J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
7 (1972) 67-95

SUR LA STRUCTURE DES EQUATIONS DE LIE: II. EQUATIONS FORMELLEMENT TRANSITIVES

HUBERT GOLDSCHMIDT

3. Connexions dans le fibré tangent

Si E est un fibré vectoriel sur X, une dérivée covariante ∇ dans E est un opérateur différentiel

$$\nabla : \mathscr{E} \to \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{E}$$

tel que

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s \,, \qquad \text{pour } f \in \mathscr{O}_X,\ s \in \mathscr{E} \,.$$

On pose $\nabla_{\tilde{\xi}} s = \tilde{\xi} \barwedge \nabla s$, pour $\tilde{\xi} \in \mathscr{T}$, $s \in \mathscr{E}$ et on étend ∇ en une dérivation $\nabla : \wedge \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{E} \to \wedge \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{E}$ par la formule

$$\nabla(\alpha \wedge u) = d\alpha \wedge u + (-1)^p \alpha \wedge \nabla u$$

pour $\alpha \in \wedge^p \mathscr{T}^*$, $u \in \wedge \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{E}$. On vérifie que

$$(3.1) \qquad \langle \tilde{\xi} \wedge \tilde{\eta}, \nabla u \rangle = \langle \tilde{\xi}, \nabla(\tilde{\eta} \barwedge u) \rangle - \langle \tilde{\eta}, \nabla(\tilde{\xi} \barwedge u) \rangle - \langle [\tilde{\xi}, \tilde{\eta}], u \rangle$$

pour $\tilde{\xi}, \tilde{\eta} \in \mathscr{T}$, $u \in \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{E}$.

L'application $\nabla^2 : \mathscr{E} \to \wedge^2 \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{E}$ est $\mathscr{O}_X$-linéaire et provient donc d'un morphisme K de fibrés vectoriels, la courbure de ∇, qui est donnée par la formule

$$\langle \tilde{\xi} \wedge \tilde{\eta}, K \rangle = \nabla_{\tilde{\xi}} \nabla_{\tilde{\eta}} - \nabla_{\tilde{\eta}} \nabla_{\tilde{\xi}} - \nabla_{[\tilde{\xi}, \tilde{\eta}]}$$

pour $\tilde{\xi}, \tilde{\eta} \in \mathscr{T}$, Si la courbure de ∇ est nulle, on obtient un complexe

$$\mathscr{E} \xrightarrow{\nabla} \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{E} \xrightarrow{\nabla} \wedge^2 \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{E} \xrightarrow{\nabla} \cdots \longrightarrow \wedge^n \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{E} \longrightarrow 0$$

qui est exact d'après le lemme de Poincaré.

On dira qu'une section s de E est horizontale si $\nabla s = 0$, et qu'un repère $(s_1, \cdots, s_m)$ de E est horizontal si $\nabla s_i = 0$, pour $i = 1, \cdots, m$.

Proposition 3.1. *Soit ∇ une dérivée covariante sans courbure dans E. Pour*

Received June 25, 1971. Continuation of Part I, J. Differential Geometry **6** (1972) 357–373.

tout ouvert U simplement connexe et tout $x \in U$, il existe un isomorphisme qui ne dépend que de ∇

$$\mathscr{E}_{|U} \to E_x \otimes_{\mathbf{R}} \mathscr{O}_U \ .$$

Démonstration. D'après le théorème de Frobenius, il existe un repère horizontal $(s_1, \cdots, s_m)$ de E sur U qui induit l'isomorphisme cherché, qui ne dépend que de ∇. En effet, soit $(t_1, \cdots, t_m)$ un autre repère horizontal de E sur U. Alors si

$$t_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} s_j \ , \qquad \text{avec } a_{ij} \in \Gamma(U, \mathscr{O}_X)$$

pour $i = 1, \cdots, m$, on a

$$0 = \nabla t_i = \sum_{j=1}^{m} da_{ij} \otimes s_j \ ,$$

ce qui implique que les a_{ij} sont des constantes.

Soient ∇, ∇' des dérivées covariantes dans des fibrés vectoriels E, E' respectivement. On dira qu'un morphisme $\varphi\colon E \to E'$ de fibrés vectoriels est compatible aux dérivées covariantes si $\nabla'\varphi = \varphi\nabla$. On dira qu'un sous-fibré F de E est stable par ∇ si $\nabla(\mathscr{F}) \subset \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{F}$.

Proposition 3.2. *Soient ∇, ∇' des dérivées covariantes sans courbure dans des fibrés vectoriels E, E' et soit $\varphi\colon E \to E'$ un morphisme de fibrés vectoriels compatible aux dérivées covariantes. Pour tout $x \in X$, et tout voisinage ouvert simplement connexe U de x le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{E}_{|U} & \xrightarrow{\varphi} & \mathscr{E}'_{|U} \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ E_x \otimes_{\mathbf{R}} \mathscr{O}_U & \xrightarrow{\varphi_x} & E'_x \otimes_{\mathbf{R}} \mathscr{O}_U \end{array}$$

est commutatif, où les isomorphismes sont donnés par la proposition 3.1. *De plus, si F (resp. F') est un sous-fibré de E (resp. F) stable par ∇ (resp. ∇'), alors $\varphi(F)$(resp. $\varphi^{-1}(F')$) est un sous-fibré de E' (resp. E) stable par ∇' (resp. ∇).*

Démonstration. Soient $(s_1, \cdots, s_m, s_{m+1}, \cdots, s_p)$, $(s'_1, \cdots, s'_q, s'_{q+1}, \cdots, s'_r)$ des repères horizontaux de E, E' respectivement sur U tels que $(s_1, \cdots, s_m)$ soit un repère de F et $(s'_1, \cdots, s'_q)$ un repère de F'. Alors

$$\varphi s_i = \sum_{j=1}^{r} b_i^j s'_j \ , \qquad \text{avec } b_i^j \in \Gamma(U, \mathscr{O}_X) \ ,$$

et $\nabla'\varphi s_i = \varphi\nabla s_i$, pour $i = 1, \cdots, p$; d'où

$$0 = \nabla'\varphi s_i = \sum_{j=1}^{r} db_i^j \otimes s'_j \ ,$$

ce qui implique que les b_i^j sont des constantes.

Rappelons qu'une section u sur X de $\wedge^p T^* \otimes \tilde{J}_k(T)$ définit une dérivation $\mathscr{L}(u)$ de degré p de $\wedge \mathscr{T}^*$ qui ne dépend que de $\pi_0 u$ (cf. [10, § 3]). Le crochet de Nijenhuis sur $\wedge T^* \otimes \tilde{J}_k(T)$ est alors donné par la formule

$$(3.2) \qquad \begin{aligned}[\alpha \otimes \tilde{\xi}, \beta \otimes \tilde{\eta}] = (\alpha \wedge \beta) \otimes [\tilde{\xi}, \tilde{\eta}] &+ (\mathscr{L}(\alpha \otimes \tilde{\xi})\beta) \otimes \tilde{\eta} \\ &- (-1)^{pq}(\mathscr{L}(\beta \otimes \tilde{\eta})\alpha) \otimes \tilde{\xi}\end{aligned}$$

pour $\alpha \in \wedge^p \mathscr{T}^*$, $\beta \in \wedge^q \mathscr{T}^*$, $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta} \in \tilde{J}_k(\mathscr{T})$. On en tire la formule suivante si $p = q = 1$

$$(3.3) \qquad \begin{aligned}\langle \tilde{\xi} \wedge \tilde{\eta}, [u, v] \rangle = [\tilde{\xi} \barwedge u, \tilde{\eta} \barwedge v] &- [\tilde{\eta} \barwedge u, \tilde{\xi} \barwedge v] \\ &- [\pi_0(\tilde{\xi} \barwedge u), \tilde{\eta}] \barwedge v + [\pi_0(\tilde{\eta} \barwedge u), \tilde{\xi}] \barwedge v \\ &- [\pi_0(\tilde{\xi} \barwedge v), \tilde{\eta}] \barwedge u + [\pi_0(\tilde{\eta} \barwedge v), \tilde{\xi}] \barwedge u \\ &+ ([\tilde{\xi}, \tilde{\eta}] \barwedge u) \barwedge v + ([\tilde{\xi}, \tilde{\eta}] \barwedge v) \barwedge u\end{aligned}$$

pour $u, v \in \mathscr{T}^* \otimes \tilde{J}_k(\mathscr{T})$, $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta} \in \mathscr{T}$ (cf. [10]).

Définition. Un fibré vectoriel associé à $\tilde{J}_k(T)$ est un fibré vectoriel E muni d'une dérivée de Lie, c'est-à-dire d'un opérateur différentiel

$$\mathscr{L}(\tilde{\xi}) \colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}$$

pour tout $\tilde{\xi} \in \Gamma(X, \tilde{J}_k(T))$ qui vérifie les conditions suivantes:

(i) $\mathscr{L}(\tilde{\xi} + \tilde{\eta}) = \mathscr{L}(\tilde{\xi}) + \mathscr{L}(\tilde{\eta})$,

(ii) $\mathscr{L}(f\tilde{\xi}) \quad = f\mathscr{L}(\tilde{\xi})$,

(iii) $\mathscr{L}([\tilde{\xi}, \tilde{\eta}]) = [\mathscr{L}(\tilde{\xi}), \mathscr{L}(\tilde{\eta})]$,

(iv) $\mathscr{L}(\tilde{\xi})fs \quad = f\mathscr{L}(\tilde{\xi})s + (\tilde{\xi} \cdot f)s$,

pour $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta} \in \Gamma(X, \tilde{J}_k(T))$, $f \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$, $s \in \mathscr{E}$.

On définit alors pour toute section u de $\wedge^p T^* \otimes \tilde{J}_k(T)$ l'opération

$$\mathscr{L}(u) \colon \wedge^q \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{E} \to \wedge^{p+q} \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{E}$$

par la formule

$$(3.4) \qquad \mathscr{L}(\alpha \otimes \tilde{\xi})(\beta \otimes s) = (\mathscr{L}(\alpha \otimes \tilde{\xi})\beta) \otimes s + \alpha \wedge \beta \otimes \mathscr{L}(\tilde{\xi})s\,,$$

où $u = \alpha \otimes \tilde{\xi}$, $\beta \in \wedge^q \mathscr{T}^*$, $s \in \mathscr{E}$ (cf. Nickerson [12]). Si $u \in \wedge^p \mathscr{T}^* \otimes \tilde{J}_k(\mathscr{T})$, $v \in \wedge^q \mathscr{T}^* \otimes \tilde{J}_k(\mathscr{T})$, on a la relation

$$(3.5) \qquad \mathscr{L}([u, v]) = \mathscr{L}(u)\mathscr{L}(v) - (-1)^{pq}\mathscr{L}(v)\mathscr{L}(u)$$

entre les opérations dans $\wedge \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{E}$.

Définition. Une connexion d'ordre k dans T est une scission $\omega \colon J_0(T) \to J_k(T)$ de la suite exacte

$$0 \longrightarrow J_k^0(T) \longrightarrow J_k(T) \xrightarrow{\pi_0} J_0(T) \longrightarrow 0\,.$$

On pose $\tilde{\omega} = \nu^{-1} \circ \omega \circ \nu \colon T \to \tilde{J}_k(T)$ et $\bar{\omega} = \nu^{-1} \circ \omega \colon J_0(T) \to \tilde{J}_k(T)$. La courbure Ω de ω est la section de $\wedge^2 T^* \otimes J_k^0(T)$ sur X définie par

$$\Omega(\tilde{\xi} \wedge \tilde{\eta}) = [\tilde{\omega}(\tilde{\xi}), \tilde{\omega}(\tilde{\eta})] - \tilde{\omega}[\tilde{\xi}, \tilde{\eta}] \tag{3.6}$$

pour $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta} \in \mathscr{T}$. On a alors

$$\Omega = \tfrac{1}{2}[\tilde{\omega}, \tilde{\omega}] \tag{3.7}$$

en considérant $\tilde{\omega}$ comme une section de $T^* \otimes \tilde{J}_k(T)$, d'après la formule (3.3).

Toute connexion ω d'ordre k dans T définit une dérivée covariante ∇ dans un fibré vectoriel E associé à $\tilde{J}_k(T)$ en posant

$$\nabla_{\tilde{\xi}} s = \mathscr{L}(\tilde{\omega}(\tilde{\xi}))s , \qquad \text{pour } \tilde{\xi} \in \mathscr{T},\ s \in \mathscr{E}$$

ou, ce qui est équivalent

$$\nabla s = \mathscr{L}(\tilde{\omega})s , \qquad \text{pour } s \in \mathscr{E} ,$$

en considérant $\tilde{\omega}$ comme une section de $T^* \otimes \tilde{J}_k(T)$. On aura aussi

$$\nabla u = \mathscr{L}(\tilde{\omega})u , \qquad \text{pour } u \in \wedge^p \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{E}$$

d'après l'équation (3.4). Il suit de (3.5) que

$$\nabla^2 u = \mathscr{L}(\tilde{\omega}) \circ \mathscr{L}(\tilde{\omega})u = \mathscr{L}(\tfrac{1}{2}[\tilde{\omega}, \tilde{\omega}])u$$

et que la courbure K de ∇ est simplement $\mathscr{L}(\Omega)$.

Proposition 3.3. *Si la courbure d'une connexion d'ordre k dans T est nulle, alors la courbure de la dérivée covariante induite dans tout fibré vectoriel associé à $\tilde{J}_k(T)$ est nulle.*

La section χ de $J_0(T)^* \otimes \check{J}_k(T)$ correspond à la projection de $\check{J}_k(T)$ sur les champs horizontaux de la connexion canonique de $X \times X$ parallèlement à $\tilde{J}_k(T)$. On a la proposition évidente:

Proposition 3.4. *Si ω est une connexion d'ordre k dans T, alors on a*

$$\chi = \bar{\omega} - \omega .$$

D'après le théorème 3.10 de [10], pour $\tilde{\xi}' \in \tilde{J}_{k+1}(\mathscr{T})$ avec $\tilde{\xi} = \pi_k \tilde{\xi}'$, on a

$$\bar{D}\tilde{\xi}' = [\chi, \tilde{\xi}'] = -[\tilde{\xi}', \bar{\omega} - \omega] = \mathscr{L}(\tilde{\xi}')\omega - \mathscr{L}(\tilde{\xi})\bar{\omega} . \tag{3.8}$$

En particulier, si $\pi_k \tilde{\xi}' = 0$, on a

$$\mathscr{L}(\tilde{\xi}')\omega = -\bar{\delta}\tilde{\xi}' . \tag{3.9}$$

Soient ω une connexion d'ordre k dans T et ϕ une section de $\tilde{\mathscr{D}}_{k+1}$ sur X.

Posons $\tilde{\omega}' = \phi \circ \tilde{\omega} \circ \phi^{-1} = \phi(\tilde{\omega})$. Alors $\omega' = \nu \circ \tilde{\omega}' \circ \nu^{-1}$ est une connexion d'ordre k dans T, la connexion ω tordue par ϕ, et ne dépend que de $\pi_k \phi$. On a alors

$$\begin{aligned} \omega' &= \phi \cdot (\omega \cdot (1 - \nu \cdot \bar{\mathscr{D}}\phi) + \nu \cdot \bar{\mathscr{D}}\phi) \cdot \phi^{-1} \\ &= \phi(\omega \cdot (1 - \nu \cdot \bar{\mathscr{D}}\phi) + \nu \cdot \bar{\mathscr{D}}\phi) \; . \end{aligned} \tag{3.10}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \omega' &= \nu \cdot \phi \cdot \nu^{-1} \cdot \omega \cdot \nu \cdot \phi^{-1} \cdot \nu^{-1} \\ &= \nu \cdot \phi \cdot (\phi^{-1} \cdot \nu^{-1} \cdot \phi + \bar{\mathscr{D}}\phi) \cdot \omega \cdot \nu \cdot \phi^{-1} \cdot \nu^{-1} \\ &= \phi \cdot \omega \cdot \nu \cdot \phi^{-1} \cdot \nu^{-1} + \nu \cdot \phi \cdot \bar{\mathscr{D}}\phi \cdot \nu \cdot \phi^{-1} \cdot \nu^{-1} \\ &= \phi \cdot \omega \cdot (\phi^{-1} - \nu \cdot \bar{\mathscr{D}}\phi \cdot \phi^{-1}) + \phi \cdot \nu \cdot \bar{\mathscr{D}}\phi \cdot \phi^{-1} \; . \end{aligned}$$

D'après (3.6), la courbure de ω' est $\phi(\Omega)$; donc si la courbure de ω est nulle, la courbure de la connexion tordue l'est aussi.

Rappelons que, pour $a \in X$ fixé, si l'on considère $Q_k(a)$ comme fibré sur X par la projection "but", toute section $\tilde{\xi} \in \Gamma(X, \tilde{J}_k(T))$ induit un champ de vecteurs $\tau_k(\tilde{\xi})$ invariant à droite sur $Q_k(a)$, et que l'application τ_k est un homomorphisme d'algèbres de Lie qui induit un isomorphisme

$$\tau_k(F) \colon \tilde{J}_k(T)_x \to T_F(Q_k(a)) \; ,$$

pour $F \in Q_k(a)$ de but x (cf. [10], § 6]). Si ω est une connexion d'ordre k sans courbure, la collection des espaces $\tau_k(F)\tilde{\omega}(T_x)$, $F \in Q_k(a)$, avec $x = \text{but}\, F$, définit un système de Pfaff complètement intégrable sur $Q_k(a)$. Pour tout $x_0 \in X$ et tout $F \in Q_k(a, x_0)$, il existe une section s de $Q_k(a)$ sur un voisinage U de x_0 telle que $s(x_0) = F$ et $\omega = \tau_k^{-1} \circ s_*$, c'est-à-dire

$$\tau_k(\tilde{\omega}(\tilde{\xi}))(s(x)) = s_*(\tilde{\xi}(x))$$

pour tout $\tilde{\xi} \in \Gamma(U, T)$, $x \in U$. Inversement, toute section s de $Q_k(a)$ nous donne une connexion ω d'ordre k dans T sans courbure définie par cette même formule.

Soient ω, ω' deux connexions d'ordre k dans T à courbure nulle sur un voisinage de $x_0 \in X$. Si $F \in Q_k(x_0, x_0)$ est donné, il existe une section ϕ de Q_k^0 sur un voisinage U de x_0 telle que $\phi(x_0) = F$ et que ω' soit la connexion ω tordue par ϕ, i.e., $\tilde{\omega}' = \phi \circ \tilde{\omega}$. En effet, on écrit $F = G' \cdot G^{-1}$, où $G, G' \in Q_k(a, x_0)$; il existe des sections s, s' de $Q_k(a)$ sur un voisinage U de x qui induisent les connexions ω, ω' respectivement telles que $s(x_0) = G$, $s'(x_0) = G'$. Posons $\phi(x) = s'(x) \cdot s(x)^{-1}$; nous avons alors $\phi \circ s = s'$, d'où le résultat voulu.

4. Algèbres de Lie transitives

Les fibrés vectoriels

$$\bar{A}_k = \frac{J_0(T)^* \otimes J_k(T)}{\bar{\delta}(S^{k+1} J_0(T)^* \otimes J_0(T))}$$

et $B_k^{p,0}$ sont associés à $\tilde{J}_{k+1}(T)$ et $\tilde{J}_k(T)$ respectivement. Soit A_k l'ensemble des éléments $u \in \bar{A}_k$ tels que $\pi_0 u = \mathrm{id} \in J_0(T)^* \otimes J_0(T)$. C'est un sous-fibré affine de $\bar{A}_k$ dont le fibré vectoriel associé est $B_k^{1,0}$. Soit α une section de A_k et ϕ une section de $\tilde{\mathscr{Q}}_{k+1}$, alors $\phi^{-1}(\alpha)$ est encore une section de A_k qui ne dépend que de $\pi_k\phi$. En effet, soit ω une connexion d'ordre k dans T telle que la section de A_k qu'elle détermine soit égale à α. Alors, d'après la proposition 3.4,

$$\phi^{-1}\cdot\omega\cdot\phi = \bar{\mathscr{D}}\phi - \chi + \phi^{-1}\cdot\varpi\cdot\phi \ ;$$

donc $\phi^{-1}(\alpha)$ ne dépend que de $\pi_k\phi$ et de $\hat{\mathscr{D}}(\pi_k\phi)$. Il est clair que si ϕ est une section de Q_k^0, alors $\phi^{-1}(\alpha)(x)$ ne dépend que de $\phi(x)$ et $\alpha(x)$. Donc $Q_k(x,x)$ opère sur $A_{k,x}$. Il suit que si $\xi \in \tilde{J}_k(\mathscr{T})$, on a une opération $\mathscr{L}(\xi)\colon \mathscr{A}_k \to \mathscr{B}_k^{1,0}$ (ceci peut aussi se voir à l'aide de (3.9)); si $\xi \in J_k^0(T)_x$, alors $\mathscr{L}(\xi)\colon A_{k,x} \to B_{k,x}^{1,0}$ est bien défini.

Rappelons que l'on a la suite exacte (2.5) de [10]

$$0 \to \tilde{J}_k(T) \to \check{J}_k(T) \to J_0(T) \to 0$$

$(0 \le k \le \infty)$, ce qui permet d'identifier $J_0(T)^*$ à un sous-fibré de $\check{J}_k(T)^*$. Alors le crochet sur $\wedge\check{J}_\infty(T)^* \otimes J_\infty(T)$ de [10] induit un crochet sur $\wedge J_0(T)^* \otimes J_{k+1}(T)$ à valeurs dans $\wedge\check{J}_1(T)^* \otimes J_k(T)$, d'après la formule (3.2) de [10], qui est d'ailleurs défini fibre par fibre. On vérifie aisément que l'on a la formule suivante, qui est à comparer à (3.3)

$$\begin{aligned}\langle \xi \wedge \eta, [u,v]\rangle = {} & [\xi \barwedge u, \eta \barwedge v] - [\eta \barwedge u, \xi \barwedge v] \\ & - \pi_k\{[\pi_1(\xi \barwedge u), \eta] \barwedge v - [\pi_1(\eta \barwedge u), \xi] \barwedge v \\ & \quad + [\pi_1(\xi \barwedge v), \eta] \barwedge u - [\pi_1(\eta \barwedge v), \xi] \barwedge u \\ & \quad - (\pi_0([\xi,\eta] \barwedge u)) \barwedge v - (\pi_0([\xi,\eta] \barwedge v)) \barwedge u\}\end{aligned} \tag{4.1}$$

pour $u,\ v \in J_0(T)^* \otimes J_{k+1}(T)$, $\xi, \eta \in \check{J}_1(T)$. Soit ω une section de $J_0(T)^* \otimes J_{k+1}(T)$ telle que $\pi_0\omega = \mathrm{id}$; alors d'après la proposition 3.4

$$\tfrac{1}{2}[\omega,\omega] = \tfrac{1}{2}[\varpi - \chi, \varpi - \chi] = -(\bar{D}\varpi - \tfrac{1}{2}[\varpi,\varpi]) \ , \tag{4.2}$$

et l'on voit donc que $\frac{1}{2}[\omega,\omega]$ est une section de $\wedge^2 J_0(T)^* \otimes J_k^0(T)$. D'après (4.1), on obtient la formule

$$\langle \xi \wedge \eta, \tfrac{1}{2}[\omega,\omega]\rangle = [\omega(\xi), \omega(\eta)] - \pi_k\omega[\pi_1\omega(\xi), \pi_1\omega(\eta)] \ . \tag{4.3}$$

L'équation (4.2) montre que l'application $\omega \mapsto \frac{1}{2}[\omega,\omega]$ induit une application

$$A_k \to B_k^{2,0}$$

qui envoie $\alpha \in A_k$ dans $\frac{1}{2}[\alpha,\alpha] \in B_k^{2,0}$.

Dans la suite de ce paragraphe nous considérerons les fibres E_x des fibrés E en point fixe $x \in X$ et nous écrirons E au lieu de E_x.

Si R_k^0 est une sous-algèbre de Lie de $J_k^0(T)$, on notera $C_k^{p,0}$ l'image de $\wedge^p J_0(T)^* \otimes R_k^0$ dans $B_k^{p,0}$, et $A(R_k^0)$ l'espace affine quotient de A_k par $C_k^{1,0}$, dont l'espace vectoriel associé est $B_k^{1,0}/C_k^{1,0}$. D'après les remarques précédentes, tout $\phi \in Q_k(x, x)$ tel que $\phi(R_k^0) = R_k^0$ opère sur $A(R_k^0)$, et si $\eta \in R_k^0$, on a une opération $\mathscr{L}(\eta): A(R_k^0) \to B_k^{1,0}/C_k^{1,0}$. On dira que $a \in A(R_k^0)$ est invariant par l'algèbre de Lie R_k^0 si $\mathscr{L}(\eta)a = 0$ pour tout $\eta \in R_k^0$.

Soient $a \in A(R_k^0)$ un élément R_k^0-invariant et $\alpha \in A_k$ un élément dont la classe dans $A(R_k^0)$ est égale à a. On note $\frac{1}{2}[a, a]$ la classe de $\frac{1}{2}[\alpha, \alpha]$ dans $B_k^{2,0}/C_k^{2,0}$; on vérifie facilement que $\frac{1}{2}[a, a]$ ne dépend que de a. Ecrivons

$$\operatorname{Cart}(R_k^0) = \{a \in A(R_k^0) \mid a \text{ est } R_k^0\text{-invariant et } \tfrac{1}{2}[a, a] = 0\} .$$

Soient R_k^0, $R_k'^0$ deux sous-algèbres de $J_k^0(T)$; si $\phi \in Q_k(x, x)$ vérifie $\phi(R_k^0) \subset R_k'^0$, alors les applications

$$\phi: A(R_k^0) \to A(R_k'^0) \quad \text{et} \quad \phi: \operatorname{Cart}(R_k^0) \to \operatorname{Cart}(R_k'^0)$$

sont bien définies.

Définition. Une sous-algèbre de Lie tronquée est un couple (R_k^0, c), où R_k^0 est une sous-algèbre de Lie de $J_k^0(T)$ et c un élément de $\operatorname{Cart}(R_k^0)$. Si $(R_k'^0, c')$ est une autre sous-algèbre de Lie tronquée de $J_k(T)$, nous dirons que (R_k^0, c) et $(R_k'^0, c')$ sont isomorphes s'il existe $\phi \in Q_k(x, x)$ tel que $\phi(R_k^0) = R_k'^0$ et $\phi(c) = c'$.

Si $\omega \in J_0(T)^* \otimes J_k(T)$ est un représentant de c, posons $R_k = \omega(J_0(T)) \oplus R_k^0$, $R_{k-1} = \pi_k R_k$, et notons g_k le noyau de $\pi_k: R_k^0 \to J_{k-1}(T)$. Le fait que c soit R_k^0-invariant implique que $[R_k^0, \omega(J_0(T))] \subset R_{k-1}$, et l'équation $\frac{1}{2}[c, c] = 0$ implique que $[\omega(J_0(T)), \omega(J_0(T))] \subset R_{k-1}$; on a donc $[R_k, R_k] \subset R_{k-1}$. Notons que $R_{k-1} \subset J_{k-1}(T)$ ne dépend pas du choix de ω; d'autre part, R_k détermine une structure d'algèbre de Lie tronquée $(R_{k-1}, g_k, \bar{c})$ sur R_{k-1} au sens de Guillemin-Sternberg [7], qui est déterminée par (R_k^0, c), de la manière suivante. Pour $\xi \in R_k$, $\eta \in g_k$, on a $[\xi, \eta] \in R_{k-1}$ et cette dernière expression dépend seulement de η et de $\pi_0 \xi$. On a donc une application $\bar{\delta}: g_k \to J_0(T)^* \otimes R_{k-1}$, qui est injective, et l'algèbre de Lie g_k a une représentation fidèle sur R_{k-1}. Soit $\rho: R_{k-1} \to R_k$ un relèvement de π_{k-1}; définissons $\hat{c} \in \wedge^2 R_{k-1}^* \otimes R_{k-1}$ par

$$\hat{c}(\xi \wedge \eta) = [\rho(\xi), \rho(\eta)]$$

et $\hat{c}^2 \in \wedge^3 R_{k-1}^* \otimes R_{k-1}$ par

$$\hat{c}^2(\xi \wedge \eta \wedge \zeta) = \hat{c}(\hat{c}(\xi \wedge \eta) \wedge \zeta) + \hat{c}(\hat{c}(\eta \wedge \zeta) \wedge \xi) + \hat{c}(\hat{c}(\zeta \wedge \xi) \wedge \eta)$$

pour $\xi, \eta, \zeta \in R_{k-1}$. Notons $\bar{c}$ la classe de $\hat{c}$ dans $\wedge^2 R_{k-1}^* \otimes R_{k-1}/\bar{\delta}(R_{k-1}^* \otimes g_k)$. Il est facile de voir que $\bar{c}$ est invariant par g_k; par conséquent l'élément $\bar{c}^2$

classe de $\hat{c}^2$ dans $\wedge^3 R_{k-1}^* \otimes R_{k-1}/\bar{\delta}(\wedge^2 R_{k-1}^* \otimes g_k)$ est bien défini et l'on vérifie que $\bar{c}^2 = 0$. Il est clair que si (R_k^0, c), $(R_k'^0, c')$ sont deux sous-algèbres de Lie tronquées de $J_k(T)$ isomorphes, alors les algèbres de Lie tronquées $(R_{k-1}, g_k, \bar{c})$, $(R'_{k-1}, g'_k, \bar{c}')$ sont aussi isomorphes.

Proposition 4.1. *Soient (R_k^0, c), $(R_k'^0, c')$ deux sous-algèbres de Lie tronquées de $J_k(T)$ isomorphes, et $\omega, \omega' \in J_0(T)^* \otimes J_k(T)$ des représentants de c, c' respectivement. Posons $R_k = \omega(J_0(T)) \oplus R_k^0$ et $R'_k = \omega'(J_0(T)) \oplus R_k'^0$. Alors il existe $\phi \in Q_{k+1}(x, x)$ tel que $\phi(R_k) = R'_k$.*

Démonstration. On se ramène facilement au cas où les deux sous-algèbres de Lie tronquées sont les mêmes. On peut aussi supposer que $\omega' = \omega + \bar{\delta} u$, où $u \in S^{k+1} J_0(T)^* \otimes J_0(T)$. Alors $\phi = \partial^{-1} \delta u$ appartient au sous-ensemble $Q_{k+1}^k(x)$ de $Q_{(1,k)}^0(x)$. D'après l'équation (7.3) de [10], on a

$$\phi(\xi) = \xi + \xi \barwedge \bar{\delta} u \ , \qquad \text{pour } \xi \in J_k(T) \ .$$

Donc $\phi(\omega(\xi)) = \omega'(\xi)$, pour $\xi \in J_0(T)$, ce qui implique que $\phi(R_k) = R'_k$.

Une sous-algèbre $L \subset J_\infty(T)$ est une sous-algèbre de Lie transitive de $J_\infty(T)$ si $\pi_0 \colon L \to J_0(T)$ est surjectif. Soient L^k et R_k le noyau et l'image de $\pi_k \colon L \to J_k(T)$, et R_k^0 le noyau de $\pi_k \colon R_k \to J_0(T)$, et g_k le noyau de $\pi_{k-1} \colon R_k \to R_{k-1}$. L'algèbre de Lie transitive L détermine, pour chaque $k \geq 1$, une sous-algèbre tronquée (R_k^0, c_k) de $J_k(T)$ de la manière suivante. Nous pouvons écrire

$$L = L^0 \oplus \omega(J_0(T)) \ ,$$

où ω est un relèvement de $\pi_0 \colon L \to J_0(T)$. Soit c_k la classe de $\pi_k \omega$ dans $A(R_k^0)$ qui ne dépend que de L. Le fait que L soit une sous-algèbre de Lie de $J_\infty(T)$ est équivalent aux conditions suivantes:

(i) L^0 est une sous-algèbre de $J_\infty^0(T)$,
(ii) $[\omega(J_0(T)), L^0] \subset L$,
(iii) $[\omega(J_0(T)), \omega(J_0(T))] \subset L$.

Ces trois conditions peuvent se réécrire de la manière suivante: pour tout $k \geq 1$,

(i) R_k^0 est une sous-algèbre de $J_k^0(T)$,
(ii) c_k est R_k^0-invariant,
(iii) $\frac{1}{2}[c_k, c_k] = 0$,

où chaque condition est bien définie si les précédentes sont vérifiées. Nous obtenons donc aussi une algèbre de Lie tronquée $(R_{k-1}, g_k, \bar{c}_k)$ pour chaque $k \geq 1$ qui est précisément celle qui est définie à partir de L par Guillemin-Sternberg [7].

Rappelons que nous avons un complexe

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow g_k \xrightarrow{\bar{\delta}} J_0(T)^* \otimes g_{k-1} \xrightarrow{\bar{\delta}} \wedge^2 J_0(T)^* \otimes g_{k-2} \xrightarrow{\bar{\delta}} \cdots \\ \longrightarrow \wedge^n J_0(T)^* \otimes g_{k-n} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

dont on notera le groupe de cohomologie en $\wedge^j J_0(T)^* \otimes g_{k-j}$ par $H^{k-j,j}(\text{gr } L)$, et que $H^{k,0}(\operatorname{gr} L) = 0$ pour $k > 0$. Nous dirons que deux sous-algèbres transitives fermées L, L' de $J_\infty(T)$ sont isomorphes s'il existe $\phi \in Q_\infty(x, x)$ tel que $\phi(L) = L'$. Le théorème III de Guillemin-Sternberg [7] implique que les sous-algèbres L et L' sont isomorphes si et seulement si elles sont isomorphes en tant qu'algèbres de Lie transitives abstraites.

Théorème 4.1. *Soient L et L' deux sous-algèbres de Lie transitives fermées de $J_\infty(T)$. Si*

$$H^{k,1}(\operatorname{gr} L) = H^{k,2}(\operatorname{gr} L) = H^{k,1}(\operatorname{gr} L') = 0$$

pour $k \geq k_0$, alors les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) *Les sous-algèbres de Lie transitives L et L' sont isomorphes.*

(ii) *Les sous-algèbres de Lie tronquées $(R^0_{k_0}, c_{k_0})$ et $(R'^0_{k_0}, c'_{k_0})$ de $J_{k_0}(T)$ sont isomorphes.*

(iii) *Les algèbres de Lie tronquées $(R_{k_0-1}, g_{k_0}, \bar{c}_{k_0})$ et $(R'_{k_0-1}, g'_{k_0}, \bar{c}'_{k_0})$ sont isomorphes.*

De plus, si $\phi_{k_0} \in Q_{k_0}(x, x)$ est un isomorphisme des sous-algèbres de Lie tronquées $(R^0_{k_0}, c_{k_0})$ et $(R'^0_{k_0}, c'_{k_0})$ de $J_{k_0}(T)$, alors il existe $\phi \in Q_\infty(x, x)$ tel que $\pi_{k_0}\phi = \phi_{k_0}$ et $\phi(L) = L'$.

Les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) et (ii) $\Rightarrow$ (iii) sont évidentes et (iii) $\Rightarrow$ (i) découle des résultats de Guillemin-Sternberg [7] et Rim [13].

5. Equations de Lie formellement transitives

Supposons que R_k soit une équation de Lie formellement transitive dans $J_k(T)$.

Définition. Une R_k-connexion est une connexion d'ordre k dans T telle que $\omega(J_0(T)) \subset R_k$.

Proposition 5.1. *Si R_k est une équation de Lie formellement transitive, il existe une R_k-connexion sans courbure au voisinage de tout point $x \in X$.*

Démonstration. Soit P_k une forme finie de R_k et $a \in X$ fixé. Alors, pour $\tilde{\xi} \in \Gamma(X, \tilde{R}_k)$, le champ de vecteurs $\tau_k(\tilde{\xi})$ est tangent à $P_k(a)$ et τ_k induit un isomorphisme $\tau_k(G)\colon \tilde{R}_{k,b} \to T_G(P_k(a))$ pour tout $G \in P_k(a)$ de but b. Comme R_k est formellement transitif, $P_k(a)$ est un fibré sur la composante connexe de x; soit s une section de $P_k(a)$ sur un voisinage de $x \in X$. D'après le § 3, s nous donne la R_k-connexion sans courbure cherchée.

Pour $x \in X$, rappelons que $R^0_{k,x}$ est une $\boldsymbol{R}$-sous-algèbre de Lie de $J^0_k(T)_x$.

Proposition 5.2. *Soit $R_k \subset J_k(T)$ une équation de Lie formellement transitive et ω une R_k-connexion sans courbure définie sur un voisinage ouvert simplement connexe de $x \in X$. Les applications*

$$\mathscr{R}^0_{k|U} \to R^0_{k,x} \otimes \mathscr{O}_U\,, \qquad J^0_k(\mathscr{T})_{|U} \to J^0_k(T)_x \otimes \mathscr{O}_U$$

induites par ω sont des isomorphismes de $\mathscr{O}_U$-algèbres de Lie et le diagramme

$$
(5.1)\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathscr{R}^0_{k|U} & \longrightarrow & R^0_{k,x} \otimes_{\boldsymbol{R}} \mathcal{O}_U \\
\downarrow & & \downarrow \\
J^0_k(\mathscr{T})_{|U} & \longrightarrow & J^0_k(T)_x \otimes_{\boldsymbol{R}} \mathcal{O}_U
\end{array}
$$

est commutatif.

Démonstration. Puisque $J^0_k(T)$ est un fibré vectoriel associé à $\tilde{J}_k(T)$, la connexion ω induit une dérivée covariante ∇ dans $J^0_k(T)$ à courbure nulle telle que R^0_k soit ∇-stable. D'après la proposition 3.2, ∇ définit les isomorphismes $\mathscr{R}^0_{k|U} \to R^0_{k,x} \otimes_{\boldsymbol{R}} \mathcal{O}_U$, $J^0_k(\mathscr{T})_{|U} \to J^0_k(T)_x \otimes_{\boldsymbol{R}} \mathcal{O}_U$ et le diagramme (5.1) est commutatif. L'identité de Jacobi

$$[\tilde{\xi}, [\eta_1, \eta_2]] = [[\tilde{\xi}, \eta_1], \eta_2] + [\eta_1, [\tilde{\xi}, \eta_2]]$$

pour $\tilde{\xi} \in \tilde{J}_k(T)$, $\eta_1, \eta_2 \in J^0_k(T)$, implique que le crochet $J^0_k(T) \otimes J^0_k(T) \to J^0_k(T)$ est compatible aux dérivées covariantes. Donc, d'après la proposition 3.2, nos isomorphismes sont des morphismes de $\mathcal{O}_U$-algèbres de Lie.

D'après les propositions 5.1 et 5.2, toute équation de Lie R_k dans $J_k(T)$ formellement transitive se décompose localement de la manière suivante

$$(5.2)\qquad R_{k|U} = \omega(J_0(T)_{|U}) \oplus R^0_{k|U}$$

où ω est une connexion d'ordre k dans T sans courbure sur un ouvert simplement connexe U et $\mathscr{R}^0_{k|U}$ est le sous-faisceau de $J^0_k(\mathscr{T})_{|U}$ image de l'application composée

$$(5.3)\qquad R^0_{k,x} \otimes_{\boldsymbol{R}} \mathcal{O}_U \to J^0_k(T)_x \otimes_{\boldsymbol{R}} \mathcal{O}_U \xrightarrow{\sim} J^0_k(\mathscr{T})_{|U}$$

où $x \in U$, et l'isomorphisme est déterminé par la dérivée covariante dans $J^0_k(T)$ induite par ω. En particulier, $R_{k|U}$ est déterminé par ω et $R^0_{k,x}$.

Inversement, soient $R^0_{k,x} \subset J^0_k(T)_x$ une sous-algèbre et ω une connexion d'ordre k dans T sans courbure sur un voisinage ouvert simplement connexe U de $x \in X$; définissons $R_k = R_{k|U}$ par l'équation (5.2), où $\mathscr{R}^0_{k|U}$ est l'image de $R^0_{k,x} \otimes_{\boldsymbol{R}} \mathcal{O}_U$ dans $J^0_k(\mathscr{T})_{|U}$ par l'application composée (5.3) déterminée par la dérivée covariante ∇ dans $J^0_k(T)$ induite par ω. Alors R_k est une équation de Lie formellement transitive sur U. Comme l'isomorphisme $J^0_k(T) \otimes_{\boldsymbol{R}} \mathcal{O}_U \to J^0_k(\mathscr{T})_{|U}$ déterminé par ∇ est un morphisme de $\mathcal{O}_U$-algèbres de Lie, $\mathscr{R}^0_{k|U}$ est une sous-algèbre de $J^0_k(\mathscr{T})_{|U}$. Il est clair que $\mathscr{R}^0_{k|U}$ est stable par la dérivée covariante ∇; donc

$$[\bar{\omega}(J_0(\mathscr{T})_{|U}), \mathscr{R}^0_{k|U}] \subset \mathscr{R}^0_{k|U} .$$

Enfin, puisque la courbure de ω est nulle

$$[\bar{\omega}(J_0(\mathscr{T})_{|U}), \bar{\omega}(J_0(\mathscr{T})_{|U})] \subset \bar{\omega}(J_0(\mathscr{T})_{|U}) .$$

Proposition 5.3. *Soit $R_k \subset J_k(T)$ une équation de Lie formellement transitive. Alors g_{k+l} est un fibré vectoriel pour $l \geq 0$.*

Démonstration. Prenons une R_k-connexion ω à courbure nulle définie sur un voisinage simplement connexe U de $x \in X$. Soit

$$\Delta_{l,k}\colon S^{k+l}J_0(T)^* \otimes J_0(T) \to S^l J_0(T)^* \otimes S^k J_0(T)^* \otimes J_0(T)$$

l'application naturelle (cf. [5]); notons aussi $\Delta_{l,k}$ l'application $S^{k+l}J_0(T)^* \otimes J_0(T) \to S^l J_0(T)^* \otimes J_k^0(T)$ que $\Delta_{l,k}$ détermine, qui commute aux applications diagonales et qui est donc compatible aux dérivées covariantes ∇ induites par ω dans les fibrés $S^{k+l}J_0(T)^* \otimes J_0(T)$ et $S^l J_0(T)^* \otimes J_k^0(T)$ associés à $\tilde{J}_k(T)$. De plus R_k^0 est stable par ∇. Rappelons que g_{k+l} est la famille $\Delta_{l,k}^{-1}(S^l J_0(T)^* \otimes R_k^0)$ de sous-espaces de $S^{k+l}J_0(T)^* \otimes J_0(T)$ (cf. [5]). En appliquant la proposition 3.2, on voit que g_{k+l} est un fibré vectoriel pour $l \geq 0$.

Remarque. Pour $y \in U$, on a des isomorphismes

$$H^{k+l,j}(g_k)_x \simeq H^{k+l,j}(g_k)_y$$

pour $l, j \geq 0$, d'après la proposition 3.2. En effet $\bar{\delta}$ commute aux applications diagonales et le sous-fibré $g_{k+l} \subset S^{k+l}J_0(T)^* \otimes J_0(T)$ est stable par ∇.

On écrit $R_l = \pi_l(R_k)$ pour $l < k$ et on note g_l le noyau de $\pi_l\colon R_l \to R_{l-1}$ pour $l < k$.

Proposition 5.4. *Soit $R_k \subset J_k(T)$ une équation de Lie formellement transitive. Supposons que $\pi_k\colon R_{k+1} \to R_k$ soit surjectif. Alors R_l et g_l sont des fibrés vectoriels et $R_{l+1} \subset (R_l)_{+1}$, $g_{l+1} \subset (g_l)_{+1}$ pour $l < k$, et $R_l \subset J_l(T)$ est une équation de Lie formellement transitive pour $1 \leq l \leq k$. Toute R_{k+1}-connexion sans courbure définie sur un voisinage ouvert U simplement connexe de $x \in X$ induit des isomorphismes $\mathscr{R}_{k|U} \to R_{k,x} \otimes_{\mathbf{R}} \mathcal{O}_U$, $\mathscr{R}_{k-1|U} \to R_{k-1,x} \otimes \mathcal{O}_U$ tels que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{R}_k \otimes \mathscr{R}_{k|U} & \longrightarrow & R_{k,x} \otimes R_{k,x} \otimes_{\mathbf{R}} \mathcal{O}_U \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathscr{R}_{k-1|U} & \longrightarrow & R_{k-1,x} \otimes_{\mathbf{R}} \mathcal{O}_U \end{array} \tag{5.4}$$

soit commutatif, où les flèches verticales sont données par le crochet. Si de plus R_k est formellement intégrable, pour tout y dans un voisinage de x, il existe $\phi \in Q_\infty(x, y)$ tel que $\phi(R_{\infty,x}) = R_{\infty,y}$.

Démonstration. Prenons une R_{k+1}-connexion sans courbure sur un voisinage ouvert simplement connexe U de x. Puisque R_k est stable par la dérivée covariante induite par ω, la proposition 3.2 appliquée à $\pi_l\colon R_k \to J_l(T)$ implique que les R_l sont des fibrés vectoriels pour $l < k$. Puisque $\pi_l\colon R_{l+1} \to R_l$ est surjectif pour $l \leq k$, si $u \in \mathscr{R}_{l+1}$, on a $Du \in \mathscr{T}^* \otimes \mathscr{R}_l$ et donc $R_{l+1} \subset (R_l)_{+1}$ et $g_{l+1} \subset (g_l)_{+1}$. On a évidemment $[R_{l+1}, R_{l+1}] \subset R_l$ pour $l \leq k$. De plus, d'après la proposition 3.1, ω induit les isomorphismes voulus. L'identité de Jacobi

$$[\tilde{\xi}, [\eta_1, \eta_2]] = [[\tilde{\xi}, \eta_1], \eta_2] + [\eta_1, [\tilde{\xi}, \eta_2]] ,$$

pour $\tilde{\xi} \in \tilde{\mathscr{R}}_{k+1}$, $\eta_1, \eta_2 \in \mathscr{R}_k$, implique que le crochet $R_k \otimes R_k \to R_{k-1}$ est compatible aux dérivées covariantes; le diagramme (5.4) est commutatif d'après la proposition 3.2. Si R_k est formellement intégrable et g_k est 2-acyclique, l'isomorphisme des sous-algèbres fermées $R_{\infty,x} \subset J_\infty(T)_x$, $R_{\infty,y} \subset J_\infty(T)_y$, pour $y \in U$ découle maintenant du théorème 4.1.

Proposition 5.5. *Soient R_k, R'_k deux équations de Lie formellement transitives dans $J_k(T)$ telles que $\pi_k: R_{k+1} \to R_k$, $\pi_k: R'_{k+1} \to R'_k$ soient surjectives. Supposons qu'il existe $F \in Q_{k+1}(x, x)$ tel que $F(R_{k,x}) \subset R'_{k,x}$. Alors il existe une section ϕ de Q^0_{k+1} sur un voisinage ouvert U de x telle que l'on ait sur U*
(i) $\phi(R_k) \subset R'_k$, (ii) $\phi(\tilde{R}_k) \subset \tilde{R}'_k$, (iii) $\phi(x) = F$.

Démonstration. Soient ω une R_{k+1}-connexion sans courbure et ω' une R'_{k+1}-connexion sans courbure sur un voisinage de x. D'après le § 3, il existe une section ϕ de Q^0_{k+1} sur un voisinage ouvert simplement connexe U de x telle que $\phi(x) = F$ et $\tilde{\omega}' = \phi \cdot \tilde{\omega}$ sur U. On se restreint maintenant à l'ouvert U. Il est évident que les sous-fibrés $\phi(R_k)$ et R'_k de $J_k(T)$ sont stables par la dérivée covariante induite par ω' dans $J_k(T)$ et que l'on a $\phi(R_k)_x \subset R'_{k,x}$. La proposition 3.2 implique que $\phi(R_k) \subset R'_k$. Il en découle que $\phi(R^0_k) \subset R'^0_k$, d'où (ii).

Lorsque l'équation $R_k \subset J_k(T)$ est formellement transitive, on considérera l'image $C^{p,0}_k$ de $\wedge^p J_0(T)^* \otimes R^0_k$ dans $B^{p,0}_k$; c'est un fibré vectoriel à fibre variable; puisque g_{k+1} et g_{k+2} sont des fibrés vectoriels, $C^{1,0}_k$ et C^1_k sont des fibrés vectoriels et, si $H^{k,2}(g_k) = 0$, alors $C^{2,0}_k$ et C^2_k sont des fibrés vectoriels. L'application

$$B^{p,0}_k / C^{p,0}_k \to B^p_k / C^p_k$$

induite par l'inclusion $J^0_k(T) \to \tilde{J}_k(T)$ est un isomorphisme qui commute aux applications diagonales, et on identifiera donc ces deux fibrés vectoriels à fibre variable.

Définissons maintenant le tenseur de structure d'une équation de Lie formellement transitive $R_k \subset J_k(T)$ de la manière suivante. Considérons le fibré affine $A(R^0_k)$ quotient de A_k par le fibré vectoriel $C^{1,0}_k$, dont le fibré vectoriel associé est $B^{1,0}_k / C^{1,0}_k$; ces fibrés ne dépendent que de R^0_k. Le *tenseur de structure* de R_k est la section c de $A(R^0_k)$ qui provient d'une R_k-connexion ω considérée comme section de $J_0(T)^* \otimes J_k(T)$. On voit immédiatement que c ne dépend pas du choix de ω. Rappelons que pour $\tilde{\xi} \in \tilde{J}_k(\mathscr{T})$, nous avons une opération $\mathscr{L}(\tilde{\xi}): \mathscr{A}_k \to \mathscr{B}^{1,0}_k$, et donc si $\tilde{\xi} \in \tilde{\mathscr{R}}_k$, nous avons une opération induite $\mathscr{L}(\tilde{\xi}): \mathscr{A}(R^0_k) \to \mathscr{B}^{1,0}_k / \mathscr{C}^{1,0}_k$ qui est définie "fibre par fibre" si $\tilde{\xi} \in \mathscr{R}^0_k$.

Soit ω une R_k-connexion et α une section de B^1_k / C^1_k sur X; prenons un représentant $\bar{\alpha}$ de α dans $\Gamma(X, B^1_k)$ qu'on peut toujours supposer être une section dans $\Gamma(X, B^{1,0}_k)$. Considérons la section c_α de $A(R^0_k)$ définie par $c_\alpha = c + \alpha$. On a

$$(5.5) \qquad \alpha - \chi = c_\alpha \ ;$$

en effet, si on note aussi ω et $\bar{\omega}$ les classes de ω et $\bar{\omega}$ dans $\Gamma(X, \check{B}_k^1)$, on a d'après la proposition 3.4

$$\bar{\alpha} - \chi = \bar{\alpha} + \omega - \bar{\omega}$$

où $\bar{\omega} \in \Gamma(X, C_k^1)$, ce qui implique (5.5). Si pour tout $x \in X$, l'élément $c_\alpha(x)$ de $A(R_k^0)$ est invariant par $R_{k,x}^0$, ce qui est notamment le cas si la première équation de Cartan (1.1) ou

$$(5.6) \qquad \mathscr{L}(\tilde{\xi})c_\alpha = 0 \qquad \text{pour tout } \tilde{\xi} \in \tilde{\mathscr{R}}_k$$

est vérifiée, on peut définir, d'après le § 4, une section $\frac{1}{2}[c_\alpha, c_\alpha]: x \mapsto \frac{1}{2}[c_\alpha(x), c_\alpha(x)]$ sur X du fibré vectoriel $B_k^{2,0}/C_k^{2,0}$ à fibre variable. Sous cette condition, on peut donc écrire la seconde équation de Cartan

$$(5.7) \qquad \tfrac{1}{2}[c_\alpha, c_\alpha] = 0 \ .$$

Si la première équation de Cartan (5.6) est satisfaite et si $H^{k,2}(g_k) = 0$, on a d'après (4.2)

$$\tfrac{1}{2}[\alpha - \chi, \alpha - \chi] = \tfrac{1}{2}[c_\alpha, c_\alpha] \ ,$$

et on retrouve bien les équations de Cartan du § 1. Si (5.6) est vraie et si $H^{k,2}(g_k) = 0$, on a toujours

$$(5.8) \qquad \mathscr{L}(\tilde{\xi})(\tfrac{1}{2}[c_\alpha, c_\alpha]) = 0 \qquad \text{pour } \tilde{\xi} \in \tilde{\mathscr{R}}_k \ .$$

On définit la dérivée covariante $\nabla c_\alpha \in \Gamma(X, T^* \otimes (B_k^{1,0}/C_k^{1,0}))$ de c_α par

$$\tilde{\xi} \barwedge \nabla c_\alpha = \mathscr{L}(\tilde{\omega}(\tilde{\xi}))c_\alpha \qquad \text{pour } \tilde{\xi} \in \mathscr{T} \ .$$

Proposition 5.6. *Si la R_k-connexion ω est sans courbure sur un voisinage ouvert U simplement connexe de $x \in X$, alors la première équation de Cartan* (5.6) *est vraie pour tout $\tilde{\xi} \in \tilde{\mathscr{R}}_{k|U}$ si et seulement si:*

(i) *$c_\alpha(x) \in A(R_k^0)$ est invariant par l'algèbre de Lie $R_{k,x}^0$,*

(ii) *la dérivée covariante de c_α est nulle sur U.*

Si $H^{k,2}(g_k) = 0$ et si les conditions (i) *et* (ii) *sont vérifiées, alors la seconde équation de Cartan* (5.7) *est vraie sur U si et seulement si $\frac{1}{2}[c_\alpha(x), c_\alpha(x)] = 0$.*

Démonstration. Il est clair que les conditions (i) et (ii) sont nécessaires pour que (5.6) soit vraie pour tout $\tilde{\xi} \in \tilde{\mathscr{R}}_{k|U}$. Inversement, si elles sont remplies, alors il suffit de montrer que (5.6) est vraie pour $\tilde{\xi} \in \tilde{\mathscr{R}}_{k|U}^0$. Rappelons que $J_k^0(T)$ et $B_{k,1}^0$ sont des fibrés vectoriels associés à $\tilde{J}_k(T)$ et que ω induit une dérivée covariante ∇ sans courbure dans R_k^0 et $B_k^{1,0}/C_k^{1,0}$ sur U. De la relation

$$\mathscr{L}(\tilde{\omega}(\tilde{\xi}))(\mathscr{L}(\eta)c_\alpha) = \mathscr{L}(\eta)(\mathscr{L}(\tilde{\omega}(\tilde{\xi}))c_\alpha) + \mathscr{L}([\tilde{\omega}(\tilde{\xi}), \eta])c_\alpha$$

pour $\tilde{\xi} \in \mathscr{T}_{|U}, \eta \in \mathscr{R}^0_{k|U}$ et de (ii), on déduit que, si $\eta \in \Gamma(U, R^0_k)$ satisfait à $\nabla\eta = 0$, alors

$$\nabla(\mathscr{L}(\eta)c_\alpha) = 0 .$$

La proposition 3.1 et (i) impliquent que si $\eta \in \Gamma(U, R^0_k)$ satisfait à $\nabla\eta = 0$, alors $\mathscr{L}(\eta)c_\alpha = 0$. Comme les sections horizontales de R^0_k sur U engendrent $R^0_{k|U}$, on a $\mathscr{L}(\eta)c_\alpha = 0$, pour tout $\eta \in \Gamma(U, R^0_k)$.

Si $H^{k,2}(g_k) = 0$, alors $C^{2,0}_k$ est un fibré vectoriel et ω induit une dérivée covariante ∇ à courbure nulle dans $B^{2,0}_k/C^{2,0}_k$ sur U. Si (ii) est vraie, on a $\nabla(\frac{1}{2}[c_\alpha, c_\alpha]) = 0$ sur U, d'après (5.8); (i) implique que $\frac{1}{2}[c_\alpha, c_\alpha] = 0$ sur U.

Pour tout ouvert U de X, il est clair que

$$\operatorname{Cart}(U, R_k) = \left\{ \alpha \in \Gamma(U, B^1_k/C^1_k) \;\middle|\; \begin{array}{ll} \mathscr{L}(\tilde{\xi})c_\alpha = 0 & \text{pour tout } \tilde{\xi} \in \tilde{\mathscr{R}}_k ; \\ \frac{1}{2}[c_\alpha, c_\alpha] = 0 & \end{array} \right\} .$$

On a donc, pour $x \in U$, une application naturelle

$$\operatorname{Cart}(U, R_k) \to \operatorname{Cart}(R^0_{k,x}) , \tag{5.9}$$

qui envoie α dans $c_\alpha(x)$.

Proposition 5.7. *Si $H^{k,2}(g_k) = 0$, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U simplement connexe de x tel que l'application* (5.9) *soit bijective.*

Démonstration. Nous pouvons supposer que la courbure de ω est nulle sur un voisinage ouvert simplement connexe U de x. Prouvons que pour tout $a \in \operatorname{Cart}(R^0_{k,x})$, il existe un et un seul élément $\alpha \in \Gamma(U, B^1_k/C^1_k)$ tel que $a = c(x) + \alpha(x)$ et tel que la dérivée covariante ∇c_α de c_α soit nulle sur U. Vérifions d'abord que la dérivée covariante $\nabla(\nabla c) \in \Gamma(U, \wedge^2 T^* \otimes (B^{1,0}_k/C^{1,0}_k))$ de ∇c est nulle. En effet, puisque la courbure de ω est nulle sur U, on a d'après (3.1), pour $\tilde{\xi}, \tilde{\eta} \in \mathscr{T}_{|U}$,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\xi} \wedge \tilde{\eta}, \nabla(\nabla c) \rangle &= \langle \tilde{\xi}, \nabla(\tilde{\eta} \barwedge \nabla c) \rangle - \langle \tilde{\eta}, \nabla(\tilde{\xi} \barwedge \nabla c) \rangle - \langle [\tilde{\xi}, \tilde{\eta}], \nabla c \rangle \\ &= \mathscr{L}(\tilde{\omega}(\tilde{\xi}))(\mathscr{L}(\tilde{\omega}(\tilde{\eta})c) - \mathscr{L}(\tilde{\omega}(\tilde{\eta}))(\mathscr{L}(\tilde{\omega}(\tilde{\xi}))c) - \mathscr{L}(\tilde{\omega}[\tilde{\xi}, \tilde{\eta}])c \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Donc d'après le lemme de Poincaré, il existe un élément $\alpha \in \Gamma(U, B^{1,0}_k/C^{1,0}_k)$ et un seul tel que

$$\nabla\alpha = -\nabla c \quad \text{et} \quad \alpha(x) = a - c(x) .$$

Ces deux équations sont équivalentes aux propriétés requises de α. D'après la proposition 5.6, puisque $\frac{1}{2}[a, a] = 0$, on a $\alpha \in \operatorname{Cart}(U, R_k)$, et l'application (5.9) est bijective.

Maintenant, soit $\phi \in \Gamma(X, \tilde{\mathscr{D}}_k)$. Soit R'_k l'équation de Lie formellement transitive définie par (1.3). Nous avons alors $R'^0_k = \phi(R^0_k)$ et $\phi\colon A(R^0_k) \to A(R'^0_k)$ est bien défini; notons c' le tenseur de structure de R'_k et ω' la R'_k-connexion définie par $\tilde{\omega}' = \phi \circ \tilde{\omega} \circ \phi^{-1}$. Prenons $\bar{\alpha} = \hat{\mathscr{D}}\phi \in \Gamma(X, \hat{B}^1_k)$. D'après la formule (3.10) on a

$$c' = \phi(c_\alpha) \tag{5.10}$$

où α est la classe de $\bar{\alpha}$ dans $\Gamma(X, B^1_k/C^1_k)$. D'après (5.5), on a

$$\kappa'(\tilde{\xi}) = \mathscr{L}(\phi^{-1}(\tilde{\xi}))c_\alpha = \phi^{-1}(\mathscr{L}(\tilde{\xi})c') , \qquad \tilde{\xi} \in \tilde{\mathscr{R}}'_k$$

et

$$\kappa(\tilde{\xi}) = \mathscr{L}(\tilde{\xi})c' , \qquad \tilde{\xi} \in \tilde{\mathscr{R}}'_k .$$

Proposition 5.8. *L'application $\pi_k\colon R'_{k+1} \to R'_k$ est surjective si et seulement si $\mathscr{L}(\tilde{\xi})c_\alpha = 0$ pour tout $\tilde{\xi} \in \tilde{\mathscr{R}}_k$.*

Donc (5.6) est la première équation de Cartan de R'_k par rapport à R_k. Si la première équation de Cartan est satisfaite, alors la seconde équation de Cartan (5.7) de R'_k par rapport à R_k est toujours vérifiée; en effet, en prenant une R'_{k+1}-connexion, on voit d'après (4.3) que $\frac{1}{2}[c', c'] = 0$ et donc que $\frac{1}{2}[c_\alpha, c_\alpha] = 0$ d'après (5.10).

En prenant $\phi = I_k$, on obtient le

Corollaire 5.1 *Si $R_k \subset J_k(T)$ est une équation de Lie formellement transitive, la suite*

$$\tilde{\mathscr{R}}_{k+1} \xrightarrow{\pi_k} \tilde{\mathscr{R}}_k \xrightarrow{\kappa} \mathscr{B}^{1,0}_k / \mathscr{C}^{1,0}_k$$

est exacte, où

$$\kappa(\tilde{\xi}) = \mathscr{L}(\tilde{\xi})c .$$

L'application $\pi_k\colon R_{k+1} \to R_k$ est surjective si et seulement si

$$\mathscr{L}(\tilde{\xi})c = 0 \qquad \text{pour tout } \tilde{\xi} \in \tilde{\mathscr{R}}_k . \tag{5.11}$$

Si cette dernière condition est satisfaite, on a

$$\tfrac{1}{2}[c, c] = 0 . \tag{5.12}$$

On appelle (5.11) la première équation de Cartan de R_k, et (5.12) la seconde, qui est définie si la première est satisfaite. On déduit de la proposition 5.6 que $\pi_k\colon R_{k+1} \to R_k$ est surjectif sur un voisinage ouvert U de $x \in X$ simplement connexe sur lequel la courbure de ω est nulle si et seulement si:

(i) $c(x) \in A(R^0_k)_x$ est invariant par l'algèbre de Lie $R^0_{k,x}$,

(ii) la dérivée covariante de c est nulle sur U.

C'est sous une forme analogue que les équations de Cartan sont écrites par Cartan [1] ou [2]. La condition (i) correspond à l'équation (19) de Cartan [1] et la condition (ii) exprime la propriété "les c_{ijk} sont des constantes"; de plus $\frac{1}{2}[c(x), c(x)] = 0$ est notre version de l'équation (20) de [1].

6. Le troisième théorème fondamental et équations de Lie formellement transitives

Nous supposerons que X est muni d'une structure de variété analytique réelle compatible à sa structure de variété différentiable.

Théorème 6.1 (*Troisième théorème fondamental*). *Soient $x \in X$ et $(R^0_{k,x}, a)$ une sous-algèbre de Lie tronquée de $J_k(T)_x$. Si $g_{k,x} \subset S^k J_0(T)^*_x \otimes J_0(T)_x$ est 3-acyclique, il existe sur un voisinage de x une équation de Lie analytique R'_k formellement intégrable et formellement transitive dans $J_k(T)$ telle que la sous-algèbre de Lie tronquée de $J_k(T)_x$ déterminée par R'_k soit égale à $(R^0_{k,x}, a)$.*

Démonstration. Prenons une connexion analytique ω d'ordre k dans T sans courbure sur un voisinage ouvert simplement connexe U de x et considérons l'équation de Lie analytique R_k dans $J_k(T)$ sur U définie par (5.2). La proposition 5.7 nous fournit l'existence d'un élément unique $\alpha \in \mathrm{Cart}\,(U, R_k)$ tel que

$$c_\alpha(x) = c(x) + \alpha(x) = a\ ,$$

en notant c le tenseur de structure de R_k. Puisque la dérivée covariante de c_α (par rapport à ω) est nulle, c_α est une section analytique de $A(R^0_k)$, et donc α est une section analytique de B^1_k/C^1_k sur U. D'après le théorème 2.1, il existe une section analytique ϕ de Q^0_k sur un voisinage V de x telle que $\hat{\mathscr{D}}'\phi = \alpha$ et $\phi(x) = I_k(x)$; l'équation de Lie analytique R'_k dans $J_k(T)$ sur V définie par (1.3) satisfait aux conditions requises, car d'après (5.10) on a

$$c'(x) = \phi(c_\alpha(x)) = a\ .$$

Corollaire 6.1. *Soient $L' \subset L \subset J_\infty(T)_x$ des sous-algèbres de Lie transitives fermées. Alors quelque soit l'entier $m \geq 0$, il existe sur un voisinage de x des équations de Lie analytiques R_k, R'_k formellement intégrables et formellement transitives dans $J_k(T)$ telles que $R'_k \subset R_k$, et telles que les sous-algèbres de Lie transitives fermées $R_{\infty,x}, R'_{\infty,x}$ de $J_\infty(T)_x$ soient isomorphes à L, L' respectivement et que $\pi_m(L) = R_{m,x}$ et $\pi_m(L') = R'_{m,x}$.*

Démonstration. Prenons un entier $k \geq m + 1$ tel que

$$H^{k+l,i}\,(\mathrm{gr}\, L) = H^{k+l,i}\,(\mathrm{gr}\, L') = 0$$

pour $l \geq 0, i = 1, 2, 3$. Soient $(R^0_{k,x}, c_k)$, $(R'^0_{k,x}, c'_k)$ les sous-algèbres de Lie tronquées de $J_k(T)_x$ déterminées par L, L' respectivement. Appliquons le théorème

6.1 à $(R_k'^0, c_k')$ pour obtenir l'équation de Lie R_k' sur un voisinage de x. Soit ω une R_k'-connexion sans courbure sur un voisinage simplement connexe U de x et soit R_k l'équation de Lie dans $J_k(T)$ sur U définie par (5.2). On a $R_k' \subset R_k$ et on déduit de la proposition 5.6 que $\pi_k: R_{k+1} \to R_k$ est surjectif. Le théorème 4.1 de [4] implique que R_k est formellement intégrable, puisque $g_{k,x}$ et donc aussi g_k est 2-acyclique. Le théorème 4.1 nous donne les isomorphismes cherchés.

Il découle que *toute algèbre de Lie transitive abstraite est isomorphe à une algèbre de Lie du type* $R_{\infty,x}$ (cf. Guillemin-Sternberg [7]).

Remarque. Soient $L \subset J_\infty(T)_x$ une sous-algèbre de Lie transitive fermée et $R_k \subset J_k(T)$ une équation de Lie formellement intégrable et formellement transitive telle que $R_{\infty,x}$ soit isomorphe à L. Si m est un entier tel que $1 \leq m \leq k$ et $H^{m+l,1}(\operatorname{gr} L) = 0$ pour $l \geq 0$, alors sur la composante connexe X^0 de x, on a

$$R_k = (R_m)_{+(k-m)}$$

où R_m est l'équation de Lie formellement transitive et formellement intégrable $\pi_m(R_k)$ dans $J_k(T)$. En effet, notre hypothèse est équivalente à $g_{m+l,x} = (g_{m,x})_{+l}$, pour $l \geq 0$. Les propositions 5.4 et 5.3 impliquent que l'on a une inclusion $g_{m+l} \subset (g_m)_{+l}$ de fibrés vectoriels. Donc sur X^0, on a $g_{m+l} = (g_m)_{+l}$. Du diagramme exact et commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & g_{m+l+1} & \longrightarrow & (g_m)_{+(l+1)} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & R_{m+l+1} & \longrightarrow & (R_m)_{+(l+1)} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & R_{m+l} & \longrightarrow & (R_m)_{+l} & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & &
\end{array}$$

on déduit par récurrence que $R_{m+l} = (R_m)_{+l}$ pour $l \geq 0$.

Proposition 6.1. *Soit R_k' une équation de Lie formellement intégrable et formellement transitive dans $J_k(T)$. Pour tout $x \in X$, il existe sur un voisinage U de x une équation de Lie analytique R_k'' formellement intégrable et formellement transitive dans $J_k(T)$ et une section $\phi \in \Gamma(U, Q_{k+1}^0)$ telles que $\phi(x) = I_{k+1}(x)$ et telles que sur U l'on ait $\phi(R_k') = R_k''$ et $\phi(\tilde{R}_k') = \tilde{R}_k''$.*

Démonstration. Il existe un entier $l \geq 1$ tel que g_{k+l}' soit 3-acyclique. Le théorème 6.1 nous donne l'existence sur un voisinage de x d'une équation de Lie analytique R_{k+l}'' formellement intégrable et formellement transitive dans $J_{k+l}(T)$ telle que la sous-algèbre de Lie tronquée de $J_{k+l}(T)_x$ déterminée par R_{k+l}'' soit égale à celle déterminée par R_{k+l}'. Nous avons donc $R_{k,x}' = R_{k,x}''$ et la proposition 5.5 nous fournit alors une section ϕ de Q_{k+1}^0 sur un voisinage connexe U de x avec les propriétés voulues. D'autre part, puisque $R'_{\infty,x}$ est isomorphe à $R''_{\infty,x}$ d'après le théorème 4.1, la remarque précédente montre que sur U l'équation de Lie $R''_k = \pi_k(R''_{k+l})$ dans $J_k(T)$ est formellement intégrable et que $R''_{k+l} = (R''_k)_{+l}$.

Définition. Nous dirons que deux équations de Lie R_k, R'_k dans $J_k(T)$ sont localement isomorphes s'il existe un automorphisme $\phi_0\colon X \to X$ et, pour tout $x \in X$, une section f de Aut (X) sur un voisinage U de x tels que $f(x) = \phi_0(x)$ et tels que $\tilde{j}_{k+1}(f)\colon R_{k|U} \to R'_{k|f(U)}$ ou $\tilde{j}_k(f)\colon \tilde{R}_{k|U} \to \tilde{R}'_{k|f(U)}$ soit un isomorphisme.

Soit R_k une équation de Lie formellement intégrable dans $J_k(T)$ dont on note une forme finie P_k. Supposons que g_k soit 2-acyclique. Nous dirons que le deuxième théorème fondamental est vrai pour R_k si, pour tout $x \in X$, on a $\hat{H}^1(\mathscr{P}_{k,x}) = 0$ (cf. [10, § 8]); cette dernière condition est remplie si et seulement si on peut résoudre l'équation $\hat{\mathscr{D}}\tilde{F} = u$, avec $\tilde{F} \in \tilde{\mathscr{P}}_{k,x}$ et $\tilde{F}(x) = I_k(x)$, lorsque $u \in \hat{C}^1_{k,x}$ satisfait à $\hat{\mathscr{D}}_1 u = 0$, où $\hat{C}^1_k = \hat{B}^1_k \cap C^1_k$.

Théorème 6.2. *Soient R_k, R'_k deux équations de Lie formellement intégrables et formellement transitives dans $J_k(T)$. On suppose que g_k est 2-acyclique et qu'il existe $\phi \in \Gamma(X, \tilde{\mathscr{Q}}_{k+1})$ tel que $\phi(R_k) = R'_k$ et $\phi(\tilde{R}_k) = \tilde{R}'_k$. Pour tout $x \in X$, on a un isomorphisme $\phi\colon \hat{H}^1(\mathscr{P}_{k,x}) \to \hat{H}^1(\mathscr{P}'_{k,y})$, où $y =$* but $\phi(x)$; *si le deuxième théorème fondamental est vrai pour R'_k, il est vrai pour R_k, et R_k est localement isomorphe à R'_k.*

Démonstration. On vérifie aisément que $\tilde{\mathscr{D}}\phi^{-1} \in \Gamma(X, J_0(T)^* \otimes \tilde{R}'_k)$ et donc, en notant aussi ϕ la section $\pi_k\phi$ de $\tilde{\mathscr{Q}}_k$, on a $\hat{\mathscr{D}}\phi^{-1} \in \Gamma(X, \hat{C}'^1_k)$. Si $u \in \hat{C}^1_k$, alors $u^{\phi^{-1}} = \hat{\mathscr{D}}\phi^{-1} + \phi(u) \in \hat{C}'^1_k$, et d'après la formule (7.15) de [10], $\hat{\mathscr{D}}_1 u = 0$ si et seulement si $\hat{\mathscr{D}}_1(u^{\phi^{-1}}) = 0$. On a donc un isomorphisme $\phi\colon \hat{\mathscr{Z}}^1_{k,x} \to \hat{\mathscr{Z}}'^1_{k,y}$ qui envoie u dans $u^{\phi^{-1}}$. D'autre part, si $\psi \in \Gamma(X, \tilde{\mathscr{Q}}_k)$ nous notons Ad ψ l'application de Q_k dans Q_k qui envoie $F \in Q_k$, avec source $F = a$, but $F = b$, dans $\psi(b) \cdot F \cdot \psi(a)^{-1}$ et nous avons le résultat suivant:

Lemme 6.1. *Soient R_k, R'_k deux équations de Lie dans $J_k(T)$ et $\phi \in \Gamma(X, \tilde{\mathscr{Q}}_k)$ tels que $\phi(\tilde{R}_k) = \tilde{R}'_k$. Si P_k, P'_k sont des formes finies de R_k, R'_k respectivement, au voisinage de I_k on a la relation $P'_k =$* Ad $\phi(P_k)$.

Démonstration. Si $F \in Q_k$ avec but $F = b$, et si but $\phi(b) = c$, on vérifie aisément que le diagramme

$$\begin{tikzcd} V_F(Q_k) \arrow[r, "\mathrm{Ad}\,\phi_*"] & V_{\mathrm{Ad}\,\phi\cdot F}(Q_k) \\ \tilde{J}_k(T)_b \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\phi"] & \tilde{J}_k(T)_c \arrow[u, "\mathrm{Ad}\,\phi\cdot F"'] \end{tikzcd}$$

est commutatif (cf. [10, § 6]). Ceci implique que le système de Pfaff $F \mapsto \mathrm{Ad}\,\phi_*(\tilde{R}_k\, \mathrm{Ad}\,\phi^{-1}\cdot F)$ est égal au système de Pfaff $F \mapsto (\phi(\tilde{R}_k))F = \tilde{R}'_k F$, d'où le résultat voulu.

Revenons à la démonstration du théorème 6.2. D'après le lemme 6.1, si

$\tilde{F} \in \tilde{\mathscr{P}}_{k,x}$ avec $\tilde{F}(x) = I_k(x)$, alors $\mathrm{Ad}\,\phi \cdot \tilde{F} \in \tilde{\mathscr{P}}'_{k,y}$ et $(\mathrm{Ad}\,\phi \cdot \tilde{F})(x) = I_k(x)$. L'isomorphisme $\phi\colon \hat{H}^1(\mathscr{P}_{k,x}) \to \hat{H}^1(\mathscr{P}'_{k,y})$ provient de l'isomorphisme $\phi\colon \hat{\mathscr{Z}}^1_{k,x} \to \hat{\mathscr{Z}}'^1_{k,y}$, et découle de la formule (7.14) de [10] qui implique la relation

$$(u^{\tilde{F}})^{\phi^{-1}} = (u^{\phi^{-1}})^{\mathrm{Ad}\,\phi \cdot \tilde{F}} ,$$

pour $u \in \hat{\mathscr{C}}^1_{k,x}$, $\tilde{F} \in \tilde{\mathscr{P}}_{k,x}$. Rappelons que g'_k est 2-acyclique; si le deuxième théorème fondamental est vrai pour R'_k, pour tout $x \in X$, il existe une section ψ de $\mathscr{P}'_k$ sur un voisinage de y telle que $\hat{\mathscr{D}}\psi = \hat{\mathscr{D}}\phi^{-1}$ et $\psi(y) = I_k(y)$. On a alors $\hat{\mathscr{D}}(\psi \cdot \phi) = 0$ d'après la formule (7.13) de [10] et on peut écrire $\psi \circ \phi = \tilde{j}_k(f)$, où f est une section de $\mathrm{Aut}\,(X)$ sur un voisinage V de x. On a donc l'isomorphisme cherché $\tilde{j}_k(f)\colon \tilde{R}_{k|V} \to \tilde{R}'_{k|f(V)}$ avec $\tilde{j}_k(f)(x) = \phi(x)$.

Si l'on se place dans la catégorie des variétés et des morphismes analytiques, le deuxième théorème fondamental est alors vrai pour toute équation de Lie R_k formellement intégrable avec g_k 2-acyclique (cf. [10]) et deux équations de Lie vérifiant les hypothèses du théorème 6.2 sont localement isomorphes.

Remarque. Si X est connexe et $x \in X$, la proposition 5.5 et le théorème 6.2 impliquent que le fait que le deuxième théorème fondamental soit vrai pour une équation de Lie R_k, formellement intégrable et formellement transitive dans $J_k(T)$ avec g_k 2-acyclique, ne dépend que de la classe d'isomorphisme de la sous-algèbre transitive fermée $R_{\infty,x}$ de $J_\infty(T)_x$. On dira donc que le deuxième théorème fondamental est vrai pour une sous-algèbre transitive fermée L de $J_\infty(T)_x$ s'il est vrai pour une telle équation de Lie R_k pour laquelle $R_{\infty,x}$ est isomorphe à L; d'après le corollaire 6.1 ou la proposition 6.1, on peut toujours supposer que R_k est *analytique*.

Nous donnons maintenant une version relative du corollaire 6.1.

Corollaire 6.2. *Soient $x \in X$ et R_k une équation de Lie analytique (ou pour laquelle le deuxième théorème fondamental est vrai) formellement intégrable et formellement transitive dans $J_k(T)$. Si $L' \subset R_{\infty,x}$ est une sous-algèbre de Lie transitive fermée de $J_\infty(T)_x$, alors quelque soit l'entier $m \geq 0$, il existe sur un voisinage de x une équation de Lie $R'_{k+l} \subset R_{k+l}$ formellement intégrable et formellement transitive dans $J_{k+l}(T)$ telle que la sous-algèbre de Lie transitive fermée $R'_{\infty,x}$ de $J_\infty(T)_x$ soit isomorphe à L' et que $\pi_m(L') = R'_{m,x}$.*

Démonstration. D'après le corollaire 6.1, il existe au voisinage de x des équations de Lie analytiques $R'''_{k+l} \subset R''_{k+l}$ formellement intégrables et formellement transitives dans $J_{k+l}(T)$, avec $k + l \geq m + 1$ et g''_{k+l} et g'''_{k+l} 2-acycliques, telles que les sous-algèbres de Lie transitives fermées $R''_{\infty,x}$, $R'''_{\infty,x}$ soient isomorphes à $R_{\infty,x}$, L' respectivement et que $R''_{k+l,x} = R_{k+l,x}$, $R'''_{k+l,x} = \pi_{k+l}(L')$. D'après la proposition 5.5 et le théorème 6.2, les équations de Lie R_{k+l} et R''_{k+l} sont isomorphes sur un voisinage de x: il existe donc une section f de $\mathrm{Aut}\,(X)$ sur un voisinage U de x telle que $\tilde{j}_{k+l}(f)(x) = I_{k+l}(x)$ et telle que $\tilde{j}_{k+l+1}(f)\colon R_{k+l|U} \to R''_{k+l|f(U)}$ soit un isomorphisme. L'équation R'_{k+l} dans $J_{k+l}(T)$ sur U définie par

$$\tilde{j}_{k+l+1}(f)(R'_{k+l}) = R'''_{k+l|f(U)} \quad \text{ou} \quad \tilde{j}_{k+l}(f)(\tilde{R}'_{k+l}) = \tilde{R}'''_{k+l|f(U)}$$

est une équation de Lie formellement intégrable puisque R'''_{k+l} l'est. D'après (5.10), les sous-algèbres de Lie tronquées de $J_{k+l}(T)_x$ déterminées par R'_{k+l} et R'''_{k+l} sont les mêmes, et $R'_{k+l-1,x} = R'''_{k+l-1,x}$. L'isomorphisme de L' et de $R'_{\infty,x}$ découle du théorème 4.1.

7. Equations de Lie elliptiques formellement transitives

Examinons d'abord les automorphismes d'une équation de Lie. Supposons X connexe; soit R_k une équation de Lie formellement transitive dans $J_k(T)$ avec $\pi_k: R_{k+1} \to R_k$ surjectif. Soit $P^\natural_{k+1}$ l'ensemble des $F \in Q_{k+1}$ tels que $F(R_{k,a}) = R_{k,b}$ si $a =$ source F, $b =$ but F. Montrons que $P^\natural_{k+1}$ est une sous-variété de Q_{k+1}. D'abord $P^\natural_{k+1}(a, a) = Q_{k+1}(a, a) \cap P^\natural_{k+1}$, pour $a \in X$, est un sous-groupe de Lie fermé de $Q_{k+1}(a, a)$. En effet, l'action de $Q_{k+1}(a, a)$ sur $J_k(T)_a$ permet d'identifier $Q_{k+1}(a, a)$ à un sous-groupe fermé du groupe d'automorphismes $GL(J_k(T)_a)$ de $J_k(T)_a$. Puisque les automorphismes de $J_k(T)_a$ qui préservent le sous-espace $R_{k,a}$ forment un sous-groupe fermé de $GL(J_k(T)_a)$, on peut identifier $P^\natural_{k+1}(a, a)$ à un sous-groupe fermé de $GL(J_k(T)_a)$. D'autre part, le sous-groupoïde $P^\natural_{k+1}$ de Q_{k+1} contient toute forme finie P_{k+1} de R_{k+1}. Comme R_{k+1} est formellement transitif, il existe des sections locales de P_{k+1} considéré comme fibré sur $X \times X$ qui permettent de voir que $P^\natural_{k+1}$ est un sous-fibré de Q_{k+1} sur $X \times X$.

La dérivée de Lie $\mathscr{L}(\tilde{\xi}): J_k(\mathscr{T}) \to J_k(\mathscr{T})$ pour $\tilde{\xi} \in \Gamma(X, \tilde{J}_{k+1}(T))$ s'obtient à partir de l'action de Q_{k+1} sur $J_k(T)$ de la manière suivante. Si $\tilde{F}_t = (f_t, F_t)$ est une famille à un paramètre de sections de $\tilde{\mathscr{Q}}_{k+1}$ sur un ouvert U de X avec $\tilde{F}_0 = I_{k+1}$, alors $(d\tilde{F}_t/dt)|_{t=0}(x) \in V_{I_{k+1}(x)}(Q_{k+1})$ et $\tilde{\xi} = (d\tilde{F}_t/dt)|_{t=0}$ est une section de $\tilde{J}_{k+1}(T)$ sur U. Toute section de $\tilde{J}_{k+1}(T)$ peut localement s'écrire ainsi. Si η est une section de $J_k(T)$ sur U, alors pour $x \in U$,

$$(7.1) \qquad (\mathscr{L}(\tilde{\xi})\eta)(x) = \frac{d}{dt}\tilde{F}_t^{-1}(\eta(f_t(x)))\Big|_{t=0}.$$

Soit $\tilde{R}^\natural_{k+1}$ le sous-fibré vectoriel de $\tilde{J}_{k+1}(T)$ dont la fibre en $a \in X$ est égale à $V_{I_{k+1}(a)}(P^\natural_{k+1})$. Alors $V_F(P^\natural_{k+1}) = \tilde{R}^\natural_{k+1}F$ pour $F \in P^\natural_{k+1}$. Il est clair que $R^\natural_{k+1} = \nu(\tilde{R}^\natural_{k+1})$ est une équation de Lie dans $J_{k+1}(T)$ dont $P^\natural_{k+1}$ est une forme finie et que $R_{k+1} \subset R^\natural_{k+1}$. Si $\tilde{F}_t$ est une famille à un paramètre de sections de $\tilde{\mathscr{P}}^\natural_{k+1}$ sur un ouvert U de X avec $\tilde{F}_0 = I_{k+1}$, alors $\tilde{\xi} = (d\tilde{F}_t/dt)|_{t=0} \in \Gamma(U, \tilde{R}^\natural_{k+1})$; la formule (7.1) montre alors que $\mathscr{L}(\tilde{\xi})\eta \in \Gamma(U, R_k)$ pour tout $\eta \in \Gamma(U, R_k)$. Ceci implique que $[\mathscr{R}^\natural_{k+1}, \mathscr{R}_k] \subset \mathscr{R}_k$. Notons $g^\natural_{k+1}$ le noyau de $\pi_k: R^\natural_{k+1} \to J_k(T)$. On a donc les inclusions $g_{k+1} \subset g^\natural_{k+1}$ et $[g^\natural_{k+1}, R_{k+1}] \subset R_k$. Si $\xi \in g^\natural_{k+1}, \eta \in R_{k+1}$, alors $[\xi, \eta] = -\pi_0(\eta) \barwedge \xi \in g_k$. Puisque R_{k+1} est formellement transitif, on a l'inclusion $g^\natural_{k+1} \subset (g_k)_{+1} = g_{k+1}$, d'où l'égalité $g^\natural_{k+1} = g_{k+1}$.

Si l'équation de Lie R_k dans $J_k(T)$ est elliptique, il en est de même pour les équations R_{k+1} et $R_{k+1}^\natural$ dans $J_{k+1}(T)$ d'après la proposition 6.2 de [4].

Nous ne supposons plus X connexe. La remarque qui suit le théorème 6.2, et le théorème 9.1 de [10] impliquent:

Théorème 7.1. *Si R_k est une équation de Lie elliptique formellement intégrable et formellement transitive dans $J_k(T)$ avec g_k 2-acyclique, le deuxième théorème fondamental est vrai pour R_k.*

Supposons X muni d'une structure de variété analytique compatible à sa structure de variété différentiable.

Proposition 7.1. *Soit R_k une équation de Lie elliptique et analytique dans $J_k(T)$. Toute solution de R_k et tout automorphisme local de X solution de l'équation différentielle non-linéaire d'ordre k dans le fibré $X^2 \to X$, déterminée par une forme finie P_k de R_k, est analytique.*

Démonstration. Choisissons des métriques analytiques sur un voisinage U de $x \in X$ et dans les fibrés $\tilde{R}_{k|U}$ et $B^1_{k|U}$; soit $\hat{D}^*$ l'adjoint formel de l'opérateur différentiel $\hat{D}$: $\tilde{\mathscr{R}}_k \to \mathscr{B}^1_k$. Toute solution s sur U de l'équation R_k détermine une solution $u = \tilde{j}_k(s)$ sur U de l'opérateur différentiel $\hat{D}^*\hat{D}$: $\tilde{\mathscr{R}}_k \to \tilde{\mathscr{R}}_k$. De même, toute section f de Aut(X) sur U solution de l'équation différentielle non-linéaire P_k d'ordre k dans $X^2 \to X$ détermine une section $\phi = \tilde{j}_k(f)$ de $\tilde{\mathscr{P}}_k$ sur U qui vérifie l'équation $\hat{D}^*\hat{\mathscr{D}}\phi = 0$, où $\hat{D}^*\hat{\mathscr{D}}$: $\tilde{\mathscr{P}}_k \to \tilde{\mathscr{R}}_k$ est un opérateur différentiel non-linéaire d'ordre 2, qui définit un morphisme de fibrés $p(\hat{D}^*\hat{\mathscr{D}})$: $J_2(P_k) \cap Q_{(2,k)} \to \tilde{R}_k$. L'opérateur $\hat{D}$: $\tilde{\mathscr{R}}_k \to \mathscr{B}^1_k$ est elliptique d'après la proposition 6.4 de [4], puisque le noyau de son symbole $\sigma(\hat{D})$: $T^* \otimes \tilde{R}_k \to B^1_k$ est $\delta(g_{k+1})$; il en résulte que l'opérateur $\hat{D}^*\hat{D}$ est déterminé et elliptique. Si $\alpha \in T^*_a$, $G \in J_1(P_k) \cap Q_{(1,k)}$ avec source $\pi_0 G = a$, but $\pi_0 G = b$, notons $\sigma_\alpha(\hat{D}^*\hat{\mathscr{D}}; G)$: $\tilde{R}_{k,b} \to \tilde{R}_{k,a}$ l'application $\sigma_\alpha(\hat{D}^*) \circ \sigma_\alpha(\hat{\mathscr{D}}; G)$, où $\sigma_\alpha(\hat{\mathscr{D}}; G)$: $\tilde{R}_{k,b} \to B^1_{k,a}$ envoie $\tilde{\xi}$ dans $\sigma(\hat{\mathscr{D}}; G)(\alpha \otimes \tilde{\xi})$ et $\sigma_\alpha(\hat{D}^*)$: $B^1_{k,a} \to \tilde{R}_{k,a}$ envoie v dans $\sigma(\hat{D}^*)(\alpha \otimes v)$. D'après la formule (2.8), on voit que si $G = j_1(\phi)(a)$, avec $a \in U$

$$\sigma(\hat{\mathscr{D}}; G) = \sigma(\hat{D})\cdot(id \otimes G^{-1})$$

et que l'ensemble V des éléments G de $J_1(P_k) \cap Q_{(1,k)}$ tels que $\sigma_\alpha(\hat{D}^*\hat{\mathscr{D}}; G)$: $\tilde{R}_{k,b} \to \tilde{R}_{k,a}$ soit un isomorphisme pour tout $\alpha \in T^*_a$ non-nul, où $a =$ source $\pi_0 G$, $b =$ but $\pi_0 G$, est ouvert et contient $j_1(\phi)(U)$. Soit $W \subset J_2(P_k) \cap Q_{(2,k)}$ l'image réciproque de V par la projection π_1. La restriction de $p(\hat{D}^*\hat{\mathscr{D}})$ à W nous donne un opérateur différentiel non-linéaire déterminé et elliptique telle que $j_2(\phi)$ soit une section de W. L'analyticité de u et ϕ, et donc de s et f, résulte des propriétés classiques des opérateurs différentiels analytiques elliptiques (voir par exemple Friedman [3]).

Théorème 7.2. *Soit R_k une équation de Lie elliptique formellement intégrable et formellement transitive dans $J_k(T)$. Alors il existe une structure de variété analytique sur X compatible à sa structure de variété différentiable par rapport à laquelle R_k est une équation analytique. Toute solution de R_k et tout* *automorphisme local de X solution de l'équation différentielle non-linéaire d'ordre k dans le fibré $X^2 \to X$, déterminée par une forme finie P_k de R_k, est analytique; la cohomologie de Spencer de R_k est nulle en degrés supérieurs à zéro.*

Démonstration. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que g_k est 2-acyclique. Pour tout $x \in X$, il existe d'après la proposition 6.1 et les théorèmes 6.2 et 7.1, sur un voisinage connexe de x une équation de Lie analytique R'_k formellement intégrable et formellement transitive dans $J_k(T)$ et une section f de Aut (X) sur un voisinage U de x telles que $\tilde{j}_{k+1}(f)\colon R_{k|U} \to R'_{k|f(U)}$ soit un isomorphisme. Montrons que la famille des sections f de Aut (X) obtenues de cette manière se recollent pour donner une structure de variété analytique sur X par rapport à laquelle R_k sera visiblement une équation analytique. Il suffit pour cela de prouver que, si f, g sont des sections de Aut (X) appartenant à cette famille définies sur un ouvert V de X, alors $f \circ g^{-1}$ est analytique par rapport à la structure de variété analytique donnée. Supposons que $\tilde{j}_{k+1}(f)\colon R_{k|V} \to R'_{k|f(V)}$, $\tilde{j}_{k+1}(g)\colon R_{k|V} \to R''_{k|g(V)}$ soient des isomorphismes, où R'_k, R''_k sont des équations de Lie analytiques formellement intégrables dans $J_k(T)$ définies sur des ouverts connexes de X; alors $\tilde{j}_{k+1}(g \circ f^{-1})\colon R'_{k|f(V)} \to R''_{k|g(V)}$ est un isomorphisme. Pour tout $y \in V$, d'après la proposition 5.5, le théorème 6.2 et le deuxième théorème fondamental pour les équations de Lie analytiques, il existe une section analytique h de Aut (X) sur un voisinage $W \subset f(V)$ de $f(y)$ telle que $h(W) \subset g(V)$ et telle que $\tilde{j}_{k+1}(h)\colon R'_{k|W} \to R''_{k|h(W)}$ soit un isomorphisme. Il faut simplement montrer que la section $f \circ g^{-1} \circ h$ de Aut (X) sur W est analytique. Or, puisque $\tilde{j}_{k+1}(f \circ g^{-1} \circ h)\colon R'_{k|W} \to R'_{k|(f \circ g^{-1} \circ h)(W)}$ est un isomorphisme, cette section de Aut (X) est une solution de l'équation différentielle non-linéaire $P'^{\natural}_{k+1}$ d'ordre $k + 1$ dans $X^2 \to X$ définie sur un ouvert de X. Comme R'_k est une équation elliptique, $P'^{\natural}_{k+1}$ est une forme finie de l'équation de Lie elliptique et analytique $R'^{\natural}_{k+1}$ dans $J_{k+1}(T)$ sur un ouvert connexe de X, l'analyticité de cette section découle de la proposition 7.1. L'analyticité des solutions de R_k et des sections de Aut (X) solutions de P_k est une conséquence de la proposition 7.1. La cohomologie de Spencer (voir par exemple [6] ou [17]) est nulle en degrés supérieurs à zéro puisque R_k est elliptique et analytique (cf. [6] ou [17]).

8. Isomorphismes d'équations de Lie formellement transitives

D'après le § 6, nous disons que deux équations de Lie R_k, R'_k dans $J_k(T)$ sont isomorphes sur un voisinage de $x \in X$ s'il existe une section f de Aut (X) sur un voisinage U de x telle que $f(x) = x$ et telle que

$$\tilde{j}_{k+1}(f)\colon R_{k|U} \to R_{k|f(U)}$$

soit un isomorphisme. Supposons X connexe et muni d'une structure de variété analytique compatible à sa structure de variété différentiable.

Le théorème 6.2, la proposition 5.5 et les théorèmes 4.1 et 7.1 nous donnent l'énoncé suivant:

Si R_k et R'_k sont des équations de Lie analytiques (resp. elliptiques) dans $J_k(T)$ formellement intégrables et formellement transitives, alors il existe un entier $k_0 \geq k$ tel que les conditions suivantes soient équivalentes:

(i) R_k et R'_k sont isomorphes sur un voisinage de x.

(ii) Il existe $\phi \in Q_{k_0+1}(x, x)$ tel que ϕ: $R_{k_0,x} \to R'_{k_0,x}$ soit un isomorphisme.

(iii) Les algèbres de Lie transitives $R_{\infty,x}$ et $R'_{\infty,x}$ sont isomorphes.

Notamment, on prend pour k_0 un entier tel que les symboles de R_{k_0} et R'_{k_0} soient 2-acycliques. Pour ces équations, le problème d'équivalence est donc réduit à une question purement algèbrique qui ne dépend que d'un nombre fini de prolongements des équations. Nous voulons maintenant généraliser ce résultat aux équations qui ne sont pas nécessairement formellement intégrables.

La généralisation du résultat précédent aux équations analytiques s'énonce ainsi:

Théorème 8.1. *Soient R_k, R'_k deux équations de Lie analytiques formellement transitives dans $J_k(T)$. Si π_0: $R_\infty \to J_0(T)$ et π_0: $R'_\infty \to J_0(T)$ sont surjectifs, alors il existe un entier $k_1 \geq k$ tel que les conditions suivantes soient équivalentes*:

(i) *R_k est isomorphe à R'_k sur un voisinage de x.*

(ii) *Il existe $\phi \in Q_{k_1+1}(x, x)$ tel que*

$$\phi(R_{k_1,x}) = R'_{k_1,x} \quad et \quad (\pi_{k+1}\phi)(R_{k,x}) = R'_{k,x} \ .$$

Le résultat analogue pour les équations elliptiques est le suivant:

Théorème 8.2. *Soient R_k, R'_k deux équations de Lie elliptiques formellement transitives dans $J_k(T)$. Si R_{k+l}, R'_{k+l} sont des fibrés vectoriels pour tout $l \geq 0$, et si π_0: $R_\infty \to J_0(T)$, π_0: $R'_\infty \to J_0(T)$ sont surjectifs, alors il existe un entier $k_1 \geq k$ tel que les conditions* (i) *et* (ii) *du théorème* 8.1 *soient équivalentes.*

Démontrons d'abord le

Lemme 8.1. *Soit R_k une équation de Lie formellement transitive dans $J_k(T)$. Si R_{k+l} est un fibré vectoriel pour tout $l \geq 0$ et si π_0: $R_\infty \to J_0(T)$ est surjectif, alors l'application π_{k+l}: $R_{k+l+m} \to R_{k+l}$ est de rang constant pour tout $l, m \geq 0$.*

Démonstration. On applique la proposition 5.4 à l'équation de Lie formellement transitive R_{k+l+m} pour déduire que son image par π_{k+l} dans $J_{k+l}(T)$ est un fibré vectoriel.

Proposition 8.1. *Soit R_k une équation de Lie analytique dans $J_k(T)$. Si π_0: $R_\infty \to J_0(T)$ est surjectif, alors R_{k+l} est un fibré vectoriel pour tout $l \geq 0$.*

Pour démontrer la proposition 8.1, nous avons besoin de la digression suivante. Soit k un corps infini et A l'anneau des séries formelles $k[[X_1, \cdots, X_n]]$. On notera $\mathrm{Der}_{A/k}$ le A-module des k-dérivations d: $A \to k$. Si M est un A-module et si $d \in \mathrm{Der}_{A/k}$, une application k-linéaire D: $M \to M$ est une d-dérivation si

$$D(fm) = df \cdot m + fDm$$

pour tout $f \in A$, $m \in M$.

Le lemme suivant nous a été communiqué par B. Malgrange.

Lemme 8.2. *Soient $d_1, \cdots, d_n$ des k-dérivations de A et D_i une d_i-dérivation d'un A-module M de type fini pour $i = 1, \cdots, n$. Si les images de $d_1, \cdots, d_n$ dans $\mathrm{Der}_{A/k} \otimes_A k$ forment une base de cet espace vectoriel sur k, alors M est un A-module libre.*

Démonstration. Soient $m_1, \cdots, m_p$ des éléments de M dont les images dans $M \otimes_A k$ sont une base de cet espace vectoriel. D'après le lemme de Nakayama, $m_1, \cdots, m_p$ engendrent M. On a donc

$$D_i m_j = \sum_{k=1}^{p} a_{ij}^k m_k \ , \qquad \text{avec } a_{ij}^k \in A \ ,$$

pour $i = 1, \cdots, n$, $j = 1, \cdots, p$. Considérons une relation

$$f_1 m_1 + \cdots + f_p m_p = 0 \ , \qquad \text{avec } f_1, \cdots f_p \in A \tag{8.1}$$

entre les générateurs de M. Alors $f_j = 0$, ou le degré de f_j est positif, pour $j = 1, \cdots, n$; en effet, si le degré de f_j est nul, alors f_j est inversible dans A et M est engendré par $p - 1$ éléments; il en est donc de même pour $M \otimes_A k$, ce qui est impossible. Supposons qu'il existe une relation non-triviale (8.1); on peut supposer que le degré m de f_1 est positif et minimal. Puisque k est infini, d'après notre hypothèse, il existe une combinaison linéaire

$$d = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i \ , \qquad \alpha_i \in k$$

telle que le degré de df_1 soit égal à $m - 1$. Si l'on pose

$$D = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i D_i \ ,$$

on obtient

$$df_1 \cdot m_1 + \cdots + df_p \cdot m_p + f_1 D m_1 + \cdots + f_p D m_p = 0 \ ,$$

d'où la relation

$$\sum_{j,l=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} (df_j + f_l \alpha_i a_{il}^j) m_j = 0 \ . \tag{8.2}$$

Comme le degré de f_j est $\geq m$, le degré de

$$\sum_{l=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} f_l \alpha_i a_{il}^j$$

est aussi $\geq m$; dans (8.2), le coefficient de m_1 est donc de degré $m - 1$, ce qui est une contradiction. Par conséquent, M est libre.

Si 1 est le fibré trivial de dimension 1, on écrit $A = J_\infty(1)_x$ et l'anneau A est isomorphe à $\boldsymbol{R}[[X_1, \cdots, X_n]]$. Si E est un fibré vectoriel, $J_\infty(E)_x$ est un A-module de type fini; si F est un autre fibré vectoriel, alors

$$J_\infty(E \otimes F)_x = J_\infty(E)_x \otimes_A J_\infty(F)_x .$$

Si R_k est une équation différentielle dans $J_k(T)$, on pose pour $l \geq 0$ et $x \in X$

$$\hat{R}_{k+l,x} = J_\infty(J_{k+l}(T))_x \cap J_\infty(J_l(R_k))_x$$

en considérant $J_\infty(J_{k+l}(T))_x$ comme un sous-espace de $J_\infty(J_l(J_k(T)))_x$. Soit F le quotient $J_k(T)/R_k$ et $\varphi\colon J_k(T) \to F$ la projection naturelle. Il est clair que la suite de A-modules

$$0 \to \hat{R}_{k+l,x} \to J_\infty(J_{k+l}(T))_x \xrightarrow{J_\infty(p_l(\varphi))} J_\infty(J_l(F))_x \to \hat{S}_{l,x} \to 0$$

est exacte (cf. [4]), où $\hat{S}_{l,x}$ est le conoyau de $J_\infty(p_l(\varphi))$. Comme A est un anneau noethérien, $\hat{R}_{k+l,x}$ et $\hat{S}_{l,x}$ sont des A-modules de type fini.

L'opérateur différentiel $D\colon J_m(\mathscr{T}) \to \mathscr{T}^* \otimes J_{m-1}(\mathscr{T})$ induit

$$D\colon J_\infty(J_m(T))_x \to J_\infty(T^*)_x \otimes_A J_\infty(J_{m-1}(T))_x ,$$

et l'on voit facilement que les $\hat{R}_{k+l,x}$ se déterminent par récurrence de la manière suivante. D'abord $\hat{R}_{k,x} = J_\infty(R_k)_x$; puis un élément $u \in J_\infty(J_{k+l+1}(T))_x$ appartient à $\hat{R}_{k+l+1,x}$ si et seulement si $J_\infty(\pi_{k+l})u \in \hat{R}_{k+l,x}$ et $Du \in J_\infty(T^*)_x \otimes_A \hat{R}_{k+l,x}$.

Pour $m \geq 0$, l'injection canonique $\lambda_m\colon J_{k+l+m}(T) \to J_m(J_{k+l}(T))$ induit une application $J_\infty(T)_x \to J_\infty(J_{k+l}(T))_x$; il est facile de voir que l'image de $R_{\infty,x}$ par cette application est contenue dans $\hat{R}_{k+l,x}$ et que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} R_{\infty,x} & \longrightarrow & \hat{R}_{k+l,x} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_0} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \gamma} \\ J_0(T)_x & \xrightarrow{\text{id}} & J_0(T)_x \end{array}$$

est commutatif, où γ est l'application composée

$$\hat{R}_{k+l,x} \longrightarrow J_\infty(J_{k+l}(T))_x \xrightarrow{J_\infty(\pi_0)} J_\infty(J_0(T))_x \xrightarrow{\pi_0} J_0(T)_x .$$

Soit $\tilde{J}_{(l,k)}(T)$ le fibré des (l, k)-jets de champs de vecteurs bidiagonaux isomorphe à $J_l(J_k(T))$. On notera

$$\nu\colon \tilde{J}_{(l,k)}(T) \to J_l(J_k(T))$$

l'isomorphisme canonique et on définit $\tilde{\lambda}_l : \tilde{J}_{k+l}(T) \to \tilde{J}_{(l,k)}(T)$ par $\tilde{\lambda}_l = \nu^{-1}\lambda_l\nu$ (cf. [10, § 4]). On vérifie que $\tilde{J}_{(l,k)}(\mathscr{T})$ est un faisceau d'algèbres de Lie sur X, et que l'on a un crochet

$$[\tilde{J}_{(l,k+1)}(\mathscr{T}), J_l(J_k(\mathscr{T}))] \subset J_l(J_k(\mathscr{T})) ,$$

d'où un crochet

$$[\tilde{J}_{k+l+1}(\mathscr{T}), J_l(J_k(\mathscr{T}))] \subset J_l(J_k(\mathscr{T})) ,$$

qui étend le crochet

$$[\tilde{J}_{k+l+1}(\mathscr{T}), J_{k+l}(\mathscr{T})] \subset J_{k+l}(\mathscr{T}) .$$

On vérifie la formule

$$[\tilde{\xi}, \eta] = \nu([\tilde{\lambda}_l(\tilde{\xi}), \nu^{-1}\eta] + \tilde{\lambda}_l(\pi_0(\eta) \barwedge \tilde{D}\tilde{\xi})) \tag{8.3}$$

pour $\tilde{\xi} \in \tilde{J}_{k+l+1}(\mathscr{T})$, $\eta \in J_l(J_k(\mathscr{T}))$, où $\pi_0(\eta) \in J_0(\mathscr{T})$.

Nous avons les crochets suivants induits par les crochets habituels

$$[J_\infty(J_{m+1}(T))_x, J_\infty(J_{m+1}(T))_x] \subset J_\infty(J_m(T))_x ,$$
$$[J_\infty(\tilde{J}_{m+1}(T))_x, J_\infty(J_m(T))_x] \subset J_\infty(J_m(T))_x ,$$
$$[J_\infty(\tilde{J}_m(T))_x, J_\infty(\tilde{J}_m(T))_x] \subset J_\infty(\tilde{J}_m(T))_x ,$$
$$[J_\infty(\tilde{J}_{k+l+1}(T))_x, J_\infty(J_l(J_k(T)))_x] \subset J_\infty(J_l(J_k(T)))_x .$$

Si R_k est une équation de Lie, notons $\tilde{J}_l(\tilde{R}_k)$ le sous-fibré $\nu^{-1}J_l(R_k)$ de $\tilde{J}_{(l,k)}(T)$; alors

$$[\tilde{J}_l(\tilde{\mathscr{R}}_k), \tilde{J}_l(\tilde{\mathscr{R}}_k)] \subset \tilde{J}_l(\tilde{\mathscr{R}}_k) .$$

Ecrivons

$$\hat{\hat{R}}_{k+l,x} = J_\infty(\nu^{-1})\hat{R}_{k+l,x} .$$

On vérifie facilement que, pour $l \geq 0$

$$[\hat{R}_{k+l+1,x}, \hat{R}_{k+l+1,x}] \subset \hat{R}_{k+l,x} ,$$
$$[\hat{\hat{R}}_{k+l+1,x}, \hat{R}_{k+l,x}] \subset \hat{R}_{k+l,x} ,$$
$$[\hat{\hat{R}}_{k+l,x}, \hat{\hat{R}}_{k+l,x}] \subset \hat{\hat{R}}_{k+l,x} .$$

De (8.3), il suit que

$$[\hat{\hat{R}}_{k+l+1,x}, J_\infty(J_l(R_k))_x] \subset J_\infty(J_l(R_k))_x .$$

Pour $\tilde{\xi} \in \hat{\hat{R}}_{k+l+1,x}$, on a donc une application

$$\mathscr{L}(\tilde{\xi})\colon J_\infty(J_l(F))_x \to J_\infty(J_l(F))_x$$

telle que

$$J_\infty(J_l(\varphi))\mathscr{L}(\tilde{\xi})\eta = \mathscr{L}(\tilde{\xi})J_\infty(J_l(\varphi))\eta$$

pour $\eta \in J_\infty(J_l(J_k(T)))_x$. Donc le diagramme

$$\begin{array}{ccc} J_\infty(J_{k+l}(T))_x & \xrightarrow{J_\infty(p_l(\varphi))} & J_\infty(J_l(F))_x \\ \downarrow{\scriptstyle \mathscr{L}(\tilde{\xi})} & & \downarrow{\scriptstyle \mathscr{L}(\tilde{\xi})} \\ J_\infty(J_{k+l}(T))_x & \xrightarrow{J_\infty(p_l(\varphi))} & J_\infty(J_l(F))_x \end{array}$$

est commutatif, d'où une application

$$\mathscr{L}(\tilde{\xi})\colon \hat{S}_{l,x} \to \hat{S}_{l,x} ,$$

qui est une $\mathscr{L}(\tilde{\eta})$-dérivation du A-module $\hat{S}_{l,x}$, où $\tilde{\eta} = J_\infty(\pi_0)\tilde{\xi} \in J_\infty(T)_x$.

Démontrons maintenant la proposition 8.1. Appliquons le lemme 8.2 au A-module $\hat{S}_{l,x}$ de type fini. Puisque $\pi_0\colon R_{\infty,x} \to J_0(T)_x$ est surjectif, il existe des éléments $\xi_1, \cdots, \xi_n \in \hat{R}_{k+l+1,x}$ tels que $\gamma(\xi_1), \cdots, \gamma(\xi_n)$ forment une base de $J_0(T)_x$. Posons $\tilde{\xi}_i = J_\infty(\nu^{-1})\xi_i$ et $\tilde{\eta}_i = J_\infty(\pi_0)\tilde{\xi}_i$; alors $\mathscr{L}(\tilde{\xi}_i)$ est une $\mathscr{L}(\tilde{\eta}_i)$-dérivation de $\hat{S}_{l,x}$ et $\pi_0\tilde{\eta}_1, \cdots, \pi_0\tilde{\eta}_n$ est une base de T_x. Les hypothèses du lemme 8.2 sont donc vérifiées et on conclut que $\hat{S}_{l,x}$ est un A-module libre.

Soit $\mathcal{O}_{X,\omega}$ le faisceau de germes de fonctions analytiques sur X à valeurs réelles et notons $\mathscr{E}_\omega$ le faisceau de germes de sections analytiques d'un fibré vectoriel analytique E. La suite

$$J_{k+l}(\mathscr{T})_\omega \xrightarrow{p_l(\varphi)} J_l(\mathscr{F})_\omega \longrightarrow \mathscr{S}_{l,\omega} \longrightarrow 0$$

est exacte, où $\mathscr{S}_{l,\omega}$ est le conoyau de $p_l(\varphi)$, et

$$\hat{S}_{l,x} \simeq \mathscr{S}_{l,\omega,x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,\omega,x}} A .$$

Comme $\hat{S}_{l,x}$ est un A-module libre et A un $\mathcal{O}_{X,\omega,x}$-module fidèlement plat, on conclut que $\mathscr{S}_{l,\omega,x}$ est un $\mathcal{O}_{X,\omega,x}$-module plat, donc libre, pour tout $x \in X$. Puisque $\mathscr{S}_{l,\omega}$ est un $\mathcal{O}_{X,\omega}$-module cohérent, d'après le théorème des syzygies, $\mathscr{S}_{l,\omega}$ est localement libre; par conséquent $p_l(\varphi)$ est de rang constant et R_{k+l} est un fibré vectoriel.

Démontrons maintenant les théorèmes 8.1 et 8.2 en même temps. Il suffit de montrer que la condition (ii) implique la condition (i). D'après la proposition 8.1 et le lemme 8.1, on peut appliquer le théorème 1 de [6, I]; il existe donc des entiers $m_0 \geq k$, $l_0 \geq 0$ tels que les équations de Lie

$$R_{m_0}^{(l_0)} = \pi_{m_0}(R_{m_0+l_0}) \quad \text{et} \quad R_{m_0}'^{(l_0)} = \pi_{m_0}(R'_{m_0+l_0})$$

dans $J_{m_0}(T)$ soient formellement intégrables et aient les mêmes solutions formelles que R_k et R'_k respectivement; on peut supposer aussi que les symboles de $R_{m_0}^{(l_0)}$ et de $R_{m_0}'^{(l_0)}$ sont 2-acycliques. Ces équations sont donc formellement transitives. Posons $k_1 = m_0 + l_0$; si $\phi \in \mathscr{Q}_{k_1+1}(x, x)$ vérifie la condition (ii), alors

$$(\pi_{m_0+1}\phi)(R_{m_0,x}^{(l_0)}) = R_{m_0,x}'^{(l_0)} .$$

D'autre part, si R_k et R'_k sont elliptiques, alors $R_{m_0}^{(l_0)}$ et $R_{m_0}'^{(l_0)}$ le sont aussi. On sait donc que, sous nos hypothèses, il existe une section f de $\mathrm{Aut}(X)$ sur un voisinage U de x tel que

$$\tilde{j}_{m_0+1}(f) : R_{m_0|U}^{(l_0)} \to R_{m_0|f(U)}'^{(l_0)}$$

soit un isomorphisme. On peut supposer que

$$\tilde{j}_{m_0+1}(f)(x) = \pi_{m_0+1}\phi$$

(cf. § 6). Soit ω une R_{m_0+1}-connexion sans courbure sur un voisinage de x; alors $\omega' = \tilde{j}_{k+1}(f)(\pi_{k+1}\omega)$ est une R'_{k+1}-connexion sans courbure sur un voisinage de x, d'après (3.10). Sur un voisinage de x, les fibrés R'_k et $\tilde{j}_{k+1}(f)(R_k)$ sont stables par la dérivée covariante induite par ω' dans $J_k(T)$. D'après notre hypothèse, nous avons

$$\tilde{j}_{k+1}(f)(R_{k,x}) = R'_{k,x} ;$$

donc d'après la proposition 3.2, sur un voisinage de x nous avons l'égalité

$$\tilde{j}_{k+1}(f)(R_k) = R'_k ,$$

ce qui démontre les théorèmes 8.1 et 8.2.

Bibliographie

[1] E. Cartan, *Sur la structure des groupes infinis de transformations*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **21** (1904) 153–206; **22** (1905) 219–308; Œuvres complètes: II, vol. 2, *Groupes infinis, systèmes différentiels, théories d'équivalence,* Gauthier-Villars, Paris, 1953, 571–714.

[2] ——, *La structure des groupes infinis,* Œuvres complètes: II, vol. 2, Gauthier-Villars, Paris, 1953, 1335–1384.

[3] A. Friedman, *On the regularity of solutions of non-linear elliptic and parabolic systems of partial differential equations,* J. Math. Mech. **7** (1958) 43–59.

[4] H. Goldschmidt, *Existence theorems for analytic linear partial differential equations,* Ann. of Math. **86** (1967) 246–270.

[5] ——, *Integrability criteria for systems of non-linear partial differential equations,* J. Differential Geometry **1** (1967) 269–307.

[6] ——, *Prolongations of linear partial differential equations*: I. *A conjecture of Elie Cartan*; II. *Inhomogeneous equations,* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **1** (1968) 417–444; 617–625.

[7] V. W. Guillemin & S. Sternberg, *An algebraic model of transitive differential geometry,* Bull. Amer. Math. Soc. **70** (1964) 16–47.

[8] ——, *Deformation theory of pseudogroup structures,* Mem. Amer. Math. Soc. No. 64, 1966.

[9] B. Malgrange, *Pseudo-groupes de Lie elliptiques,* Séminaire J. Leray, Collège de France, 1969–1970.

[10] ——, *Equations de Lie.* I, II, J. Differential Geometry **6** (1972) 503–522, **7** (1972) 117–141.

[11] N. Van Quê, *Du prolongement des espaces fibrés et des structures infinitésimales,* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **17** (1967) 157–223.

[12] H. K. Nickerson, *On differential operators and connections,* Trans. Amer. Math. Soc. **99** (1961) 509–539.

[13] D. S. Rim, *Deformations of transitive Lie algebras,* Ann. of Math. **83** (1966) 339–357.

[14] I. M. Singer & S. Sternberg, *The infinite groups of Lie and Cartan*: I. *The transitive groups,* J. Analyse Math. **15** (1965) 1–114.

[15] D. C. Spencer, *Deformation of structures on manifolds defined by transitive, continuous pseudogroups.* I, II, Ann. of Math. **76** (1962) 306–445.

[16] ——, *Deformation of structures on manifolds defined by transitive, continuous pseudogroups.* III, Ann. of Math. **81** (1965) 389–450.

[17] ——, *Overdetermined systems of linear partial differential equations,* Bull. Amer. Math. Soc. **75** (1969) 179–239.

[18] ——, *On deformation of pseudogroup structures,* Global Analysis, Papers in Honor of K. Kodaira, Princeton University Press, Princeton, 1969, 367–395.

INSTITUT DES HAUTES ETUDES SCIENTIFIQUES
UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE DE GRENOBLE