J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
18 (1983) 755–782

# VARIÉTÉS KÄHLERIENNES DONT LA PREMIÈRE CLASSE DE CHERN EST NULLE

ARNAUD BEAUVILLE

## Introduction

Ce travail comprend deux parties. La première expose la structure des variétés kähleriennes compactes avec $c_1 = 0$, suivant des idées de F. Bogomolov [2], et d'autres auteurs (e.g. S. Kobayashi et M. L. Michelsohn [13]). D'après les théorèmes de de Rham et de Berger, les variétés kähleriennes compactes Ricci-plates se décomposent (à un revêtement étale près) en produits de trois types primitifs: les tores complexes et les variétés d'holonomie $SU(m)$ ou $Sp(r)$. Le théorème de Yau, joint à la méthode de Bochner, permet de traduire ce résultat en un théorème de décomposition des variétés compactes de type kählerien avec $c_1 = 0$, indépendant du choix d'une métrique. Dans cette décomposition apparaissent, outre les tores complexes, d'une part des variétés projectives à fibré canonique trivial, n'admettant de formes holomorphes non nulles qu'en degré maximum (tous les exemples usuels de variétés projectives simplement connexes avec $c_1 = 0$ rentrent dans cette catégorie); et d'autre part des variétés symplectiques, c'est-à-dire munies d'une 2-forme holomorphe non dégénérée en tout point.

La seconde partie est consacrée aux variétés kähleriennes symplectiques irréductibles (pour un géomètre différentiel, ce sont les variétés riemanniennes compactes admettant comme groupe d'holonomie le groupe symplectique). Les surfaces $K3$ ont longtemps fourni le seul exemple connu de variétés de ce type;[1] une variété de dimension 4 a été récemment construite par A. Fujiki. En généralisant la construction de Fujiki, nous donnons ici deux séries d'exemples en toute dimension. Nous étudions ensuite les périodes des 2-formes sur les variétés symplectiques. La situation est très analogue à celle des surfaces $K3$: l'espace $H^2(X, \mathbf{C})$ est muni d'une forme quadratique (définie sur $\mathbf{Z}$), et l'application des périodes est un isomorphisme local de l'espace des modules sur la quadrique de $\mathbf{P}(H^2(X, \mathbf{C}))$ définie par cette forme quadratique. On

Received February 1, 1983.

[1] L'article [3] énonce qu'il n'en existe pas d'autres, mais la démonstration contient une erreur.

utilise ensuite ce résultat pour étudier les déformations des exemples précédents, ce qui fait apparaître de nouvelles variétés kähleriennes symplectiques.

Les variétés kähleriennes symplectiques semblent fournir la généralisation naturelle, en toute dimension, des surfaces $K3$. Elles restent cependant très mystérieuses (ne serait-ce que par le peu d'exemples connu) et me paraissent mériter de nouveaux efforts.

Indiquons pour finir que nous avons adopté la convention de [17]: une *variété kählerienne* est munie d'une métrique kählerienne déterminée, tandis qu'une variété complexe pouvant être munie d'une métrique kählerienne est dite *de type kählerien*. D'autre part, une variété est toujours supposée *connexe*.

## Première Partie. Structures des Variétés Kähleriennes avec $C_1 = 0$

### 1. Rappels sur la représentation d'holonomie

Je résume dans ce paragraphe les résultats classiques sur l'holonomie dont j'aurai besoin; pour les démonstrations, je renvoie par exemple à [11].

Soit $(M, g)$ une variété riemannienne, et soient $p, q$ deux points de $M$. Le transport parallèle associe à tout chemin $\gamma$ sur $M$ joignant $p$ à $q$ une isométrie $\varphi_\gamma\colon T_p(M) \to T_q(M)$. Notons en particulier $\Omega(p)$ l'ensemble des lacets en $p$, et $\Omega_0(p)$ le sous-ensemble de $\Omega(p)$ formé des lacets homotopes au lacet trivial. L'application $\varphi\colon \Omega(p) \to O(T_p(M))$ a pour image un sous-groupe $H$ du groupe orthogonal $O(T_p(M))$, appelé *groupe d'holonomie de $M$ en $p$*. L'image par $\varphi$ de $\Omega_0(p)$ est la composante neutre $H_0$ de $H$; c'est un *sous-groupe de Lie compact* (connexe) de $SO(T_p(M))$, appelé *groupe d'holonomie restreinte de $M$ en $p$*.

Puisque $M$ est supposée connexe, les représentations d'holonomie aux différents points de $M$ sont isomorphes. On parlera donc de la représentation d'holonomie de $M$ ou du sous-groupe d'holonomie $H \subset O(n)$.

On dit que la variété $(M, g)$ est *irréductible* si sa représentation d'holonomie est irréductible.

**Théorème** (*de Rham*). *Soit $(M, g)$ une variété riemannienne complète simplement connexe. Alors $M$ est isométrique à un produit $M_0 \times M_1 \times \cdots \times M_k$, où $M_0$ est un espace euclidien et où les $M_i$ sont irréductibles. Cette décomposition est unique (à l'ordre près). Soit $p = (p_0, \cdots, p_k)$ un point de $M$, et soit $H_i$ l'holonomie de $M_i$ en $p_i$; alors le groupe d'holonomie de $M$ en $p$ est le produit $H_0 \times \cdots \times H_k$, agissant sur $T_p(M) = T_{p_0}(M_0) \oplus \cdots \oplus T_{p_k}(M_k)$ par la représentation produit.*

Si $M$ est une variété kählerienne, les variétés $M_i$ sont kähleriennes et l'isométrie $M \to \prod M_i$ est biholomorphe.

**Remarque.** L'assertion d'unicité à l'ordre près a la signification précise suivante: soient $u$: $M \to \prod_{i=0}^{k} M_i$ et $v$: $M \to \prod_{j=0}^{l} M'_j$ deux isométries du type précédent. On a alors $l = k$; il existe une permutation $\sigma$ de $[0, k]$ (telle que $\sigma(0) = 0$) et des isométries $w_i$: $M_{\sigma i} \to M'_i$ de façon que

$$vu^{-1}(m_0, \cdots, m_k) = (w_0(m_{\sigma 0}), \cdots, w_k(m_{\sigma k})) \quad \text{pour } m_i \in M_i.$$

Dans la suite, l'assertion d'" unicité à l'ordre près" d'une décomposition aura toujours cette signification.

La détermination des représentations d'holonomie est donc ramenée à celle des représentations irréductibles. La liste de celles-ci a été établie par Berger ([1], cf. aussi [15]):

**Théorème** (*Berger*). *Soit $(M, g)$ une variété riemannienne de dimension $n$; on suppose que $M$ n'est pas localement symétrique. Alors le groupe d'holonomie restreinte $H_0 \subset SO(n)$ est isomorphe à un des sous-groupes suivants de $SO(n)$*:

| | | |
|---|---|---|
| $SO(n)$; | $U(m)\quad (n = 2m)$; | $SU(m)\quad (n = 2m)$; |
| $Sp(r)\quad (n = 4r)$; | $Sp(1) \cdot Sp(r)\quad (n = 4r)$; | |
| $Spin(9)\quad (n = 16)$; | $Spin(7)\quad (n = 8)$; | $G_2\quad (n = 7)$. |

L'intérêt de cet énoncé provient de son interprétation géométrique: toute restriction sur le groupe d'holonomie se traduit par l'existence de champs de tenseurs parallèles. Rappelons qu'un champ de tenseur $t$ sur $M$ est *parallèle* si quel que soit le chemin $\gamma$ joignant $p$ à $q$, l'isomorphisme de transport parallèle $\varphi_\gamma$ fait correspondre $t(q)$ à $t(p)$. Le tenseur $t(p)$ est alors invariant par holonomie; inversement tout tenseur en $p$ invariant par holonomie se prolonge de manière unique en tout point par transport parallèle. Autrement dit:

**Principe d'holonomie.** *Soient $(M, g)$ une variété riemannienne, $p$ un point de $M$. La donnée d'un champ de tenseurs parallèle sur $M$, d'un type fixé, est équivalente à celle d'un tenseur en $p$ du type considéré, invariant sous l'action du groupe d'holonomie en $p$.*

Nous allons maintenant appliquer ce principe aux trois cas du théorème de Berger qui correspondent à des variétés kähleriennes.

**Exemple 1.** $H = U(m)$.

Le groupe $U(m)$ s'identifie au sous-groupe de $O(2m)$ formé des opérateurs qui préservent une structure complexe $J \in O(2m)$ fixée sur $\mathbf{R}^{2m}$. D'après le principe d'holonomie, on a $H \subset U(m)$ si et seulement s'il existe sur $M$ une structure presque complexe parallèle pour laquelle $g$ est hermitienne. Une telle structure est intégrable, et la condition de parallélisme signifie que la métrique est kählerienne (cf. [11, IX, Théorème 4.3]). Par conséquent, *on a $H \subset U(m)$ si et seulement si $M$ admet une structure complexe pour laquelle la métrique $q$ soit kählerienne.*

**Exemple 2.** $H = SU(m)$.

Supposons la variété $(M, g)$ kählerienne, de dimension $m$. Le groupe $SU(m)$ est le sous-groupe de $U(m)$ formé des opérateurs préservant une forme $m$-linéaire alternée (complexe) non nulle sur $\mathbf{C}^m$. D'après le principe d'holonomie, on a $H \subset SU(m)$ si et seulement s'il existe une forme de type $(m, 0)$ sur $M$, parallèle et non nulle. Une telle forme est fermée, donc holomorphe; autrement dit, *on a $H \subset SU(m)$ si et seulement s'il existe une $m$-forme holomorphe sur $M$, parallèle et non nulle.*

On en déduit aussitôt qu'on a $H_0 \subset SU(m)$ si et seulement si le fibré canonique $\Omega_X^m$, muni de la métrique déduite de $g$, est plat; or sa courbure n'est autre que la courbure de Ricci de $g$. *On a donc $H_0 \subset SU(m)$ si et seulement si la variété kählerienne $(M, g)$ est Ricci-plate.*

**Exemple 3.** $H = Sp(r)$.

Le groupe $Sp(r)$ est le groupe des automorphismes $\mathbf{H}$-linéaires de $\mathbf{H}^r$ préservant une forme hermitienne quaternionienne $q$. Notant $(I, J, K)$ la base usuelle des quaternions, munissons $\mathbf{H}^r$ de la structure complexe définie par $I$; on peut écrire $q = h + \varphi J$, où $h$ est une forme hermitienne complexe et $\varphi$ une forme $\mathbf{C}$-bilinéaire alternée. Ainsi $Sp(r)$ s'identifie au sous-groupe de $U(2r)$ formé des opérateurs qui préservent la forme $\varphi$. On en déduit comme ci-dessus qu'*on a $H \subset Sp(r)$ si et seulement si $M$ admet une structure complexe pour laquelle la métrique est kählerienne et une 2-forme holomorphe parallèle et non dégénérée en tout point* (comme forme alternée sur l'espace tangent à $M$ muni de sa structure complexe).

Une variété riemannienne $(M, g)$ étant fixée, on peut considérer l'ensemble des structures complexes sur $M$ pour lesquelles $g$ est kählerienne; d'après le principe d'holonomie, cela revient à chercher les éléments de $SO(2m)$, de carré $(-1)$, commutant avec $H$. Dans les exemples 1 et 2, le commutant de la représentation d'holonomie est le corps des complexes; il n'y a donc, à conjugaison près, qu'une structure complexe possible. Dans l'exemple 3, le commutant est le corps des quaternions; l'ensemble des structures complexes pour lesquelles $g$ est kählerienne s'identifie à l'ensemble des quaternions de carré $(-1)$ (c'est-à-dire des quaternions purs de norme 1). Dans ce qui suit nous munirons toujours ces variétés d'une structure complexe fixée.

## 2. Variétés kähleriennes compactes Ricci-plates

Nous nous intéressons dans cet article aux variétés complexes compactes admettant une métrique kählerienne à courbure de Ricci nulle; rappelons que le théorème de Yau [19] entraîne que ces variétés sont précisément les variétés compactes de type kählerien dont la première classe de Chern s'annule.

Soit $M$ une variété kählerienne complète Ricci-plate. D'après les théorèmes de de Rham et de Berger (§1), le revêtement universel $\tilde{M}$ de $M$ est isomorphe à un produit $\mathbf{C}^k \times \prod V_i \times \prod X_j$, où les $V_i$ (resp. les $X_j$) admettent comme groupe d'holonomie le groupe spécial unitaire (resp. le groupe symplectique). Dans le cas où $M$ est *compacte*, on peut préciser davantage.

**Théorème 1.** *Soit $X$ une variété kählerienne compacte dont la courbure de Ricci est nulle.*

(1) *Le revêtement universel $\tilde{X}$ est isomorphe (comme variété kählerienne) à un produit $\mathbf{C}^k \times \prod_i V_i \times \prod_j X_j$, où $\mathbf{C}^k$ est muni de la métrique kählerienne standard, $V_i$ est une variété kählerienne compacte simplement connexe, de groupe d'holonomie $SU(m_i) \subset SO(2m_i)$, $X_j$ est une variété kählerienne compacte simplement connexe, de groupe d'holonomie $Sp(r_j) \subset SO(4r_j)$. Cette décomposition est unique (à l'ordre près).*

(2) *Il existe un revêtement étale fini $X'$ de $X$ isomorphe comme variété kählerienne au produit $T \times \prod V_i \times \prod X_j$, où $T$ est un tore complexe.*

Il en résulte par exemple que le groupe $\pi_1(X)$ est extension par $\mathbf{Z}^{2k}$ d'un groupe fini.

Démontrons (1). Le théorème de de Rham (§1) fournit une décomposition $\tilde{X} = \mathbf{C}^k \times \prod_i M_i$, où les variétés $M_i$ sont irréductibles. Le théorème de Cheeger-Gromoll [6] assure de plus que les $M_i$ sont compactes. Puisque la courbure de Ricci de $M_i$ est nulle, son groupe d'holonomie $H_i$ est contenu dans $SU(m_i)$. Or $M_i$ n'est pas symétrique (la courbure de Ricci d'un espace riemannien symétrique compact est positive non dégénérée; cf. [11, XI, Théorème 8.6]). Le théorème de Berger laisse donc comme seules possibilités $H_i = SU(m_i)$ ou $H_i = Sp(r_i)$.

Pour démontrer (2), nous utiliserons le lemme suivant.

**Lemme.** *Soit $M$ une variété kählerienne compacte, simplement connexe, dont la courbure de Ricci est nulle. Le groupe des automorphismes de $M$ est discret, et le sous-groupe des automorphismes isométriques est fini.*

Le groupe $G$ des automorphismes complexes de $M$ est un groupe de Lie complexe dont l'algèbre de Lie s'identifie à l'espace des champs de vecteurs holomorphes sur $M$. Soit $X$ un tel champ; d'après le principe de Bochner ([18, p. 142], cf. plus bas) $X$ est parallèle. Pour tout point $p$ de $M$, le vecteur $X(p)$ est invariant par le groupe d'holonomie en $p$; or il résulte de (1) que celui-ci ne laisse invariant aucun vecteur non nul. On a donc $X = 0$, ce qui prouve que le groupe $G$ est discret; le sous-goupe compact de $G$ formé des automorphismes isométriques est donc fini.

Démontrons maintenant (ii). Posons $M = \prod_i V_i \times \prod_j X_j$. Le groupe fondamental de $X$ agit sur $\mathbf{C}^k \times M$ par automorphismes isométriques. Soit $u$ un tel automorphisme; en raison de l'unicité de la décomposition de de Rham, il existe des automorphismes isométriques $u_1$ de $\mathbf{C}^k$ et $u_2$ de $M$ tels qu'on ait

$$u(z, m) = (u_1(z), u_2(m)) \quad \text{pour } z \in \mathbf{C}^k, m \in M.$$

Considérons l'homomorphisme $u \mapsto u_2$ de $\pi_1(X)$ dans le groupe fini des automorphismes isométriques de $M$; soit $\Gamma$ son noyau. Le groupe $\Gamma$ opère librement sur $\mathbf{C}^k$, et le quotient $\mathbf{C}^k/\Gamma$ est compact. Soit $\Gamma'$ l'ensemble des translations de $\Gamma$; le théorème de Bieberbach affirme que $\Gamma'$ est un sous-groupe d'indice fini de $\Gamma$. La variété compacte $T = \mathbf{C}^k/\Gamma'$ est alors un tore complexe, et $T \times M$ est un revêtement fini de $X$, d'où (ii).

Dans le cas des variétés kähleriennes *compactes*, l'holonomie s'interprète purement en termes de géométrie complexe, sans référence à la métrique. Cela tient d'une part au théorème de Yau, d'autre part au résultat suivant (cf. [18, p. 142]).

**Principe de Bochner.** *Soit $X$ une variété kählerienne compacte dont la courbure de Ricci est nulle. Alors tout champ de tenseurs holomorphe sur $X$ est parallèle.*

La démonstration repose sur la formule suivante (qu'on obtient par un calcul sans difficultés): si $\tau$ est un champ de tenseurs sur $X$, on a

$$\Delta\left(\|\tau\|^2\right) = \|D\tau\|^2.$$

On en déduit que le laplacien de la fonction $\|\tau\|^2$ est positif, donc nul, ce qui entraîne $D\tau = 0$.

**Corollaire.** *Soit $x \in X$, et soit $H$ l'holonomie de $X$ en $x$. L'application $\omega \mapsto \omega(x)$ induit un isomorphisme de $H^0(X, \Omega_X^p)$ sur le sous-espace de $\Omega^p(x)$ formé des $p$-formes invariantes par $H$.*

Nous allons appliquer ce corollaire aux deux cas qui nous intéressent.

## 3. Variétes spéciales unitaires

**Proposition 1.** *Soit $X$ une variété kählerienne compacte, de dimension $m \geqslant 3$, dont le groupe d'holonomie est $SU(m)$.*

(i) *$X$ est projective.*

(ii) *On a $H^0(X, \Omega_X^p) = 0$ pour $0 < p < m$, et $\chi(\mathcal{O}_X) = 1 + (-1)^m$.*

Soit $x \in X$. La représentation de $SU(m)$ sur $\Omega^p(x)$ est isomorphe à $\Lambda^p \check{\sigma}$, où $\check{\sigma}$ désigne la représentation contragrédiente de la représentation identique de $SU(m)$ dans $\mathbf{C}^m$. Elle est irréductible pour tout $p$, et non triviale pour $0 < p < m$; pour ces valeurs de $p$, elle ne contient donc pas de sous-espace invariant, d'où la nullité de $H^0(X, \Omega_X^p)$. On en déduit la valeur de $\chi(\mathcal{O}_X)$ par symétrie de Hodge. Enfin une variété kählerienne compacte avec $H^{2,0} = 0$ est projective: en effet on peut approcher arbitrairement la forme de Kähler par une forme harmonique positive dont la classe appartient à $H^2(X, \mathbf{Q})$; puisque $H^{2,0} = 0$, cette forme est de type $(1, 1)$, donc un de ses multiples définit un plongement de $X$ dans l'espace projectif.

**Remarque.** On a en fait un résultat plus fort. Notons $\omega$ un élément non nul de $H^0(X, \Omega_X^m)$, et considérons-le comme un tenseur antisymétrique dans $H^0(X, (\Omega_X^1)^{\otimes m})$. Alors *l'algèbre* $\oplus_p H^0(X, (\Omega_X^1)^{\otimes p})$ *est engendrée par* $\omega$. Cela résulte comme ci-dessus du principe de Bochner, joint à un énoncé classique de théorie des invariants: les seuls tenseurs covariants sur $\mathbf{C}^m$ invariants par $SU(m)$ sont les polynômes en le déterminant.

Inversement, la propriété (ii) de la Proposition 1 permet de caractériser les variétés spéciales unitaires:

**Proposition 2.** *Soit $X$ une variété compacte de type kählerien, de dimension $m$. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(a) *$X$ admet une métrique kählerienne dont le groupe d'holonomie est $SU(m)$*;

(b) *Le fibré canonique de $X$ est trivial, et on a $H^0(X', \Omega_{X'}^p) = 0$ pour $0 < p < m$ et pour tout revêtement étale fini $X'$ de $X$.*

*Lorsque ces conditions sont satisfaites, le groupe $\pi_1(X)$ est fini.*

On a vu que, sous l'hypothèse (a), le fibré canonique de $X$ est trivial (§1, Exemple 2) et $H^0(X, \Omega_X^p)$ est nul pour $0 < p < m$ (Proposition 1). Si $X'$ est un revêtement étale de $X$, son groupe d'holonomie est encore $SU(m)$, d'où l'assertion (a) $\Rightarrow$ (b).

Supposons la condition (b) satisfaite. Le théorème de Yau [19] implique l'existence d'une métrique kählerienne Ricci-plate sur $X$. D'après le théorème 1, il existe un revêtement fini $X'$ de $X$ isomorphe à un produit $T \times \prod V_i \times \prod X_j$. La condition $H^0(X', \Omega_{X'}^p) = 0$ pour $0 < p < m$ entraîne que $X'$ n'est autre que l'un des $V_i$ (ou une surface $K3$ si $m = 2$). On a donc $H_0 = SU(m)$; comme $H$ est contenu dans $SU(m)$ (§1, Exemple 2), on obtient $H = SU(m)$.

Enfin $X'$ est simplement connexe, ce qui prouve que $\pi_1(X)$ est fini.

**Remarque.** *Si $m$ est pair, $X$ est simplement connexe*; en effet, avec les notations précédentes, on a $\chi(\mathcal{O}_{X'}) = 2 = \chi(\mathcal{O}_X)$, d'où $X' = X$. Ce n'est pas le cas lorsque $m$ est impair (cf. Exemple 3 ci-dessous).

**Exemples.** Tous les exemples classiques de variétés projectives à fibré canonique trivial vérifient les conditions de la Proposition 2.

(1) Citons par exemple les hypersurfaces lisses de degré $(m + 2)$ dans $\mathbf{P}^{m+1}$; les intersections complètes (lisses) de degrés $(d_1, \cdots, d_r)$ dans $\mathbf{P}^n$, avec $\sum d_i = n + 1$; plus généralement, les intersections complètes quasi-homogènes de degrés $(d_1, \cdots, d_r)$ dans l'espace projectif tordu $\mathbf{P}(e_1, \cdots, e_n)$, avec $\sum d_i = \sum e_i$.

(2) Voici une construction qui fournit de nombreux exemples. Soit $V$ une variété projective lisse de dimension $\geqslant 3$, dont le diviseur anticanonique $-K_V$

est ample. Alors toute hypersurface lisse $X$ dans le système linéaire $|-K_V|$ est spéciale unitaire (c'est-à-dire vérifie les conditions de la Proposition 2). En effet $V$ est simplement connexe (Théorème de Myers), donc il en est de même de $X$ par le théorème de Lefschetz. On a $K_X \equiv (K_V + V)_{|V} \equiv 0$ (formule d'adjonction). Enfin le théorème d'annulation de Kodaira entraîne $H^p(V, \mathcal{O}_V) = 0$ pour $p > 0$, puis $H^q(X, \mathcal{O}_X) = 0$ pour $0 < q < \dim(X)$.

Comme exemples de variétés $V$ à diviseur anticanonique très ample, citons les espaces homogènes $G/P$, les variétés de Fano et leurs produits, etc....

(3) Soit $p$ un nombre premier $\geqslant 5$; considérons l'hypersurface $\tilde{X}$ de $\mathbf{P}^{p-1}$ définie par l'équation $X_0^p + \cdots + X_{p-1}^p = 0$. Le groupe $\mu_p$ des racines $p$-ièmes de l'unité opère librement sur $\tilde{X}$ par la loi d'opération

$$\zeta \cdot (X_0, \cdots, X_{p-1}) = (X_0, \zeta X_1, \cdots, \zeta^{p-1} X_{p-1}) \quad \text{pour } \zeta \in \mu_p.$$

La variété $X = \tilde{X}/\mu_p$ est spéciale unitaire; son groupe fondamental est isomorphe à $\mu_p$.

## 4. Variétés symplectiques

Soit $X$ une variété complexe. Nous noterons $T_X$ le fibré tangent holomorphe de $X$. Nous dirons qu'une 2-forme holomorphe $\varphi$ sur $X$ est non dégénérée en un point $x$ de $X$ si la forme alternée $\varphi(x)$ sur $T_X(x)$ est non dégénérée. Si $\dim(X) = 2r$, il revient au même de dire que la forme $\varphi^r$ ne s'annule pas en $x$.

**Proposition 3.** *Soit $X$ une variété kählerienne compacte de dimension $2r$, dont le groupe d'holonomie est $Sp(r)$.*

(i) *Il existe une 2-forme holomorphe $\varphi$ sur $X$ qui est non dégénérée en tout point.*

(ii) *On a $H^0(X, \Omega_X^p) = 0$ si $p$ est impair et $H^0(X, \Omega_X^{2q}) = \mathbf{C} \cdot \varphi^q$ pour $0 \leqslant q \leqslant r$. En particulier on a $\chi(\mathcal{O}_X) = r + 1$.*

L'assertion (i) a été démontrée dans l'exemple 3 du §1. D'après [4, §13, n° 3], la représentation de $Sp(r)$ dans $\Omega^p(x)$ pour $p \leqslant r$ se scinde en une somme directe

$$\Omega^p(x) = P_p \oplus P_{p-2}\varphi(x) \oplus P_{p-4}\varphi^2(x) \oplus \cdots,$$

où les représentations $P_k$ $(0 \leqslant k \leqslant r)$ sont irréductibles, et non triviales pour $k > 0$. D'autre part, la multiplication par $\varphi^k(x)$ définit un isomorphisme équivariant de $\Omega^{r-k}(x)$ sur $\Omega^{r+k}(x)$. On en déduit aussitôt que les seuls éléments invariants de $\Omega^p(x)$ sont (à un scalaire près) les puissances de $\varphi$, d'où (ii).

Ce résultat conduit à poser la définition suivante.

**Définition.** Soit $X$ une variété complexe. Une *structure symplectique* (complexe) sur $X$ est une 2-forme fermée holomorphe sur $X$, non dégénérée en tout point.

**Remarques.** (1) Une variété symplectique complexe $X$ est de dimension paire $2r$, et son fibré canonique $K_X$ est trivial; en effet, si $\varphi$ est une structure symplectique sur $X$, la forme $\varphi^r$ est un générateur de $K_X$.

(2) Cette terminologie est introduite par analogie avec la notion de structure symplectique réelle sur une variété différentielle. On peut observer que si $\varphi$ est une structure symplectique complexe sur $X$, les 2-formes réelles $\mathrm{Re}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ sont des structures symplectiques réelles sur la variété différentielle $X$ (puisque les formes $(\varphi + \bar{\varphi})^{2r}$ et $(\varphi - \bar{\varphi})^{2r}$, proportionnelles à $\varphi^r\bar{\varphi}^r$, sont partout non nulles). Dans cet article, on ne considérera que des structures symplectiques complexes, qu'on appellera simplement structures symplectiques.

(3) Soient $X$ une variété complexe, $B$ un sous-espace de $X$ de codimension $\geqslant 2$. Alors *toute structure symplectique $\varphi$ sur $X - B$ se prolonge de manière unique en une structure symplectique sur $X$.* En effet, d'après le théorème de Hartogs, $\varphi$ se prolonge de manière unique en une 2-forme $\tilde{\varphi}$ sur $X$; si $\dim(X) = 2r$, le diviseur de $\tilde{\varphi}^r$, qui doit être contenu dans $B$, est nul, de sorte que $\tilde{\varphi}$ est une structure symplectique.

**Exemples.** (1) Le fibré cotangent de toute variété complexe admet une structure symplectique canonique.

(2) Soit $Y$ une variété complexe de dimension $2r$, et soit $\omega$ une 2-forme holomorphe fermée sur $Y$ telle que $\omega^r$ ne soit pas identiquement nulle; alors $\omega$ induit une structure symplectique sur $Y - \mathrm{div}(\omega^r)$.

(3) Les tores complexes et les surfaces $K3$ fournissent des exemples de variétés symplectiques *compactes*. D'autres exemples de telles variétés seront étudiées dans la seconde partie.

Nous allons maintenant relier cette définition algébrique à la géométrie différentielle.

**Proposition 4.** *Soit $X$ une variété complexe compacte, de type kählerien, de dimension $2r$.*

(1) *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(a) *$X$ admet une métrique kählerienne dont le groupe d'holonomie est contenu dans $Sp(r)$,*

(b) *$X$ admet une structure symplectique.*

(2) *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(a′) *$X$ admet une métrique kählerienne dont le groupe d'holonomie est $Sp(r)$,*

(b′) *$X$ est simplement connexe et admet une structure symplectique unique à un facteur scalaire près.*

*Si ces conditions sont réalisées, on dit que la variété symplectique $X$ est irréductible.*

Démontrons (1). L'implication (a) $\Rightarrow$ (b) résulte de l'exemple 3 du §1. Sous l'hypothèse (b), le fibré canonique de $X$ est trivial; le théorème de Yau [18] entraîne donc l'existence d'une métrique kählerienne $g$ Ricci-plate. La structure symplectique de $X$ est alors parallèle (principe de Bochner), ce qui implique que l'holonomie de $(X, g)$ est contenue dans $Sp(r)$ (§1, Exemple 3).

Démontrons (2). Sous l'hypothèse (a′), l'unicité de la structure symplectique de $X$ résulte de la proposition. D'après le théorème 1, le revêtement universel $\tilde{X}$ de $X$ est une variété kählerienne compacte d'holonomie $Sp(r)$; en particulier, on a (Proposition 3)

$$\chi(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = r + 1 = \chi(\mathcal{O}_X), \quad \text{d'ou } \tilde{X} = X.$$

Supposons maintenant que $X$ vérifie les conditions de (b′). D'après la première partie de la démonstration et le théorème 1, $X$ est isomorphe à un produit de variétés kähleriennes irréductibles $X_1, \cdots, X_m$; la structure symplectique $\varphi$ de $X$ induit une structure symplectique $\varphi_i$ sur $X_i$, et on a $\varphi = \sum_i \mathrm{pr}_i^* \varphi_i$. Pour tout élément $(\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$ de $(\mathbf{C}^*)^m$, la forme $\sum_i \lambda_i \mathrm{pr}_i^* \varphi_i$ est alors une structure symplectique; l'hypothèse (b′) entraîne donc que $m = 1$, et par suite que $X$ est une variété kählerienne d'holonomie $Sp(r)$.

## 5. Le théorème de décomposition

Nous conclurons cette partie en donnant du théorème de décomposition une formulation indépendante du choix d'une métrique.

**Théorème 2.** *Soit $X$ une variété compacte de type kählerien, dont la première classe de Chern (réelle) est nulle.*

(1) *Le revêtement universel $\tilde{X}$ de $X$ est isomorphe à un produit $\mathbf{C}^k \times \prod V_i \times \prod X_j$, où $V_i$ est une variété projective simplement connexe, de dimension $m_i \geq 3$, à fibré canonique trivial, telle que $H^0(V_i, \Omega^p_{V_i}) = 0$ pour $0 < p < m_i$; $X_j$ est une variété symplectique irréductible, compacte de type kählerien.*

*Cette décomposition est unique (à l'ordre près).*

(2) *Il existe un revêtement étale fini $X'$ de $X$ isomorphe au produit $T \times \prod V_i \times \prod X_j$, où $T$ est un tore complexe.*

D'après le théorème de Yau, $X$ admet une métrique kählerienne Ricci-plate. Le théorème 1 et les résultats des §§3 et 4 entraînent alors les assertions d'existence de l'énoncé.

Pour démontrer l'unicité, traitons d'abord le cas où $X$ est simplement connexe. Nous utiliserons le lemme suivant.

**Lemme.** *Soient $Y_1, \cdots, Y_n$ des variétés compactes de type kählerien, simplement connexes et de première classe de Chern nulle, et soit $X = \prod_{l=1}^n Y_l$. Alors les métriques kähleriennes Ricci-plates sur $X$ sont les métriques $\Sigma_l \mathrm{pr}_l^* g_l$, où $g_l$ est une métrique kählerienne Ricci-plate sur $Y_l$ pour chaque $l$.*

Soit $g$ une métrique kählerienne Ricci-plate sur $X$, et soit $\omega \in H^{1,1}(X)$ sa classe. Puisque les $Y_l$ sont simplement connexes, $\omega$ s'écrit de manière unique $\omega = \Sigma \mathrm{pr}_l^* \omega_l$, où $\omega_l$ est une classe de Kähler dans $H^{1,1}(Y_l)$. D'après le théorème de Yau, il existe une unique métrique kählerienne Ricci-plate $g_l$ sur $Y_l$ de classe $\omega_l$. Alors la métrique kählerienne Ricci-plate $\Sigma_l \mathrm{pr}_l^* g_l$ sur $X$ a pour classe $\omega$, donc coïncide avec $g$, d'où le lemme.

Fixons alors sur $X$ une métrique kählerienne Ricci-plate. Il résulte du lemme que tout isomorphisme $X \to \prod V_i \times \prod X_j$ est *isométrique* lorsqu'on choisit des métriques kähleriennes Ricci-plates convenables sur les $V_i$ et les $X_j$. L'assertion d'unicité résulte donc dans ce cas de l'assertion analogue dans le théorème 1.

Pour traiter le cas général, il suffit de prouver l'énoncé suivant: si $Y$ et $Z$ sont des variétés compactes, simplement connexes, de type kählerien, dont la première classe de Chern est nulle, tout isomorphisme $u$: $\mathbf{C}^p \times Y \to \mathbf{C}^q \times Z$ s'écrit $u = (u_1, u_2)$ où $u_1$: $\mathbf{C}^p \to \mathbf{C}^q$ et $u_2$: $Y \to Z$ sont des isomorphismes. Or puisque $Y$ est compacte, on peut écrire, pour $t \in \mathbf{C}^p$ et $y \in Y$:

$$u(t, y) = (u_1(t), u_t(y)),$$

où $u_1$ est un isomorphisme de $\mathbf{C}^p$ sur $\mathbf{C}^q$ (ce qui entraîne bien sur $p = q$), et où $u_t$ est un automorphisme de $Y$, dépendant continûment de $t$. Mais le groupe des automorphismes de $Y$ est discret (§2, lemme), ce qui prouve notre assertion et par conséquent le théorème.

## Deuxième Partie. Variétés Kähleriennes Symplectiques

### 6. Les variétés $S^{[r]}$

Soit $S$ une surface complexe compacte. Nous noterons $S^{(r)}$ le $r$-ième produit symétrique de $S$ (c'est-à-dire le quotient de $S^r$ par le groupe symétrique $\mathfrak{S}_r$) et $\pi$: $S^r \to S^{(r)}$ l'application de passage au quotient. On peut considérer $S^{(r)}$ comme la variété des 0-cycles effectifs de degré $r$ sur $S$. On notera $S^{[r]}$ l'*espace de Douady* (ou schéma de Hilbert...) qui paramètre les sous-espaces analytiques finis $Z \subset S$ avec $lg(\mathcal{O}_Z) = r$. L'application naturelle $\varepsilon$: $S^{[r]} \to S^{(r)}$, qui fait correspondre à un sous-espace fini le 0-cycle associé, est étudiée dans [7], [8], [10]; nous allons résumer les propriétés que nous utiliserons.

Introduisons quelques notations: pour $1 \leqslant i < j \leqslant r$, soit $\Delta_{ij}$ la diagonale de $S^r$ formée des éléments $(x_1,\cdots,x_r)$ tels que $x_i = x_j$; on pose $\Delta = \bigcup_{i,j}\Delta_{ij}$ et $D = \pi(\Delta)$.

(a) *$S^{[r]}$ est lisse; le lieu singulier de $S^{(r)}$ est la diagonale $D$.*

(b) *Le morphisme $\varepsilon$: $S^{[r]} \to S^{(r)}$ est birationnel* (c'est donc une résolution des singularités de $S^{(r)}$).

(c) *$\varepsilon^{-1}(D)$ est un diviseur irréductible $E$.*

Notons $D_*$ l'ouvert de $D$ formé des 0-cycles de la forme $2x_1 + x_2 + \cdots + x_{r-1}$, où les $x_i$ sont tous distincts; on pose $S_*^{(r)} = (S^{(r)} - D) \cup D_*$, puis $S_*^{[r]} = \varepsilon^{-1}(S_*^{(r)})$ et $S_*^r = \pi^{-1}(S_*^{(r)})$. La propriété (c) ci-dessus entraîne

(d) *$S^{[r]} - S_*^{[r]}$ est un sous-espace fermé de codimension 2 dans $S^{[r]}$.*

Ceci permet, dans certains calculs, de remplacer $S^{[r]}$ par $S_*^{[r]}$. Or la structure de $S_*^{[r]}$ est bien comprise:

(e) *La paire $(S_*^{(r)}, D_*)$ est localement isomorphe à $(\mathbf{C}^{2r-2} \times Q, \mathbf{C}^{2r-2} \times o)$, où $Q$ est un cône sur une conique lisse, de sommet $o$. Le morphisme $\varepsilon$: $S_*^{[r]} \to S_*^{(r)}$ s'identifie à l'éclatement de $D_*$ dans $S_*^{(r)}$.*

Dans $S_*^r$, la diagonale $\Delta$ est lisse de codimension 2. Notons $\eta$: $B_\Delta(S_*^r) \to S_*^r$ l'éclatement de $\Delta$; l'action de $\mathfrak{S}_r$ sur $S^r$ se prolonge à $B_\Delta(S_*^r)$. On déduit facilement de (e) le résultat suivant.

(f) *$S_*^{[r]}$ s'identifie au quotient de $B_\Delta(S_*^r)$ par $\mathfrak{S}_r$.*

On a donc un diagramme commutatif:

$$\text{(f)} \qquad \begin{array}{ccc} B_\Delta(S_*^r) & \xrightarrow{\ \eta\ } & S_*^r \\ \downarrow{\scriptstyle\rho} & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ S_*^{[r]} & \xrightarrow{\ \varepsilon\ } & S_*^{(r)} \end{array}$$

**Proposition 5.** *Si le fibré canonique $\omega_S$ est trivial, $S^{[r]}$ admet une structure symplectique.*

Ce résultat s'applique aux surfaces $K3$, aux tores complexes de dimension 2 et aux surfaces de Kodaira [12, §6]; ces dernières ne sont pas de type kählerien.

D'après la remarque 3 du §4 et la propriété (d) ci-dessus, pour prouver la proposition, il suffit de mettre en évidence une structure symplectique sur $S_*^{[r]}$. Soit $\omega$ une 2-forme holomorphe non nulle sur $S$. La forme $\psi = \mathrm{pr}_1^*\omega + \cdots + \mathrm{pr}_r^*\omega$ est une structure symplectique sur $S^r$; son image réciproque sur $B_\Delta(S_*^r)$ est invariante par le groupe symétrique, donc provient d'une 2-forme holomorphe $\varphi$ sur $S_*^{[r]}$. Considérons le diagramme (f); le revêtement $\rho$ est ramifié simplement le long des diviseurs exceptionnels $E_{ij} = \eta^{-1}(\Delta_{ij})$. On a donc

$$\operatorname{div}(\rho^*\varphi)^r = \rho^* \operatorname{div}(\varphi^r) + \sum_{i<j} E_{ij},$$

$$\operatorname{div}(\rho^*\varphi)^r = \operatorname{div}(\eta^*\psi^r) = \sum_{i<j} E_{ij};$$

on en déduit $\operatorname{div}\varphi^r = 0$, d'où la proposition.

S. Mukai a remarqué qu'on peut donner une démonstration plus intrinsèque de la proposition 5; plus généralement, il montre que l'espace des modules des faisceaux simples sur une surface $K3$ ou une surface abélienne admet une structure symplectique [14].

Nous allons maintenant étudier la topologie des variétés $S^{[r]}$.

**Lemme 1.** *Soit S une surface compacte et r un entier* $\geqslant 2$.

(a) *L'homomorphisme* $\varepsilon_*$: $\pi_1(S^{[r]}) \to \pi_1(S^{(r)})$ *est bijectif.*

(b) *L'homomorphisme* $\pi_*$: $\pi_1(S^r) \to \pi_1(S^{(r)})$ *est surjectif, et son noyau est le sous-groupe distingué de* $\pi_1(S^r)$ *engendré par les éléments* $(\sigma \cdot \gamma)\gamma^{-1}$, *pour* $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ *et* $\gamma \in \pi_1(S^r)$. *Le groupe* $\pi_1(S^{(r)})$ *est isomorphe au plus grand quotient commutatif de* $\pi_1(S)$.

L'assertion (b) est bien connue; le théorème de Van Kampen entraîne que le groupe $\pi_1(S^{(r)})$ s'identifie au quotient du produit semidirect $\Gamma$ de $\mathfrak{S}_r$ par $\pi_1(S)^r$ par le sous-groupe distingué de $\Gamma$ engendré par les stabilisateurs (dans $\mathfrak{S}_r$) des points de $S^r$; la première assertion de (b) en résulte, et la seconde est un exercice de théorie des groupes. Appliquons la même méthode à $S_*^{(r)} = S_*^r/\mathfrak{S}_r$; puisque les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_r$, et que l'injection $S_*^r \hookrightarrow S^r$ induit un isomorphisme des groupes fondamentaux, il en va de même pour l'injection de $S_*^{(r)}$ dans $S^{(r)}$. Comme l'éclatement $S_*^{[r]} \to S_*^{(r)}$ et l'injection $S_*^{[r]} \hookrightarrow S^{[r]}$ ne modifient pas les groupes fondamentaux, on en déduit (a).

**Lemme 2.** *Soit S une surface compacte, r un entier* $\geqslant 2$.

(a) *L'application* $\varepsilon^*$: $H^2(S^{(r)}, \mathbf{C}) \to H^2(S^{[r]}, \mathbf{C})$ *est un morphisme injectif de structures de Hodge; on a* $H^2(S^{[r]}, \mathbf{C}) = \operatorname{Im}\varepsilon^* \oplus \mathbf{C}\cdot[E]$.

(b) *L'application* $\pi^*$: $H^2(S^{(r)}, \mathbf{C}) \to H^2(S^r, \mathbf{C})$ *induit un isomorphisme de* $H^2(S^{(r)}, \mathbf{C})$ *sur le sous-espace de* $H^2(S^r, \mathbf{C})$ *formé des éléments invariants par le groupe symétrique.*

(c) *Si* $H^1(S, \mathbf{C})$ *est nul,* $\pi^*$ *induit un isomorphisme de structures de Hodge de* $H^2(S^{(r)}, \mathbf{C})$ *sur* $H^2(S, \mathbf{C})$.

Rappelons que puisque $S^{(r)}$ est une "$V$-variété", sa cohomologie complexe admet une structure de Hodge (pure) et vérifie la dualité de Poincaré [16]; ce dernier point entraîne l'assertion (b).

Pour prouver (a), on peut remplacer $S^{[r]}$ par $S_*^{[r]}$ et $S^r$ par $S_*^r$ (on ne modifie pas le $H^2$ en négligeant un sous-espace de codimension $\geqslant 2$). Au diagramme

(f) correspond un diagramme en cohomologie à coefficient complexes:

$$\begin{array}{ccc} H^2\big(B_\Delta(S^r_*)\big)^{\text{inv}} & \xleftarrow{\ \eta^*\ } & H^2(S^r)^{\text{inv}} \\ {\scriptstyle\rho^*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\pi^*} \\ H^2\big(S^{[r]}_*\big) & \xleftarrow{\ \varepsilon^*\ } & H^2(S^{(r)}) \end{array}$$

où les applications $\rho^*$ et $\pi^*$ sont bijectives. Or $\eta^*$ est injectif, et on a $H^2(B_\Delta(S^r_*))^{\text{inv}} = \operatorname{Im}\eta^* \oplus (\Sigma\, \mathbf{C}\cdot[E_{ij}])^{\text{inv}} = \operatorname{Im}\eta^* \oplus \mathbf{C}\cdot[\rho^*E]$, ce qui entraîne (a). Enfin si $H^1(S)$ est nul on a un isomorphisme $H^2(S) \to H^2(S^r)^{\text{inv}}$, compatible aux structures de Hodge, d'où (c).

Résumons les résultats obtenus pour les surfaces $K3$:

**Proposition 6.** *Soit $S$ une surface $K3$, et $r$ un entier $\geqslant 2$. Alors $S^{[r]}$ est simplement connexe, il existe un homomorphisme injectif $i$: $H^2(S,\mathbf{C}) \to H^2(S^{[r]},\mathbf{C})$, compatible aux structures de Hodge, et on a*

$$H^2(S^{[r]},\mathbf{C}) = i\big(H^2(S,\mathbf{C})\big) \oplus \mathbf{C}\cdot[E].$$

Pour $\alpha \in H^2(S,\mathbf{C})$ on a $i(\alpha) = \varepsilon^*\beta$, où $\beta$ est l'élément de $H^2(S^{(r)},\mathbf{C})$ tel que $\pi^*\beta = \Sigma_i \operatorname{pr}_i^*\alpha$.

**Remarque.** On peut prouver qu'on a

$$H^2(S^{[r]},\mathbf{Z}) = i\big(H^2(S,\mathbf{Z})\big) \oplus \mathbf{Z}\delta,$$

où $\delta$ est un élément de $H^2(S^{[r]},\mathbf{Z})$ tel que $2\delta = [E]$. La démonstration est plus délicate.

Il résulte de la proposition 6 qu'on a $h^{2,0}(S^{[r]}) = h^{2,0}(S) = 1$, donc que la structure symplectique de $S^{[r]}$ est unique à un scalaire près. De plus la variété $S^{[r]}$ est simplement connexe; il reste à examiner si elle admet une métrique kählerienne. J'ignore si c'est toujours vrai (même en supposant $S$ de type kählerien). C'est bien sûr le cas lorsque $S$ est projective (puisque le schéma de Hilbert $S^{[r]}$ est alors projectif). Notons $\mathfrak{S}$ un espace des modules pour les surfaces $K3$, par exemple l'espace des surfaces $K3$ marquées construit dans [5]. Il existe alors un ouvert dense $\mathfrak{U}$ de $\mathfrak{S}$, contenant tous les points de $\mathfrak{S}$ correspondant à des surfaces projectives, tel que la variété $S^{[r]}$ admette une métrique kählerienne pour toute surface $S$ de $\mathfrak{U}$. Disons qu'une telle surface est *générique*; on peut alors énoncer:

**Théorème 3.** *Soit $S$ une surface $K3$ générique. Alors $S^{[r]}$ est une variété kählerienne symplectique irréductible (simplement connexe), de dimension $2r$.*

## 7. Les variétés $K_r$

Soient maintenant $A$ un tore complexe de dimension 2, et $r$ un entier positif. D'après la proposition 5, $A^{[r+1]}$ est une variété symplectique complexe; elle admet une métrique kählerienne si $A$ est générique (au sens défini ci-dessus). Bien entendu $A^{[r+1]}$ n'est pas simplement connexe.

Considérons l'application $s$: $A^{(r+1)} \to A$ définie par $s([p_0] + \cdots + [p_r]) = \Sigma_{i=0}^{r} p_i$. Par composition avec $\varepsilon$ on en déduit un morphisme

$$S: A^{[r+1]} \to A.$$

Observons que le groupe $A$ agit sur $A^{[r+1]}$ par translations, et sur $A$ par la loi d'opération $(t, x) \mapsto x + (r+1)t$; l'application $S$ est équivariante par rapport à ces deux actions. Il en résulte que $S$ est lisse et que ses fibres sont isomorphes entre elles.[2] On note $K_r$ la variété lisse $S^{-1}(0)$. On remarquera que $K_1$ n'est autre que la surface de Kummer associée à $A$.

**Proposition 7.** *La structure symplectique de $A^{[r+1]}$ définie dans la proposition 5 induit sur $K_r$ une structure symplectique.*

Notons $\psi$ la structure symplectique de $A^{[r+1]}$ définie dans la proposition 5, et $\varphi$ sa restriction à $K_r$. Le fibré canonique de $K_r$, isomorphe à la restriction du fibré canonique de $A^{[r+1]}$, est trivial; pour prouver que la forme $\varphi$ définit une structure symplectique, il suffit donc de prouver qu'elle est non dégénérée en un point de $K_r$. Choisissons un point $x$ de $K_r$ correspondant à un sous-espace de $A$ formé de $(r+1)$ points distincts. L'espace tangent $T_x(A^{[r+1]})$ s'identifie alors à $T_0(A)^{r+1}$ de façon que l'application tangente $S_*$: $T_0(A)^{r+1} \to T_0(A)$ soit l'application somme; les $(r+1)$ sous-espaces $T_0(A)$ sont deux à deux orthogonaux pour la forme $\psi(x)$, et la restriction de celle-ci à chacun de ces sous-espaces est non dégénérée. On en déduit aussitôt que la restriction de $\psi(x)$ à $T_x(K_r) = \operatorname{Ker} S_*$ est non dégénérée, d'où le résultat.

**Proposition 8.** *$K_r$ est simplement connexe; il existe un homomorphisme injectif $j$: $H^2(A, \mathbf{C}) \to H^2(K_r, \mathbf{C})$, compatible aux structures de Hodge, et pour $r \geqslant 2$ on a $H^2(K_r, \mathbf{C}) = j(H^2(A, \mathbf{C})) \oplus \mathbf{C}.[F]$, où $F$ désigne la trace sur $K_r$ du diviseur exceptionnel $E$ de $A^{[r+1]}$.*

Il résulte du lemme 1 du §6 que l'homomorphisme $S_*$: $\pi_1(A^{[r+1]}) \to \pi_1(A)$ est bijectif; puisque $\pi_2(A)$ est nul, la suite exacte d'homotopie de la fibration $S$ implique que $K_r$ est simplement connexe.

---

[2] Plus précisément, le morphisme $S$ est "isotrivial": on a un diagramme cartésien:

$$\begin{tikzcd} A \times K_r \arrow[r] \arrow[d] & A^{[r+1]} \arrow[d, "S"] \\ A \arrow[r, "(r+1)"] & A \end{tikzcd}$$

Notons $k$ l'injection canonique de $K_r$ dans $A^{[r+1]}$; nous allons montrer que l'homomorphisme $k^*$: $H^2(A^{[r+1]}) \to H^2(K_r)$ est *surjectif* (dans la démonstration qui suit, la cohomologie est toujours à coefficients complexes). Soit $N$ la sous-variété de $A^{r+1}$ formée des éléments $(a_0, \cdots, a_r)$ tels que $\Sigma\, a_i = 0$. Avec les notations du §6, posons

$$N_* = N \cap A_*^{r+1}, \quad K_* = K_r \cap A_*^{[r+1]}, \quad \delta_{ij} = N_* \cap \Delta_{ij}.$$

Alors $\delta = \bigcup \delta_{ij}$ est lisse de codimension 2 dans $N_*$, et on a un diagramme cartésien:

$$\begin{array}{ccc} B_\delta(N_*) & \overset{l}{\hookrightarrow} & B_\Delta(A_*^{r+1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_* & \overset{k}{\hookrightarrow} & A_*^{[r+1]} \end{array}$$

de sorte que $K_*$ s'identifie au quotient de $B_\delta(N_*)$ par $\mathfrak{S}_{r+1}$.

Puisque $A_*^{[r+1]}$ est stable par les translations de $A$, la sous-variété $K_r - K_*$ est de codimension (complexe) $\geqslant 2$ dans $K_r$; il en va de même pour $N - N_*$. On a donc des isomorphismes

$$H^2(K_r) = H^2(K_*), \qquad H^2(N) = H^2(N_*),$$
$$H^2(A^{[r+1]}) = H^2(A_*^{[r+1]}), \qquad H^2(A^{r+1}) = H^2(A_*^{r+1}).$$

Pour prouver la surjectivité de $k^*$, il suffit de prouver celle de $l^*$.

Puisque $r \geqslant 2$, les sous-variétés $\delta_{ij}$ sont connexes, et on a

$$H^2(B_\delta(N_*)) = H^2(N) \oplus \sum \mathbf{C} \cdot [\delta_{ij}].$$

Or l'injection canonique $m$: $N \hookrightarrow A^{r+1}$ admet une rétraction, donc $m^*$ est surjectif; puisque $\delta_{ij} = l^*\Delta_{ij}$, il en résulte que $l^*$ est surjectif.

On déduit alors de la suite spectrale de cohomologie pour la fibration $S$ une suite exacte

$$0 \to H^2(A) \xrightarrow{S^*} H^2(A^{[r+1]}) \xrightarrow{k^*} H^2(K_r) \to 0.$$

Le lemme 2 du §6 fournit d'autre part un isomorphisme de structures de Hodge de $H^2(A^{[r+1]})$ sur $H^2(A^{r+1})^{\text{inv}} \oplus \mathbf{C} \cdot [E]$. On vérifie facilement que $H^2(A^{r+1})^{\text{inv}}$ est engendré par les classes $\Sigma_i \operatorname{pr}_i^* \omega$, pour $\omega$ dans $H^2(A)$, et $\Sigma_{i,j} \operatorname{pr}_i^* \alpha \wedge \operatorname{pr}_j^* \beta$, pour $\alpha$, $\beta$ dans $H^1(A)$. Mais cette dernière classe s'écrit aussi $S^*(\alpha \wedge \beta)$; on a donc $H^2(A^{r+1})^{\text{inv}} \cong H^2(A) \oplus \operatorname{Im} S^*$. La suite exacte précédente entraîne alors la proposition.

Nous pouvons maintenant conclure comme au paragraphe précédent. Soit $\mathcal{Q}$ un espace de modules pour les tores complexes; il existe un ouvert dense $\mathcal{V}$ de $\mathcal{Q}$, contenant les surfaces abéliennes, tel que la variété $K_r$ associée à une surface de $\mathcal{V}$ soit de type kählerien. Appelant génériques les tores complexes paramétrés par $\mathcal{V}$, on peut énoncer:

**Théorème 4.** *Soit $A$ un tore complexe (de dimension 2) générique. Alors la variété $K_r$ associée à $A$ est une variété kählerienne symplectique irréductible, de dimension $2r$.*

**Remarque.** Pour $r \geqslant 2$, les variétés $S^{[r]}$ et $K_r$ ne sont pas isomorphes (ni même homéomorphes) puisqu'on a $b_2(S^{[r]}) = b_2(S) + 1 = 23$ (Proposition 6) et $b_2(K_r) = b_2(A) + 1 = 7$ (Proposition 7). En outre $S^{[r]}$ et $K_r$ ne sont pas biméromorphiquement équivalentes: on vérifie en effet sans difficultés que deux variétés complexes compactes, à fibré canonique trivial, qui sont biméromorphiquement équivalentes ont le même $b_2$.

## 8. Périodes des variétés kähleriennes symplectiques

**Proposition 9.** *Soit $f\colon X \to B$ un morphisme propre et lisse de variétés analytiques. Soit 0 un point de $B$, on suppose que la fibre $X_0$ de $f$ en 0 est une variété kählerienne symplectique. Il existe alors un voisinage $U$ de 0 dans $B$ tel que $X_s$ soit kählerienne symplectique pour $s \in U$.*

Quitte à réduire $B$, on peut supposer que toutes les fibres $X_s$ sont de type kählerien. Les nombres de Hodge $h^{pq}(X_s)$ sont alors constants, et le fibré $f_*\Omega^2_{X/B}$ est trivial dans un voisinage $B'$ de 0 dans $B$. Il existe donc pour chaque $s \in B$ une 2-forme holomorphe non nulle $\varphi_s$ sur $X_s$, dépendant continûment de $s$, de façon que $\varphi_0$ soit une structure symplectique sur $X_0$. Si $\dim X_0 = 2r$, il existe un voisinage $U$ de 0 dans $B$ tel que la forme $\varphi_s^r$ ne soit pas identiquement nulle pour $s \in U$. Le diviseur de $\varphi_s^r$ est alors homologiquement trivial, donc nul (puisque $X_s$ est kählerienne), d'où la proposition.

**Remarque 1.** Si $X_0$ est *irréductible*, on peut démontrer un résultat plus précis: toute déformation kählerienne de $X_0$ est symplectique. En effet, la démonstration précédente montre qu'il existe un sous-espace analytique $Z$ de $B$ sur lequel la forme $\varphi_s$ dégénère; pour $s \in B - Z$, la fibre $X_s$ est symplectique irréductible (de type kählerien). Soit $z \in Z$; le théorème 2 (§5) entraîne que $X_z$ est isomorphe à un produit d'au moins deux variétés à fibré canonique trivial. Un argument de théorie des déformations permet alors de montrer que toute fibre $X_s$, pour $s$ assez voisin de $z$, est isomorphe à un produit du type précédent, ce qui contredit l'irréductibilité de $X_s$.

Soit $X$ une variété compacte de type kählerien, symplectique irréductible. Nous noterons $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{M}$ la famille de Kuranishi de $X$, de sorte que $\mathcal{M}$ est un espace (local) universel de déformations pour $X$; il est muni d'un point marqué 0 tel que $\mathcal{X}_0 = X$.

**Théorème** (*Bogomolov*[3] [3]). *L'espace* $\mathcal{M}$ *est lisse en* 0.

La proposition 9 et le théorème de Bogomolov permettent, quitte à réduire $\mathcal{M}$, de faire sur la famille $\mathcal{X} \to \mathcal{M}$ les hypothèses suivantes:

(i) $\mathcal{M}$ est lisse et connexe.

(ii) Les fibres $\mathcal{X}_s$, pour $s \in \mathcal{M}$, sont de type kählerien et admettent une structure symplectique $\varphi_s$, unique à un scalaire près.

(iii) Il existe un difféomorphisme $u\colon X \times \mathcal{M} \to \mathcal{X}$ tel que $f \circ u = \mathrm{pr}_2$.

Ce difféomorphisme induit pour chaque $s \in \mathcal{M}$ un difféomorphisme $u_s$ de $X$ sur $\mathcal{X}_s$. *L'application des périodes* (pour les 2-formes) $p\colon \mathcal{M} \to \mathbf{P}(H^2(X, \mathbf{C}))$ est définie par $p(s) = u_s^*[\varphi_s]$. Soit $(\gamma_1, \cdots, \gamma_b)$ une base de $H_2(X, \mathbf{Z})$ (modulo torsion); on en déduit une base $(\gamma_1^s \cdots \gamma_b^s)$ de $H_2(\mathcal{X}_s, \mathbf{Z})$ (modulo torsion), pour tout $s \in \mathcal{M}$, en posant $\gamma_i^s = (u_s)_* \gamma_i$. Si l'on identifie $\mathbf{P}(H^2(X, \mathbf{C}))$ à $\mathbf{P}^{b-1}$ à l'aide de la base duale des $(\gamma_i)$, l'application des périodes $p\colon \mathcal{M} \to \mathbf{P}^{b-1}$ est donnée par

$$p(s) = \left( \int_{\gamma_1^s} \varphi_s, \cdots, \int_{\gamma_b^s} \varphi_s \right);$$

elle associe à la variété $\mathcal{X}_s$ les périodes de la 2-forme $\varphi_s$.

Notons $\int_{\mathcal{X}_s}$ l'isomorphisme canonique de $H^{4r}(\mathcal{X}_s, \mathbf{C})$ sur $\mathbf{C}$. Nous normaliserons la structure symplectique de $\mathcal{X}_s$ de façon que $\int_{\mathcal{X}_s} (\varphi_s \bar{\varphi}_s)^r = 1$. On pose $\varphi = \varphi_0$.

Posons, pour $\alpha \in H^2(X, \mathbf{C})$

$$q(\alpha) = \frac{r}{2} \int_X (\varphi\bar{\varphi})^{r-1} \alpha^2 + (1 - r) \int_X \varphi^{r-1} \bar{\varphi}^r \alpha \cdot \int_X \varphi^r \bar{\varphi}^{r-1} \alpha.$$

**Théorème 5.** (a) *La forme quadratique $q$ est non dégénérée; à un scalaire réel positif près, elle provient d'une forme quadratique entière sur $H^2(X, \mathbf{Z})$, de signature* $(3, b - 3)$.

(b) *Soit $\Omega$ la sous-variété analytique de $\mathbf{P}(H^2(X, \mathbf{C}))$ définie par les conditions*

$$q(\alpha) = 0, \qquad q(\alpha + \bar{\alpha}) > 0.$$

*On a $p(\mathcal{M}) \subset \Omega$, et l'application $p\colon \mathcal{M} \to \Omega$ est un isomorphisme local.*

---

[3] La démonstration élégante de [3] est entièrement correcte; c'est le n° 8 de *loc. cit* qui contient une erreur, entraînant l'énoncé incorrect du Théorème 2.

(c) *Soit* $\lambda \in H^2(X, \mathbf{C})$; *posons* $v(\lambda) = \int_X \lambda^{2r}$. *On a alors, pour tout* $\alpha \in H^2(X, \mathbf{C})$,

$$v(\lambda)^2 q(\alpha) = q(\lambda)\left[(2r-1)v(\lambda)\int_X \lambda^{2r-2}\alpha^2 - (2r-2)\left(\int_X \lambda^{2r-1}\alpha\right)^2\right].$$

*Démonstration de* (b). Soit $\alpha \in H^2(X, \mathbf{C})$; écrivons $\alpha = a\varphi + \omega + b\bar{\varphi}$, avec $\omega \in H^{1,1}(X)$ et $a, b \in \mathbf{C}$. On obtient alors

$$q(\alpha) = ab + \frac{r}{2}\int_X (\varphi\bar{\varphi})^{r-1}\omega^2. \tag{1}$$

Calculons d'autre part la composante de type $(2r, 2)$ de $\alpha^{r+1}$. On trouve

$$(\alpha^{r+1})_{2r,2} = (r+1)(a\varphi)^r \cdot b\bar{\varphi} + \binom{r+1}{2}(a\varphi)^{r-1}\omega^2,$$

d'où

$$\begin{aligned}\int_X \alpha^{r+1}\bar{\varphi}^{r-1} &= (r+1)a^{r-1}\left(ab + \frac{r}{2}\int_X (\varphi\bar{\varphi})^{r-1}\omega^2\right)\\ &= (r+1)q(\alpha)\left(\int_X \alpha\varphi^{r-1}\bar{\varphi}^r\right)^{r-1}.\end{aligned}$$

Posons $\alpha_s = u_s^*[\varphi_s]$ pour $s \in \mathfrak{M}$. Comme $\varphi_s$ est une forme de type $(2,0)$ sur $\mathfrak{X}_s$, on a $\alpha_s^{r+1} = 0$. Pour $s$ assez proche de 0, on a $\int_X \alpha_s \varphi^{r-1}\bar{\varphi}^r \neq 0$ et on déduit donc de la formule précédente $q(\alpha_s) = 0$. Cette égalité reste vérifiée pour tout $s \in \mathfrak{M}$; autrement dit, $p(\mathfrak{M})$ est contenu dans la quadrique $Q$ de $\mathbf{P}(H^2(X, \mathbf{C}))$ définie par $q$.

Observons ici que la quadrique $Q$ est de rang $\geqslant 3$, donc irréductible; en effet, vu la formule (1), il suffit de prouver que $q(\omega)$ est non nul pour un élément $\omega$ de $H^{1,1}(X)$. Or si $\omega$ est la classe d'une métrique kählerienne sur $X$, on a [17, p. 77, Corollaire au Théorème 7]

$$q(\omega) = \frac{r}{2}\int_X (\varphi\bar{\varphi})^{r-1}\omega^2 > 0.$$

Observons aussi qu'il résulte de la formule (1) que $Q$ est lisse au point $[\varphi]$.

Calculons maintenant l'application tangente $T_0(p)$. L'espace $T_0(\mathfrak{M})$ est canoniquement isomorphe à $H^1(X, T_X)$, tandis que l'espace tangent à $\mathbf{P}(H^2(X, \mathbf{C}))$ en $\varphi$ s'identifie naturellement à $\operatorname{Hom}(H^{2,0}, H^2(X, \mathbf{C})/H^{2,0})$, soit encore à $\operatorname{Hom}(H^{2,0}, H^{1,1} \oplus H^{0,2})$. Selon [9, Proposition 1.20], $T_0(p)$ s'identifie alors à l'application composée

$$T_0(p)\colon H^1(X, T_X) \xrightarrow{c'} \operatorname{Hom}(H^{2,0}, H^{1,1}) \subset \operatorname{Hom}(H^{2,0}, H^{1,1} \oplus H^{0,2})$$

où $c'$ est déduit du cup-produit

$$c\colon H^1(X, T_X) \otimes H^0(X, \Omega_X^2) \to H^1(X, \Omega_X^1)$$

et des isomorphismes canoniques $H^{pq} = H^q(X, \Omega_X^p)$.

Dans le cas que nous considérons, on a $H^0(X, \Omega_X^2) = \mathbf{C} \cdot \varphi$, et le produit intérieur par $\varphi$ induit un isomorphisme de $T_X$ sur $\Omega_X^1$. Par suite $c$ est un isomorphisme, et il en est de même de $c'$. Compte tenu des dimensions, on en déduit que l'image de $T_0(p)$ est $T_\varphi(Q)$ et que $p$ induit un isomorphisme local de $\mathcal{M}$ sur $Q$ en 0.

Soit maintenant $s \in \mathcal{M}$. Le difféomorphisme composé

$$v\colon \mathcal{X}_s \times \mathcal{M} \xrightarrow{(u_s^{-1}, \mathrm{Id})} X \times \mathcal{M} \xrightarrow{u} \mathcal{X}$$

permet de définir une application des périodes $p_s\colon \mathcal{M} \to \mathbf{P}(H^2(\mathcal{X}_s, \mathbf{C}))$ (en posant $p_s(t) = v_t^*[\varphi_t]$). On définit comme ci-dessus la forme quadratique $q_s$ et la quadrique $Q_s \subset \mathbf{P}(H^2(\mathcal{X}_s, \mathbf{C}))$, de sorte que $p_s$ induit une application de $\mathcal{M}$ sur $Q_s$, qui est un isomorphisme local en $s$. Puisque le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{P}(H^2(X, \mathbf{C})) \\ \mathcal{M} \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "p_s"'] & \\ & \mathbf{P}(H^2(\mathcal{X}_s, \mathbf{C})) \arrow[uu, "u_s^*"'] \end{tikzcd}$$

est commutatif, et que les quadriques $Q$ et $Q_s$ sont irréductibles, on a $u_s^*(Q_s) = Q$. Il en résulte d'une part que $p$ est un isomorphisme local dans $Q$ en tout point $s \in \mathcal{M}$, et d'autre part que la forme $\beta \mapsto q(u_s^*\beta)$ sur $H^2(\mathcal{X}_s, \mathbf{C})$ est proportionnelle à $q_s$. Il existe donc un scalaire *non nul* $k_s$ tel qu'on ait, pour $\beta \in H^2(\mathcal{X}_s, \mathbf{C})$:

$$q(u_s^*\beta) = k_s\left[\frac{r}{2}\int_{\mathcal{X}_s} (\varphi_s\bar{\varphi}_s)^{r-1}\beta^2 + (1-r)\int_{\mathcal{X}_s} \varphi_s^{r-1}\bar{\varphi}_s^r\beta \cdot \int_{\mathcal{X}_s} \varphi_s^r\bar{\varphi}_s^{r-1}\beta\right],$$

soit, en posant $\alpha = u_s^*\beta$ et $\pi_s = u_s^*\varphi_s$,

$$q(\alpha) = k_s\left[\frac{r}{2}\int_X (\pi_s\bar{\pi}_s)^{r-1}\alpha^2 + (1-r)\int_X \pi_s^{r-1}\bar{\pi}_s^r\alpha \cdot \int_X \pi_s^r\bar{\pi}_s^{r-1}\alpha\right].$$

Faisant $\alpha = \pi_s + \bar{\pi}_s$, on trouve $k_s = q(\pi_s + \bar{\pi}_s)$; en particulier $q(\pi_s + \bar{\pi}_s)$ ne s'annule pas. Il est clair sur la définition de $q$ que $q(\pi_s + \bar{\pi}_s)$ est réel; comme $q(\varphi + \bar{\varphi}) = 1$, on conclut qu'on a $q(\pi_s + \bar{\pi}_s) > 0$, c'est-à-dire, avec les notations de l'énoncé, $p(\mathcal{M}) \subset \Omega$. Ceci achève la démonstration de (b).

*Démonstration de* (c). Démontrons d'abord la formule (c) pour $\lambda = \varphi + t\bar{\varphi}$ avec $t \in \mathbf{C}$. Soit $\alpha = a\varphi + \omega + b\bar{\varphi}$ un élément de $H^2(X, \mathbf{C})$; on a

$$t^{-r}\int_X (\varphi + t\bar{\varphi})^{2r-2}\alpha^2 = \binom{2r-2}{r}a^2 + \binom{2r-2}{r}t^{-2}b^2 + \binom{2r-2}{r-1}t^{-1}\left(2ab + \int_X (\varphi\bar{\varphi})^{r-1}\omega^2\right),$$

$$t^{-r}\int_X (\varphi + t\bar{\varphi})^{2r-1}\alpha = \binom{2r-1}{r}(a + t^{-1}b),$$

$$v(\varphi + t\bar{\varphi}) = t^r\binom{2r}{r}, \qquad q(\varphi + t\bar{\varphi}) = t;$$

la formule cherchée en résulte aussitôt. Pour $s \in \mathfrak{M}$, la forme $q_s$ satisfait l'identité analogue; compte tenu de la proportionalité entre $q_s$ et $q \circ u_s^*$, cela entraîne que la formule (c) est vérifiée pour les formes du type $\lambda = \pi_s + t\bar{\pi}_s$, avec $s \in \mathfrak{M}$ et $t \in \mathbf{C}$. Or l'ensemble de ces formes contient un ouvert de $\mathbf{P}(H^2(X, \mathbf{C}))$; par prolongement analytique on en déduit l'énoncé (c).

*Démonstration de* (a). Il existe un élément $\lambda$ de $H^2(X, \mathbf{Q})$ tel que $v(\lambda) \neq 0$ (il suffit de choisir une classe rationnelle assez proche de $\varphi + \bar{\varphi}$). La formule (c) montre alors que $q(\lambda)$ est non nul et que la forme $\alpha \mapsto q(\lambda)^{-1}q(\alpha)$ est rationnelle; un multiple entier convenable de cette forme prend donc des valeurs entières sur $H^2(X, \mathbf{Z})$.

Pour calculer la signature de $q$, prenons pour $\lambda$ la classe d'une métrique kählerienne sur $X$. Notons $H^2(X, \mathbf{R})_0$ le sous-espace de $H^2(X, \mathbf{R})$ formé des éléments $\alpha$ tels que $\int_X \lambda^{2r-1}\alpha = 0$. On a une décomposition

$$H^2(X, \mathbf{R}) = H^2(X, \mathbf{R})_0 \oplus \mathbf{R}\lambda,$$

en sous-espaces orthogonaux pour $q$. On a déjà observé qu'on a $q(\lambda) > 0$. Sur $H^2(X, \mathbf{R})_0$, la forme $q$ coïncide, à un facteur positif près, avec la forme $\alpha \mapsto \int_X \lambda^{2r-2}\alpha^2$; d'après [17, p. 77, Corollaire au Théorème 7] celle-ci a pour signature $(2, b-3)$. Ainsi $q$ a pour signature $(3, b-3)$, ce qui achève la démonstration du théorème.

**Remarques.** (2) Soit $\omega$ la forme d'une métrique kählerienne sur $X$. On associe habituellement à $\omega$ la forme quadratique $q_\omega$ sur $H^2(X, \mathbf{C})$ définie par $q_\omega(\alpha) = \int_X \omega^{2r-2}\alpha^2$. Avec les notations ci-dessus, soit $q'_\omega$ la forme quadratique qui coïncide avec $q_\omega$ sur $H^2(X, \mathbf{C})_0$, pour laquelle $\omega$ est orthogonale à $H^2(X, \mathbf{C})_0$, et qui est telle que $q'_\omega(\omega) = v(\omega)/(2r-1)$. Alors la forme $q'_\omega$ *est proportionnelle à* $q$; en particulier, à un scalaire près, elle est définie sur $\mathbf{Z}$ et indépendante de $\omega$. Ce dernier fait entraîne des relations dans l'anneau de cohomologie de $X$ qui semblent très contraignantes.

(3) Il existe un nombre réel strictement positif $\lambda$ unique tel que la forme $\lambda q$ soit entière et non divisible sur $H^2(X, \mathbf{Z})$. La forme $\lambda q$ sera appelée la *polarisation canonique* de $H^2(X, \mathbf{C})$.

La situation décrite par le théorème ressemble beaucoup à celle qu'on obtient pour les surfaces $K3$ (qui en est d'ailleurs un cas particulier). On peut donc déduire de ce théorème les corollaires bien connus dans le cas des surfaces $K3$; en particulier:

**Corollaire 1.** *Soit $L$ un fibré en droites non trivial sur $X$, et $l$ sa classe dans $H^2(X, \mathbf{C})$. Soit $\Omega_l$ la section hyperplane de $\Omega$ formée des éléments $q$-orthogonaux à $l$; posons $\mathcal{M}_l = p^{-1}(\Omega_l)$, et notons $\mathcal{X}_l \to \mathcal{M}_l$ la restriction de $\mathcal{X} \to \mathcal{M}$. Alors quitte à restreindre $\mathcal{M}_l$, il existe un fibré en droites unique $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{X}_l$ tel que $\mathcal{L}_{|X} = L$; la famille $(\mathcal{X}_l, \mathcal{L})$ est une famille locale universelle de déformations de la paire $(X, L)$. Si $l_1, \cdots, l_k$ sont des classes algébriques linéairement indépendantes dans $H^2(X, \mathbf{R})$, les hypersurfaces $\mathcal{M}_{l_1}, \cdots, \mathcal{M}_{l_k}$ sont lisses et transverses.*

Observons d'abord que puisque $X$ est simplement connexe, on a $\mathrm{Pic}(\mathcal{X}_s) = H^2(\mathcal{X}_s, \mathbf{Z}) \cap H^{1,1}(\mathcal{X}_s)$. Posons $l_s = (u_s^{-1})^* l$; notons $\tilde{q}$ (resp. $\tilde{q}_s$) la forme bilinéaire associée à $q$ (resp. $\tilde{q}$). D'après la formule (1), la condition $l_s \in H^{1,1}(\mathcal{X}_s)$ équivaut à $\tilde{q}_s(l_s, \varphi_s) = 0$, soit encore $\tilde{q}(l, \alpha_s) = 0$, c'est-à-dire à la condition $p(s) \in \Omega_l$. Ainsi sur $\mathcal{M}_l$, la classe $l_s$ est algébrique; quitte à restreindre $\mathcal{M}_l$, elle provient d'un fibré en droites unique $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{X}_l$.

Inversement, soit $\mathcal{Y} \to B$ une déformation de $X$ et $\mathcal{M}$ un fibré en droites sur $\mathcal{Y}$ tel que $\mathcal{M}_{|X} = L$. Quitte à réduire $B$, il existe un diagramme cartésien:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y} & \xrightarrow{\tilde{j}} & \mathcal{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{j} & \mathcal{M} \end{array}$$

D'après ce qui précède on a $j(B) \subset \mathcal{M}_l$, donc $\tilde{j}(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{X}_l$; les fibrés $\mathcal{M}$ et $\tilde{j}^*\mathcal{L}$, qui coïncident sur $X$, différent dans $\mathrm{Pic}(\mathcal{Y})$ par un élément de $\mathrm{Pic}(B)$. Réduisant encore $B$ on peut supposer $\mathcal{M} = \tilde{j}^*\mathcal{L}$, d'où la propriété universelle de $(\mathcal{X}_l, \mathcal{L})$.

Soit $s$ un point de $\mathcal{M}$ appartenant aux hypersurfaces $\mathcal{M}_{l_1}, \cdots, \mathcal{M}_{l_k}$; pour prouver que celles-ci sont transverses en $s$, il suffit de prouver que les hyperplans $\Omega_{l_1}, \cdots, \Omega_{l_k}$ dans $\Omega$ sont transverses en $\alpha_s$. Ceci se traduit par l'indépendance des formes linéaires sur $H^2(X, \mathbf{C})$ $\tilde{q}(\alpha_s, \cdot)$; $\tilde{q}(l_1, \cdot), \cdots, \tilde{q}(l_k, \cdot)$.

Supposons ces formes liées; puisque $q$ est non dégénérée et que les $l_i$ sont libres, il existerait une relation

$$\alpha_s = a_1 l_1 + \cdots + a_k l_k, \qquad a_1, \cdots, a_k \in \mathbf{C}.$$

Mais ceci contredit les formules $\tilde{q}(l_i, \alpha_s) = 0$ (puisque $\alpha_s \in \Omega_{l_i}$) et $\tilde{q}(\alpha_s, \bar{\alpha}_s) > 0$.

Dans le cas particulier où $L$ est très ample, on obtient:

**Corollaire 2.** *Supposons donné un plongement de $X$ dans un espace projectif $\mathbf{P}^N$; soit $\mathcal{H}$ le schéma de Hilbert de $X$ dans $\mathbf{P}^N$, et soit $h$: $\mathcal{H} \to \mathfrak{M}$ l'application naturelle (définie au voisinage du point $X$ de $\mathcal{H}$). Alors l'image de $h$ est un ouvert de l'hypersurface lisse $\mathfrak{M}_l$, avec $l = c_1(\mathcal{O}_X(1))$.*

## 9. Déformations des variétés $S^{[r]}$ et $K_r$

Soit $S$ une surface $K3$, $r$ un entier $\geqslant 2$. Nous allons appliquer à la variété symplectique $X = S^{[r]}$ (supposée de type kählerien) les résultats généraux du §8, dont nous conservons les notations.

**Lemme 1.** *Via l'homomorphisme injectif $i$: $H^2(S, \mathbf{C}) \to H^2(S^{[r]}, \mathbf{C})$, la forme $q$ induit sur $H^2(S, \mathbf{C})$, à un facteur positif près, la forme quadratique associée au cup-produit. De plus la classe $e$ du diviseur exceptionnel de $S^{[r]}$ est orthogonale pour $q$ à l'image de $i$.*

Utilisons la formule (c) du Théorème 5, en prenant pour $\lambda$ une classe $i(l)$, où $l$ est un élément de $H^2(S, \mathbf{C})$ tel que $l^2 \neq 0$. Soit $a \in H^2(S, \mathbf{C})$. Par définition de $i$, il existe des éléments $\mu$ et $\alpha$ de $H^2(S^{(r)}, \mathbf{C})$ tels que

$$i(l) = \varepsilon^*\mu, \quad \pi^*\mu = \sum \mathrm{pr}_i^*\, l; \qquad i(a) = \varepsilon^*\alpha, \quad \pi^*\alpha = \sum \mathrm{pr}_i^*\, a.$$

On a alors (rappelons que $S^{(r)}$ est une variété du point de vue de la cohomologie complexe)

$$\begin{aligned}
&\int_{S^{[r]}} (\varepsilon^*\mu)^{2r-2}(\varepsilon^*\alpha)^2 \\
&\quad = \int_{S^{(r)}} \mu^{2r-2}\alpha^2 \\
&\quad = \frac{1}{r!}\int_{S^r} (\mathrm{pr}_1^*\, l + \cdots + \mathrm{pr}_r^*\, l)^{2r-2}(\mathrm{pr}_1^*\,\alpha + \cdots + \mathrm{pr}_r^*\,\alpha)^2 \\
&\quad = \frac{(2r-2)!}{r!2^{r-1}}\left[ra^2(l^2)^{r-1} + \frac{r(r-1)}{2}(a\cdot l)^2(l^2)^{r-2}\right],
\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}
&\int_{S^{[r]}} (\varepsilon^*\mu)^{2r-1}\varepsilon^*\alpha = \frac{(2r)!}{r!2^{r+1}}(a\cdot l)(l^2)^{r-1}, \\
&v(\varepsilon^*\mu) = \frac{(2r)!}{r!2^r}(l^2)^r.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$q(i(a)) = q(i(l))\left[\frac{a^2}{l^2} + \frac{r-1}{2}\frac{(a\cdot l)^2}{(l^2)^2} - \frac{r-1}{2}\frac{(a\cdot l)^2}{(l^2)^2}\right]$$
$$= a^2\cdot\frac{q(i(l))}{l^2},$$

d'où la première assertion. D'autre part on a

$$\int_{S^{[r]}}(\varepsilon^*\mu)^{2r-1}e = \int_{S^{(r)}}\mu^{2r-1}\cdot e_*e = 0,$$

ce qui entraîne la seconde assertion.

**Remarque 1.** Normalisons $q$ de façon que $q(i(a)) = a^2$; on peut alors montrer qu'on a $q(e) = -8(r-1)$. Compte tenu de la remarque suivant la Proposition 6 (§6), cela entraîne que $q$ est la polarisation canonique de $H^2(S^{[r]}, \mathbf{C})$ (§8, Remarque 3).

Soient $B$ une variété lisse, 0 un point de $B$, et soit $\mathcal{S} \to B$ une famille de surfaces $K3$. Les variétés $\mathcal{S}_s^{[r]}$, pour $s \in B$, s'organisent en un espace de Douady relatif $\mathcal{X}$, lisse au-dessus de $B$. Posons $S = \mathcal{S}_0$, $X = \mathcal{X}_0 = S^{[r]}$; choisissons comme plus haut (quitte à réduire $B$) un difféomorphisme $u$: $X \times B \to \mathcal{X}$ au-dessus de $B$, d'où des isomorphismes $u_s^*$: $H^2(\mathcal{X}_s, \mathbf{C}) \to H^2(X, \mathbf{C})$ pour $s \in B$. Notons $i_s$ l'homomorphisme de $H^2(\mathcal{S}_s, \mathbf{C})$ dans $H^2(\mathcal{X}_s, \mathbf{C})$ défini dans la proposition 6 (§6).

**Lemme 2.** *On a* $u_s^*(i_s(H^2(\mathcal{S}_s, \mathbf{C}))) = i(H^2(S, \mathbf{C}))$.

Soient $E_s$ le diviseur exceptionnel de $\mathcal{X}_s$ et $e_s$ sa classe dans $H^2(\mathcal{X}_s, \mathbf{C})$; puisque les $E_s$ forment une famille algébrique, on a $u_s^* e_s = e$. Puisque $q \circ u_s^*$ est proportionnelle à $q_s$, $u_s^*$ applique l'orthogonal de $e_s$ pour $q_s$ dans l'orthogonal de $e$ pour $q$; le lemme 2 résulte alors du lemme 1.

On déduit donc de $u$ une famille d'isomorphismes $v_s$: $H^2(\mathcal{S}_s, \mathbf{C}) \to H^2(S, \mathbf{C})$, rendant commutatif le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
H^2(\mathcal{X}_s, \mathbf{C}) \arrow[r, "u_s^*"] & H^2(X, \mathbf{C}) \\
H^2(\mathcal{S}_s, \mathbf{C}) \arrow[u, "i_s"] \arrow[r, "v_s"] & H^2(S, \mathbf{C}); \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

quitte à modifier $v_s$ par un scalaire, on peut supposer qu'il respecte le cup-produit. Les isomorphismes $v_s$ définissent ainsi une trivialisation du système localement constant $H^2(\mathcal{S}_s, \mathbf{C})_{s\in B}$, compatible avec le cup-produit. A cette trivialisation est associée l'application des périodes pour la famille $\mathcal{S} \to B$

$$p_S \colon B \to \mathbf{P}(H^2(S, \mathbf{C}));$$

si l'on désigne par $\omega_s$ une 2-forme holomorphe non nulle sur $\mathcal{S}_s$, on a $p_S(s) = v_s[\omega_s]$. L'image de $p_S$ est contenue dans la sous-variété analytique $\Omega_S$ de $\mathbf{P}(H^2(S, \mathbf{C}))$ définie par les équations $\omega^2 = 0$, $\omega \cdot \bar{\omega} > 0$.

Considérons d'autre part l'application des périodes pour la famille $\mathcal{X} \to B$:

$$p_X \colon B \to \Omega_X \subset \mathbf{P}(H^2(X, \mathbf{C})).$$

On déduit alors de ce qui précède le résultat suivant.

**Proposition 10.** *Les applications des périodes $p_S$ et $p_X$ sont reliées par le diagramme commutatif*:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{P}(H^2(S,\mathbf{C})) \arrow[dd, "i"] \\
B \arrow[ur, "p_S"] \arrow[dr, "p_X"'] & \\
 & \mathbf{P}(H^2(X,\mathbf{C}))
\end{tikzcd}$$

*De plus $i$ induit un isomorphisme de $\Omega_S$ sur la section hyperplane de $\Omega_X$ formée des éléments orthogonaux à $e$.*

Cet énoncé va permettre de décrire l'espace des déformations des variétés $S^{[r]}$.

**Théorème 6.** *Soit $S$ une surface $K3$, telle que la variété symplectique $S^{[r]}$ admette une métrique kählerienne. Il existe un espace local de modules $\mathcal{M}$ pour $S^{[r]}$, lisse de dimension 21, tel que tous les points de $\mathcal{M}$ correspondent à des variétés kähleriennes symplectiques. Les variétés $F^{[r]}$, où $F$ est une surface $K3$, forment une réunion dénombrable d'hypersurfaces lisses dans $\mathcal{M}$.*

Soit $\mathcal{M}$ un espace local de modules pour $X = S^{[r]}$ satisfaisant aux conditions (i) à (iii) du[4] §8. On a

$$\dim(\mathcal{M}) = \dim_{\mathbf{C}} H^1(X, T_X) = h^{1,1}(X) = h^{1,1}(S) + 1 = 21.$$

Soit $\mathcal{K}$ un espace local de modules pour $S$. Quitte à réduire $\mathcal{K}$, on peut supposer que l'application $F \mapsto F^{[r]}$ définit un morphisme $j \colon \mathcal{K} \to \mathcal{M}$. La

[4] Une démonstration directe de la lissité de $\mathcal{M}$ est très facile dans ce cas: on montre sans peine, par la méthode du §6, que l'espace $H^3(X, \mathbf{C})$ est nul; on en déduit $H^2(X, T_X) \cong H^2(X, \Omega_X^1) = 0$.

proposition 10 entraîne la commutativité du diagramme:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "p_S"'] & \mathfrak{M} \arrow[d, "p_X"] \\ \Omega_S \arrow[r, "i"] & \Omega_X \end{tikzcd}$$

On a prouvé que $p_S$ et $p_X$ sont des isomorphismes locaux (Théorème 5; ce résultat est bien sûr bien connu pour $p_S$). Par conséquent $j$ induit un isomorphisme local de $\mathcal{K}$ dans l'hypersurface lisse $\mathfrak{M}_e = p_X^{-1}(i(\Omega_S))$ (cf. Corollaire 1 au Théorème 5). L'ensemble des points de $\mathfrak{M}$ correspondant à des variétés $F^{[r]}$ est donc réunion d'ouverts d'hypersurfaces $\mathfrak{M}_f$, où $f$ décrit un sous-ensemble de $H^2(X, \mathbf{Z})$.

**Remarque 2.** Le fait que $j(\mathcal{K})$ coïncide avec $\mathfrak{M}_e$ au voisinage de 0 signifie que *les déformations de $S^{[r]}$ obtenues à partir de déformations de $S$ sont précisément celles dans lesquelles le diviseur exceptionnel $E$ reste algébrique*. Elles sont paramétrées par l'hypersurface lisse $\mathfrak{M}_e$.

Considérons maintenant une surface $K3$ *projective* $S \subset \mathbf{P}^n$. La variété $S^{[r]}$ admet alors un plongement canonique dans un espace projectif $\mathbf{P}^N$. Soit $\mathcal{P}$ le sous-espace de $\mathfrak{M}$ correspondant aux déformations de $S^{[r]}$ comme sous-variété de $\mathbf{P}^N$.

**Proposition 11.** *$\mathcal{P}$ est une hypersurface lisse de $\mathfrak{M}$, transverse à $\mathfrak{M}_e$. La sous-variété $\mathfrak{M}_e \cap \mathcal{P}$ de $\mathfrak{M}$ est lisse de dimension* 19; *c'est l'hypersurface de $\mathfrak{M}_e$ qui paramètre les déformations projectives de $S \subset \mathbf{P}^n$.*

Notons $h$ la classe dans $H^2(S^{[r]}, \mathbf{C})$ d'une section hyperplane. Avec les notations du Corollaire 1 au Théorème 5, on a $\mathcal{P} = \mathfrak{M}_h$. Puisque $E$ est un diviseur exceptionnel, $h$ et $e$ sont $\mathbf{R}$-linéairement indépendants, et le corollaire cité entraîne les assertions de lissité et de transversalité. Soit $\mathfrak{M}_p$ la sous-variété de $\mathfrak{M}_e$ qui paramètre les déformations projectives de $S$; puisqu'on peut construire sur $\mathfrak{M}_p$ une déformation projective de $S^{[r]}$, on a $\mathfrak{M}_p \subset \mathfrak{M}_e \cap \mathcal{P}$. Mais $\mathfrak{M}_p$ est une hypersurface lisse de $\mathfrak{M}_e$ et coïncide donc localement avec $\mathfrak{M}_e \cap \mathcal{P}$.

Il résulte de la proposition que si $S$ est une surface $K3$ projective, une déformation *projective* générique de $S^{[r]}$ n'est plus du type $F^{[r]}$. Il existe donc (pour $r$ fixé) une infinité dénombrable de familles de variétés projectives symplectiques, pour lesquelles on ne possède génériquement aucune description explicite. La recherche de telles descriptions paraît soulever des problèmes géométriques intéressants. Je ne connais guère qu'un exemple, mais qui semble assez prometteur. Soit $X$ une hypersurface cubique lisse dans $\mathbf{P}^5$; soit $F(X)$ la variété des droites contenues dans $X$. Alors $F(X)$ est une variété symplectique projective de dimension 4; lorsque $X$ varie, la famille des $F(X)$ est la famille complète des déformations projectives des variétés $S^{[2]}$, où $S$ est une surface $K3$ dans $\mathbf{P}^8$. La démonstration de ce résultat devrait paraître dans un travail commun avec R. Donagi.

Je voudrais aussi mentionner le résultat déjà cité de Mukai [14], qui prouve que de nombreux espaces de modules de fibrés vectoriels sur les surfaces $K3$ sont des variétés symplectiques projectives. Mais il ne me semble pas clair que ces variétés ne sont pas toutes du type $S^{[r]}$.

Les méthodes de ce paragraphe s'appliquent sans modifications majeures aux variétés $K_r$ (§7); nous laissons les détails au lecteur. On obtient par exemple:

**Théorème 7.** *Soit $A$ un tore complexe de dimension 2, tel que la variété symplectique $K_r$ admette une métrique kählerienne. Il existe un espace local de modules $\mathfrak{N}$ pour $K_r$, lisse de dimension 5, dont tous les points correspondent à des variétés kähleriennes symplectiques. Les variétés du type $K_r$ forment une réunion dénombrable d'hypersurfaces lisses dans $\mathfrak{N}$.*

Observons que les espaces de modules $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ dépendent de $r$. J'ignore s'il existe des relations entre les espaces obtenus pour différentes valeurs de $r$.

**Ajouté sur épreuves.** Des résultats récents de J. Varouchas entraînent que la variété $S^{[r]}$ est kählerienne pour toute surface $K3$ $S$ et tout entier $r \geqslant 1$. De même les variétés $K_r$ sont toujours kähleriennes.

## Bibliographie


[1] M. Berger, *Sur les groupes d'holonomie des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes*, Bull. Soc. Math. France **83** (1955) 279–330.

[2] F. Bogomolov, *On the decomposition of Kähler manifolds with trivial canonical class*, Math. USSR-Sb. **22** (1974) 580–583.

[3] ______, *Hamiltonian Kähler manifolds*, Soviet Math. Dokl. **19** (1978) 1462–1465.

[4] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Hermann, Paris, 1975, Chap. 8.

[5] D. Burns & M. Rapoport, *On the Torelli problems for kählerian K3 surfaces*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **8** (1975) 235–274.

[6] J. Cheeger & D. Gromoll, *The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature*, J. Differential Geometry **6** (1971) 119–128.

[7] J. Fogarty, *Algebraic families on an algebraic surface*, Amer. J. Math. **90** (1968) 511–521.

[8] ______, *Algebraic families on an algebraic surface*. II: *the Picard scheme of the punctual Hilbert scheme*, Amer. J. Math. **95** (1973) 660–687.

[9] P. A. Griffiths, *Periods of integrals on algebraic manifolds*. II, Amer. J. Math. **90** (1968) 805–865.

[10] A. Iarrobino, *Punctual Hilbert schemes*, Bull. Amer. Math. Soc. **78** (1972) 819–823.

[11] S. Kobayashi & K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, I, II, Interscience, New York, 1963, 1969.

[12] K. Kodaira, *On the structure of compact complex analytic surfaces*. I, Amer. J. Math. **86** (1964) 751–798.

[13] M. L. Michelsohn, *Clifford and spinor cohomology of Kähler manifolds*, Amer. J. Math. **102** (1980) 1083–1146.

[14] S. Mukai, *Symplectic structure of the moduli space of sheaves on an abelian or $K3$ surface*, Preprint.

[15] J. Simons, *On transitivity of holonomy systems*, Ann. of Math. **76** (1962) 213–234.

[16] J. Steenbrink, *Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology, real and complex singularities*, (Oslo 1976), Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1977.

[17] A. Weil, *Variétés kähleriennes*, Hermann, Paris, 1958.

[18] K. Yano & S. Bochner, *Curvature and Betti numbers*, Annals of Math. Studies, No. 32, Princeton University Press, Princeton, 1953.

[19] S. T. Yau, *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equations*. I, Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978) 339–411.


UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD, ORSAY