p^0|$ et $M_1(\tau)$. Grâce au théorème d'unicité nous pouvons considérer τ comme variable indépendante, et nous pouvons en déduire des relations entre $M(t)$, $M_1(t)$, $M_2(t)$. Ainsi nous arrivons à ce résultat : *La solution de* (9) *satisfaisant aux conditions* (12) *remplie les relations suivantes*

$$(14)\quad (\mu-\mu')t-o(t) \leqq \log M_1(t) \leqq (\mu+\mu')t+o(t)$$

$$(15)\quad M(t) = O(M_1(t)) .$$

En particulier, si $\mu' = 0$ *on obtiendra*

$$(16)\quad \log M_1(t) = \mu t+o(t) .$$

Il en découle un théorème de M. LETTENMEYER[5]: *Si $a_{pj}(t)$ sont des fonctions continues de t ayant des limites finies a_{pj} lorsque $t \to +\infty$, le système différentiel*[6]

$$\frac{dx_p}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{pj}(t)x_j \qquad (p = 1, 2, \ldots\ldots, n) \tag{17}$$

admet n solutions indépendantes

$$x_1 = x_{1j}(t),\ x_2 = x_{2j}(t),\ \ldots\ldots,\ x_n = x_{nj}(t) \tag{18}$$
$$(j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

telles que

$$\max_{p=1}^{n} \left\{ |\, x_{pq}(t)\, | \right\} = \mu_q t + o(t) \tag{19}$$

en désignant par μ_j les parties réelles des n racines de l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0\,. \tag{20}$$

Dans le chapitre III nous referons le calcul dans des hypothèses plus restrictives. Les résultats de MM. LETTENMEYER, SPÄTH[7] et PEYOVITCH[8] y seront discutés précisément, car leurs résultats me semble vagues encore. Par exemple, *si les $a_{pj}(t)$ sont développables asymptotiquement dans le voisinage de $t = +\infty$ comme il suit:*

$$a_{pj}(t) \sim a_{pj} + \frac{a_{pj}^{(1)}}{t} + \ldots\ldots + \frac{a_{pj}^{(k)}}{t^k} + \ldots\ldots \tag{21}$$

(5) Stsber. Akad. München (Math.-naturw. Kl.) 1929.

(6) Pour amener le système (17) à la forme (9) où $c_{pj}(t) = o(1)$, voir 福原, 常微分方程式論 (岩波講座) 159–165頁.

(7) Math. Zeits. 30.

(8) Publication math. Univ. Belgrade, 1, 1932.

et si les n racines de l'équation caractéristique sont toutes différentes, on peut développer la solution de (17) *asymptotiquement dans le voisinage de* $t = +\infty$. Pour le démontrer on forme d'abord n séries

$$(22) \qquad x_p \sim e^{\lambda t} t^{\rho} \left\{ \beta_p + \frac{\beta_p^{(1)}}{t} + \dots + \frac{\beta_p^{(k)}}{t^k} + \dots \right\}$$

qui satisfont formellement aux équations (17) et l'on pose

$$\bar{\varphi}_p(t) = e^{\lambda t} t^{\rho} \left\{ \beta_p + \frac{\beta_p^{(1)}}{t} + \dots + \frac{\beta_p^{(k)}}{t^k} \right\}$$

$$\bar{\varphi}_p'(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{pj}(t) \bar{\varphi}_j(t) = a_p(t) e^{\lambda t} .$$

$x_p = \bar{\varphi}_p(t)$ est une solution des équations linéaires non homogènes

$$(23) \qquad \frac{dx_p}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{pj}(t) x_j + a_p(t) e^{\lambda t} \qquad (p = 1, 2, \dots, n) .$$

Nous chercherons si (17) admet une solution : $x_p = \varphi_p(t)$ telle que

$$| \varphi_p(t) - \bar{\varphi}_p(t) | = O(t^{\nu-k-1} e^{\mu t})$$

en désignant par μ, ν les parties réelles de λ, ρ. Nous sommes ainsi conduits à un théorème de comparaison de deux systèmes différentiels (17) et (23). On peut en déduire que les (22) sont les développements asymptotiques d'une solution de (17). Pour arriver à ce résultat on devra beaucoup préciser les résultats de M. LETTENMEYER, en les étendant au système non linéaire. Ce mode de raisonnements a été employé dans mon ouvrage déjà cité[9]. Dans le présent mémoire nous montrerons comment on peut étendre cette méthode aux équations différentielles linéaires de la forme

$$\frac{dx_p}{dt} = t^{\alpha} \sum_{j=1}^{n} a_{pj}(t) x_j \qquad (p = 1, 2, \dots, n)$$

---

(9) 福原, 常微分方程式論 (岩波講座) 165–172頁.

où les $a_{pj}(t)$ sont développables asymptotiquement sous la forme (21) et α désigne un entier non négatif. Je termine ce mémoire en montrant quelques applications à la recherche des conditions pour la stabilité.

CHAPITRE I

INTRODUCTION

I.—THÉORÈMES D'EXISTENCE DES POINTS INVARIANTS(10)

1. Transformations continues dans l'espace à m dimensions. Nous appellerons étoile de centre o tout ensemble E contenant o intérieurement et tel que chaque demi-droite partant de o contient au plus un point frontière de E. MM. BIRKHOFF et KELLOG(11) ont démontré le théorème suivant qui est la base de mon présent mémoire.

Théorème 1. *Si $\bar{x}=f(x)$ transforme d'une manière continue chaque point x d'une étoile fermée et bornée E à un point $\bar{x}$ de E, il existe au moins un point invariant relatif à cette transformation, c'est-à-dire un point x tel que $x=f(x)$.*

Nous allons en déduire le théorème suivant.

Théorème 2. *Si $\bar{x}=f(x)$ transforme d'une manière continue chaque point x d'une étoile fermée E à un point $\bar{x}$ d'un ensemble borné A contenu dans E, il existe au moins un point invariant relatif à cette transformation.*

Soit o un des centres de l'étoile E. Si l'on prend un nombre positif R assez grand pour que la sphère(12) S de centre o et de rayon R contienne A, $\bar{x}=f(x)$ transforme d'une manière continue chaque

(10) Dans cette section les valeurs que prend la fonction peuvent être des nombres complexes, ou plus généralement des vecteurs libres dans un espace à un nombre fini de dimensions. Mais la variable indépendante t est toujours réelle.

(11) BIRKHOFF and KELLOG, Invariant points in function space, Trans. Amer. Math. soc., 23 (1922). Voir aussi M. FUKUHARA, Sur les systèmes des équations différentielles ordinaires, II, Jap. Jour. Math., 5 (1930).

(12) Nous supposerons que la surface de la sphère lui appartient.

point x de SE à un point $\bar{x}$ de SE. SE est évidemment une étoile fermée et bornée. Il existe donc un point invariant.

2. Degré de continuité d'une fonction continue. Avant d'étendre le théorème 2 à l'espace fonctionnel il convient d'introduire une notion : degré de continuité d'une fonction continue.

Théorème 3. *Si une fonction $f(t)$ positive et bornée dans l'intervalle $0<t<h$ converge vers zèro lorsque t tend vers zèro en décroissant, il existe une fonction continue $F(t)$ convexe vers le haut dans l'intervalle $0\leqq t<h$ et telle que $f(0)=0$, $f(t)\leqq F(t)$.*

Nous supposerons, pour simplifier les considérations, la fonction $f(t)$ semi-continue supérieurement. Sinon il suffit de la remplacer par le maximum $\bar{f}(t)$ de f à t. Soit $y_0>f(t)$ pour $0<t<h$ et considérons l'ensemble E_0 des valeurs c pour lesquelles on a $y_0+c(t-h)>f(t)$ dans $0<t<h$. La borne supérieure c_0 de E_0 n'est pas négative puisque $c=0$ appartient à E_0. Désignons par $2t_1$ la borne inférieure des valeurs $\tau\,(0<\tau<h)$ telles que l'on ait $y_0+c_0(\tau-t_0)=f(\tau)(t_0=h)$. S'il n'existe pas de telle valeur τ, on pose $t_1=0$. Nous posons

$$F(t)=y_0+c_0(t-t_0) \qquad \text{pour} \qquad t_1\leqq t<t_0 .$$

Si $t_1>0$, nous cosidérons l'ensemble E_1 des valeurs c pour lesquelles on a $y_1+c(t-t_1)>f(t)$ $(y_1=F(t_1))$ dans l'intervalle $0<t<t_1$ et désignons par c_1 la borne supérieure de E_1. c_1 est plus grand que c_0. Puis nous désignons par $2t_2$ la borne supérieure des valeurs $\tau\,(0<\tau<t_1)$ telles que l'on ait $y_1+c_1(\tau-t_1)=f(\tau)$ et posons

$$F(t)=y_1+c_1(t-t_1) \qquad \text{pour} \qquad t_2\leqq t<t_1 .$$

Et ainsi de suite. Si après un nombre fini d'opérations on obtient $t_n=0$, la fonction $F(t)$ est définie et continue dans l'intervalle $0\leqq t<h$ et satisfait à l'inégalité $f(t)\leqq F(t)$. Elle est convexe vers le haut puisque le nombre c_j croît avec j. t_n étant égal à 0, on obtient

$$F(0) = f(0) = 0 .$$

$F(t)$ remplit donc les conditions voulues.

Si l'on obtient une suite infinie de nombres: $t_0, t_1, \ldots, t_n$, ... cette suite converge vers 0 puisque $2t_n \leqq t_{n-1}$. La fonction $F(t)$ est donc définie et continue dans l'intervalle $0 < t < h$ et satisfait à l'inégalité $f(t) \leqq F(t)$. La semi-continuité supérieure de $f(t)$ et la définition des nombres t_n entraînent $f(2t_n) = F(2t_n)$. Puisque $\lim_{n\to\infty} f(2t_n) = 0$, on a $\lim_{n\to\infty} F(2t_n) = 0$. La fonction $F(t)$ étant monotone, on a $\lim_{t\to+0} F(t) = 0$. La fonction $F(t)$ est convexe vers le haut puisque c_j croît avec j. Le théorème est donc établi.

Soit $\eta(\delta)$ une fonction continue, positive et convexe vers le haut dans l'intervalle $0 < t < +\infty$. Nous dirons qu'une fonction $f(t)$ est continue $\eta(\delta)$ dans un intervalle I si l'on a $|f(t')-f(t'')| \leqq \eta(\delta)$ pourvu que la différence $|t'-t''|$ de deux nombres t', t'' appartenant à I soit inférieure à δ.

Théorème 4. *La limite d'une suite convergente de fonctions continues $\eta(\delta)$ dans un intervalle I est aussi continue $\eta(\delta)$ dans I.*

En effet si une suite de fonctions

$$f_1(t),\ f_2(t),\ \ldots,\ f_n(t),\ \ldots$$

converge vers une fonction $f(t)$ et si l'on a $|f_n(t')-f_n(t'')| \leqq \eta$ on a $|f(t')-f(t'')| \leqq \eta$, ce qui démontre le théorème.

Théorème 5. *Si une fonction $f(t)$ est continue $\eta(\delta)$ dans $a \leqq t \leqq b$, une fonction $F(t)$ continue dans $a \leqq t \leqq b$, linéaire dans chaque intervalle $t_{j-1} < t < t_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, où $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < b$, et coïncidant avec $f(t)$ pour $t = t_j$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, n)$ est aussi continue $\eta(\delta)$ dans $a \leqq t \leqq b$.*

L'ensemble E des points (t, x) tels que

$$t_j \leqq t < +\infty, \qquad |x - f(t_j)| < \eta(t - t_j)$$

forme une figure convexe puisque $\eta(t)$ est une fonction continue, positive et convexe vers le haut. $f(t)$ étant continue $\eta(\delta)$, les points

$(t_k, f(t_k))$ $(k=j, j+1, \ldots, n)$ appartiennent à E. Donc la ligne brisée joignant ces points successivement se trouve dans E. Il s'ensuit que

$$|F(t)-F(t_j)|<\eta(t-t_j) \qquad \text{pour} \quad t \geqq t_j .$$

Prenons deux nombres quelconques t', t'' $(t'<t'')$ appartenant à $a \leqq t \leqq b$. Si $t_{j-1} \leqq t' < t'' \leqq t_j$ on aura

$$|F(t'')-F(t')| = |F(t_{j-1}+t''-t')-F(t_{j-1})| \leqq \eta(t''-t').$$

Si $t_{j-1} \leqq t' \leqq t_j < t''$ on aura

$$|F(t'')-F(t_j)| \leqq \eta(t''-t_j), \qquad |F(t'')-F(t_{j-1})| \leqq \eta(t''-t_{j-1}).$$

Ceci signifie que les points $(t_{j-1}, F(t_{j-1}))$, $(t_j, F(t_j))$ appartiennent à l'ensemble E_0 des points (t, x) tels que

$$t \leqq t'', \qquad |x-F(t'')| \leqq \eta(t''-t) .$$

E_0 formant une figure convexe, le segment joignant ces deux points se trouvent dans E_0 et l'on a

$$|F(t')-F(t'')| \leqq \eta(t''-t'). \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

3. Transformations continues dans l'espace fonctionnel. Soit $\mathfrak{F}$ une famille de fonctions continues dans un intervalle I, et supposons qu'à chaque fonction $f(t)$ de $\mathfrak{F}$ on a fait correspondre une fonction continue dans I, de manière que si une suite de fonctions de $\mathfrak{F}$ est uniformément convergente dans tout sous-intervalle fermé et borné de I, la suite des fonctions correspondantes le soit aussi. Alors cette correspondance s'appelle transformation continue de la famille $\mathfrak{F}$.

Théorème 6. *Si $\bar{f}(t)=f(t)\,|\,T$ transforme d'une manière continue chaque fonction $f(t)$ continue dans un intervalle I à une fonction $\bar{f}(t)$ continue dans le même intervalle I et si de plus la famille $\mathfrak{F}$ des fonctions tranformées $f(t)$ est bornée et également continue dans tout* *intervalle fermé et borné contenu dans I, il existe au moins une fonction invariante relative à cette transformation, c'est-à-dire une fonction $f(t)$ telle que $f(t) = f(t) \mid T$.*

Supposons établi le théorème dans le cas où I est un intervalle fermé et borné. Si I n'est pas un intervalle fermé et borné, nous considérons une suite croissante d'intervalles tendant vers I:

$$a_1 \leqq t \leqq b_1, \quad a_2 \leqq t \leqq b_2, \quad \ldots\ldots, \quad a_n \leqq t \leqq b_n, \ \ldots\ldots$$

Soit $\varphi(t)$ une fonction continue dans $a_n \leqq t \leqq b_n$, et posons

$$f(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{pour} \quad a_n \leqq t \leqq b_n \\ \varphi(a) & \text{pour} \quad t \leqq a_n \\ \varphi(b) & \text{pour} \quad b_n \leqq t \,. \end{cases}$$

$f(t)$ est continue dans I. Nous poserons

$$\bar{\varphi}(t) = f(t) \mid T \qquad \text{pour} \quad a_n \leqq t \leqq b_n \,.$$

La transformation qui fait correspondre $\varphi(t)$ à $\bar{\varphi}(t) = \varphi(t) \mid T_n$ est continue, les fonctions $\varphi(t)$ et $\bar{\varphi}(t)$ étant continues. De plus la famille des fonctions transformées $\bar{\varphi}(t)$ est bornée et également continue. Par suite, d'après la supposition, il existe une fonction $\varphi_n(t)$ invariante relative à T_n. Posons

$$f_n(t) = \begin{cases} \varphi_n(t) & \text{pour} \quad a_n \leqq t \leqq b_n \\ \varphi_n(a) & \text{pour} \quad t \leqq a_n \\ \varphi_n(b) & \text{pour} \quad b_n \leqq t \,. \end{cases}$$

La famille des fonctions $f_n(t)$ est bornée et également continue dans tout sous-intervalle fermé et borné de I. On peut donc en extraire par le procédé diagonal une suite partielle convergente. La limite de cette suite est une fonction invariante relative à T puisque la transformation T est continue.

Nous supposons donc l'intervalle I fermé. Soit δ un nombre positif et désignons par $\varepsilon(\delta)$ la borne supérieure des différences

$|f(t')-f(t'')|$, où $f(t)$ désigne une fonction quelconque dans $\mathfrak{F}$ et t', t'' deux nombres quelconques dans I: $a \leqq t \leqq b$, dont la différence ne surpasse pas δ. D'après l'égale continuité de la famille $\mathfrak{F}$, $\varepsilon(\delta)$ converge vers zéro avec δ. Il existe donc une fonction $\eta(t)$ continue, non croissante, convexe vers le haut, satisfaisant à l'inégalité $\varepsilon(t) \leqq \eta(t)$ dans l'intervalle $0 \leqq t \leqq b-a$ et s'annulant pour $t=0$. Nous posons $\eta(t)=\eta(b-a)$ pour $t \geqq b-a$. Toute fonction de $\mathfrak{F}$ est continue $\eta(\delta)$ dans $a \leqq t \leqq b$. Intercalons entre a et b d'une manière arbitraire une suite de nombres croissants

$$a = t_1 < t_2 < \dots\dots < t_{n-1} < t_n = b\,.$$

A un point $(x_1, x_2, \dots\dots, x_n)$ dans l'espace E_n nous faisons correspondre une fonction $f(t\,;\,x)$ continue dans $a \leqq t \leqq b$, linéaire dans chaque intervalle $t_j \leqq t \leqq t_{j+1}(j=1, 2, \dots\dots, n-1)$ et coïncidant avec x_j pour $t=t_j$. Désignons par $\bar{x}=x\,|\,\mathfrak{T}$ le point dont les coordonnés sont $\bar{f}(t_1\,;\,x)$, $\bar{f}(t_2\,;\,x)$, $\dots\dots$, $\bar{f}(t_n\,;\,x)$, $\bar{f}(t\,;\,x)$ étant la fonction transformée $f(t\,;\,x)\,|\,T$. $\mathfrak{T}$ transforme d'une manière continue chaque point x de E_n à un point x dans une ensemble borné. Il existe donc un point invariant relatif à $\mathfrak{T}$. Désignons par $\varphi(t)$ la fonction correspondante, c'est-à-dire la fonction telle que $\varphi(t)=\varphi(t)\,|\,T$ pour $t=t_1$, t_2, $\dots\dots$, t_n, et linéaire dans chaque intervalle $t_j \leqq t \leqq t_{j+1}(j=1, 2, \dots\dots, n-1)$. La fonction transformée $\bar{\varphi}(t)=\varphi(t)\,|\,T$ étant continue $\eta(\delta)$ dans $a \leqq t \leqq b$, le théorème 5 montre que la fonction $\varphi(t)$ est aussi continue $\eta(\delta)$ dans le même intervalle.

Considérons maintenant un ensemble dénombrable de nombres dense dans $a \leqq t \leqq b$. Désignons par $\tau_1, \tau_2, \dots\dots, \tau_n, \dots\dots$ les nombres de cet ensemble. Alors il existe, comme on l'a vu plus haut, une fonction $f_n(t)$ continue $\eta(\delta)$ dans $a \leqq t \leqq b$ et satisfaisant aux relations

$$f_n(\tau_j) = \overline{f_n}(\tau_j) \qquad (j=1, 2, \dots\dots, n)\,.$$

La famille des fonctions $f_n(t)$ est bornée et également continue. On peut donc en extraire une suite uniformément convergente. Grâce à la continuité de la transformation T la limite de cette suite est une fonction invariante relative à T. Le théorème est donc établi.

II.—APPLICATIONS À LA THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES[13]

4. Théorème d'existence. Démontrons maintenant le théorème énoncé au début de ce mémoire.

Théorème 7. *Soient $\varphi_p(t)$, $\omega_p(t)$ $(p = 1, 2, \ldots, n)$ des fonctions continues respectivement dans des intervalles I_p dont les intérieurs coïncident avec un intervalle ouvert I, les $\omega_p(t)$ ne prenant que des valeurs positives. Supposons que les $f_p(t, x)$ soient des fonctions continues par rapport à $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans le domaine*

$$|x_p - \varphi_p(t)| \leqq \omega_p(t) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

quand t reste fixe dans I_p et mesurables dans I quand les x_p restent fixes. Supposons de plus que

$$|f_p(t, x)| \leqq F_p(t) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

$F_p(t)$ désignant une fonction sommable dans tout sous-intervalle fermé de I_p. Soient t_p n nombres donnés appartenant respectivement à I_p et x_p^0 n nombres donnés satisfaisant aux conditions

$$|x_p^0 - \varphi_p(t_p)| \leqq \omega_p(t_p) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

Supposons enfin que l'on ait

$$\left| x_p^0 + \int_{t_p}^{t} f_p(t, x(t))\,dt - \varphi_p(t) \right| \leqq \omega_p(t) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

(13) Dans cette section et dans les chapitres suivants les valeurs que prend la fonction sont des nombres complexes s'il n'y a pas de mention contraire. La variable indépendante est toujours réelle. Les fonctions de t que nous considérerons sont toujours supposées mesurables.

quelles que soient les fonctions $x_p(t)$ continues dans I et satisfaisant aux conditions

$$|x_p(t)-\varphi_p(t)| \leqq \omega_p(t) \qquad (p=1, 2, \ldots, n)\,.$$

Alors le système différentiel

$$\frac{dx_p}{dt}=f_p(t, x) \qquad (p=1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

admet au moins une solution $x_p=x_p(t)$ telle que les fonctions $x_p(t)$ sont continues dans I_p respectivement et satisfont aux conditions

$$x_p(t_p)=x_p^0 \qquad (p=1, 2, \ldots, n)\,. \tag{2}$$

Soit un système de n fonctions continues dans I: $f_p(t)(p=1, 2, \ldots, n)$. Nous faisons lui correspondre un système des n fonctions définies comme il suit: Pour les valeurs de t où l'on a $|f_p(t)-\varphi_p(t)| \leqq \omega_p(t)$ $(p=1, 2, \ldots, n)$ nous posons $x_p(t)=f_p(t)$; pour les valeurs de t où une au moins de ces inégalités n'est pas satisfaite nous posons

$$x_p(t)=f_p(t) \Big/ \max_{j=1}^{n} \left\{\frac{|f_j(t)|}{\omega_j(t)}\right\} \qquad (p=1, 2, \ldots, n)\,.$$

Alors le système des $x_p(t)$ satisfait aux inégalités

$$|x_p(t)-\varphi_p(t)| \leqq \omega_p(t) \qquad (p=1, 2, \ldots, n)$$

et varie d'une manière continue avec le système des $f_p(t)$. Posons ensuite

$$\bar{f}_p(t)=x_p^0+\int_{t_p}^{t} f_p(t, x(t))\,dt \qquad (p=1, 2, \ldots, n)\,.$$

Alors la famille des fonctions $\bar{f}_p(t)$ est bornée et également continue dans tout sous-intervalle fermé de I et le système des n fonctions $\bar{f}_p(t)$ varie d'une manière continue avec le système des n fonctions $f_p(t)$. Le théorème 6 montre donc qu'il existe un système des n

fonctions $f_p(t)$ tel que $\bar{f}_p(t) = f_p(t)$ dans I. Ceci signifie qu'il existe au moins une solution du système des équations intégrales

$$x_p(t) = x_p^0 + \int_{t_p}^{t} f_p(t, x(t))\, dt \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

C.Q.F.D.

5. Théorème d'unicité. Pour que l'on puisse affirmer l'unicité de la solution nous devons introduire d'autres conditions. Le théorème d'unicité que nous utiliserons fréquemment est le suivant.

Théorème 8. *Outre les hypothèses exposées au théorème 7, nous supposerons que si le système des fonctions $x_p(t)$ satisfait aux inégalités*

$$(3) \qquad |\, x_p(t) - \varphi_p(t)\,| \leqq C\omega_p(t) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

on ait

$$(4) \qquad \left| x_p^0 + \int_{t_p}^{t} f_p(t, x(t))\, dt - \varphi_p(t) \right| \leqq \sigma C\omega_p(t) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

où C est une constante positive quelconque et σ un nombre positif moindre que 1. Alors $x_p = \varphi_p(t)$ est la solution unique du système différentiel (1) satisfaisant aux conditions (2).

En effet, si $x_p = x_p(t)$ est une telle solution, désignons par C la borne inférieure de l'ensemble des nombres C pour lesquels on obtient (3). Nous aurons alors (3) et par suite (4). Puisque

$$x_p(t) = x_p^0 + \int_{t_p}^{t} f_p(t, x(t))\, dt \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

par hypothèse, nous aurons

$$|\, x_p(t) - \varphi_p(t)\,| \leqq \sigma C\omega_p(t) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

par suite $\sigma C \geqq C$, ce qui entraîne $C = 0$. C.Q.F.D.

CHAPITRE II

ÉQUATIONS À COEFFICIENTS BORNÉS

I.—ÉQUATIONS HOMOGÈNES.

6. Théorème d'existence. Nous appliquerons dans cette section les théorèmes 7 et 8 aux équations linéaires

$$(1)\qquad \frac{dz_p}{dt}=\sum_{j=1}^{n}c_{pj}(t)e^{(\mu_j-\mu_p)t}z_j \qquad (p=1,2,\ldots,n)$$

les μ_p étant des constantes réelles. Soit

$$h\leqq\tau<+\infty$$

et définissons les nombres τ_p par

$$(2)\qquad \tau_p=\begin{cases}+\infty & (\mu_p>\mu),\\ \tau & (\mu_p=\mu),\\ h & (\mu_p<\mu).\end{cases}$$

Nous allons chercher d'abord si le système (1) admet des solutions telles que

$$(3)\qquad z_p(\tau_p)=z_p^0 \qquad (\mu_p\leqq\mu)$$

$$(4)\qquad \left|z_p(t)-z_p^0\right|\leqq C\exp\left\{(\mu-\mu_p)t+\left|\int_\tau^t\gamma(t,\tau)\,dt\right|\right\}\equiv C\omega_p(t,\tau)$$

$$(p=1,2,\ldots,n),$$

où les nombres z_p^0 sont nuls pour $\mu_p>\mu$ et arbitraires pour $\mu_p\leqq\mu$, C est une constante suffisamment grande et

$$(5)\qquad \gamma(t,\tau)=\begin{cases}\overline{\gamma}(t) & \text{pour}\quad \tau<t<+\infty\\ \underline{\gamma}(t) & \text{pour}\quad h\leqq t<\tau\end{cases}$$

$\bar{\gamma}(t)$, $\underline{\gamma}(t)$ étant des fonctions que nous définirons dans la suite. Supposons que

$$\text{(a)} \qquad \sum_{j=1}^{n} | c_{pj}(t) | \leqq \gamma_p(t) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\text{(6)} \qquad | z_p^0 | \leqq C\delta(t)\omega_p(t, \tau) \qquad (\mu_p \leqq \mu) .$$

Des inégalités (4) et (6) on déduit

$$| z_p(t) | \leqq C(1+\delta(t))\, \omega_p(t, \tau) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n) .$$

Par suite

$$\text{(7)} \qquad \left| \int_{\tau_p}^{t} \sum_{j=1}^{n} | c_{pj}(t)\, z_j(t) | \, dt \right| \leqq C \left| \int_{\tau_p}^{t} (1+\delta(t))\, \gamma_p(t)\, \omega_p(t, \tau)\, dt \right|$$
$$(p = 1, 2, \ldots, n).$$

Donc, d'après le théorème 7, la solution existe si

$$\text{(b)} \qquad \left| \int_{\tau_p}^{t} (1+\delta(t))\, \gamma_p(t)\, \omega_p(t, \tau)\, dt \right| \leqq \sigma(t)\, \omega_p(t, \tau)$$
$$(p = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\text{(c)} \qquad 0 < \sigma(t) \leqq 1 .$$

D'après le thèorème 8, la solution est unique si

$$\text{(c}'\text{)} \qquad 0 < \sigma(t) \leqq \sigma < 1 ,$$

σ étant une constante. Nous supposons que le minimum de la fonction $\delta(t)\omega_p(t, \tau)(\mu_p \leqq \mu)$ est atteint pour $\tau = \tau_p$. Pour cela il suffit que

$$\text{(d)} \qquad \delta(t)\, \bar{\gamma}(t) \geqq -\delta'(t) \geqq 0$$

$$\text{(e)} \qquad (\mu-\mu_p)(t-h) \geqq \int_{h}^{t} \underline{\gamma}(t)\, dt + \log \frac{\delta(h)}{\delta(t)} \qquad (\mu_p < \mu) .$$

Si ces conditions sont satisfaites, nous pouvons prendre pour C une constante quelconque telle que

$$\text{(8)} \qquad C \geqq \frac{1}{\delta(\tau)} \max_{\mu_p \leqq \mu} \left\{ \frac{| z_p^0 |}{\omega_p(\tau_p, \tau)} \right\} .$$

Si les nombres z_p^0 sont nuls pour $\mu_p < \mu$, les hypothèses (e) sont inutiles. Nous arrivons ainsi au théorème suivant.

Thoérème 9[14]. *Supposons que les $c_{pj}(t)$ sont des fonctions sommables dans tout sous-intervalle fermé de l'intervalle I: $h \leqq t < +\infty$ et qu'il existe des fonctions $\gamma_p(t)$, $\bar{\gamma}(t)$, $\underline{\gamma}(t)$, $\delta(t)$, $\sigma(t)$ remplissant les conditions (a), (b), (c), (d), (e) dans I, où les nombres τ_p sont définis par (2) ($h \leqq \tau < +\infty$) et la fonction $\gamma(t, \tau)$ est définie par (5). Alors, étant donnés les nombres z_p^0 qui sont nuls pour $\mu_p > \mu$ mais arbitraires pour $\mu_p \leqq \mu$, il existe au moins une solution telle que*

$$(3) \qquad z_p(\tau_p) = z_p^0 \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

$$(9) \qquad |z_p(t) - z_p^0| = C\omega_p(t, \tau) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

où C est une constante quelconque satisfaisant à l'inégalité (8). Si la solution est unique on obtient

$$(10) \qquad |z_p(t) - z_p^0| \leqq \frac{\sigma(t)}{\sigma(\tau)} \max_{\mu_p \leq \mu} \left\{ \frac{|z_p^0|}{\omega_p(\tau_p, \tau)} \right\} \omega_p(t, \tau) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

Si les z_p^0 sont nuls pour $\mu_p < \mu$, les hypothèses (e) sont inutiles. Pour que l'on puisse affirmer l'unicité de la solution, il suffit de supposer (c′) au lieu de (c) mais les hypothèses (d) et (e) sont inutiles.

Pour obtenir les inégalités (10) il suffit d'appliquer les inégalités (7) et (*b*) aux relations

$$z_p(t) = z_p^0 + \int_{\tau_p}^{t} \sum_{j=1}^{n} c_{pj}(t) z_j(t) dt \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

en définissant la constante C par

$$C = \frac{1}{\delta(\tau)} \max_{\mu_p \leq \mu} \left\{ \frac{|z_p^0|}{\omega_p(\tau_p, \tau)} \right\}.$$

(14) Il n'est nullement nécessaire qu'il existe un μ_p égal à μ.

7. Hypothèses sur les fonctions: $\gamma_p(t)$, $\bar{\gamma}(t)$, $\underline{\gamma}(t)$, $\delta(t)$, $\sigma(t)$. Démontrons que si l'on a

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \sum_{j=1}^{n} |c_{pj}(t)| + \overline{\lim_{t\to+\infty}} \sum_{j=1}^{n} |c_{qj}(t)| < |\mu-\mu_q| \tag{11}$$

$$(\mu_p = \mu, \quad \mu_q \neq \mu)$$

et si l'on prend le nombre h assez grand, nous pouvons déterminer les fonctions $\gamma_p(t)$, $\bar{\gamma}(t)$ etc. de manière que les conditions exposées au théorème d'existence 9 soient remplies.

Les fonctions $\gamma_p(t)$. Déterminons d'abord les $\gamma_p(t)$ de manière que

$$\sum_{j=1}^{n} |c_{pj}(t)| \leqq \gamma_p(t) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n) \tag{A}$$

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \gamma_p(t) + \overline{\lim_{t\to+\infty}} \gamma_q(t) < |\mu-\mu_q| \qquad (\mu_p = \mu, \quad \mu_q \neq \mu)\,. \tag{12}$$

Les fonctions $\bar{\gamma}(t)$, $\underline{\gamma}(t)$. Puis nous déterminons les fonctions $\bar{\gamma}(t)$, $\underline{\gamma}(t)$ de manière que

$$\gamma_p(t) \leqq \bar{\gamma}(t), \qquad \gamma_p(t) \leqq \underline{\gamma}(t) \qquad (\mu_p = \mu) \tag{13}$$

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \bar{\gamma}(t) + \overline{\lim_{t\to+\infty}} \gamma_q(t) < \mu_q-\mu \qquad (\mu_q > \mu) \tag{14}$$

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \underline{\gamma}(t) + \overline{\lim_{t\to+\infty}} \gamma_q(t) < \mu-\mu_q \qquad (\mu_q < \mu). \tag{15}$$

Nous pouvons supposer de plus que

$$\underline{\lim_{t\to+\infty}} \bar{\gamma}(t) > \overline{\lim_{t\to+\infty}} \gamma_p(t)\,, \qquad \underline{\lim_{t\to+\infty}} \underline{\gamma}(t) > \overline{\lim_{t\to+\infty}} \gamma_p(t) \tag{16}$$

$$(\mu_p = \mu)\,,$$

mais nous considérerons aussi le cas où

$$\underline{\lim_{t\to+\infty}} \bar{\gamma}(t) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \gamma_p(t) \quad \text{ou} \quad \underline{\lim_{t\to+\infty}} \underline{\gamma}(t) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \gamma_p(t)$$

pour certains des indices p $(\mu_p = \mu)$. Nous supposons alors

$$\bar{\gamma}(t) = \underline{\gamma}(t) = \gamma(t) \tag{17}$$

$$(18) \qquad e^{-\int_h^t \gamma(t)dt} = O\left(\frac{\gamma(t)-\gamma_p(t)}{\gamma_p(t)}\right) \qquad (\mu_p = \mu).$$

LA FONCTION $\delta(t)$. Si les conditions (14), (15), (16) sont remplies, les conditions suivantes

$$(\mathrm{D}) \qquad \bar{\gamma}(t)\delta(t) \geqq -\delta'(t) \geqq 0 \qquad (\mu_p < \mu)$$

$$(\mathrm{E}) \qquad |\,\delta'(t)\,|\,/\,\delta(t) + \underline{\gamma}(t) \leqq \mu - \mu_p \qquad (\mu_p = \mu)$$

$$(19) \qquad \gamma(t) \geqq (1+\delta(t))\,\gamma_p(t) \qquad (\mu_p = \mu)$$

$$(20) \qquad \bar{\gamma}(t) + (1+\delta(t))\,\gamma_q(t) \leqq \mu_q - \mu \qquad (\mu_q > \mu)$$

$$(21) \qquad \underline{\gamma}(t) + (1+\delta(t))\,\gamma_q(t) \leqq \mu - \mu_q \qquad (\mu_q < \mu)$$

seront remplies, en prenant pour $\delta(t)$ une constante positive suffisamment petite. Naturellement on doit supposer le nombre h suffisamment grand. Si les conditions (16) ne sont pas remplies nous définirons $\delta(t)$ par

$$-\delta'(t) = \gamma(t)\delta(t)\,,$$

ce qui donne

$$\delta(t) = \delta(h)e^{-\int_h^t \gamma(t)dt}\,.$$

La relation (18) entraîne (19) pourvu que $\delta(h)$ soit suffisamment petit. Les conditions (14), (15) entraînent (20), (21), en supposant, s'il est nécessaire, que le nombre $\delta(h)$ soit assez petit et que le nombre h soit assez grand. La condition (D) est remplie par la définition de $\delta(t)$. Les conditions (E) deviennent

$$(1+\delta(h))\,\underline{\gamma}(t) \leqq \mu - \mu_p \qquad (\mu_p < \mu)$$

qui sont remplie par (15) quand h est suffisamment grand.

LA FONCTION $\sigma(t)$. Si l'on prend $\sigma(t) \equiv 1$, les conditions suivantes

$$(\mathrm{B}) \qquad |\,\sigma'(t)\,| + (1+\delta(t))\,\gamma_p(t) \leqq \sigma(t)\bar{\gamma}(t) \qquad (\mu_p = \mu)$$

$$(\mathrm{B}') \qquad |\,\sigma'(t)\,| + (1+\delta(t))\,\gamma_p(t) \leqq \sigma(t)\underline{\gamma}(t) \qquad (\mu_p = \mu)$$

$$(\mathrm{B}'') \qquad \sigma(t)\left\{\mu_p-\mu-\overline{\gamma}(t)\right\} \geqq |\,\sigma'(t)\,|+(1+\delta(t))\,\gamma_p(t) \qquad (\mu_p>\mu)$$

$$(\mathrm{B}''') \qquad \sigma(t)\left\{\mu-\mu_p-\underline{\gamma}(t)\right\} \geqq |\,\sigma'(t)\,|+(1+\delta(t))\,\gamma_p(t) \qquad (\mu_p<\mu)$$

$$(\mathrm{C}) \qquad 0<\sigma(t)\leqq 1$$

seront remplies.

Les conditions (A), (C), (D) sont les mêmes que (a), (c), (d). Les conditions (E) entraînent (e) et les conditions (B), (B′), (B″), (B‴) entraînent (b). Ainsi notre assertion est vérifiée. Pour que l'on puisse affirmer l'unicité de la solution, il suffit que l'on puisse prendre

$$(\mathrm{C}') \qquad 0<\sigma(t)\leqq\sigma<1$$

au lieu de (C) ; les hypothèses (D), (E) sont inutiles. Si les z_p^0 sont nuls pour $\mu_p<\mu$, les hypothèses (E) sont inutiles.

8. Choix des fonctions: $\gamma_p(t)$, $\overline{\gamma}(t)$, $\underline{\gamma}(t)$, $\delta(t)$, $\sigma(t)$.

1° Pour que l'on obtienne des conditions d'unicité, nous prenons

$$(\mathrm{F}_1) \qquad \delta(t)\equiv 0$$

$$(\mathrm{C}_1) \qquad \sigma(t)=\sigma \text{ (constante positive)} <1.$$

Nous devons déterminer les fonctions $\gamma_p(t)$, $\overline{\gamma}(t)$, $\underline{\gamma}(t)$ de manière que les conditions (A), (B), (B′), (B″), (B‴) soient remplies. Ces conditions deviennent ici

$$(\mathrm{A}_1) \qquad \sum_{j=1}^{n}|\,c_{pj}(t)\,|\leqq\gamma_p(t) \qquad (p=1,2,\ldots,n)$$

$$(\mathrm{B}_1) \qquad \gamma_p(t)\leqq\sigma\overline{\gamma}(t) \qquad (\mu_p=\mu)$$

$$(\mathrm{B}_1') \qquad \gamma_p(t)\leqq\sigma\underline{\gamma}(t) \qquad (\mu_p=\mu)$$

$$(\mathrm{B}_1'') \qquad \sigma(\mu_p-\mu-\overline{\gamma}(t))\geqq\gamma_p(t) \qquad (\mu_p>\mu)$$

$$(\mathrm{B}_1''') \qquad \sigma(\mu-\mu_p-\underline{\gamma}(t))\geqq\gamma_p(t) \qquad (\mu_p<\mu).$$

Les conditions (9) deviennent d'autant moins restrictives que les fonctions $\overline{\gamma}(t)$, $\underline{\gamma}(t)$ sont plus grandes. Il est donc naturel de déterminer ces fonctions aussi grandes que possible, car si certaines conditions entraînent l'unicité de la solution, les conditions plus restrictives l'entraîneraient tout de suite. Posons

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\ \gamma_p(t) = \mu'_p \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Si les conditions (12) qui peuvent s'écrire

$$\mu'_p + \mu'_q < |\mu - \mu_q| \qquad (\mu_p = \mu, \quad \mu_q \neq \mu)$$

sont satisfaites, on peut prendre

$$\bar{\gamma}(t) = \bar{\mu} - \mu\,, \qquad \underline{\gamma}(t) = \mu - \underline{\mu} \tag{22}$$

où $\bar{\mu}$, $\underline{\mu}$ sont des constantes quelconques telles que

$$\mu + \mu'_p < \bar{\mu} < \mu_q - \mu'_q \qquad (\mu_p = \mu, \quad \mu_q > \mu)\,, \tag{23}$$

$$\mu - \mu'_p > \underline{\mu} > \mu_q + \mu'_q \qquad (\mu_p = \mu, \quad \mu_q < \mu)\,; \tag{24}$$

le nombre h doit être pris assez grand. Quant aux fonctions $\gamma_p(t)$ il suffit de prendre

$$\sum_{j=1}^{n} |c_{pj}(t)| \leqq \gamma_p(t) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Les conditions (B_1), (B'_1), (B''_1), (B'''_1) deviennent

$$\gamma_p(t) \leqq \sigma(\bar{\mu} - \mu), \qquad \gamma_p(t) \leqq \sigma(\mu - \underline{\mu}) \qquad (\mu_p = \mu)$$

$$\sigma(\mu_p - \bar{\mu}) \geqq \gamma_p(t) \qquad (\mu_p > \mu)$$

$$\sigma(\underline{\mu} - \mu_p) \geqq \gamma_p(t) \qquad (\mu_p < \mu)$$

qui sont remplies grâce aux conditions (23), (24) pourvu que h soit assez grand et σ assez voisin de 1.

2° S'il existe une solution satisfaisant à certaines conditions, l'existence d'une solution satisfaisant à des conditions moins restrictives est évidente. Donc le théorème d'existence deviendra d'autant plus efficace que les fonctions $\bar{\gamma}(t)$, $\underline{\gamma}(t)$ sont plus petites. Il est donc naturel de déterminer ces fonctions aussi petites que possible en supposant

$$(C_2) \qquad \sigma(t) = 1.$$

Posons

$$\bar{\gamma}(t) = \underline{\gamma}(t) = \gamma(t)$$

et prenons pour $\gamma(t)$ une fonction satisfaisant à la condition

$$\lim_{t\to+\infty} \gamma(t) = \max_{\mu_p=\mu} \{\mu'_p\} = \mu' .$$

En supposant que

$$\gamma_p(t) = \Gamma(t) \qquad (\mu_p = \mu)$$

$$\lim_{t\to+\infty} \Gamma(t) = \mu'$$

ce qui est évidemment possible, on prend

$$\delta(t) = e^{-\varepsilon t} \quad \text{ou} \quad \delta \quad (\varepsilon,\ \delta \text{ sont des constantes positives})$$

suivant que $\mu' >$ ou $= 0$, et puis

$$(B_2) \qquad \gamma(t) = (1+\delta(t))\,\Gamma(t) .$$

Les conditions (B), (B′), (B″), (B‴) sont alors satisfaites pour les valeurs suffisamment grandes de t. Pour que l'on puisse obtenir (D), (E) pour les valeurs suffisamment grandes de t, il suffit que l'on ait

$$(D_2) \qquad 0 < \varepsilon < \mu'$$

$$(E_2) \qquad 0 < \varepsilon < \mu - \mu_p - \mu' \qquad (\mu_p < \mu) .$$

Nous arrivons ainsi au théorème suivant.

Théorème 10[15]. *Si les conditions (11) sont remplies et si les $c_{pj}(t)$ sont des fonctions mesurables dans $0 \leq t < +\infty$ le système (1) admet une solution et une seule qui satisfait aux conditions*

(15) Il n'est nullement nécessaire qu'il existe un μ_p égal à μ.

$$(25) \qquad z_p(h) = z_p^0 \quad (\mu_p < \mu), \qquad z_p(\tau) = z_p^0 \qquad (\mu_p = \mu)$$
$$(h \leqq \tau < +\infty)$$

$$(26) \qquad z_p(t) = O(e^{(\bar{\mu}-\mu_p)t})$$

où $\bar{\mu}$ *désigne un nombre quelconque satisfaisant aux conditions (23), les* h, τ, $z_p^0(\mu_p \leqq \mu)$ *sont des nombres donnés arbitrairement mais le nombre* h *est toujours supposé plus grand qu'un nombre suffisamment grand* H[16]. *Posons*

$$\delta(t) = e^{-\varepsilon t} \quad \textit{ou} \quad \delta \quad (\varepsilon, \delta \textit{ sont des constantes positives})$$

suivant que $\mu' >$ *ou* $= 0$, *où nous supposons remplies les conditions* (D_2), (E_2). *Ponsons ensuite*

$$\gamma(t) = (1+\delta(t))\,\Gamma(t)$$

$$\omega_p(t,\tau) = \exp\left\{(\mu-\mu_p)t + \left|\int_\tau^t \gamma(t)\,dt\right|\right\},$$

$\Gamma(t)$ *étant une fonction telle que*

$$\lim_{t\to+\infty} \Gamma(t) = \max_{\mu_p=\mu} \{\mu'_p\}$$

$$(A_2) \qquad \sum_{j=1}^n |c_{pj}(t)| \leqq \Gamma(t).$$

Alors la solution satisfait aux inégalités

$$(27) \qquad |z_p(t)-z_p^0| \leqq \frac{1}{\delta(\tau)} \max\left\{\frac{|z_p^0|}{\omega_p(t,\tau)}\right\}\omega_p(t,\tau)$$

où $\tau_p = h$ *ou* τ *suivant que* $\mu_p =$ *ou* $< \mu$.

3° On prend pour $\delta(t)$ une constante positive telle que

$$(1+\delta)(\mu'_p + \mu'_q) < |\mu-\mu_q|, \qquad (\mu_p = \mu, \quad \mu_q \neq \mu).$$

(16) Il dépend des fonctions auxiliaires $\gamma_p(t)$, $\bar{\gamma}(t)$, etc. mais ne dépend pas des nombres τ et z_p^0.

Soit $\varDelta$ une constante telle que

$$\delta < \varDelta, \tag{28}$$

$$(1+\varDelta)\mu'_p + (1+\varDelta)\mu'_q < |\mu - \mu_q| \qquad (\mu_p = \mu, \quad \mu_q \neq \mu) \tag{29}$$

et posons

$$\sum_{j=1}^{n} |c_{pj}(t)| = \gamma_p(t) \qquad (p = 1, 2, \dots, n) \tag{A_3}$$

$$\bar{\gamma}(t) = \underline{\gamma}(t) = \gamma(t) = (1+\varDelta) \max_{\mu_p = \mu} \{\gamma_p(t)\} \tag{B_3}$$

$$\sigma(t) = \frac{1+\delta}{1+\varDelta}. \tag{30}$$

On a évidemment

$$0 < \sigma(t) < 1. \tag{C_3}$$

La condition (D) est évidemment remplie. Les conditions (B), (B′) sont des conséquences de (B_3), (28), (30). Les conditions (B″), (B‴) et (E) deviennent ici

$$|\mu_p - \mu| > \gamma(t) + (1+\varDelta)\gamma_p(t) \qquad (\mu_p \neq \mu) \tag{B_3''}$$

$$\gamma(t) \leqq \mu - \mu_p \qquad (\mu_p < \mu). \tag{E_3}$$

En remarquant que

$$\varlimsup_{t \to +\infty} \gamma(t) \leqq (1+\varDelta) \max_{\mu_p = \mu} \{\mu'_p\} = (1+\varDelta)\mu',$$

on voit que les conditions (29) entraînent (B_3''), (E_3) quand t est assez grand.

Le cas où $\mu'_p = 0 (p = 1, 2, \dots, n)$ (c'est-à-dire le cas où l'on peut supposer $\gamma_p(t) = o(1)$) sera discuté plus précisément dans le chapitre suivant. Mais ici encore on peut remarquer ce fait que l'on peut prendre $\sigma(t)/\delta(t)$ aussi petit que l'on veut puisque δ peut être pris aussi grand que l'on veut.

9. Inégalités fondamentales. Supposons remplies les conditions (a), (b), (c′), (d), (e). Désignons par $z_p = \varphi_p(t)$ la solution satisfaisant aux conditions (3), (9). Posons

$$M(h, s) = \max_{\mu_p \leq \mu} \left\{ \frac{|\varphi_p(s_p)|}{\omega_p(s_p, s)} \right\} \tag{31}$$

où

$$s_p = \begin{cases} +\infty & (\mu_p > \mu) \\ s & (\mu_p = \mu) \\ h & (\mu_p < \mu) \end{cases} \tag{32}$$

s étant un nombre quelconque tel que

$$h \leqq s < +\infty .$$

$z_p = \varphi_p(t)$ est la seule solution telle que

$$z_p(s_p) = \varphi_p(s_p) \qquad (\mu_p \leqq \mu),$$

$$z_p(t) = O(\omega_p(t, \tau)) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n) .$$

Nous obtenons donc les inégalités

$$|\varphi_p(t) - \varphi_p(s_p)| \leqq \frac{\sigma(t)}{\delta(s)} M(h, s)\omega_p(t, s) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n) \tag{I}$$

en remplaçant dans (10) $z_p(t)$, z_p^0, τ par $\varphi_p(t)$, $\varphi_p(s_p)$, s respectivement pourvu que les fonctions $\gamma_p(t)$, $\overline{\gamma}(t)$, $\underline{\gamma}(t)$, $\delta(t)$, $\sigma(t)$ satisfassent aux conditions (A), (B), (B′), (B″), (B‴), (C′), (D), (E).

Les conditions (E) sont introduites pour que la fonction $\delta(t)\omega_p(t, \tau)$ $(\mu_p < \mu)$ soit minimum pour $t = h$. Ces conditions sont indépendantes de τ. Nous obtenons donc

$$\delta(t)\omega_p(h, s) \leqq \delta(h)\omega_p(h, s) \leqq \delta(t)\omega_p(t, s) .$$

D'autre part, l'expression de $\omega_p(t, \tau)$ montre que

$$1 = \omega_p(s, s) \leqq \omega_p(t, s) \qquad (\mu_p = \mu).$$

Nous obtenons donc

$$\omega_p(s_p, s) \leqq \omega_p(t, s) \qquad (\mu_p \leqq \mu).$$

Par suite

$$|\varphi_p(s_p)| \leqq M(h, s)\omega_p(t, s) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

Si donc on pose

$$(33) \qquad \begin{aligned} M(t) &= \max_{p=1}^{n} \left\{ |\varphi_p(t)|\, e^{\mu_p t} \right\} \\ M_1(t) &= \max_{\mu_p=\mu} \left\{ |\varphi_p(t)|\, e^{\mu_p t} \right\} \\ M_2(t) &= \max_{\mu_p \neq \mu} \left\{ |\varphi_p(t)|\, e^{\mu_p t} \right\} \end{aligned}$$

on aura

$$(\mathrm{II}) \qquad |\varphi_p(t)| \leqq \frac{\sigma(t)+\delta(s)}{\delta(s)} M(h, s)\omega_p(t, s) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

d'où l'on déduit

$$(\mathrm{I}') \qquad M(t) \leqq \frac{\sigma(t)+\delta(s)}{\delta(s)} M(h, s) \exp\left\{\mu t + \left|\int_s^t \gamma(t)\, dt\right|\right\}.$$

En regardant ici le nombre s constant, nous obtenons une limite supérieure de l'expression $M(t)$. Si l'on suppose $\varphi_p(h) = 0$ pour $\mu_p < \mu$ on a

$$M(h, t)\, e^{\mu t} = M_1(t).$$

Par suite

$$|\varphi_p(t)|\, e^{\mu t} \leqq \frac{\sigma(t)+\delta(s)}{\delta(s)} M_1(s) \exp\left\{\mu(t-s) + \left|\int_t^s \gamma(t)\, dt\right|\right\}$$

$$(\mu_p = \mu)$$

qui sont équivalentes à l'inégalité unique

$$(\mathrm{II}') \qquad M_1(t) \leqq \frac{\delta(t)+\delta(s)}{\delta(s)} M_1(s) \exp\left\{\mu(t-s) + \left|\int_t^s \gamma(t)\, dt\right|\right\}.$$

Si l'on considère ici t constant et s variable, on obtient une limite inférieure de $M_1(t)$.

En faisant $t = s$ dans (I), on a

$$\text{(III)} \qquad |\varphi_p(s)-\varphi_p(s_p)| \leqq \frac{\sigma(s)}{\delta(s)} M(h, s)\, e^{(\mu-\mu_p)s} \qquad (p = 1, 2, \ldots\ldots, n).$$

Si $\varphi_p(h) = 0$ pour $\mu_p < \mu$, on obtient

$$|\varphi_p(s)| \leqq \frac{\sigma(s)}{\delta(s)} M_1(s)\, e^{-\mu_p s} \qquad (\mu_p \neq \mu)$$

qui sont équivalente à l'inégalité

$$\text{(III')} \qquad M_2(t) \leqq \frac{\sigma(t)}{\delta(t)} M(t),$$

où nous avons remplacé s par t. Résumons les résultats obtenus ci-dessus.

Théorème 11[17]. *Supposons que les conditions (a), (b), (c'), (d), (e) sont remplies, et désignons par $z_p = \varphi_p(t)$ la solution telle que*

$$z_p(\tau_p) = z_p^0 \qquad (\mu_p \leqq \mu)$$

$$z_p(t)-z_p^0 = O(\omega_p(t, \tau)) \qquad (p = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

les z_p^0 étant nuls pour $\mu_p > \mu$ et des nombres donnés pour $\mu_p \leqq \mu$. Alors on obtient les inégalités (I'), (II), (III). Si l'on suppose de plus que $z_p^0 = 0$ pour $\mu_p < \mu$ les conditions (e) sont inutiles et on obtient en outre les inégalités (II'), (III'). Et ces inégalités sont des conséquences immédiates des inégalités (I).

Plaçons-nous maintenant dans les hypothèses aux numéros 7, 8. Il existe une solution et une seule satisfaisant aux conditions (25), (26). Désignons-la par $z_p = \varphi_p(t)$. Les inégalités auxquelles elle satisfait s'obtiennent par l'application du théorème 11. Puisqu'on

(17) Si aucun des μ_p ne soit égal à μ, les inégalités (II'), (III') que l'on obtient en supposant $z_p^0 = 0$ pour $\mu_p < \mu$ deviennent banales puisque la solution est identiquement nulle.

peut prendre pour $\gamma(t)$ une fonction tendant vers μ' lorsque $t \to +\infty$, l'inégalité (I') entraînent

$$\log M(t) \leqq (\mu+\mu')t+o(t) .$$

Si un au moins des μ_p est égal à μ et si $z_p^0 = 0$ pour $\mu_p < \mu$ mais un des $z_p^0(\mu_p = \mu)$ n'est pas nul, l'inégalité (II') entraîne

$$(\mu-\mu')t+o(t) \leqq \log M_1(t) .$$

Prenons un nombre $\bar{\mu}$ tel que

$$\mu+\mu' < \bar{\mu} < \mu_p-\mu_p' \qquad (\mu_p > \mu).$$

Désignons maintenant par $z_p = \varphi_p(t)$ la solution telle que

$$z_p(t_p) = z_p^0 \qquad (\mu_p \leqq \mu)$$

$$z_p(t) = O\left(e^{(\bar{\mu}-\mu_p)t}\right) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

et par $z_p = \psi_p(t)$ la solution telle que

$$z_p(t_p) = z_p^0 \qquad (\mu_p < \mu)$$

$$z_p(t) = O\left(e^{(\bar{\mu}-\mu_p)t}\right) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

La solution $z_p = \varphi_p(t)-\psi_p(t)$ satisfait aux conditions

$$z_p(t_p) = 0 \qquad (\mu_p < \mu)$$

$$z_p(t) = O\left(e^{(\bar{\mu}-\mu_p)t}\right) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

Donc si elle n'est pas identiquement nulle, on obtiendra

$$(\mu-\mu')t+o(t) \leqq \log \max_{\mu_p=\mu} \left\{ |\varphi_p(t)-\psi_p(t)|\, e^{\mu_p t} \right\} \leqq (\mu+\mu')t+o(t)$$

$$\max_{p=1}^{n} \left\{ |\varphi_p(t)-\psi_p(t)|\, e^{\mu_p t} \right\} = O\left(\max_{\mu_p=\mu} \left\{ |\varphi_p(t)-\psi_p(t)|\, e^{\mu_p t} \right\} \right).$$

Par suite nous arrivons au théorème suivant.

Théorème 12. *Si, en posant* $\mu'_p = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \sum_{j=1}^{n} |c_{pj}(t)|$, *on obtient*

$$\mu'_p + \mu'_q < |\mu - \mu_q| \qquad (\mu_p = \mu, \quad \mu_q \neq \mu)$$

et si h est suffisamment grand, il existe une solution et une seule de (1) telle que

$$z_p(\tau_p) = z_p^0 \qquad (\mu_p \leqq \mu)$$

$$z_p(t) = O\left(e^{(\bar{\mu}-\mu_p)t}\right) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

où $\bar{\mu}$ *est un nombre tel que*

$$\mu + \mu' < \bar{\mu} < \mu_q - \mu'_q \qquad (\mu' = \max_{\mu_p=\mu} \{\mu'_p\}, \quad \mu_q > \mu).$$

Désignons par $z_p = \varphi_p(t)$ *cette solution et définissons les fonctions* $M(t)$, $M_1(t)$, $M_2(t)$ *par (33). Alors elle satisfait à la relation*

$$\log M(t) \leqq (\mu + \mu')\, t + o\,(t).$$

Si elle ne satisfait pas à la relation

$$\log M(t) \leqq \underline{\mu}\, t + o\,(t),$$

où $\mu_p + \mu'_p < \underline{\mu} < \mu - \mu' \ (\mu_p < \mu)$, *on aura de plus*

$$(\mu - \mu')\, t + o(t) \leqq \log M(t),$$

$$M(t) = O\,(M_1(t)).$$

Remarque. Si la solution considérée au théorème 12 ne satisfait pas à la relation $\log M(t) \geqq (\mu-\mu')t + o(t)$, on aura $\log M(t) \leqq \underline{\mu}t + o(t)$, $\underline{\mu}$ étant un nombre quelconque tel que $\mu_p + \mu'_p < \underline{\mu} < \mu - \mu' (\mu_p < \mu)$. Par suite on obtiendra

$$\log M(t) \leqq t \max_{\mu_p < \mu} \left\{\mu_p + \mu'_p\right\} + o(t).$$

II.—ÉQUATIONS NON HOMOGÈNES

10. Théorème d'existence. Considérons le système non homogène

$$\frac{dz_p}{dt} = \sum_{j=1}^{n} c_{pj}(t) e^{(\mu_j-\mu_p)t} z_j + c_p(t) e^{(\mu-\mu_p)t} \tag{34}$$

$$(p = 1, 2, \ldots\ldots, n).$$

Si l'on suppose

$$\sum_{j=1}^{n} |c_{pj}(t)| + |c_p(t)| \leqq \gamma_p(t) \qquad (p = 1, 2, \ldots\ldots, n),$$

par la transformation

$$z_p = u_p/u_{n+1}, \qquad u_{n+1} = 1 \qquad (p = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

le système se change en

$$\begin{cases} \dfrac{du_p}{dt} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} c_{pj}(t)\, e^{(\mu_j-\mu_p)t}\, u_j & (p = 1, 2, \ldots\ldots, n) \\ \dfrac{du_{n+1}}{dt} = 0 \end{cases}$$

où $c_{p,\,n+1}(t) = c_p(t)$, $\mu_{n+1} = \mu$. On peut donc lui appliquer les résultats précédents et en particulier nous obtenons ce théorème.

Théorème 13. Si

$$\mu'_p + \mu'_q < |\mu - \mu_q| \qquad (\mu_p = \mu, \quad \mu_q \neq \mu)$$

où

$$\mu'_p = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |c_{pj}(t)| + |c_p(t)| \right\} \qquad (p = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

le système (34) admet une solution et une seule qui satisfait aux conditions

$$z_p(\tau_p) = z_p^0 \qquad (\mu_p \leqq \mu)$$

$$z_p(t) = O\left(e^{(\bar{\mu}-\mu_p)t}\right) \qquad (p = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

où $\tau_p = +\infty$, τ, h *suivant que* $\mu_p >, =, < 0$, $\bar{\mu}$ *est un nombre quelconque tel que*

$$\mu_p + \mu'_p < \bar{\mu} < \mu_q - \mu'_q \qquad (\mu_p = \mu, \quad \mu_q > \mu),$$

le nombre h étant supposé suffisamment grand. Cette solution satisfait aux relations

$$|z_p(t)| \leqq (\mu+\mu'-\mu_p)t+o(t) \qquad (p=1, 2, \ldots, n)$$

où $\mu' = \max\limits_{\mu_p=\mu} \{\mu'_p\}$.

Supposons maintenant

$$\mu'_p+\mu'_q < |\mu-\mu_q| \qquad (\mu_p=\mu, \quad \mu_q \neq \mu) \tag{35}$$

$$\sum_{j=1}^{n} |c_{pj}(t)| \leqq \gamma_p(t) \qquad (p=1, 2, \ldots, n) \tag{36}$$

$$|c_p(t)| \leqq \Delta_p(t) \qquad (p=1, 2, \ldots, n) \tag{37}$$

où

$$\mu'_p = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \sum_{j=1}^{n} |c_{pj}(t)| \qquad (p=1, 2, \ldots, n)$$

Les conditions imposées à la solution lesquelles nous considérerons dans la suite seront exclusivement

$$z_p(\tau_p) = 0$$

$$z_p(t) = O\left(e^{(\bar{\mu}-\mu_p)t}\right),$$

$\bar{\mu}$ étant un nombre tel que

$$\mu+\mu' < \bar{\mu} < \mu_q+\mu'_q \qquad (\mu' = \max_{\mu_p=\mu}\{\mu'_p\}, \ \mu_q > \mu)\ .$$

La solution correspondante est identiquement nulle si $c_p(t) \equiv 0$. On pourrait donc prévoir que la solution deviendrait d'autant plus petite en module que les fonctions $\Delta_p(t)$ sont plus petites. C'est ce que nous allons discuter.

Soit

$$h_p = h \quad \text{ou} \quad +\infty \qquad \text{suivant que} \qquad \mu_p < \quad \text{ou} \quad \geqq \mu\,,$$

et supposons que

$$(38) \qquad \left|\int_{h_p}^{t} \Delta_p(t) e^{(\mu-\mu_p)t}\, dt\right| \leqq \delta_p(t) e^{(\mu-\mu_p)t} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Pour qu'il existe une solution telle que

$$|\, z_p(t)\,| \leqq \Gamma(t)\, e^{(\mu-\mu_p)t} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

il suffit que l'on ait

$$\left|\int_{h_p}^{t} \Big\{\gamma_p(t)\Gamma(t) + \Delta_p(t)\Big\} e^{(\mu-\mu_p)t}\, dt\right| \leqq \Gamma(t) e^{(\mu-\mu_p)t}$$

$$(p = 1, 2, \ldots, n)$$

qui sont des conséquences des inégalités

$$(39) \qquad \left|\int_{h_p}^{t} \gamma_p(t)\Gamma(t)\, e^{(\mu-\mu_p)t} dt\right| \leqq \Big\{\Gamma(t) - \delta_p(t)\Big\} e^{(\mu-\mu_p)t}$$

$$(p = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Ces inégalités s'obtiennent en intégrant les inégalités suivantes, après les avoir multipliées par $e^{(\mu-\mu_p)t}$

$$\gamma_p(t)\Gamma(t) + |\, \delta_p'(t)\,| + |\, \Gamma'(t)\,| \leqq |\, \mu - \mu_p\,| \Big\{\Gamma(t) - \delta_p(t)\Big\} \qquad (\mu_p \neq \mu)$$

$$\gamma_p(t)\Gamma(t) \leqq -\Gamma'(t) - |\, \delta_p'(t)\,| \qquad (\mu_p = \mu)\,.$$

Pour que l'on obtienne ces inégalités pour t assez grand, il suffit que l'on ait

$$(40) \qquad \begin{cases} \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} \dfrac{\delta_p(t)}{\Gamma(t)} < 1, & \delta_p'(t) = o(\Gamma(t)) \qquad (\mu_p \neq \mu) \\ \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} \dfrac{\gamma_p(t)\Gamma(t)}{-\Gamma'(t)} < 1, & \delta_p' = o(|\, \Gamma'(t)\,|) \qquad (\mu_p = \mu) \\ \Gamma'(t) = o(\Gamma(t))\,. & \end{cases}$$

Théorème 14. *Si les conditions (35), (36), (37), (38) et (39), où* $\mu'_p = \overline{\lim}_{t \to +\infty} \sum_{j=1}^{n} | c_{pj}(t) |$, $\Gamma(t) = o(1)$ *sont satisfaites, le système (34) admet une solution et une seule telle que*

$$z_p(\tau_p) = 0 \qquad (\mu_p \leqq \mu)$$

$$z_p(t) = O\left(e^{(\bar{\mu}-\mu_p)t}\right) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

et cette solution satisfait aux inégalités

$$| z_p(t) | \leqq \Gamma(t) e^{(\mu - \nu_p)t} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n) .$$

Si les conditions (40) sont remplies, les conditions (39) sont aussi remplies pour t assez grand.

11. Conditions satisfaites par une seule solution. Plaçons-nons dans les hypothèses au théorème 13. Si une solution de (34) ne satisfait pas à la relation

$$z_p(t) = O\left(e^{(\bar{\mu}-\mu_p)t}\right) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n) ,$$

ne satisfait-elle pas à la relation

$$\max_{\mu_p > \mu} \left\{ | z_p(t) | e^{\mu_p t} \right\} \geqq \bar{\mu} t - o(t) \,?$$

c'est ce que nous allons examiner.

Considérons une suite de solutions de (34)

$$z_p = \varphi_{p1}(t), \quad z_p = \varphi_{p2}(t), \ldots, \quad z_p = \varphi_{pk}(t), \ldots$$

telles que

$$\varphi_{pk}(h^{(k)}) \longrightarrow z_p^0 \qquad (\mu_p \leqq \mu)$$

$$| \varphi_{pk}(t^{(k)}) | < C e^{(\bar{\mu}-\mu_p)t^{(k)}} \qquad (\mu_p > \mu)$$

où

$$h^{(k)} \longrightarrow h, \quad t^{(k)} \longrightarrow +\infty, \quad h^{(k)} < t^{(k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots) .$$

Posons

$$\psi_{pk}(t)=\begin{cases}\varphi_{pk}(t) & (h\leqq t\leqq t^{(k)})\\ \varphi_{pk}(t^{(k)})\,e^{(\bar{\mu}-\mu_p)(t-t^{(k)})} & (t^{(k)}\leqq t<+\infty)\,,\end{cases}$$

$$z_1=\psi_{1k}(t),\quad z_2=\psi_{2k}(t),\;\ldots\ldots,\quad z_n=\psi_{nk}(t)$$

est une solution du système différentiel

$$\frac{dz_p}{dt}=\sum_{j=1}^{n}c_{pj}(t)\,e^{(\mu_j-\mu_p)t}z_j+c_p(t\,;\,k)e^{(\bar{\mu}-\mu_p)t}$$

$$(p=1,2,\ldots\ldots,n)$$

où

$$c_p(t\,;\,k)=\begin{cases}c_p(t) & (h\leqq t\leqq t^{(k)})\\ (\bar{\mu}-\mu_p)\varphi_{pk}(t^{(k)})\,e^{-(\bar{\mu}-\mu_p)t^{(k)}}-\sum_{j=1}^{n}c_{pj}(t)\varphi_{jk}(t^{(k)})\,e^{-(\bar{\mu}-\mu_j)t^{(k)}} & \\ & (t^{(k)}\leqq t<+\infty)\,.\end{cases}$$

Par hypothèse il existe une constante C_0 indépendante de k et telle que

$$|\,C_p\,(t\,;\,k)\,|\leqq C_0 \qquad (p=1,2,\ldots\ldots,n)\,.$$

Si donc ε est un nombre positif tel que

$$\bar{\mu}+\varepsilon<\mu_p-\mu_p' \qquad (\mu_p>\mu),$$

on obtiendra aisément les inégalités

$$|\,\varphi_{pk}(t)\,|\leqq Ae^{(\bar{\mu}+\varepsilon-\mu_p)t} \qquad (p=1,2,\ldots\ldots,n)\,,$$

où A est une constante indépendante de k. On peut donc extraire de la suite de solutions une suite partielle uniformément convergente. Cette limite est évidemment une solution de (34) telle que

$$z_p(h)=z_p^0 \qquad (\mu_p\leqq\mu)$$

$$|\,z_p(t)\,|\leqq Ae^{(\bar{\mu}+\varepsilon-\mu_p)t} \qquad (p=1,2,\ldots\ldots,n)\,.$$

Une telle solution étant unique la suite même converge vers cette solution, qui satisfait sûrement aux relations

$$\max\left\{| z_p(t) | e^{\bar{\mu}_p t}\right\} \leqq (\mu+\mu')t+o(t)$$

$$(\mu' = \max_{\mu_p=\mu}\{\mu'_p\}) .$$

Théorème 15. *Une suite de solutions de (34)*

$$z_p = \varphi_{p1}(t), \quad z_p = \varphi_{p2}(t), \ldots, \quad z_p = \varphi_{pk}(t), \ldots$$

telles que

$$\varphi_{pk}(h^{(k)}) \rightarrow z_p^0 \qquad (\mu_p \leqq \mu)$$

$$| \varphi_{pk}(t^{(k)}) | < Ce^{(\bar{\mu}-\mu_p)t^{(k)}} \qquad (\mu_p > \mu)$$

où

$$h^{(k)} \rightarrow h, \qquad t^{(k)} \rightarrow +\infty, \qquad h^{(k)} < t^{(k)}$$

converge uniformément vers la solution $z_p = \varphi_p(t)$ de (34) telle que

$$\varphi_p(h) = z_p^0$$

$$\max_{p=1}^{n} \left\{| \varphi_p(t) | e^{\mu_p t}\right\} \leqq (\mu+\mu')t+o(t) \qquad (\mu' = \max_{\mu_p=\mu}\{\mu'_p\}) .$$

Considérons une solution quelconque $z_p = \varphi_p(t)$ de (34). Si

$$\varliminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log \max_{\mu_p>\mu} \left\{| \varphi_p(t) | e^{\mu_p t}\right\} < \min_{\mu_p>\mu} \{\mu_p-\mu'_p\}$$

le théorème montre que l'on a nécessairement

$$| \varphi_p(t) | e^{\mu_p t} \leqq (\mu+\mu')t+o(t) .$$

Par conséquent, nous obtenons les deux corollaires suivants.

Corollaire 1. *Une solution $z_p = \varphi_p(t)$ de (34) ne satisfaisant pas à la relation*

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\log\max_{p=1}^{n}\left\{|\varphi_p(t)|\,e^{\mu_p t}\right\}\leqq\mu+\max_{\mu_p=\mu}\{\mu'_p\}$$

satisfait nécessairement à la relation

$$\underline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\log\max_{\mu_p>\mu}\left\{|\varphi_p(t)|\,e^{\mu_p t}\right\}\geqq\min_{\mu_p>\mu}\{\mu_p-\mu'_p\}$$

Corollaire 2. *Il n'existe qu'une solution de (34) telle que*

$$z_p(\tau_p)=z_p^0 \qquad (\mu_p\leqq\mu)$$

$$\underline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\log\max_{\mu_p>\mu}\left\{|z_p(t)|\,e^{\mu_p t}\right\}<\min_{\mu_p>\mu}\{\mu_p-\mu'_p\}$$

où $\tau_p=h,\ \tau,\ +\infty\,(h\leqq\tau<+\infty)$ *suivant que* $\mu_p<,\ =,\ >\mu$.

12. Principe de comparaison de deux systèmes différentiels. Etant donnés deux systèmes différentiels

$$\frac{dz_p}{dt}=\sum_{j=1}^{n}c_{pj}(t)e^{(\mu_j-\mu_p)t}z_j+c_p(t)e^{(\mu-\mu_p)t} \qquad (p=1,2,\ldots\ldots,n)$$

$$\frac{dz_p}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\bar{c}_{pj}(t)e^{(\mu_j-\mu_p)t}z_j+\bar{c}_p(t)e^{(\mu-\mu_p)t} \qquad (p=1,2,\ldots\ldots,n)$$

comparons leurs solutions satisfaisant aux mêmes conditions

$$z_p(\tau_p)=z_p^0 \qquad (\mu_p\leqq\mu)$$

$$z_p(t)=O\left(e^{(\bar{\mu}-\mu_p)t}\right) \qquad (p=1,2,\ldots\ldots,n).$$

Nous les désignerons par $\varphi_p(t)$, $\bar{\varphi}_p(t)$ respectivement.

$$u_p=\varphi_p(t)-\bar{\varphi}_p(t) \qquad (p=1,2,\ldots\ldots,n)$$

est une solution du système différentiel

$$\frac{du_p}{dt}=\sum_{j=1}^{n}c_{pj}(t)e^{(\mu_j-\mu_p)t}u_j+d_p(t)e^{(\mu-\mu_p)t} \qquad (p=1,2,\ldots\ldots,n)$$

où

$$d_p(t) = c_p(t) - \bar{c}_p(t) + \sum_{j=1}^{n} \left\{ c_{pj}(t) - \bar{c}_{pj}(t) \right\} e^{(\mu_j - \mu_p)t} \bar{\varphi}_j(t) .$$

Si l'on suppose les fonctions $\bar{\varphi}_j(t)$ connues, on obtiendra des limites supérieures de $|d_p(t)|$. Par suite le théorème 14 donne des limites supérieures des modules $|\varphi_p(t) - \bar{\varphi}_p(t)|$. Ces limites supérieures deviennent d'autant plus petites que les différences $|c_{pj}(t) - \bar{c}_{pj}(t)|$, $|c_p(t) - \bar{c}_p(t)|$ sont plus petites. On verra dans la section II du chapitre suivant comment ce mode de discussion nous conduit aux développements asymptotiques des solutions d'un système différentiel.

CHAPITRE III

ÉQUATIONS DONT LES COEFFICIENTS SONT ASYMPTOTIQUES À DES CONSTANTES.

I.—ÉQUATIONS HOMOGÈNES.

Considérons d'abord le système

$$(1) \qquad \frac{dx_n}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{pj}(t) x_j \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

où

$$\lim_{t \to +\infty} a_{pj}(t) = a_{pj} .$$

Une transformation linéaire à coefficients constants des variables dépendantes l'amène à un système de la forme

$$(2) \qquad \frac{dy_{pq}}{dt} = \sum_{k=1}^{q} \lambda_{pqk} z_{pk} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{k_j} b_{pqjk}(t) y_{jk}$$

$$(q = 1, 2, \ldots, k_p ; \quad p = 1, 2, \ldots, m)$$

où

$$b_{pqjk}(t) = o(1)$$

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n ,$$

les λ_{pqk} étant des constantes. Les nombres

$$\lambda_{pqq} = \lambda_p \qquad (q = 1, 2, \ldots\ldots, k_p; \quad p = 1, 2, \ldots\ldots, m)$$

sont les n racines de l'équation caractéristique

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Il existe une fonction $\beta(t)$ telle que[18]

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{k_j} |b_{pqjk}(t)| \leqq \beta(t)$$

$$\beta(t) = o(1), \qquad \beta'(t) = O\left(\beta(t)^{1+\frac{1}{\varkappa}}\right)$$

où $\varkappa = \max\limits_{p=1}^{m} \left\{k_p\right\}$. Si, en posant

$$e^{\lambda_p t} z_{pq} = \beta(t)^{\frac{q-1}{\varkappa}} y_{pq},$$

on obtient

$$\frac{dz_{pq}}{dt} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{k_j} c_{pqjk}(t)\, e^{(\mu_j - \mu_p)t} z_{jk}$$

$$(q = 1, 2, \ldots\ldots, k_p; \quad p = 1, 2, \ldots\ldots, m),$$

où μ_p est la partie réelle de λ_p, on verra sans peine que

$$c_{pqjk}(t) = O\left(\beta(t)^{\frac{1}{\varkappa}}\right).$$

Ainsi nous pouvons toujours amener le système (1) à un système de la forme

$$\frac{dz_p}{dt} = \sum_{j=1}^{n} c_{pj}(t)\, e^{(\mu_j - \mu_p)t} z_j \qquad (p = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

---

(18) 福原, 常微分方程式論 (岩波講座) 161頁.

où

$$c_{pj}(t) = o(1)\,.$$

Donc les résultats obtenus sur ce système donneront quelques renseignements sur le système (1). Mais on obtiendra des résultats plus précis si l'on applique les théorèmes 7, 8 directement au système

$$\begin{cases} \dfrac{dz_{pq}}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{q-1} \lambda_{pqk} z_{pk} + \sum\limits_{j=1}^{m} \sum\limits_{k=1}^{k_j} c_{pqjk}(t)\, e^{(\mu_j-\mu_p)t} z_{jk} \\ \qquad\qquad (q = 1, 2, \ldots\ldots, k_p\,; \quad \mu_p \neq \mu) \\ \dfrac{dz_{pq}}{dt} = \sum\limits_{j=1}^{m} \sum\limits_{k=1}^{k_j} c_{pqjk}(t) e^{(\mu_j-\mu_p)t} z_{jk} \\ \qquad\qquad (q = 1, 2, \ldots\ldots, k_p\,; \quad \mu_p = \mu) \end{cases}$$

auquel se ramène le système (2) par un changement de variables

$$e^{\lambda_p t} z_{pq} = y_{pq} \qquad\qquad (\mu_p \neq \mu)$$

$$e^{\lambda_p t} z_{pq} = \beta(t)^{\frac{q-1}{\varkappa}} y_{pq} \qquad (\mu_p = \mu\,; \quad \varkappa = \max_{\mu_p=\mu}\{k_p\}).$$

Les résultats obtenus sur ce système s'étendent facilement au système

$$\frac{dz_{pq}}{dt} = \sum_{k=1}^{q-1} \lambda_{pqk}(t) z_{pk} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{k_j} c_{pqjk}(t) e^{\mu_j(t)-\mu_p(t)} z_{jk} \tag{3}$$

$$(q = 1, 2, \ldots\ldots, k_p\,; \quad p = 1, 2, \ldots\ldots, m)$$

où

$$c_{pqjk}(t) = o(1) \tag{4}$$

$$\lambda_{pqk}(t) = O(1) \qquad (\mu_p \neq \mu) \tag{5}$$

$$\lambda_{pqk}(t) = 0 \qquad (\mu_p = \mu) \tag{6}$$

$$\mu_p'(t) = \mu_p + o(1) \tag{7}$$

$$\mu_p(t) = \mu_q(t) \qquad (\mu_p = \mu_q). \tag{8}$$

Cette extension est utile pour étudier le système différentiel de la forme que nous appellerons équations différentielles linéaires de classe $\alpha+1$,

$$\frac{dx_p}{dt} = t^\alpha \sum_{j=1}^{n} a_{pj}(t) y_j \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

où $a_{pj}(t)$ sont bornées et développables asymptotiquement en séries de puissances de t dans le voisinage de $t = +\infty$.

13. Théorème d'existence. Nous considérons donc le système (3) où les conditions (4), (5), (6), (7), (8) sont remplies. Supposons que

$$\text{(a)} \qquad \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{k_j} | c_{pqjk}(t) | \leqq \gamma_p(t) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\text{(b)} \qquad \sum_{k=1}^{q-1} | \lambda_{pqk}(t) | \leqq \Lambda_{pq} \leqq \Lambda_p \qquad (\mu_p \neq \mu)$$

et désignons par $\mu(t)$ une fonction telle que $\mu'(t) = \mu + o(1)$. Nous supposerons de plus que si $\mu = \mu_p$ on ait $\mu(t) = \mu_p(t)$. En posant

$$\tau_p = h, \tau, +\infty \quad \text{suivant que} \quad \mu_p <, =, > \mu$$

$$\gamma(t, \tau) = \overline{\gamma}(t),\ \underline{\gamma}(t) \quad \text{suivant que} \quad t >, < \tau,$$

$(h \leqq \tau < +\infty)$ et supposant que

$$\text{(c)} \qquad \begin{cases} 0 < \sigma_p(t) \leqq 1 & (\mu_p \neq \mu) \\ \sigma_p(t) = 1 & (\mu_p = \mu) \end{cases}$$

nous cherchons s'il existe une solution telle que

$$z_{pq}(\tau_p) = z_{pq}^0 \qquad (\mu_p \leqq \mu)$$

$$\text{(9)} \qquad | z_{pq}(t) - z_{pq}^0 | \leqq C\sigma_p(t)\omega_p(t, \tau)$$

où C désigne une constante. Pour que $\sigma_p(t)\omega_p(t, \tau)$ soit minimum pour $t = \tau_p$ $(\mu_p < \mu)$, il suffit que

$$\text{(d)} \qquad \mu(t) - \mu_p(t) \geqq \mu(h) - \mu_p(h) + \int_h^t \underline{\gamma}(t) dt + \log \frac{\sigma_p(h)}{\sigma_p(t)}$$

$$(\mu_p < \mu, \quad h \leqq t < +\infty)$$

qui se déduisent de

$$\text{(D)} \qquad \mu'(t) - \mu_p'(t) \geqq \underline{\gamma}(t) + \frac{|\sigma_p'(t)|}{\sigma_p(t)} \qquad (\mu_p < \mu).$$

Si $\mu_p = \mu$, $\sigma_p(t)\omega_p(t, \tau)$ est évidemment minimum pour $t = \tau$. On aura donc

$$\text{(10)} \qquad |z_{pq}^0| \leqq \delta C \sigma_p(t)\omega_p(t, \tau)$$

si

$$\text{(11)} \qquad C \geqq \frac{1}{\delta} \max_{\mu_p \leq \mu} \left\{ \frac{|z_{pq}^0|}{\sigma_p(\tau_p)\omega_p(\tau_p, \tau)} \right\}.$$

Les inégalités (9), (10) entraînent

$$|z_{pq}(t)| \leqq (1+\delta) C \sigma_p(t)\omega_p(t, \tau).$$

L'existence de la solution est donc certaine si

$$\text{(e)} \qquad (1+\delta) \left| \int_{\tau_p}^{t} \left\{ A_{pq}\sigma_p(t) + \gamma_p(t) \right\} \omega_p(t, \tau) dt \right| \leqq \sigma_p(t)\omega_p(t, \tau)$$

$$(p = 1, 2, \ldots, m; \quad A_{pq} = 0 \quad \text{pour } \mu_p = \mu).$$

La solution est unique; car la différence de deux telles solutions est une solution du système (3) telle que

$$z_{pq}(\tau_p) = 0 \qquad (\mu_p \leqq \mu)$$

$$|z_{pq}(t)| \leqq A \sigma_p(t)\omega_p(t, \tau)$$

A étant une constante, et les inégalités (e) entraînent

$$|z_{pq}(t)| \leqq \frac{A}{1+\delta} \sigma_p(t)\omega_p(t, \tau).$$

Pour obtenir les inégalités (e) il suffit que

$$\text{(E)} \qquad (1+\delta)\gamma_p(t) \leqq \bar{\gamma}(t) \qquad (\mu_p = \mu)$$

$$\text{(E')} \qquad (1+\delta)\gamma_p(t) \leqq \underline{\gamma}(t) \qquad (\mu_p = \mu)$$

$$(\mathrm{E}'') \qquad (1+\delta)\left\{\gamma_p(t)+\Lambda_p\sigma_p(t)\right\}+|\sigma_p'(t)|+\sigma_p(t)\overline{\gamma}(t)$$

$$\leqq (\mu_p'(t)-\mu'(t))\,\sigma_p(t) \qquad (\mu_p>\mu)$$

$$(\mathrm{E}''') \qquad (1+\delta)\left\{\gamma_p(t)+\Lambda_p\sigma_p(t)\right\}+|\sigma_p'(t)|+\sigma_p(t)\underline{\gamma}(t)$$

$$\leqq (\mu'(t)-\mu_p'(t))\,\sigma_p(t) \qquad (\mu_p<\mu).$$

Ces conditions remplies, on a

$$(12) \qquad |z_{pq}(t)-z_{pq}^0| \leqq \frac{1}{\delta}\max_{\mu_p\leqq\mu}\left\{\frac{|z_{pq}^0|}{\sigma_p(\tau_p)\omega_p(\tau_p,\tau)}\right\}\sigma_p(t)\omega_p(t,\tau)$$

$$(q=1,2,\ldots\ldots,k_p;\quad p=1,2,\ldots\ldots,m)\,.$$

Les conditions (D) sont des conséquences de (E'''). Nous arrivons ainsi au théorème suivant.

Théorème 16. *Supposons que*

$$\lambda_{pqk}(t)=0 \qquad (\mu_p=\mu)$$

$$\mu_p'(t)=\mu_p+o(1) \qquad (p=1,2,\ldots\ldots,m)$$

$$\mu_p(t)=\mu_q(t) \qquad (\mu_p=\mu_q)$$

$\mu_p(t)$ *ne prenant que des valeurs réelles; et désignons par* $\mu(t)$ *une des fonctions* $\mu_p(t)$ *ou une fonction réelle telles que* $\mu'(t)=\mu+o(1)$, μ *n'étant égal à aucun des nombres* μ_p. *Posons*

$$\tau_p=h,\,\tau,\,+\infty \qquad (h\leqq\tau<+\infty)$$

suivant que $\mu_p<,=,>\mu$. *S'il existe des fonctions* $\gamma_p(t)$, $\sigma_p(t)$, $\overline{\gamma}(t)$, $\underline{\gamma}(t)$ *et des constantes* Λ_p *remplissant les conditions* (*a*), (*b*), (*c*), (*d*), (*e*), *le système différentiel* (*3*) *admet une solution et une seule telle que*

$$z_{pq}(\tau_p)=z_{pq}^0 \qquad (\mu_p\leqq\mu)$$

$$|z_{pq}(t)-z_{pq}^0|=O(\sigma_p(t)\omega_p(t,\tau)) \qquad (p=1,2,\ldots\ldots,n)$$

où les z_{pq}^0 *sont nuls pour* $\mu_p > \mu$ *et des nombres arbitraires pour* $\mu_p \leqq \mu$ *et*

$$\omega_p(t, \tau) = \exp\left\{\mu(t) - \mu_p(t) + \left|\int_\tau^t \gamma(t, \tau)dt\right|\right\}$$

$$\gamma(t, \tau) = \bar{\gamma}(t), \quad \underline{\gamma}(t) \qquad \textit{suivant que} \qquad t >, < \tau .$$

Cette solution satisfait aux inégalités

$$|z_{pq}(t) - z_{pq}^0| \leqq \frac{1}{\delta} \max_{\mu_p \leq \mu} \left\{\frac{|z_{pq}^0|}{\sigma_p(\tau_p)\omega_p(\tau_p, \tau)}\right\} \sigma_p(t)\omega_p(t, \tau) .$$

On peut remplacer les conditions (d), (e) par (E), (E′), (E′′), (E′′′). Si $z_{pq}^0 = 0$ $(\mu_p < \mu)$ *les conditions (d) sont inutiles.*

14. Détermination des fonctions $\bar{\gamma}(t)$, $\underline{\gamma}(t)$, $\gamma_p(t)$ **etc.** Si

$$c_{pqjk}(t) = o(1) ,$$

$$\sum_{k=1}^{q-1} |\lambda_{pqk}(t)| \leqq \Lambda_{pq} \leqq \Lambda_p ,$$

on peut supposer les constantes Λ_p aussi petites que l'on veut, en faisant, s'il est nécessaire, un changement de variables

$$z_{pq} = \varepsilon^{q-1} u_{pq} \qquad (q = 1, 2, \ldots, k_p ; \quad p = 1, 2, \ldots, m) .$$

Nous supposons donc

$$\gamma_p(t) = o(1) \qquad (p = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\Lambda_p < |\mu - \mu_p| \qquad (\mu_p \neq \mu) .$$

Nous déterminons les $\sigma_p(t)$ de manière que, en posant

$$l_p = \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{\gamma_p(t)}{\sigma_p(t)}, \qquad l'_p = \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{|\sigma'_p(t)|}{\sigma_p(t)}$$

on ait

$$l_p + l'_p + \Lambda_p < |\mu - \mu_p| \qquad (\mu_p \neq \mu)$$

puis les fonctions $\bar{\gamma}(t)$, $\underline{\gamma}(t)$ de manière que l'on ait les conditions (E), (E'), (E''), (E''') pour t suffisamment grand. Ceci est évidemment possible si l'on prend la constante δ assez petite.

Cela posé, considérons une solution de (3) telle que

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\log | z_{pq}(t) |}{t} < \min_{\mu_p>\mu} \{\mu_p\} .$$

Si l'on remarque que l'on peut supposer les constantes Λ_p aussi petites que l'on veut, on peut déduire du théorème 10 que cette solution satisfait aux inégalités(19)

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\log | z_{pq}(t) |}{t} \leqq \mu .$$

Nous obtiendrons donc les inégalités

$$| z_{pq}(t) - z_{pq}(\tau_p) | \leqq \frac{1}{\delta} \max_{\mu_p\leq\mu} \left\{\frac{| z_{pq}(\tau_p) |}{\sigma_p(\tau_p)\,\omega_p(\tau_p, \tau)}\right\} \sigma_p(t)\omega_p(t, \tau)$$

pourvu que h soit assez grand.

Un cas particulier important est celui où

$$c_{pqjk}(t) = O(t^{-1}) .$$

Supposons que

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{k_j} | c_{pqjk}(t) | \leqq \frac{B_p}{t} \qquad \begin{pmatrix} q = 1, 2, \ldots, k_p \\ p = 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix}.$$

Prenons les nombres ε_p, B tels que

$$\varepsilon_p B_p < | \mu - \mu_p | - \Lambda_p \qquad (\mu_p \neq \mu),$$

$$B > B_p \qquad (\mu_p = \mu).$$

---

(19) Pour pouvoir appliquer ce théorème, les fonction $\mu_p(t)$ doivent prendre la forme $\mu_p t$. Mais cela importe peu, car le changement de variables $u_p = z_p \exp \{\mu_p(t) - \mu_p t\}$ ramène le système à un système où $\mu_p(t)$ prendraient cette forme.

On peut vérifier sans peine que si l'on prend

$$\sigma_p(t) = \frac{1}{\varepsilon_p t} \qquad (\mu_p \neq \mu)$$

$$\bar{\gamma}(t) = \underline{\gamma}(t) = \frac{B}{t}$$

et si la constante positive δ est assez petite, les conditions (E), (E′), (E″), (E‴) sont remplies pour les valeurs suffisamment grandes de t. On obtient donc le théorème suivant.

Théorème 17. *Si*

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{k_j} | c_{pqjk}(t) | \leqq \frac{B_p}{t}(1+o(1)) \qquad (p=1, 2, \ldots\ldots, m)$$

$$\sum_{k=1}^{q-1} | \lambda_{pqk}(t) | \leqq \Lambda_{pq} \leqq \Lambda_p < | \mu-\mu_p | \qquad (\mu_p \neq \mu)$$

$$\lambda_{pqk}(t) = 0 \qquad (\mu_p = \mu)$$

et si h est assez grand, il existe une solution et une seule telle que

$$z_{pq}(\tau_p) = z_{pq}^0 \qquad (\mu_p \leqq \mu)$$

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \log | z_{pq}(t) | < \min_{\mu_p<\mu} \{\mu_p\}$$

où

$$\tau_p = h,\ \tau,\ +\infty \qquad (h \leqq \tau < +\infty)$$

suivant que $\mu_p <, =, > \mu$ et les $z_{pq}^0(\mu_p \leqq \mu)$ sont des nombres quelconques. Si B est une constante telle que

$$B > B_p \qquad (\mu_p = \mu),$$

cette solution satisfait aux relations

$$e^{\mu_p(t)} | z_{pq}(t) - z_{pq}^0 | = O(t^B e^{\mu(t)}) \qquad (\mu_p = \mu)$$

$$e^{\mu_p(t)} | z_{pq}(t) - z_{pq}^0 | = O(t^{B-1} e^{\mu(t)}) \qquad (\mu_p \neq \mu),$$

où $z_{pq}^0 = 0$ pour $\mu_p < \mu$.

Remarque. Comme nous avons remarqué au numéro 11, les conditions

$$z_{pq}(\tau_p) = z^0_{pq} \qquad (\mu_p \leqq \mu)$$

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log \max_{\mu_p>\mu} \left\{ | z_{pq}(t) | e^{\mu_p(t)} \right\} < \min_{p>\mu} \{\mu_p\}$$

ne détermine qu'une solution. Mais dans ce cas nous pouvons démontrer ce fait sans recourir au système non linéaire. En effet, désignons par

$$z_{pq} = \varphi_{pqjk}(t)$$

la solution de (3) définie par les conditions

$$z_{pq}(h) = \delta_{pqjk} = \begin{cases} 0 & (p \neq j \quad \text{ou} \quad p = j,\ q \neq k) \\ 1 & (p = j,\ q = k) \end{cases}$$

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log \max \left\{ | z_{pq}(t) | e^{\mu_p(t)} \right\} \leqq \mu_j .$$

Alors la solution

$$z_{pq} = \varphi_{pq}(t) \equiv \sum_{\mu_j \leqq \mu} C_{jk} \varphi_{pqjk}(t)$$

où C_{jk} sont des constantes $\left(\sum_{\mu_j = \mu} | C_{jk} | > 0 \right)$ satisfait à la relation

$$\log \max_{\mu_p = \mu} \left\{ | \varphi_{pq}(t) | e^{\mu_p(t)} \right\} = \mu t + o(t) .$$

Par suite si

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log \max_{\mu_p>\mu} \left\{ | z_{pq}(t) | e^{\mu_p(t)} \right\} < \min_{\mu_p>\mu} \{\mu_p\}$$

on a nécessairement

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log \max \left\{ | z_{pq}(t) | e^{\mu_p(t)} \right\} \leqq \mu .$$

15. Inégalités fondamentales. Supposons remplies les condtions (4), (5), (6), (7) et désignons par $z_{pq}=\varphi_{pq}(t)$ la solution de (3) définie par les conditions

$$z_{pq}(\tau_p)=z^0_{pq} \qquad (\mu_p \leqq \mu)$$

$$z_{pq}(t) \leqq (\mu-\mu_p)t+o(t) \qquad (p=1, 2, \ldots, n) .$$

Si les conditions (a), (b), (c), (d), (e) sont remplies, $z_{pq}=\varphi_{pq}(t)$ est la seule solution telle que

$$z_{pq}(s_p)=\varphi_{pq}(s_p) \qquad (\mu_p \leqq \mu)$$

$$z_{pq}(t)-\varphi_{pq}(s_p)=O(\sigma_p(t)\omega_p(t, s))$$

où $s_p=h,\ s,\ +\infty$ $(h \leqq s < +\infty)$ suivant que $\mu_p <, =, > \mu$. Si donc on pose

$$\bar{\gamma}(t)=\underline{\gamma}(t)=\gamma(t)$$

$$M(h, s)=\max_{\mu_p \leq \mu}\left\{\frac{|\varphi_{pq}(s_p)|}{\sigma_p(s_p)\omega_p(s_p, s)}\right\}$$

$$M(t)=\max\left\{|\varphi_{pq}(t)|\, e^{\mu_p(t)}\right\}$$

$$(q=1, 2, \ldots, k_p ; \quad p=1, 2, \ldots, m)$$

$$M_1(t)=\max\left\{|\varphi_{pq}(t)|\, e^{\mu_p(t)}\right\}$$

$$(q=1, 2, \ldots, k_p ; \quad \mu_p=\mu)$$

$$M_2(t)=\max\left\{|\varphi_{pq}(t)|\, e^{\mu_p(t)}\right\}$$

$$(q=1, 2, \ldots, k_p ; \quad \mu_p \neq \mu) ,$$

nous obtenons d'après le théorème 16 les inégalités

$$\text{(I)} \qquad |\varphi_{pq}(t)-\varphi_{pq}(s_p)| \leqq \frac{\sigma_p(t)}{\delta} M(h, s)\omega_p(t, s) .$$

Nous pouvons en déduire, comme au numéro 9, les inégalité suivantes:

$$\text{(II)} \qquad |\varphi_{pq}(t)| \leqq \frac{\delta+\sigma_p(t)}{\delta} M(h, s)\omega_p(t, s) \qquad \begin{pmatrix} q = 1, 2, \ldots, k_p \\ p = 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix}$$

$$\text{(I}'\text{)} \qquad M(t) \leqq \frac{1+\delta}{\delta} M(h, s) \exp\left\{\mu t + \left|\int_s^t \gamma(t)dt\right|\right\}$$

$$\text{(III)} \qquad |\varphi_{pq}(s)-\varphi_{pq}(s_p)|\, e^{\mu_p(s)} \leqq \frac{1}{\delta}\sigma_p(s)M(h, s)\,.$$

Si $z_{pq}(h) = 0$ pour $\mu_p < \mu$, nous obtenons

$$\text{(II}'\text{)} \qquad M_1(t) \geqq \frac{\delta}{1+\delta} M_1(s) \exp\left\{\mu(t-s) - \left|\int_s^t \gamma(t)\,dt\right|\right\}$$

$$\text{(III}'\text{)} \qquad M_2(t) \leqq \frac{\sigma(t)}{\delta} M_1(t) \qquad \left[\sigma(t) = \max_{\mu p \neq \mu}\{\sigma_p(t)\}\right].$$

Ainsi nous obtenons ce théorème.

Théorème 18. *Si les conditions (4), (5), (6), (7) sont remplies et si les $\gamma_p(t)$, $\sigma_p(t)$ etc. satisfont aux conditions (a), (b), (c′), (d), (e), on a les inégalités (I′), (II), (III). Si l'on suppose de plus que $\varphi_p(h) = 0$ pour $\mu_p < \mu$, on obtient (II′), (III′). Et ces inégalités sont toutes des conséquences immédiates des inégalités (I).*

16. Théorèmes de M. Lettenmeyer. Comme nous avons remarqué au début de cette section, les résultats obtenus jusqu'ici nous conduisent très facilement aux théorèmes plus précis que ceux de M. Lettenmeyer. Considérons le système

$$\text{(13)} \qquad \frac{dy_{pq}}{dt} = \sum_{k=1}^{q-1} \lambda_{pqk}(t) y_{pk} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{k_j} b_{pqjk}(t) y_{jk}$$

$$(q = 1, 2, \ldots, k_p;\quad p = 1, 2, \ldots, m)$$

où $b_{pqjk}(t) = o(1)$, $\lambda_{pqq} = \lambda_p$ sont des constantes et $\lambda_{pqk}(t)$ sont des fonctions bornées. Prenons une fonction $\beta(t)$ telle que

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{k_j} | b_{pqjk}(t) | \leqq \beta(t)$$

$$\beta(t) = o(1), \qquad \beta'(t) = O\Big(\beta(t)^{1+\frac{1}{\varkappa}}\Big)$$

où $\varkappa = \max\limits_{\mu_p = \mu} \{k_p\}$ et posons

$$e^{\lambda_p t} z_{pq} = y_{pq} \qquad (\mu_p \neq \mu)$$

$$e^{\lambda_p t} z_{pq} = \beta(t)^{\frac{q-1}{\varkappa}} y_{pq} \qquad (\mu_p = \mu).$$

Nous avons alors

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{dz_{pq}}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{q-1} \lambda_{pqk}(t) z + \sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{k_j} c_{pqjk}(t)\, e^{(\mu_j-\mu_p)t} z_{jk} & (\mu_p \neq \mu) \\[2ex] \dfrac{dz_{pq}}{dt} = \sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{k_j} c_{pqjk}(t)\, e^{(\mu_j-\mu_p)t} z_{jk} & (\mu_p = \mu) \end{cases}$$

où

$$c_{pqjk}(t) = O\Big(\beta(t)^{\frac{1}{\varkappa}}\Big), \qquad \mu_p = \Re(\lambda_p).$$

Nous pouvons prendre

$$\sigma_p(t) = \text{constante}, \qquad \bar{\gamma}(t) = \underline{\gamma}(t) = A\beta(t)^{\frac{1}{\varkappa}},$$

A étant une constante positive assez grande. Nous aurons ainsi

$$\log \max \left\{ | z_{pq}(t) | e^{\mu_p t} \right\} = \mu t + O\Big(\int_h^t \beta(t)^{\frac{1}{\varkappa}} dt \Big)$$

pour la solution de (14) telle que

$$\log \max \left\{ | z_{p\nu}(t) | e^{\mu_p t} \right\} = \mu t + o(t).$$

En remarquant que

$$\log \beta(t) = O\Big(\int_h^t \beta(t)^{\frac{1}{\varkappa}} dt \Big),$$

nous obtenons pour la solution correspondante de (13) la relation

$$\log \max \left\{ | y_{pq}(t) | \right\} = \mu t + O\left(\int_h^t \beta(t)^{\frac{1}{\varkappa}} dt \right).$$

On peut aussi prendre

$$\sigma_p(t) = A\beta(t)^{\frac{1}{\varkappa}}.$$

Nous aurons donc

$$\max_{\mu_p \neq \mu} \left\{ | z_{pq}(t) | e^{\mu_p t} \right\} = O\left(\beta(t)^{\frac{1}{\varkappa}} \max_{\mu_p = \mu} \left\{ | z_{pq}(t) | e^{\mu_p t} \right\} \right).$$

Puisque

$$| z_{pq}(t) | e^{\mu_p t} \leqq | y_{pq}(t) |$$

pour les valeurs assez grandes de t, nous aurons

$$\max_{\mu_p \neq \mu} \left\{ | y_{pq}(t) | \right\} = O\left(\beta(t)^{\frac{1}{\varkappa}} \max_{\mu_p = \mu} \left\{ | y_{pq}(t) | \right\} \right).$$

Supposons maintenant qu'il n'existe qu'un μ_p égal à μ. Dans ce cas nous pouvons prendre

$$\overline{\gamma}(t) = \underline{\gamma}(t) = \beta(t)^{\varepsilon}$$

ou

$$\sigma_p(t) = \beta(t)^{\varepsilon}$$

où ε est une constante positive assez petite et $\beta(t)$ est une fonction telle que

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{k_j} | b_{pqjk}(t) | \leqq \beta(t)$$

$$\beta(t) = O(1), \qquad \beta'(t) = O(\beta(t)).$$

Nous aurons donc

$$\log \max \left\{ | y_{pq}(t) | \right\} = \mu t + O\left(\int_h^t \beta(t)^{\varepsilon} dt \right)$$

$$\max_{\mu_p \neq \mu} \left\{ | y_{pq}(t) | \right\} = O\left(\beta(t)^{\varepsilon} \max_{\mu_p = \mu} \left\{ | y_{pq}(t) | \right\} \right).$$

Posons

$$y_{pq}(t) = y(t) = e^{\lambda_p t} z(t), \qquad z(t) = r(t) e^{i\theta(t)}$$

pour l'indice p tel que $\mu_p = \mu$. De la relation

$$z'(t) = \left[r'(t) + ir(t)\theta'(t) \right] e^{i\theta(t)}$$

on déduit

$$| z'(t) | \geqq | z(t) | \, | \theta'(t) | .$$

Puisque

$$| z'(t) | = \left| \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{k_j} b_{pqjk}(t) e^{(\lambda_j - \lambda_p)t} z_{jk}(t) \right|$$

$$= O(\beta(t) \, | z(t) |)$$

on a

$$| \theta'(t) | \leqq O(\beta(t))$$

ce qui entraîne

$$\theta(t) = O\left(\int_h^t \beta(t) dt \right).$$

D'autre part

$$\log r(t) = O\left(\int_h^t \beta(t)^{\varepsilon} dt \right).$$

Par conséquent

$$\log z(t) = \log \left[y(t) e^{-\lambda_p t} \right] = O\left(\int_h^t \beta(t)^{\varepsilon} dt \right).$$

II.—DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES.

17. Procédé de réduction. Considérons un système différentiel

$$\frac{dx_p}{dt} = t^\alpha \sum_{j=1}^{n} a_{pj}(t) x_j \qquad (p = 1, 2, \ldots\ldots, n) \tag{15}$$

où α est un entier positif ou nul et $a_{pj}(t)$ sont développables asymptotiquement comme il suit :

$$a_{pj}(t) \sim a_{pj} + \frac{a_{pj}^{(1)}}{t} + \ldots\ldots + \frac{a_{pj}^{(k)}}{t^k} + \ldots\ldots \tag{16}$$

Nous supposons distinctes les n racines $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n$ de l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 . \tag{17}$$

Posons

$$\mathfrak{a}_{pj}(t) = a_{pj} + \frac{a_{pj}^{(1)}}{t} + \ldots\ldots + \frac{a_{pj}^{(\alpha+1)}}{t^{\alpha+1}} .$$

Les n racines $\Lambda_p(t)$ de l'équation

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_{11}(t)-\Lambda & \mathfrak{a}_{12}(t) & \ldots\ldots & \mathfrak{a}_{1n}(t) \\ \mathfrak{a}_{21}(t) & \mathfrak{a}_{22}(t)-\Lambda & \ldots\ldots & \mathfrak{a}_{2n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{a}_{n1}(t) & \mathfrak{a}_{n2}(t) & \ldots\ldots & \mathfrak{a}_{nn}(t)-\Lambda \end{vmatrix} = 0$$

sont régulières et prennent les valeurs λ_p pour $t = \infty$. Nous pouvons choisir les fonctions régulières $\mathfrak{p}_{pj}(t)$ de manière que l'on ait

$$\mathfrak{P}(t)^{-1}\mathfrak{A}(t)\mathfrak{P}(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_n(t) \end{pmatrix}$$

en désignant par $\mathfrak{A}(t)$, $\mathfrak{P}(t)$ les matrices formées des $\mathfrak{a}_{pj}(t)$, $\mathfrak{p}_{pj}(t)$ respectivement et par $\mathfrak{P}(t)^{-1}$ la réciproque de $\mathfrak{P}(t)$, et de plus que les éléments de la matrice $\mathfrak{P}(t)^{-1}$ soient aussi des fonctions régulières pour $t = \infty$. Désignons par X, Y, $A(t)$ les matrices

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Si l'on pose

$$X = \mathfrak{P}(t)Y$$

nous obtenons

$$Y' = t^\alpha \mathfrak{P}(t)^{-1}A(t)\mathfrak{P}(t)Y - \mathfrak{P}(t)^{-1}\mathfrak{P}'(t)Y.$$

Les éléments des deux matrices

$$t^\alpha \mathfrak{P}(t)^{-1}(A(t) - \mathfrak{A}(t))\,\mathfrak{P}(t), \qquad \mathfrak{P}(t)^{-1}\mathfrak{P}'(t)$$

sont des fonctions $O(t^{-2})$. Si donc on désigne par $\lambda'_p(t)$ la somme des $\alpha + 1$ premiers termes du développement de $t^\alpha A_p(t)$ au voisinage de $t = \infty$ et par $\frac{\rho_p}{t}$ le terme $(\alpha+2)^{\text{ième}}$, le système différentiel auquel les y_p satisfont prend la forme

$$\text{(18)} \qquad \frac{dy_p}{dt} = \left[\lambda'_p(t) + \frac{\rho_p}{t}\right] y_p + \frac{1}{t^2}\sum_{j=1}^{n} b_{pj}(t) y_j \qquad (p = 1, 2, \dots, n)$$

où $b_{pj}(t)$ sont développables asymptotiquement comme il suit

$$\text{(19)} \qquad b_{pj}(t) \sim b_{pj} + \frac{b_{pj}^{(1)}}{t} + \dots + \frac{b_{pj}^{(k)}}{t^k} + \dots$$

Par le changement de variables

$$(20) \qquad z_p \exp\left\{\lambda_p(t)+i\rho_p'' \log t\right\} = y_p$$

$$\left(\rho_p = \rho_p' + i\rho_p'', \qquad \lambda_p(t) = \int \lambda_p'(t)dt\right)$$

nous obtenons

$$(21) \qquad \frac{dz_p}{dt} = \frac{\rho_p'}{t} z_p + \frac{1}{t^2}\sum_{j=1}^{n} b_{pj}(t) t^{i(\rho_j''-\rho_p'')} e^{\lambda_j(t)-\lambda_p(t)} z_j \quad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

Si l'on prend pour variable indépendante la variable s liée à t par $t^{\alpha+1} = s$ le système prend la forme

$$(22) \qquad \frac{dz_p}{dt} = \sum_{j=1}^{n} c_{pj}(s) e^{\mu_j(s)-\mu_p(s)} z_j \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

où

$$\mu_p(s) = \Re(\lambda_p(t))$$

$$\sum_{j=1}^{n} | c_{pj}(s) | = \frac{|\rho_p'| + o(1)}{(\alpha+1)s}.$$

Cette forme est justement celle que nous avons discutée dans la section précédente.

18. Introduction des équations non homogènes. On peut trouver n séries (convergentes ou non)

$$(23) \qquad y_p \sim t^{\rho_q} e^{\lambda_q(t)} \left\{\beta_{pq} + \frac{\beta_{pq}^{(1)}}{t} + \ldots + \frac{\beta_{pq}^{(k)}}{t^k} + \ldots\right\}$$

$$(p = 1, 2, \ldots, n;\ \beta_{pq} = 0 \text{ ou } 1 \text{ suivant que } p \neq \text{ ou } = q)$$

qui satisfont aux équations formelles

$$\frac{dy_p}{dt} = \left[\lambda_p'(t) + \frac{\rho_p}{t}\right] y_p + \frac{1}{t^2}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{pj}^{(k)}}{t^k}\right) y_j \quad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous voulons démontrer que les n séries (23) donnent les développements asymptotiques d'une solution de (18). Posons

$$\bar{\varphi}_p(t) = t^{\rho_q} e^{\lambda_q(t)} \left\{ \beta_{pq} + \frac{\beta_{pq}^{(1)}}{t} + \dots + \frac{\beta_{pq}^{(k)}}{t^k} \right\}$$

$$t^{\alpha+\rho_q} e^{\lambda_q(t)} b_p(t) = \bar{\varphi}'_p(t) - \left[\lambda'_p(t) + \frac{\rho_p}{t}\right] \bar{\varphi}_p(t)$$

$$- \frac{1}{t^2} \sum_{j=1}^{n} b_{pj}(t) \bar{\varphi}_j(t) .$$

Alors

$$b_p(t) = O(t^{-k-\alpha-2}) \qquad (p = q)$$

$$b_p(t) = O(t^{-k-1}) \qquad (p \neq q)$$

et $y_p = \bar{\varphi}_p(t)$ est une solution du système différentiel

$$\text{(24)} \qquad \frac{dy_p}{dt} = \left[\lambda'_p(t) + \frac{\rho_p}{t}\right] y_p + \frac{1}{t^2} \sum_{j=1}^{n} b_{pj}(t) y_j + t^{\alpha+\rho_q} e^{\lambda_q(t)} b_p(t)$$

$$(p = 1, 2, \dots, n) .$$

Si le système (18) admet une solution $y_p = \varphi_p(t)$ développable asymptotiquement sous la forme (23), $y_p = \bar{\varphi}_p(t) - \varphi_p(t)$ est une solution de (24) telle que $y_p(t) = 0\left(t^{\rho'_q-k-1} e^{\mu_q(t)}\right)$. Le changement de variables

$$y_p = z_p \exp\left\{\lambda_p(t) + i\rho'' \log t\right\} , \qquad t^{\alpha+1} = s$$

ramène le système (24) au système

$$\text{(25)} \qquad \frac{dz_p}{dt} = \sum_{j=1}^{n} c_{pj}(s)\, e^{\mu_j(s) - \mu_p(s)} z_j + c_p(s)\, e^{\mu_q(s) - \mu_p(s)}$$

$$(p = 1, 2, \dots, n)$$

où

$$\mu_p(s) = \Re(\lambda_p(t)) , \qquad \sum_{j=1}^{n} | c_{pj}(s) | = \frac{|\rho'_p| + o(1)}{(\alpha+1)s}$$

$$c_q(s) = O(s^{-\varkappa-1}) , \qquad c_p(s) = O(s^{-\varkappa}) \qquad \left(\varkappa = \frac{-\rho'_q + k + 1}{\alpha+1}\right).$$

Et pour la solution correspondante du système (25) nous obtenons

$$z_p(s)\, e^{\mu_p(s)} = O\left(s^{-\varkappa} e^{\mu_q(s)}\right). \tag{26}$$

Il s'agit donc de démontrer l'existence d'une solution de (25) telle que (26).

Théorème 19. *Si*

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{k_j} | c_{pqjk}(t) | \leqq \frac{C_p}{t} \qquad (p = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

$$\lambda_{pqk}(t) = 0 \qquad (\mu_p = \mu)$$

$$\sum_{k=1}^{q-1} | \lambda_{pqk}(t) | \leqq \Lambda_{pq} \leqq \Lambda_p \qquad (\mu_p \neq \mu)$$

$$| c_{pq}(t) | \leqq \Gamma_p t^{-\varkappa-1} e^{\mu(t)-\mu_p(t)} \qquad (\mu_p = \mu)$$

$$| c_{pq}(t) | \leqq \Gamma_p t^{-\varkappa} e^{\mu(t)-\mu_p(t)} \qquad (\mu_p \neq \mu)$$

$$\varkappa > C_p \qquad (\mu_p = \mu)$$

les équations

$$\frac{dz_{pq}}{dt} = \sum_{k=1}^{q-1} \lambda_{pqk}(t)\, z_{pk} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{k_j} c_{pqjk}(t) e^{\mu_j(t)-\mu_p(t)} z_{jk} + c_{pq}(t) e^{\mu(t)-\mu_p(t)} \tag{27}$$

$$(q = 1, 2, \ldots\ldots, k_p\,; \quad p = 1, 2, \ldots\ldots, m)$$

admettent au moins une solution telle que

$$z_{pq}(t) e^{\mu_p(t)} = O\left(t^{-\varkappa} e^{\mu(t)}\right).$$

Pour démontrer ce théorème, il suffit, d'après le théorème 7, de montrer que si l'on prend la constante C assez grande nous obtenons pour $h \leqq t < +\infty$ les inégalités

$$(28)\qquad \left|\int_{\tau_p}^{t}\left[\left(\Lambda_p+\frac{C_p}{t}\right)C+\Gamma_p\right]t^{-\varkappa}e^{\mu(t)-\mu_p(t)}\,dt\right|\leqq Ct^{-\varkappa}e^{\mu(t)-\mu_p(t)}. \qquad (\mu_p\neq\mu)$$

$$(29)\qquad \left|\int_{\tau_p}^{t}(C_pC+\Gamma_p)t^{-\varkappa-1}\,dt\right|\leqq Ct^{-\varkappa} \qquad (\mu_p=\mu)$$

en posant

$$\tau_p=h,\ +\infty \qquad \text{suivant que}\quad \mu_p<,\ \geqq\mu.$$

Nous pouvons supposer que

$$\Lambda_p+\Gamma_p<|\mu-\mu_p| \qquad (\mu_p\neq\mu)$$

$$C_p<\varkappa \qquad (\mu_p=\mu)$$

en faisant préalablement, s'il est nécessaire, un changement de variables de la forme

$$u_{pq}=\varepsilon^q z_{pq} \qquad (\mu_p\neq\mu)$$

$$u_{pq}=\varepsilon^K z_{pq} \qquad (\mu_p=\mu,\ K=\max_{\mu_p\neq\mu}\{k_p\}+1),$$

où ε est une constante assez petite. Si donc on prend C assez grand, nous obtenons

$$C_pC+\Gamma_p<\varkappa;$$

et les inégalités (28), (29) sont satisfaites pourvu que h soit assez grand.

Du théorème 19 nous pouvons conclure que si $\mu_p\neq\mu_q$ pour $p\neq q$ le système (25) admet une solution telle que (26) pourvu que k soit assez grand. Si l'équation caractéristique (17) a deux ou plusieurs racines dont les parties réelles sont égales, nous pouvons dire seulement que le système (25) admet une solution telle que

$$z_p(s)\,e^{\mu_p(s)}=O\left(s^{-\varkappa+1}e^{\mu_q(s)}\right).$$

Mais cela suffit pour notre but. Car on peut prendre k aussi grand que l'on veut.

19. Développements asymptotiques des solutions. Nous avons montré au numéro précédent qu'à chaque racine λ_q de l'équation caractéristique (17) correspond au moins une solution de (18) telle que

$$y_p = \varphi_{pq}(t) = (\beta_{pq} + o(1))\, t^{\rho_q} e^{\lambda_q(t)} .$$

Les n nombres λ_p étant différents l'un de l'autre, les n solutions ainsi obtenues sont linéairement indépendantes et une solution quelconque de (18) telle que

$$y_p(t) = (\beta_{pq} + o(1))\, t^{\rho_q} e^{\lambda_q(t)}$$

est nécessairement de la forme

$$y_p = \varphi_{pq}(t) + \sum_{\mu_j < \mu_q} C_j \varphi_{pj}(t) .$$

Or, nous avons montré qu'il existe une solution telle que

$$y_p(t) = \left(\beta_{pq} + \frac{\beta_{pq}^{(1)}}{t} + \dots + \frac{\beta_{pq}^{(k)}}{t^k} k + O\left(\frac{1}{t^{k+1}}\right)\right) t^{\rho_q} e^{\lambda_q(t)} .$$

On devra donc avoir

$$\varphi_{pq}(t) = \left(\beta_{pq} + \frac{\beta_{pq}^{(1)}}{t} + \dots + \frac{\beta_{pq}^{(k)}}{t^k} + O\left(\frac{1}{t^{k+1}}\right)\right) t^{\rho_q} e^{\lambda_q(t)} .$$

k étant un éntier positif quelconque, la solution $y_p = \varphi_{pq}(t)$ est développable asymptotiquement sous la forme (23).

Théorème 20. *Si les $a_{pj}(t)$ sont développables asymptotiquement sous la forme (26) et si l'équation caractéristique (17) admet des n racines distinctes, toute solution des équations (15) est développable asymptotiquement sous la forme*

$$y_p \sim t^{\rho} e^{\lambda(t)} \left\{\beta_p + \frac{\beta_p^{(1)}}{t} + \dots + \frac{\beta_p^{(k)}}{t^k} + \dots\right\}$$

ρ étant uue constante, $\lambda(t)$ un polynome de degré $\alpha+1$. Les séries formelles, les développements asymptotiques d'une solution de (15), satisfont formellement aux équations différentielles (15).

III.—STABILITÉ

20. Quelques propositions préliminaires. Avant d'aller plus loin établissons quelques propositions préliminaires.

Lemme 1. *Si l'intégrale*

$$\int_h^\infty t^\alpha \varphi(t)dt \qquad (\alpha \text{ constante positive}) \tag{30}$$

a une valeur finie, on a

$$t^\alpha \int_t^\infty \varphi(t)dt = o(1) \tag{31}$$

$$\int_t^\infty u^{\alpha-1} \int_u^\infty \varphi(s)dsdu = o(1)\,. \tag{32}$$

En effet, de l'égalité

$$\int_h^k \varphi(t)dt = \frac{1}{k^\alpha}\int_h^k t^\alpha\varphi(t)dt + \alpha\int_h^k \frac{dt}{t^{\alpha+1}}\int_h^t t^\alpha\varphi(t)dt$$

on déduit, en faisant $k \to +\infty$,

$$\int_h^\infty \varphi(t)dt = \alpha\int_h^\infty \frac{dt}{t^{\alpha+1}}\int_h^t t^\alpha\varphi(t)dt\,.$$

Puisque

$$\int_t^\infty t^\alpha\varphi(t)dt = o(1)\,,$$

on a

$$\left| \int_t^\infty t^\alpha \varphi(t)dt \right| \leqq F(h), \qquad F(t) = o(1).$$

Donc

$$\left| \int_h^\infty \varphi(t)dt \right| \leqq \frac{F(h)}{h^\alpha}$$

ce qui démontre (31). D'autre part,

$$\int_h^k t^{\alpha-1} \int_t^\infty \varphi(t)dt = \left[\frac{t^\alpha}{\alpha} \int_t^\infty \varphi(t)dt \right]_h^k + \frac{1}{\alpha} \int_h^k t^\alpha \varphi(t)dt.$$

En faisant $k \to +\infty$, nous obtenons

$$\int_h^\infty t^{\alpha-1} \int_t^\infty \varphi(t)dt = \frac{h^\alpha}{\alpha} \int_h^\infty \varphi(t)dt + \frac{1}{\alpha} \int_h^\infty t^\alpha \varphi(t)dt,$$

ce qui démontre (32).

Du lemme 1 résulte immédiatement le suivant.

Lemme 2. *Soit*

$$\int_h^t t^{n-1} f(t)dt = O(1).$$

Si $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = N \leqq n$, *on a*

$$\text{(33)} \qquad \int_t^\infty t_m^{\alpha_m - 1} dt_m \int_{t_m}^\infty \dots \int_{t_2}^\infty t_1^{\alpha_1 - 1} f(t_1)dt_1 = o(t^{n-N}).$$

Si $f(t) \geqq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{l-1} \leqq n < \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_l$, *on a*

$$\text{(34)} \qquad \int_h^t t_m^{\alpha_m - 1} dt_m \int_h^{t_m} \dots \int_h^{t_{l+1}} t_l^{\alpha_l - 1} dt_l \int_{t_l}^\infty \dots \int_{t_2}^\infty t_1^{\alpha_1 - 1} f(t_1)dt_1 = o(t^{N-n}).$$

En effet, posons

$$N_j = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_j$$

$$f_j(t) = \int_t^\infty t_j^{\alpha_j - 1} dt_j \int_{t_j}^\infty \dots \int_{t_2}^\infty t_1^{\alpha_1 - 1} f(t_1) dt_1 .$$

Puisque l'on a

$$\int_h^t t^{n-\alpha_1} \varphi(t) dt = O(1)$$

en posant

$$\varphi(t) = t^{\alpha_1 - 1} f(t) ,$$

le lemme 1 montre que

$$t^{n-\alpha_1} \int_t^\infty \varphi(t) dt = o(1) , \qquad \int_t^\infty t_2^{n-\alpha_1-1} \int_{t_2}^\infty \varphi(t_1) dt_1 dt_2 = o(1)$$

c'est-à-dire

$$t^{n-N_1} f_1(t) = o(1) , \qquad \int_t^\infty t^{n-N_1-1} f_1(t) dt = o(1) .$$

Supposons donc que l'on ait

$$t^{n-N_j} f_j(t) = o(1) , \qquad \int_t^\infty t^{n-N_j-1} f_j(t) dt = o(1) . \tag{35}$$

Si l'on pose

$$\varphi(t) = t^{\alpha_{j+1}-1} f_j(t)$$

on a

$$\int_t^\infty t^{n-N_{j+1}} \varphi(t) dt = o(1) ,$$

par suite, d'après le lemme 1, on a

$$t^{n-N_{j+1}}\int_t^\infty \varphi(t)dt = o(1)\,, \qquad \int_t^\infty t^{n-N_{j+1}-1}dt\int_t^\infty \varphi(t)dt = o(1)\,,$$

c'est-à-dire

$$t^{n-N_{j+1}}f_{j+1}(t) = o(1)\,, \qquad \int_t^\infty t^{n-N_{j+1}-1}f_{j+1}(t)dt = o(1)\,.$$

Les formules (35) sont donc vraies pour $j=1,\ 2,\ \ldots.,\ m$. Nous obtenons en particulier

$$t^{n-N_m}f_m(t) = o(1)$$

qui n'est autre que la formule (33).

Pour démontrer la formule (34) nous remarquons que si l'on pose

$$\varphi(t) = \int_t^\infty t_{l-1}^{\alpha_{l-1}-1}\,dt_{l-1}\int_{t_{l-1}}^\infty\ldots.\int_{t_2}^\infty t_1^{\alpha_1-1}f(t_1)dt_1$$

$$N_j = \alpha_1+\alpha_2+\ldots.+\alpha_j \qquad (j=1,2,\ldots.,m)$$

on a

$$\int_t^\infty t^{n-N_{l-1}-1}\varphi(t)dt = o(1)$$

comme nous avons vu tout à l'heure. Nous avons donc

$$\left|\int_h^t t^{\alpha_l-1}\varphi(t)dt\right| \leqq t^{N_l-n}\int_H^t t^{n-N_{l-1}-1}\varphi(t)dt + O(1)$$

le nombre H pouvant être supposé aussi grand que l'on veut. On aura donc

$$\int_h^t t^{\alpha_l-1}\varphi(t)dt = o\left(t^{N_l-n}\right).$$

Par suite, suppsons que l'on ait

$$(36) \qquad f_j(t) = o\left(t^{N_j-n}\right)$$

en posant

$$f_k(t) = \int_h^t t_k^{\alpha_k-1} dt_k \int_h^{t_k} \cdots\cdots \int_h^{t_{l+1}} t_l^{\alpha_l-1} \varphi(t_l) dt_l$$

$$(k = l+1, l+2, \ldots\ldots, m) .$$

On aura alors

$$f_{j+1}(t) = \int_h^t o\left(t^{N_{j+1}-n-1}\right) dt = o\left(t^{N_{j+1}-n}\right) .$$

La formule (36) est donc vraie pour $j = l+1,\ l+2,\ \ldots\ldots,\ m.$ Nous aurons donc en particulier la formule (34), en faisant $j = m$.

21. Généralisations d'un théorème de MM. Späth-Peyovitch. Revenons aux équations différentielles

$$(37) \qquad \frac{dz_{pq}}{dt} = \sum_{k=1}^{q-1} \lambda_{pqk}(t) z_{pk} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{k_j} c_{pqjk}(t) e^{\mu_j(t)-\mu_p(t)} z_{jk} + c_{pq}(t) e^{\mu(t)-\mu_p(t)}$$

$$(q = 1, 2, \ldots\ldots, k_p\,; \quad p = 1, 2, \ldots\ldots, m) .$$

Soit Γ une constante positive et définissons les fonctions $\Gamma_{pq}(t)$ par

$$\Gamma_{pq}(t) = \Gamma \qquad\qquad (\mu_p \neq \mu)$$

$$\Gamma_{pq}(t) = \left| \int_{\tau_{pq}}^t \left\{ \sum_{k=1}^{q-1} \Lambda_{pqk} t^{q-k-1} \Gamma_{pk}(t) + \sum_{\mu_j \neq \mu} | c_{pqjk}(t) | \, \Gamma \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{\mu_j = \mu} | c_{pqjk}(t) | \, t^{k-k_j+r} + | c_{pq}(t) | \right\} dt \right| \qquad (\mu_p = \mu)$$

où

$$\tau_{pq} = \begin{cases} h & (\mu_p < \mu \quad \text{ou} \quad \mu_p = \mu,\ k_p - q < r) \\ +\infty & (\mu_p > \mu \quad \text{ou} \quad \mu_p = \mu,\ k_p - q \geqq r) . \end{cases}$$

D'après le lemme 2, si

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_t^\infty |\, c_{pq}(t)\,|\, t^{k_p-q-r}\, dt = o(1) & (\mu_p = \mu) \\ \displaystyle\int_t^\infty |\, c_{pqjk}(t)\,|\, t^{k-k_j+k_p-q}\, dt = o(1) & (\mu_p = \mu, \quad \mu_j = \mu) \\ \displaystyle\int_t^\infty |\, c_{pqjk}(t)\,|\, t^{k_p-q-r}\, dt = o(1) & (\mu_p = \mu, \quad \mu_j \neq \mu) \end{cases}$$

les relations

$$\int_t^{\tau_{pq}} \Gamma_{pq}(t) t^{k_p-q-r-1}\, dt = o(1)$$

$$(39)\qquad \Gamma_{pq}(t) = o\left(t^{q-k_p+r}\right) \qquad \begin{pmatrix} \mu_p = \mu \\ q = 1, 2, \ldots, k_p \end{pmatrix}$$

sont satisfaites pour $q=1$, par suite nous verrons de proche en proche les relations satisfaites pour $q = 2, 3, \ldots, k_p$. Nous supposons de plus que

$$(\beta)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\tau_{pq}}^t |\, c_{pqjk}(t)\,|\, t^{j-k_j+r} e^{\mu(t)-\mu_j(t)}\, dt = o\left(e^{\mu(t)-\mu_j(t)}\right) & (\mu_p \neq \mu, \ \mu_j = \mu) \\ \displaystyle\int_{\tau_{pq}}^t |\, c_{pqjk}(t)\,|\, e^{\mu(t)-\mu_j(t)}\, dt = o\left(e^{\mu(t)-\mu_j(t)}\right) & (\mu_p \neq \mu, \ \mu_j \neq \mu) \\ \displaystyle\int_{\tau_{pq}}^t |\, c_{pq}(t)\,|\, e^{\mu(t)-\mu_j(t)}\, dt = o\left(e^{\mu(t)-\mu_j(t)}\right) & (\mu_p \neq \mu) \end{cases}$$

$$(\gamma)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{q-1} |\, \lambda_{pqk}(t)\,| \leqq \Lambda_{pq} < |\, \mu - \mu_p\,| & (\mu_p \neq \mu) \\ |\, \lambda_{pqk}(t)\,| \leqq \Lambda_{pqk} t^{q-k-1} & (\mu_p = \mu)\,. \end{cases}$$

Pour démontrer, dans ces hypothèses, qu'il existe une solution de (37) telle que

$$(40)\qquad \begin{cases} z_{pq}(h) = 0 & (\mu_p < \mu \quad \text{ou} \quad \mu_p = \mu, \ k_p - q < r) \\ |\, z_{pq}(t)\,| \leqq \Gamma_{pq}(t) e^{\mu(t)-\mu_p(t)} & \end{cases}$$

il suffit de montrer que l'on a

$$\left| \int_{\tau_{pq}}^{t} \left\{ \sum_{k=1}^{q-1} |\lambda_{pqk}(t)|\, \Gamma_{pk}(t) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{k_j} |c_{pqjk}(t)|\, \Gamma_{jk}(t) + |c_{pq}(t)| \right\} e^{\mu(t)-\mu_p(t)}\, dt \right| \leqq \Gamma_{pq}(t)\, e^{\mu(t)-\mu_p(t)} .$$

Si h est assez grand, ces inégalités sont satisfaites grâce aux relations (39), (β) et (γ). Cette solution satisfait aux conditions

$$(41) \qquad \begin{cases} z_{pq}(h) = 0 & (\mu_p < \mu \quad \text{ou} \quad \mu_p = \mu,\ k_p - q < r) \\ z_{pq}(t) = o\left(t^{q-k_p+r}\right) & (\mu_p = \mu) \\ z_{pq}(t) = o\left(e^{\mu(t)-\mu_p(t)}\right) & (\mu_p \neq \mu) . \end{cases}$$

Réciproquement si ces conditions sont satisfaites, en intégrant les relations (37) nous obtenons

$$z_{pq}(t) = O\left(\Gamma_{pq}(t)\, e^{\mu(t)-\mu_p(t)}\right)$$

$$z_{pq}(h) = 0 \qquad (\mu_p < \mu \quad \text{ou} \quad \mu_p = \mu,\ k_p - q < r) .$$

L'unicité d'une telle solution se démontre facilement, car il suffiit de montrer que

$$\left| \int_{\tau_{pq}}^{t} \left\{ \sum_{k=1}^{q-1} |\lambda_{pqk}(t)|\, \Gamma_{pk}(t) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{k_j} |c_{pqjk}(t)|\, \Gamma_{jk}(t) \right\} e^{\mu(t)-\mu_p(t)} dt \right|$$
$$\leqq \sigma \Gamma_{pq}(t) e^{\mu(t)-\mu_p(t)} ,$$

σ étant un nombre positif moindre que l'unité.

Nous pouvons de même démontrer par la méthode souvent utilisée que le système différentiel homogène

$$(42) \qquad \frac{dz_{pq}}{dt} = \sum_{k=1}^{q-1} \lambda_{pqk}(t) z_k + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{k_j} c_{pqjk}(t) e^{\mu_j(t)-\mu_p(t)} z_{jk}$$
$$(q = 1, 2, \ldots, k_p;\quad p = 1, 2, \ldots, m)$$

admet une solution et une seule telle que

$$(43) \qquad \begin{cases} z_{pq}(h) = z^0_{pq} & (\mu_p < \mu \quad \text{ou} \quad \mu_p = \mu, \ k_p - q < r) \\ z_{pq}(t) = o\left(e^{\mu(t)-\mu_p(t)}\right) & (\mu_p \neq \mu) \\ z_{pq}(t) = o\left(t^{q-k_p+r}\right) & (\mu_p = \mu) \,. \end{cases}$$

Nous pouvons aussi le démontrer comme application des résultats obtenus tout à l'heure. En effet, si l'on pose

$$z_{pq} = \max_{\mu p \leq \mu} \left\{ | z^0_{pq} | \right\} e^{Ah} u_{pq} + z^0_{pq} \, e^{-A(t-h)}$$

les z^0_{pq} étant nuls pour $\mu_p > \mu$ ou $\mu_p = \mu$, $k_p - q \geqq r$, les u satisfont au système différentiel de la forme

$$(44) \qquad \frac{du_{pq}}{dt} = \sum_{k=1}^{q-1} \lambda_{pqk}(t) u_{pk} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{k_j} c_{pqjk}(t) \, e^{\mu_j(t)-\mu_p(t)} u_{jk} + c_{pq}(t) e^{\mu(t)-\mu_p(t)}$$

$$(q = 1, 2, \ldots, k_p ; \quad p = 1, 2, \ldots, m) \,.$$

Si A est une constante positive assez grande, on aura

$$| c_{pq}(t) | < B e^{-\varepsilon t}$$

ε et B étant des constantes positives indépendantes de h et de z^0_{pq}. Si donc h est suffisamment grand le système (44) admet une solution et une seule telle que

$$(45) \qquad \begin{cases} u_{pq}(h) = 0 & (\mu_p < \mu \quad \text{ou} \quad \mu_p = \mu, \ k_p - q < r) \\ u_{pq}(t) = o\left(e^{\mu(t)-\mu_p(t)}\right) & (\mu_p \neq \mu) \\ u_{pq}(t) = o\left(t^{q-k_p+r}\right) & (\mu_p = \mu) \,. \end{cases}$$

A la solution de (44) telle que (45) correspond une solution de (42) telle que (43) et réciproquement. En additionnant la solution de (42) telle que (43) à la solution de (37) telle que (41) nous obtenons une solution de (37) telle que (43).

Théorème 21. *Si les conditions* (α), (β) *et* (γ) *sont satisfaites et si* h *est assez grand le système différentiel* (37) *admet une solution et une seule telle que* (43), *les* z^0_{pq} *étant des constantes quelconques.*

Considérons maintenant les équations différentielles

$$\frac{dx_p}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{pj}(t)x_j + a_p(t)e^{\mu t} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)\,, \tag{46}$$

où nous suppsons

$$(\alpha_1) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_h^t |\, a_{pq}(t) - a_{pq} \,|\, t^{d-1} dt = O(1) \\ \displaystyle\int_h^t |\, a_p(t) \,|\, t^{d-1} dt = O(1) \end{cases}$$

$$\int_{\tau_j}^t |\, a_{pq}(t) - a_{pq} \,|\, t^r e^{(\mu-\mu_j)t}\, dt = o\left(e^{(\mu-\mu_j)t}\right)$$

$$\int_{\tau_j} |\, a_p(t) \,|\, t^r e^{(\mu-\mu_j)t}\, dt = o\left(e^{(\mu-\mu_j)t}\right)$$

($\tau_j = h$ on $+\infty$ suivant que $\mu_j <$ on $\geqq \mu$). Une transformation linéaire à coefficients constants le ramènerai à la forme

$$\frac{dy_{pq}}{dt} = \sum_{k=1}^{q} \lambda_{pqk} y_{pk} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{k_j} b_{pqjk}(t) y_{jk} + b_{pq}(t)e^{\mu t} \tag{47}$$

$$(q = 1, 2, \ldots, k_p\,; \quad p = 1, 2, \ldots, m)$$

où

$$\lambda_{pqq} = \lambda_p$$

$$(\alpha_2) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_h^t |\, b_{pqjk}(t) \,|\, t^{d-1} dt = O(1) \\ \displaystyle\int_h^t |\, b_{pq}(t) \,|\, t^{d-1} dt = O(1) \end{cases}$$

$$(\beta_2) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\tau_p}^{t} | b_{pqjk}(t) | t^r e^{(\mu-\mu_p)t} dt = o\left(e^{(\mu-\mu_p)t}\right) \\ \displaystyle\int_{\tau_p}^{t} | b_{pq}(t) | t^r e^{(\mu-\mu_p)t} dt = o\left(e^{(\mu-\mu_p)t}\right) \end{cases}$$

les constantes $\lambda_{pqk}(q \neq k)$ pouvant être supposées aussi petites que l'on veut. Les $\lambda_{pqq}(q = 1, 2, \ldots, k_p;\ p = 1, 2, \ldots, m)$ sont les n racines de l'équation caractéristique

$$(48) \qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Nous considérons donc le système (41) au lieu du système (46), en supposant que

$$\mu_p = \Re(\lambda_p) , \qquad d = \max_{p=1}^{m}\{k_p\} .$$

Si l'on pose

$$y_{pq} = e^{\lambda_p t} z_{pq}$$

on a

$$\frac{dz_{pq}}{dt} = \sum_{k=1}^{q-1} \lambda_{pqk} z_{pk} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{k_j} c_{pqjk}(t) e^{(\mu_j-\mu_p)t} z_{jk} + c_{pq}(t) e^{(\mu-\mu_j)t}$$

$$(q = 1, 2, \ldots, k_p ; \quad p = 1, 2, \ldots, m)$$

où

$$| c_{pqjk}(t) | = | b_{pqjk}(t) | , \qquad | c_{pq}(t) | = | b_{pq}(t) | .$$

Définissons les polynomes $P_{pq}(t)$ par

$$(49) \qquad \begin{cases} P_{p1}(t) = z_{p1}^0 \\ P_{pq}(t) = z_{pq}^0 + \displaystyle\int_0^t \sum_{k=1}^{q-1} \lambda_{pqk} P_{pk}(t) dt . \end{cases}$$

Si $z_{pq}^0 = 0(k_p - q > r)$, $P_{pq}(t)$ est un polynome de t de degré au plus égal à $r+q-k_p$. Supposons que l'on ait

$$\frac{du_{pq}}{dt} = \sum_{k=1}^{q-1} \lambda_{pqk} u_{pk} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{k_j} c_{pqjk}(t) e^{(\mu_j - \mu_p)t} u_{jk} + d_{pq}(t) e^{(\mu - \mu_p)t}$$

$$(q = 1, 2, \ldots\ldots, k_p;\quad p = 1, 2, \ldots\ldots, m)$$

en posant

$$z_{pq} = u_{pq}, \qquad (\mu_p \neq \mu \quad \text{ou} \quad \mu_p = \mu,\ q < k_p - r)$$

$$z_{pq} = u_{pq} + P_{pq}(t) \qquad (\mu_p = \mu,\ q \geqq k_p - r).$$

On aura alors

$$d_{pq}(t) = c_{pq}(t) + \sum_{\mu_j = \mu} c_{pqjk}(t) P_{jk}(t).$$

Puisque

$$\int_t^\infty |\, c_{pqjk}(t)\,|\,|\, P_{jk}(t)\,|\, t^{d-1-q+k_p-r}\, dt = o(1)$$

$$\int_{\tau_p}^t |\, c_{pqjk}(t)\,|\,|\, P_{jk}(t)\,|^{k_p - q} e^{(\mu - \mu_p)t}\, dt = o\left(e^{(\mu - \mu_p)t}\right) \quad (\mu_p \neq \mu)$$

on a

$$\int_t^\infty |\, d_{pq}(t)\,|\, t^{d-r-1}\, dt = o(1)$$

$$\int_{\tau_p}^t |\, d_{pq}(t)\,|\, e^{(\mu - \mu_p)t}\, dt = o\left(e^{(\mu - \mu_p)t}\right) \qquad (\mu_p \neq \mu).$$

Les conditions (α), (β) sont donc évidemment remplies. Nous arrivons ainsi au théorème suivant.

Théorème 22. *Si les conditions* (α_2), (β_2) *sont remplies et si* h *est assez grand, le système différentiel* (47) *admet une solution et une seule telle que*

$$(50)\quad \begin{cases} y_{pq}(h) = y^0_{pq} & (\mu_p < \mu \quad ou \quad \mu_p = \mu,\ k_p - q < r) \\ y_{pq}(t) = o(e^{\mu t}) & (\mu_p \neq \mu) \\ y_{pq}(t) - P_{pq}(t) e^{\mu t} = o\left(t^{q-k_p+r} e^{\mu t}\right) & (\mu_p = \mu)\,, \end{cases}$$

$P_{pq}(t)$ *étant les polynomes définis par les formules* (49) *où* $z^0_{pq} = 0$ *pour* $k_p - q \geqq r$ *et* $y^0_{pq} = z^0_{pq} e^{\mu h}$ *pour* $k_p - q < r$. *Les conditions* (β_2) *peuvent être remplacées par les suivantes :*

$$b_{pqjk}(t) = o(t^{-r})$$
$$b_{pq}(t) = o(t^{-r})\,.$$

Si l'on suppose

$$d = 1\,, \quad r = 0\,,$$

nous retrouvons un théorème de M. SPÄTH[20] généralisé au système différentiel par M. PEYOVITCH[21].

22. Conditions pour la stabilité. Les résultats obtenus jusqu'ici s'appliquent à la recherche des conditions pour la stabilité. Par exemple,

Théorème 24. *Supposons que*

$$\lim_{t \to +\infty} a_{pj}(t) = a_{pj}$$

et que les racines de l'équation caractéristique (48) *sont toutes à partie réelle négative ou nulle. S'il existe des racines à partie réelle nulle, nous les supposons simples et que*

---

(20) Math. Zeits. 30.
(21) Publications math. Univ. Belgrade, 1 (1932).

$$\int_h^t |a_{pj}(t)-a_{pj}|\,dt = O(1)\,.$$

Alors la solution $x_p \equiv 0$ *du système différentiel (46) est stable.*

Citons un autre exemple.

Théorème 25. *Supposons que*

$$\lim_{t\to+\infty} a_{pj}(t) = a_{pj}$$

et qu'il existe des fonctions $A_{pj}(t)$ *telles que*

$$\int_h^t |a_{pj}(t)-A_{pj}(t)|\,dt = O(1) \tag{51}$$

$$\int_h^t |A'_{pj}(t)|\,dt = O(1)\,, \tag{52}$$

$$A_{pj}(t)-a_{pj}(t) = o(1) \tag{53}$$

$$A'_{pj}(t) = o(1)\,. \tag{54}$$

Si les racines de l'équation caractéristique (48) sont toutes différentes l'une de l'autre, non nulle, et à partie réelle négative ou nulle la solution $x_p \equiv 0$ *du système différentiel (46) est stable.*

Pour le démontrer, désignons par $\mathfrak{A}(t)$, $\overline{\mathfrak{A}}(t)$ les matrices formées des éléments $A_{pj}(t)$, $a_{pj}(t)-A_{pj}(t)$, et écrivons le système différentiel sous la forme

$$X' = (\mathfrak{A}(t)+\overline{\mathfrak{A}}(t))X\,.$$

En faisant le changement de variables

$$X = P(t)Y$$

nous obtenons

$$Y' = \{A(t)+B(t)\}\,Y$$

où

$$\Lambda(t) = P(t)^{-1}\mathfrak{A}(t)P(t)\,,$$

$$B(t) = P(t)^{-1}P'(t) + P(t)^{-1}\overline{\mathfrak{A}}(t)P(t)\,.$$

En désignant par $\Lambda_p(t)$ les n racines de l'équation

$$|\,\mathfrak{A}(t) - \Lambda E\,| = 0\,,$$

nous pouvons choisir la matrice $P(t)$ de manière que

$$\Lambda(t) = \begin{pmatrix} \Lambda_1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Lambda_2(t) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Lambda_n(t) \end{pmatrix}$$

et que les éléments de $P(t)$ et $P(t)^{-1}$ possèdent des limites déterminées et finies pour $t \to +\infty$. Ecrivons le système différentiel sous la forme

$$\frac{dy_p}{dt} = \Lambda_p(t)y_p + \sum_{j=1}^{n} b_{pj}(t)y_j \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

et faisons le changement de variables

$$y_p = e^{\lambda_p(t)}z_p \qquad \left(\lambda_p(t) = \int \Lambda_p(t)dt\,;\quad p = 1, 2, \ldots, n\right).$$

Pour que l'on puisse appliquer le théorème 21 il suffit que

$$\int_h^t |\,b_{pj}(t)\,|\,dt = O(1)\,, \qquad b_{pj}(t) = o(1)\,.$$

Désignons par $\overline{b}_{pj}(t)$, $\overline{\overline{b}}_{pj}(t)$ les éléments des matrices $P(t)^{-1}P'(t)$, $P(t)^{-1}\overline{\mathfrak{A}}(t)P(t)$. Puisque les éléments des matrices $P(t)$, $P(t)^{-1}$ sont bornés les hypothèses (51), (53) entraînent respectivement

$$\int_h^t |\bar{\bar{b}}_{pj}(t)|\, dt = O(1)\,, \qquad \bar{\bar{b}}_{pj}(t) = o(1)\,.$$

Si l'on pose

$$F(t, \Lambda) = |\mathfrak{A}(t) - \Lambda E|\,,$$

$F'_\Lambda(t, \Lambda)$ a une valeur différente de zéro pour $t = +\infty$, $\Lambda = \lambda_p$, λ_p étant une racine de l'équation caractéristique (48), car cette équation (48) n'admet pas de racines multiples. Les hypothèses (52), (54) entraînent donc

$$\int_h^t |\Lambda'_p(t)|\, dt = O(1)\,, \qquad \Lambda'_p(t) = o(1)\,.$$

On en verra sans peine que l'on peut déterminer $P(t)$ de manière que l'on ait

$$\int_h^t |\bar{b}_{pj}(t)|\, dt = O(1)\,, \qquad \bar{b}_{pi}(t) = o(1)\,.$$

Le théorème est donc établi.

En appliquant ce théorème à l'équation différentielle

$$y'' + f(t)y = 0 \qquad (\lim_{t\to+\infty} f(t) = a^2 > 0)$$

nous retrouvons un critérium pour la stabilité qui a été signalé par M. NAGUMO et moi[22]. Ce critérium a été étendu à l'équation

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t)$$

par M. SATÔ[23].

(22) M. NAGUMO et M. FUKUHARA, Sur la stabilité des intégrales d'un système d'équations différentielles, Proc. Imp. Acad., 6 (1930). Voir aussi 福原, 常微分方程式論 (岩波講座) 174頁,

(23) Ce mémoir paraîtra prochainement dans le Japanese Journal of Mathematics.

ADDENDA

Pour arriver à l'inégalité (II') du chapitre II il n'est nullement nécessaire que l'on suppose $\varphi_p(h)=0$ pour $\mu_p<\mu$. Il est évident qu'il suffit de supposer

$$M(h,\ t)e^{\mu t}=M_1(t)\,. \tag{1}$$

Considérons en particulier le cas où $\sigma(t)$, $\delta(t)$ sont des constantes σ, δ. Si l'on a

$$M(h,s)=\frac{|\varphi_q(s_q)|}{\omega_q(s_q,\ s)}=|\varphi_q(h)|\exp\left\{(\mu_q-\mu)h-\int_h^s\gamma(t)dt\right\}$$

pour une valeur de s plus grande que h et un indice q tel que $\mu_q<\mu$, les inégalités (II) deviendront

$$|\varphi_p(h)|\,e^{\mu_p h}\leqq\frac{\sigma+\delta}{\delta}|\varphi_q(h)|\,e^{\mu_q h}$$

pour $t=h$. On aura donc l'inégalité

$$M_1(h)\leqq\frac{\sigma+\delta}{\delta}|\varphi_q(h)|\,e^{\mu_q h}$$

qui ne dépend pas de s. Cela nous conduit à cette conclusion : *si*

$$|\varphi_q(h)|\,e^{\mu_q(h)}<\frac{\delta}{\sigma+\delta}M_1(h) \qquad (\mu_q<\mu), \tag{2}$$

on a (1) *pour* $h\leqq t<+\infty$. Par suite la seconde inégalité fondamentale

$$M_1(t)\leqq\frac{\sigma+\delta}{\delta}M_1(s)\exp\left\{\mu(t-s)+\left|\int_t^s\gamma(t)dt\right|\right\}$$

subsiste encore. Puisque l'on peut supposer

$$\gamma(t) = \mu' t + o(t) ,$$

on a

$$(3) \qquad (\mu-\mu')t+o(t) \leqq \log M_1(t) \leqq (\mu+\mu')t+o(t) .$$

Par conséquent, *si les inégalités* (2) *sont satisfaites, on obtient les inégalités* (3).

Naturellement on peut faire une remarque analogue relativement à la seconde inégalité fondamentale (II′) du chapitre III.