J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
11 (1976) 573-598

PROBLEMES ISOPERIMETRIQUES ET ESPACES DE SOBOLEV

THIERRY AUBIN

Introduction

Dans une première section, nous poserons le problème: l'existence d'une meilleure constante K dans les inégalités de Sobolev. Cette constante, dont la valeur est mentionnée dans la première section, ne dépend que de la dimension de la variété et de l'espace L_q considéré.

Le Résultat principal est le théorème 9, qui permet de montrer, comme nous le ferons dans un article ultérieur, l'existence de solutions pour des équations différentielles non linéaires qui, jusqu'alors, étaient considérées comme cas limite.

Mais le résultat ultime serait celui de la conjecture 2 de la 5ème section. Cette conjecture est démontrée dans le cas des variétés à courbure constante, et dans le cas général en dimension 2. Le maillon qui manque en dimension $n \geq 3$ est la démonstration de la conjecture 1 (de la 2ème section).

La démonstration se fait en plusieurs étapes.

Dans la troisième section, nous démontrons le théorème pour R^n, théorème clé, qui permet de démontrer les autres.

Dans la quatrième section, nous démontrons le théorème pour la sphère. Mais au préalable, nous avons besoin d'établir des résultats isopérimétriques, ceux de la deuxième section. En particulier nous démontrons une inégalité isopérimétrique d'un type peu étudié jusqu'alors. Dans ce domaine habituellement, les ensembles considérés appartiennent à R^n ou plus rarement à une variété à courbure constante. Ici nous énonçons un résultat lorsque la courbure est quelconque; ce sera l'objet du théorème 6.

1. Le problème

Soient une variété riemannienne compacte V_n $(n > 1)$ et H_1^q $(1 \leq q < n)$ l'espace des fonctions appartenant à L_q ainsi que le module de leur gradient. On sait (Sobolev [12], Nirenberg [11]) que $H_1^q \subset L_p$ avec $1/p = 1/q - 1/n$ et que cette inclusion est continue.

D'où pour chaque variété, il existe des constantes B et A dépendant de n et q telles que

Communicated by A. Lichnerowicz, February 6, 1975.

$$(1) \qquad \|\varphi\|_p \leq B\,\|\nabla\varphi\|_q + A\,\|\varphi\|_q\,.$$

On peut s'interroger pour savoir s'il existe une constante B plus petite que toutes les autres, telle qu'une inégalité de ce type ait lieu (A étant à déterminer, fonction de B).

Posons $K = \inf B$ tel que $A(B)$ existe. S'il s'agissait de $L_{p'}$ avec $q \leq p' < p$, l'inclusion de H_1^q dans $L_{p'}$ étant un opérateur compact, d'après Lions [9], pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists\ A'(\varepsilon)$ tel que $\|\varphi\|_{p'} \leq \varepsilon\,\|\nabla\varphi\|_q + A'(\varepsilon)\,\|\varphi\|_q$. Mais les bornés de H_1^q ne sont pas relativement compacts dans L_p et K est non nul d'après le

Théorème 1. *L'inclusion de H_1^q dans L_p n'étant pas un opérateur compact, K est non nul.*

Démonstration. Les bornés de H_1^q ne sont pas relativement compacts dans L_p, alors qu'ils le sont dans L_q, donc il existe une suite $\varphi_k \in H_1^q$ avec $\|\nabla\varphi_k\|_q \leq 1$ et $\lim_{k\to\infty} \|\varphi_k\|_q = 0$, mais telle que la suite $\|\varphi_k\|_p$ ne tende pas vers zéro.

D'où il existe $\eta > 0$ et une sous-suite φ_{k_i}, telle que $\|\varphi_{k_i}\|_p > \eta$. Montrons que $K \geq \eta$. En effet, il ne peut pas exister pour $0 < \varepsilon < \eta$, de constante $A(\varepsilon)$, car on aurait $\|\varphi_{k_i}\|_p \leq \varepsilon + A(\varepsilon)\,\|\varphi_{k_i}\|_q$, ce qui est impossible puisque $\|\varphi_{k_i}\|_q \to 0$, tandis que $\|\varphi_{k_i}\|_p > \eta > \varepsilon$.

Notations. Posons, ω_{n-1} étant l'aire de la sphère $S_{n-1}(1)$, de rayon 1,

$$K(n,q) = \frac{q-1}{n-q}\left[\frac{n-q}{n(q-1)}\right]^{1/q}\left[\frac{q\Gamma(n+1)}{(n-q)\Gamma(n/q-1)\Gamma(n+1-n/q)\omega_{n-1}}\right]^{1/n}$$

pour $1 < q < n$, et $K(n,1) = [n/\omega_{n-1}]^{1/n}/n$.

Dans cet article, nous allons montrer que le K du théorème 1 est $K(n,q)$, qui ne dépend donc que de n et q, ceci pour les variétés compactes, et pour les variétés complètes, moyennant des hypothèses sur la courbure et le rayon d'injectivité.

Nous démontrerons aussi dans certains cas (les variétés à courbure constante ou de dimension deux) que $A[K(n,q)]$ existe.

Lorsque la variété n'est pas complète, les démonstrations restent valables, à condition bien sûr que le théorème d'inclusion continue de Sobolev et le théorème d'inclusion compacte puissent-être appliqués; ce qui nécessite des hypothèses de régularité, comme celle du cône fort (Nirenberg [11]). Mais les conclusions ne concerneraient que $\mathring{H}_1^q(V_n)$, la fermeture de $\mathscr{D}(V_n)$ dans $H_1^q(V_n)$.

Remarques 1. Lorsque $K(n,q)$ peut être pris comme constante B, (un $A[K(n,q)]$ au moins existe), il n'y a dans cet article que des résultats partiels à cet égard, le terme en $\|\varphi\|_q$ au second membre est indispensable dans le cas général. En particulier une inégalité du type

$$\|\varphi\|_p \leq K(n,q)\,\|\nabla\varphi\|_q + A'\,\|\varphi\|_{q'}$$

n'existe pas pour $q' < q$, sauf dans des cas particuliers (comme R^n). Evidemment si on prend $B > K(n, q)$, on peut se contenter de mettre au deuxième membre de (1), $\|\varphi\|_{q'}$ au lieu de $\|\varphi\|_q$ avec $q' < q$.

On peut se demander aussi, si parmi les constantes $A[K(n, q)]$ possibles, il en existe une, meilleure que toutes les autres. Si la variété est compacte et normée par $\int_v dv = 1$, il est évident que $A[K(n, q)] \geq 1$. On montrera, dans un article ultérieur (flubin [2]), par exemple, que sur la sphère normée, $A[K(n, 2)] = 1$, ($A(2) = 1$ avec les notations du théorème 8).

2. Préliminaires isopérimétriques

En général sauf mention du contraire, quand nous parlerons de mesure (ou volume) d'un ensemble $E \subset V_n$ ($n \geq 2$), ce sera par rapport à la mesure définie par la métrique de V_n (notée souvent μ). Quand on parlera d'aire d'un ensemble, ce sera sa mesure ($n - 1$) dimensionnelle définie par la métrique V_n (notée $\mathscr{A}$). Lorsqu'il s'agira uniquement de variétés de dimension 2, nous parlerons d'aire et de longueur. Etant donné un ensemble $E \subset V_n$, avec $\bar{E}$ compact, nous noterons $E_\rho = \{M \in V_n \,|\, d(M, E) < \rho\}$, ρ un réel strictement positif, $d(M, E)$ la distance de M à E.

Pour ρ assez petit, $E_\rho = \bigcup_{M \in E} B_M(\rho) \cdot B_M(\rho)$ étant la boule ouverte de centre M et de rayon $\rho \cdot E_\rho$ est un ouvert, c'est un ensemble mesurable.

Théorème 2. *Soit E un ensemble compact d'une variété V_n, pour $\rho \in]0, \delta[$, δ assez petit, $f_E(\rho) = \mu(E_\rho)$ est une fonction croissante continue et dérivable, sauf au plus en une infinité dénombrable de points, où f_E admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche, (la dérivée à droite étant inférieure à la dérivée à gauche).*

Démonstration. Nous prendrons δ assez petit pour que $B_M(\rho)$ existe pour $\forall\, M \in E$ et $\forall\, \rho < \delta$. Soient M_i ($i = 1, 2, \cdots, l$) un ensemble fini de points de E et $B_i(\rho)$ les boules de rayon ρ, centrées respectivement en M_i (ρ fixé, $\rho < \delta$). On considère les ensembles $A_j = \{Q \in B_j(\rho) \,|\, d(M_j, Q) \leq d(M_i, Q)$ pour $\forall\, i\}$. Soit k un réel vérifiant $1 < k < \delta/\rho$.

Considérons θ_i l'ensemble obtenu à partir de A_i dans une homothétie h_i de centre M_i et de rapport k:

$A_i \ni P \xrightarrow{h_i} P'$ défini de la manière suivante, P et P' sont sur une même demi-géodésique issue de M_i, $d(M_i, P') = k\, d(M_i, P)$.

Soit b^2 ($b \geq 0$) un majorant de la courbure, on supposera que $2b\delta < \pi$. Soit $a' \leq 0$ un minorant de la courbure de Ricci sur $(\overline{E_\delta})$, on pose $-a' = (n - 1)\alpha^2$. Dans $B_i(\delta)$, on prend un système de coordonnées géodésique polaires. r étant la distance géodésique à M_i et $\sqrt{|g|}$ étant le déterminant de la métrique, on sait (voir Aubin [1]), que $\sqrt{|g|}\left(\dfrac{\alpha r}{sh\, \alpha r}\right)^{n-1}$ est une fonction décroissante de r, avec la convention habituelle $(sh\, \alpha r)/\alpha = r$ si $\alpha = 0$. D'où

$$(kr)^{n-1}\sqrt{|g(P')|} \leq \left(\frac{sh\, k\alpha r}{sh\, \alpha r}\right)^{n-1} r^{n-1}\sqrt{|g(P)|} \ .$$

Par conséquent $\mu(\theta_i) \leq \left(\frac{sh\, k\alpha p}{sh\, \alpha p}\right)^{n-1} k\mu(A_i)$ car $\frac{sh\, kx}{sh\, x}$ est une fonction croissante de x et car $r < \rho$. Etant donné $Q' \in \bigcup_{i=1}^{l} B_i(k\rho)$, soit M_j un des points tels que $d(M_j, Q') \leq d(M_i, Q')$ pour $\forall\, i$.

Alors le point Q tel que $Q' = h_j(Q)$ appartient à A_j et $\bigcup_{i=1}^{l} \theta_i = \bigcup_{i=1}^{l} B_i(k\rho)$. De plus comme les sous-variétés $A_i \cap A_j$ $(i \neq j)$ sont de dimension $(n-1)$ quand $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, $\mu(A_i \cap A_j) = 0$. D'où

$$(2) \qquad \begin{aligned} \mu\left[\bigcup_{i=1}^{l} B_i(k\rho)\right] &\leq \sum_{i=1}^{l} \mu(\theta_i) \leq k\left(\frac{sh\, k\alpha\rho}{sh\, \alpha\rho}\right)^{n-1} \sum_{i=1}^{l} \mu(A_i) \\ &= k\left(\frac{sh\, k\alpha\rho}{sh\, \alpha\rho}\right)^{n-1} \mu\left[\bigcup_{i=1}^{l} B_i(\rho)\right] . \end{aligned}$$

E_ρ est un ouvert, considérons une suite de compacts K_p, emboités, $K_p \subset K_{p+1}$, telle que $E_\rho = \bigcup_{p=1}^{\infty} K_p$.

K_1 est recouvert par un nombre fini de boules $B_M(\rho)$ avec $M \in E$, soient $B_1, B_2, \cdots, B_{i_1}$ ces boules. Puis K_2 est recouvert par les boules $B_1, B_2, \cdots, B_{i_1}$, plus éventuellement par un nombre fini de boules $B_{i_1+1}, \cdots, B_{i_2}$.

On met en évidence ainsi une suite B_j de boules $B_{M_j}(\rho)$, telles que $E_\rho = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{M_j}(\rho)$ et $E_{k\rho} = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{M_j}(k\rho)$ car $E_{k\rho} = (E_\rho)_{(k-1)\rho}$. D'après (2), en faisant tendre l vers l'infini:

$$\begin{aligned} \mu(E_{k\rho}) = \lim_{l\to\infty} \mu\left[\bigcup_{j=1}^{l} B_{M_j}(k\rho)\right] &\leq k\left(\frac{sh\, k\alpha\rho}{sh\, \alpha\rho}\right)^{n-1} \lim_{l\to\infty} \mu\left[\bigcup_{j=1}^{l} B_{M_j}(\rho)\right] \\ &\leq k\left(\frac{sh\, k\alpha\rho}{sh\, \alpha\rho}\right)^{n-1} \mu(E_\rho) \ . \end{aligned}$$

Appelons $v_p(\rho) = \mu[\bigcup_{j=1}^{p} B_{M_j}(\rho)] = \mu[U_p(\rho)]$, on pose $U_p(\rho) = \bigcup_{j=1}^{p} B_{M_j}(\rho)$. La frontière $F_p(\rho)$ de $U_p(\rho)$ est rectifiable, par conséquent, (voir Federer [8]):

$$\mathscr{A}[F_p(\rho)] \leq \varliminf_{\Delta\rho\to 0} \frac{1}{2\Delta\rho}[v_p(\rho + \Delta\rho) - v_p(\rho - \Delta\rho)] \ .$$

Démontrons une inégalité du type de celle de (2) pour l'aire de la frontière $F_p(\rho)$ de $\bigcup_p(\rho)$. Posons $\Omega_i(\rho) = \bar{B}_{M_i}(\rho) \cap F_p(\rho)$ et $\Omega_i(k\rho) = \bar{B}_{M_i}(k\rho) \cap F_p(k\rho)$.

Remarquons que $\Omega_i(k\rho) \subset h_i[\Omega_i(\rho)]$. En effet si un point P avec $d(M_i, P) = \rho$ n'appartient pas à $F_p(\rho)$ c'est qu'il existe M_j $(j \leq p)$ tel que $d(M_j, P) < \rho$, alors $P' = h_i(P)$ vérifie $d(M_j, P') < d(M_j, P) + d(P, P') < k\rho$ et $P' \notin F_p(k\rho)$.

On en déduit donc que $\mathscr{A}[F_p(k\rho)] \leq \left(\frac{sh\, k\alpha\rho}{sh\, \alpha\rho}\right)^{n-1} \mathscr{A}[F_p(\rho)]$. De plus les

$\mathscr{A}[F_p(\rho)]$ sont uniformément bornés sur un intervalle tel que $[\varepsilon, \delta]$ avec $\varepsilon > 0$. En effet d'après (2):

$$0 \leq \frac{v_p(\rho + \Delta\rho) - v_p(\rho)}{\Delta\rho} \leq \frac{v_p(\rho)}{\Delta\rho}\left[\left(\frac{sh\,\alpha(\rho + \Delta\rho)}{sh\,\alpha\rho}\right)^{n-1}\frac{\rho + \Delta\rho}{\rho} - 1\right],$$

d'où

$$\overline{\lim_{\Delta\rho \to 0}} \frac{v_p(\rho + \Delta\rho) - v_p(\rho)}{\Delta\rho} \leq v_p(\rho)\left[\frac{1}{\rho} + (n-1)\alpha \coth \alpha\rho\right]$$
$$\leq \left[\frac{1}{\rho} + (n-1)\alpha \coth \alpha\rho\right] f(\rho) .$$

De même

$$\overline{\lim_{\Delta\rho \to 0}} \frac{v_p(\rho) - v_p(\rho - \Delta\rho)}{\Delta\rho} \leq \left[\frac{1}{\rho} + (n-1)\alpha \coth \alpha\rho\right] f(\rho) .$$

Enfin montrons que $\mathscr{A}[F_p(\rho)]$ est une fonction continue de ρ. Rappelons que $\Omega_i(\rho) = \bar{B}_{M_i}(\rho) \cap F_p(\rho)$. Appelons $W(\rho) = \{P \mid \exists\, i$ et $j,\ i \neq j,$ tels que $P \in \Omega_i(\rho) \cap \Omega_j(\rho)\}$. $W(\rho)$ est un ensemble de mesure $(n-1)$ dimensionnelle nulle, comme réunion finie de tels ensembles.

Posons $A_k = \{P \mid \exists\, i$ tel que $P \in \Omega_i(\rho),\ P \notin \bar{B}_{M_j}(k\rho)$ pour $i \neq j\}$ pour $k > 1$. $\overline{\bigcup_{k>1} A_k} = F_p(\rho)$ et $\lim_{k\to 1} \mathscr{A}(A_k) = \mathscr{A}[F_p(\rho)]$. D'où pour $\forall\, \eta > 0$, $\exists\, k_0$ tel que pour $1 < k < k_0$, $\mathscr{A}[F_p(\rho) - A_k] < \eta$. Soit $P \in A_k \cap \Omega_i(\rho)$, dans une homothétie h_i de rapport $\frac{1}{2}(k+1)$, $P' = h_i(P) \notin W(\frac{1}{2}(k+1)\rho)$. En effet pour $j \neq i$:

$$d(P', M_j) \geq d(M_j, P) - d(P, P') > k\rho - \tfrac{1}{2}(k-1)\rho = \tfrac{1}{2}(k+1)\rho .$$

D'où $\mathscr{A}[F_p(\frac{1}{2}(k+1)\rho)] > \mathscr{A}(A_k) > \mathscr{A}[F_p(\rho)] - \eta$. Comme d'autre part $\mathscr{A}[F_p(k\rho)] \leq \left(\frac{sh\,k\alpha\rho}{sh\,\alpha\rho}\right)^{n-1} \mathscr{A}[F_p(\rho)]$, $\mathscr{A}[F_p(\rho)]$ est une fonction de ρ continue à droite. De même on démontrerait la continuité à gauche.

$v_p(\rho)$, qui est l'integrale de $\mathscr{A}[F_p(\rho)]$, admet ainsi une dérivée, et $v_p'(\rho) = \mathscr{A}[F_p(\rho)]$. De plus

$$v_p'(k\rho) - v_p'(\rho) \leq \left[\left(\frac{sh\,k\alpha\rho}{sh\,\alpha\rho}\right)^{n-1} - 1\right]\left[\frac{1}{\rho} + (n-1)\alpha \coth \alpha\rho\right] f(\rho) .$$

Démontrons maintenant un *lemme*:

Soit $g_n(x)$ une suite de fonctions croissantes sur un intervalle ouvert $I \subset R$, uniformément bornées sur I. Il existe une sous-suite $g_{n_i}(x)$, qui converge vers une fonction $g(x)$ sur I, sauf au plus en une infinité dénombrable de points, $g_{n_i}(x)$ converge vers $g(x)$ en tout point où $g(x)$ est continue.

Soit B un ensemble dénombrable dense dans I. Pour y fixé, $y \in B$, la suite $g_n(y)$ est bornée ; d'où il existe une sous-suite qui converge. Par la technique de la sous-suite diagonale, on montre l'existence d'une sous-suite g_{n_i} telle que $g_{n_i}(y)$ converge pour chaque $y \in B$. Appelons $g(y) = \lim_{i\to\infty} g_{n_i}(y)$ pour $y \in B$ et $g(x) = \lim_{\substack{< \\ y\to x}} g(y)$ pour $x \in I$, $x \notin B$.

Les fonctions g_{n_i} étant croissante, pour $y_1 < y_2$, $g(y_1) \leq g(y_2)$. D'où l'existence de $g(x)$ qui est une fonction croissante, donc continue sauf sur un ensemble de points A au plus dénombrable. Montrons maintenant qu'en un point $x \notin A$, $g_{n_i}(x)$ converge vers $g(x)$.

Soient $\xi_p \in B$ une suite croissante de réels avec $\xi_p \to x$, et $\xi_q \in B$ une suite décroissante de réels avec $\xi_q \to x$. Alors $g_{n_i}(\xi_p) \leq g_{n_i}(x) \leq g_{n_i}(\xi_q)$. Faisons tendre i vers l'infini, on obtient

$$g(\xi_p) \leq \varliminf_{i\to\infty} g_{n_i}(x) \leq \varlimsup_{i\to\infty} g_{n_i}(x) \leq g(\xi_q) \ .$$

Comme g est continue en x, quand $\xi_p \to x$, $g(\xi_p) \to g(x)$; et quand $\xi_q \to x$, $g(\xi_q) \to g(x)$. D'où $g(x) = \lim_{i\to\infty} g_{n_i}(x)$.

Fin de la démonstration du théorème 2. Appliquons le lemme aux fonctions $g_p(\rho) = -v'_p(\rho) + a\rho$. Pour $x < y$, $g_p(y) - g_p(x) = v'_p(x) - v'_p(y) + a(y - x) \geq 0$ sur $[\varepsilon, \delta]$ à condition de prendre a suffisamment grand, ce que nous faisons.

D'où il existe une sous-suite v'_{p_i}, telle que $v'_{p_i}(x) \to h(x)$, sauf éventuellement en une infinité dénombrable de points, les points de discontinuité de $h(x)$.

La fonction $f(\rho)$ est uniformément lipschitzienne sur $[\varepsilon, \delta]$:

$$0 \leq f(\rho + \Delta\rho) - f(\rho) \leq f(\rho)\left[\left(\frac{sh\,\alpha(\rho + \Delta\rho)}{sh\,\alpha\rho}\right)^{n-1} \frac{\rho + \Delta\rho}{\rho} - 1\right] ,$$

d'où elle est absolument continue, elle admet donc presque partout une dérivée $f'(\rho)$, et elle est l'intégrale de sa dérivée. Comme $v_{p_i}(\rho) \to f(\rho)$ pour $\forall \rho \in]0, \delta]$, d'après le théorème de Lebesgue, $h(\rho)$ est la dérivée de $f(\rho)$ en tout point ρ où $h(\rho)$ est continue. En un point de discontinuité de $h(\rho)$, $h(\rho - 0)$ et $h(\rho + 0)$ existent et $h(\rho + 0) < h(\rho - 0)$.

Le théorème est ainsi démontré et lorsque $f'(\rho)$ existe, elle vérifie

$$0 \leq f'(\rho) \leq [(1/\rho) + (n - 1)\alpha \coth \alpha\rho] f(\rho) \ .$$

Remarque. Le théorème 2, n'est pas la généralisation de celui énoncé par Bouligand [6], car une erreur s'est glissée dans sa démonstration et f_E n'est pas dérivable partout.

Théorème 3. *Soit E un ensemble compact de V_n, on appelle $A(E) = \liminf_{\rho\to 0} (1/\rho)\mu(E_\rho - E)$. Si $A(E) < \infty$, il existe, pour $\forall\, \varepsilon > 0$ et $\forall\, \eta > 0$, un* *ensemble Ω réunion d'un nombre fini de boules centrées en des points de E et de rayon inférieur à ε, tel que $|\mu(\Omega) - \mu(E)| < \eta$ et tel que $|\mathscr{A}(\dot{\Omega}) - A(E)| < \eta$.*

Autrement dit on peut "approcher" un ensemble compact (avec $A(E) < \infty$) par des ensembles mesurables Ω de frontière rectifiable, de telle sorte que le volume $\mu(\Omega)$ et l'aire de la frontière de ces ensembles $\mathscr{A}(\dot{\Omega})$ soient aussi voisin qu'on veut de $\mu(E)$ et de $A(E)$ respectivement.

Démonstration. Posons $f(\rho) = \mu(E_\rho)$ pour $\rho \in]0, \delta]$ et $f(0) = \mu(E)$. f est continue sur $[0, \delta]$, car comme $\bigcap_{\rho>0} E_\rho = \bar{E} = E$ et comme $E_\rho \subset E_{\rho'}$, si $\rho < \rho'$, $\lim_{\rho\to 0} \mu(E_\rho) = \mu(E)$.

D'après la définition de $A(E)$, pour $\forall\, \eta > 0$, il existe une suite décroissante $\rho_j > 0$, $\rho_j \to 0$, telle que

$$\left| \frac{f(\rho_j) - f(\rho_{j+1})}{\rho_j - \rho_{j+1}} - A(E) \right| < \frac{\eta}{2} .$$

On prend j assez grand pour que $\rho_j < \varepsilon$ et pour que $|f(\rho_j) - f(0)| < \frac{1}{2}\eta$. Avec les notations du théorème précedent, il existe une suite $v_p(\rho)$ telle que $\lim_{i\to\infty} v_p(\rho) = f(\rho)$ pour $\rho \in]0, \delta[$, la convergence étant uniforme sur tout intervalle fermé. Pour $\forall\, \xi > 0$, $\exists\, n_0$, tel que $p > n_0$ entraîne $|f(\rho) - v_p(\rho)| < \xi$ pour $\forall\, \rho \in [\rho_{j+1}, \rho_j]$. On prend $\xi < \frac{1}{2}\eta$ et $\xi < \frac{1}{4}(\rho_j - \rho_{j+1})\eta$. D'où

$$\left| \frac{v_p(\rho_j) - v_p(\rho_{j+1})}{\rho_j - \rho_{j+1}} - A(E) \right| < \frac{\eta}{2} + \frac{2\xi}{\rho_j - \rho_{j+1}} < \eta .$$

Comme les $v_p(\rho)$ sont dérivables pour $\forall\, \rho \in [0, \delta]$, d'après le théorème des accroissements finis, $\exists\, r_j \in]\rho_{j+1}, \rho_j[$, tel que $(\rho_j - \rho_{j+1})v'_p(r_j) = v_p(\rho_j) - v_p(\rho_{j+1})$. D'où $|\mathscr{A}[F_p(r_j)] - A(E)| < \eta$ et $|v_p(r_j) - f(0)| < \eta$. L'ensemble $\Omega = U_p(r_j)$ répond aux exigences du théorème.

Théorème 4. *Pour un ensemble mesurable E, inclus dans une boule $B_P(\delta)$ d'une variété V_n à courbure constante,* $\liminf_{\rho\to 0} (1/\rho)\mu(E_\rho - E) \geq$ *l'aire du bord d'une boule de V_n ayant un volume égal à $\mu(\bar{E})$.*

Ce théorème a été démontré par E. Schmidt et A. Dinghas [7]. Montrons incidemment une inégalité qui peut être utile.

Théorème 5. *Sur la sphère S_n de courbure α^2, soient V le volume d'une boule et $\sum$ l'aire de son bord, $\sum$ et V vérifient l'inégalité*

$$\textstyle\sum^{n/(n-1)} \leq n(\omega_{n-1})^{1/(n-1)} V(1 - \beta_n V^{2/n}) ,$$

avec $\beta_n = \dfrac{\alpha^2}{2(2+n)}(n)^{(n+2)/n}(\omega_{n-1})^{-2/n}$. *Le même résultat est valable pour l'espace hyperbolique de courbure K, il suffit de poser $\alpha^2 = K$.*

Ce théorème est une généralisation du résultat bien connu en dimension 2, (Bernstein [4]), où on a égalité $\sum^2 = 4\pi V(1 - (\frac{1}{4}\alpha^2/\pi)V)$.

La boule de rayon $\delta\left(\delta \leq \dfrac{\pi}{\alpha}\right)$ a pour volume $V(\delta) = \omega_{n-1}\int_0^\delta \left(\dfrac{\sin \alpha\rho}{\alpha}\right)^{n-1} d\rho$ et l'aire de son bord $\sum(\delta) = \omega_{n-1}(\sin \alpha\delta/\alpha)^{n-1}$ avec ω_{n-1} le volume de la sphère $S_{n-1}(1)$.

$V(\delta)$ est une fonction strictement croissante de δ, il existe une fonction inverse ψ:

$$[0,\ \omega_n/\alpha^n] \ni V \xrightarrow{\sum\circ\psi} \sum \in [0,\ \omega_{n-1}/\alpha^{n-1}] ,$$

car $\omega_n = \omega_{n-1}\int_0^\pi (\sin x)^{n-1}dx$. D'après le théorème 4 on a le

Corollaire 1. *Soient $E \subset S_n$ un ensemble mesurable $A(E) \geq \sum\circ\psi[\mu(E)]$, la fonction $\sum\circ\psi$ vérifiant l'inégalité du théorème* 5.

Démonstration du théorème 5. Considérons le rapport

$$f(\delta) = \frac{n(\omega_{n-1})^{1/(n-1)}V - \sum^{n/(n-1)}}{V^{(n+2)/n}} \qquad \text{pour } 0 < \delta \leq \frac{\pi}{\alpha} .$$

Quand $\delta \to 0$,

$$\begin{aligned} V(\delta) &= \omega_{n-1}\int_0^\delta \rho^{n-1}\left(1 - \frac{\alpha^2\rho^2}{6}\right)^{n-1} d\rho + 0(\delta^{n+3}) \\ &= \omega_{n-1}\left(\frac{\delta^n}{n} - \frac{\alpha^2}{6}\frac{n-1}{n+2}\delta^{n+2}\right) + 0(\delta^{n+3}) , \\ \textstyle\sum^{n/(n-1)}(\delta) &= \omega_{n-1}^{n/(n-1)}\delta^n\left(1 - \frac{\alpha^2\delta^2}{6}\right)^n + 0(\delta^{n+3}) \\ &= \omega_{n-1}^{n/(n-1)}\delta^n\left(1 - \frac{\alpha^2}{6}n\delta^2\right) + 0(\delta^{n+3}) . \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} f(\delta) &\sim \omega_{n-1}^{n/(n-1)}\frac{n\alpha^2}{6}\left(1 - \frac{n-1}{n+2}\right)\left(\frac{\omega_{n-1}}{n}\right)^{-(n+2)/n} \\ &= \frac{\alpha^2}{2(n+2)}(n)^{2(n+1)/n}\omega_{n-1}^{(2-n)/n(n-1)} \end{aligned}$$

quand $\delta \to 0$. Montrons que $f(\delta)$ est une fonction croissante (que sa dérivée $f'(\delta)$ est ≥ 0).

$$\begin{aligned} f'(\delta) = \frac{n(\omega_{n-1})^{n/(n-1)}}{V^{2(n+1)/n}}\Bigg\{&\left[\left(\frac{\sin\alpha\delta}{\alpha}\right)^{n-1} - \left(\frac{\sin\alpha\delta}{\alpha}\right)^{n-1}\cos\alpha\delta\right]V \\ &- \left[V - \frac{\omega_{n-1}}{n}\left(\frac{\sin\alpha\delta}{\alpha}\right)^n\right]\left(\frac{\sin\alpha\delta}{\alpha}\right)^{n-1}\frac{n+2}{n}\Bigg\} , \end{aligned}$$

$f'(\delta)$ a le signe de $(1 - \cos\alpha\delta)\, V - [V - \omega_{n-1}(\sin\alpha\delta/\alpha)^n/n](n+2)/n$ soit $((n+2)/n)\omega_{n-1}(\sin\alpha\delta/\alpha)^n - V[n\cos\alpha\delta + 2]$ qui est non négatif, car $V(\delta) \leq ((n+2)/n)\omega_{n-1}(\sin\alpha\delta/\alpha)^n[n\cos\alpha\delta + 2]^{-1}$. En effet quand $\delta \to 0$, $V(\delta) \sim \omega_{n-1}\delta^n/n$ tout comme le 2ème membre. Et le calcul qui suit montre que

$$\omega_{n-1}(\sin\alpha\delta/\alpha)^{n-1} = V'(\delta) \leq \frac{n+2}{n}\,\frac{\omega_{n-1}(\sin\alpha\delta/\alpha)^{n-1}n}{(n\cos\alpha\delta+2)^2}[\cos\alpha\delta(n\cos\alpha\delta+2) + \sin^2\alpha\delta]$$

$(n-2)[1 - 2\cos\alpha\delta + \cos^2\alpha\delta] \geq 0$ entraîne

$$n^2\cos^2\alpha\delta + 4n\cos\alpha\delta + 4 \leq (n+2)(n-1)\cos^2\alpha\delta + 2(n+2)\cos\alpha\delta + (n+2)\ ,$$

soit

$$(n\cos\alpha\delta + 2)^2 \leq (n+2)[(n-1)\cos^2\alpha\delta + 2\cos\alpha\delta + 1]\ .$$

Corollaire 2. *Soient deux boules B_1 et B_2, l'une sur un espace à courbure constante K_1, l'autre sur un espace à courbure constante K_2, les mesures de B_1 et B_2 étant égales $\mu_1(B_1) = \mu_2(B_2)$, alors si $K_1 < K_2$, l'aire du bord de $B_1 >$ l'aire du bord de B_2.*

Posons $K_1 = \alpha_1^2$ et $K_2 = \alpha_2^2$, si la courbure est négative les sinus sont des sh. On a $\int_0^{\delta_1}\left(\frac{\sin\alpha_1\rho}{\alpha_1}\right)^{n-1}d\rho = \int_0^{\delta_2}\left(\frac{\sin\alpha_2\rho}{\alpha_2}\right)^{n-1}d\rho$, δ_1 étant le rayon de B_1 et δ_2 celui de B_2. $\sin\rho x/x$ est une fonction décroissante de x pour $\rho x < \pi$ donc $\sin\alpha_1\rho/\alpha_1 \geq \sin\alpha_2\rho/\alpha_2$, d'où $\delta_1 < \delta_2$.

Considérons la fonction $\psi(\delta_1) = \dfrac{\sin\alpha_2\delta_2/\alpha_2}{\sin\alpha_1\delta_1/\alpha_1}$. On montre que $\psi(\delta_1)$ est inférieur ou égal à 1. En effet $\lim_{\delta_1\to 0}\psi(\delta_1) = 1$ et si $\psi(\delta_1) \geq 1$ pour un certain $\delta_1 > 0$, alors on aurait $\alpha_1\delta_1 < \alpha_2\delta_2$ et $\psi'(\delta_1) < 0$.

Abordons maintenant un problème isopérimétrique nettement plus difficile.

Conjecture 1. *Sur une variété V_n, pour un ensemble mesurable E, inclus dans une boule B (où la courbure est inférieure à K): $\liminf_{\rho\to 0}(1/\rho)\mu(E_\rho - E) \geq$ l'aire du bord d'une boule, qui sur une variété de courbure constante K, a pour volume $\mu(\bar{E})$.*

Evidemment dans le cas où $K > 0$, il faut supposer que $\mu(\bar{E})$ est inférieur au volume de la sphère de courbure K.

Nous allons démontrer cette conjecture dans le cas des variétés de dimension 2. Nous supposerous seulement en plus, pour la démonstration, que le diamètre δ de la boule B est strictement inférieur au rayon d'injectivité et vérifie $K\delta^2 < \pi^2$ et $\sin\sqrt{k}\,\delta/\sqrt{k} < 2\sin\sqrt{K}\,\delta/\sqrt{K}$, k étant un minorant de la courbure sur B. Avec la convention habituelle $\sin\sqrt{K}\rho/\sqrt{K} = \rho$ si $K = 0$ et $\sin\sqrt{K}/\rho\sqrt{K} = sh\, i\sqrt{K}\rho/(i\sqrt{K})$ si $K < 0$.

Théorème 6. *Sur une variété V_2, pour un ensemble mesurable E, inclus dans une boule B (où la courbure est inférieure à K et supérieure à k), le diamètre δ de la boule B étant strictement inférieur au rayon d'injectivité et vérifiant $K\delta^2 < \pi$ et $\sin\sqrt{k}\delta/\sqrt{k} \leq 2\sin\sqrt{K}\delta/\sqrt{K}$: $A = \liminf_{\rho\to 0}(1/\rho)\mu(E_\rho = E) \geq$ longueur du bord d'un disque qui, sur une variété de courbure constante K, a pour aire $\mu(\bar{E})$.*

Si $A = +\infty$, ce qui se produit en particulier si $\mu(E) \neq \mu(\bar{E})$, le théorème est vrai. Si $A < \infty$ d'après le théorème 3, il suffit de faire la démonstration pour un ensemble Ω réunion d'un nombre fini de boules de même rayon σ. Cet ensemble Ω pourrait ne pas être inclus dans la boule B de départ, mais dans une boule B', et dans la démonstration, il faudrait considérer K' (resp. k') un majorant (resp. un minorant) de la courbure sur B'. Mais comme $\sup_{M\in B'}\text{dist}(M, B) \leq \sigma$, σ le rayon des boules qui est aussi petit qu'on veut, K' et k' peuvent être choisis aussi voisin de K et k qu'on le désire.

Démonstration. Nous supposerous donc que E est une réunion finie de boules et que E est inclus dans une boule B de diamètre δ inférieur au rayon d'injectivité. De plus $\dot{E}$ la frontière de E est supposée sans point double, sinon on appliquerait notre démonstration séparément à chaque surface délimitée par une courbe sans point double.

Tout le problème consiste à construire sur $\sum$ la sphère de courbure K si $K > 0$, (resp. l'espace euclidien ou hyperbolique de courbure K si $K \leq 0$) un ensemble E'' ayant l'aire de E: $\mu(E) = \mu'(E'')$, μ' étant la mesure sur $\sum$, et tel que la longueur de la frontière $\dot{E}''$ soit inférieure ou égale à celle de $\dot{E}$.

Car cette construction étant faite, le théorème 4 entraînera le théorème 6. Soient $P \in \dot{B} \cap \dot{E}$, $P' \in \sum$ et un système de coordonnées géodésiques polaires centré en P': (ρ, θ).

Considérons l'intersection avec E du cercle de centre P et de rayon ρ sur V_2: $C_P(\rho)$ avec $\rho < \delta$. $E \cap C_P(\rho)$ est une réunion finie d'arcs, soit $2h(\rho)$ la longueur de cet ensemble. La fonction $h(\rho)$ est strictement positive sur un intervalle $]0, \delta_0[$ et nulle à l'extérieur, car lorsque $h(\rho)$ s'annule en δ_0, elle reste nulle pour $\rho > \delta_0$, car $\dot{E}$ est sans point double.

On considère l'ensemble $E' \subset \sum$ des points dont les coordonnées (ρ, θ), $\rho > 0$, vérifient $|\theta| < \sqrt{K}h(\rho)/\sin\sqrt{K}\rho = g(\rho)$. Par construction même $\mu(E) = \mu'(E')$, la valeur commune étant $2\int_0^{\delta_0} h(\rho)d\rho$.

Pour que cette construction soit possible, il faut que $h(\rho) \leq \pi\sin\sqrt{K}\rho/\sqrt{K}$ pour $\forall\rho \in]0, \delta_0[$. Or l'hypothèse supplémentaire faite $\sin\sqrt{k}\delta/\sqrt{k} \leq 2\sin\sqrt{K}\delta/\sqrt{K}$ entraîne pour $\rho < \delta_0 \leq \delta$, $\sin\sqrt{k}\rho/\sqrt{k} \leq 2\sin\sqrt{K}\rho/\sqrt{K}$ et comme $h(\rho) \leq \frac{1}{2}\pi\sin\sqrt{k}\rho/\sqrt{k}$ (voir Aubin [1]) $h(\rho) \leq \pi\sin\sqrt{K}\rho/\sqrt{K}$.

Comme $h(\rho)$ est une fonction continue et continûment dérivable par morceaux sur $[0, \delta_0]$, il en est de même de la fonction $g(\rho)$ prolongée par continuité en 0 et en δ_0. $g(\delta_0) = 0$, $2g(0) =$ angle des deux demi-tangentes en P à $\dot{E}$. Il faut néanmoins vérifier qu'en 0, $g(\rho)$ a une dérivée à droite $g'(0)$. Or un développement limité donne $h(\rho)/\rho = g(0) + \lambda\rho + 0(\rho)$ avec λ un réel, $[\lambda = g'(0)]$.

Nous supposerons maintenant que la métrique est analytique dans B ; s'il n'en était pas ainsi, dès le début, nous aurions considéré une métrique analytique approchant uniformément la métrique donnée, ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre 2 sur $\bar{B}$.

On construit maintenant une fonction décroissante $f(\rho)$ ayant les deux propriétés suivantes:

(1) Lorsque $f'(\rho)$ existe et est négatif strictement, $f(\rho) = g(\rho)$;

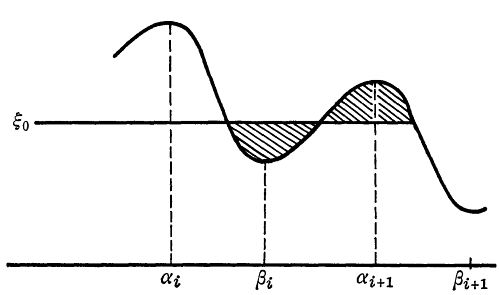
(2)
$$\int_0^{\delta_0} \frac{\sin\sqrt{K}\rho}{\sqrt{K}} f(\rho)d\rho = \int_0^{\delta_0} \frac{\sin\sqrt{K}\rho}{\sqrt{K}} g(\rho)d\rho \ .$$

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$, les suites finies croissantes des abscisses des maximums relatifs et des minimums relatifs de la fonction g. $\beta_k = \delta_0$.

Si sur un segment $[a, b]$, g était constante, a et b n'apparaîterairnt pas dans les suites α et β, si g est monotone sur un voisinage de $[a, b]$. Dans le cas contraire, on classera a dans l'une des deux suites suivant la nature de l'extrêmum, b étant toujours non classé. Si en 0, g est décroissante $\alpha_1 = 0$. Mais si en 0, g est croissante, on mettera en plus dans la suite des β, $\beta_0 = 0$.

Supposons que pour un certain i, on ait $g(\alpha_i) \geq g(\alpha_{i+1})$ et $g(\beta_i) \geq g(\beta_{i+1})$ pour $\xi \in [g(\beta_i), g(\alpha_{i+1})]$ considérons la fonction $g_\xi(\rho)$ définie sur $[\alpha_i, \beta_{i+1}]$ par $g_\xi(\rho) = g(\rho)$ pour $\rho \in [\alpha_i, \sigma] \cup [\tau, \beta_{i+1}]$ et $g_\xi(\rho) = \xi$ pour $\rho \in [\sigma, \tau]$.

σ et τ étant le plus petit et le plus grand des réels $\in [\alpha_i, \beta_{i+1}]$ tels que $g(\sigma) = g(\tau) = \xi$.



Soit

$$G(\xi) = \int_{\alpha_i}^{\beta_{i+1}} \frac{\sin\sqrt{K}\rho}{\sqrt{K}} [g(\rho) - g_\xi(\rho)]d\rho \ ,$$

$G(\xi)$ est une fonction décroissante de ξ car pour $\xi_1 > \xi_2$, $g_{\xi_1}(\rho) \geq g_{\xi_2}(\rho)$. Comme elle est continue et que $G[g(\beta_i)] > 0$ et $G[g(\alpha_{i+1})] < 0$, il existe ξ_0 tel que

$$\int_{\alpha_i}^{\beta_{i+1}} \frac{\sin \sqrt{K}\rho}{\sqrt{K}}[g(\rho) - g_{\xi_0}(\rho)]d\rho = 0 .$$

Sur $[\alpha_i, \beta_{i+1}]$ nous remplaçons maintenant la fonction g par la fonction g_{ξ_0} qui est monotone et a les propriétés voulues (1) et (2).

On procédera ainsi de proche en proche, de manière à éliminer le plus d'éléments des suites α et β. Notre procédé d'élimination sera applicable aussi, si pour un certain i, $g(\alpha_{i+1}) \leq g(\alpha_{i+2})$ et $g(\beta_i) \leq g(\beta_{i+1})$.

Nous ne pourrons plus appliquer ce procédé, lorsque la suite des $g(\alpha_i)$ sera strictement croissante, tandis que la suite des $g(\beta_i)$ sera strictement décroissante (car si la suite $g(\beta_i)$ est monotone, elle ne peut qu'être décroissante: $g(\beta_k) = 0$).

Or l'existence de f est facile à montrer dans ce cas, car α_k est l'abscisse du maximum de la fonction g sur $[0, \delta_0]$. Considérons la fonction $g_\xi(\rho)$ pour $\xi \in [g(\beta_{k-1}), g(\alpha_k)]$, définie par $g_\xi(\rho) = \xi$ pour $0 \leq \rho \leq \tau$ et $g_\xi(\rho) = g(\rho)$ pour $\tau \leq \rho \leq \delta_0$, τ étant le réel de $[\alpha_k, \delta_0]$ vérifiant $g(\tau) = \xi$.

$$G_0(\xi) = \int_0^{\delta_0} \frac{\sin \sqrt{K}\rho}{\sqrt{K}}[g(\rho) - g_\xi(\rho)]d\rho$$

est une fonction continue et décroissante de ξ, positive en $g(\beta_{k-1})$ et négative en $g(\alpha_k)$; donc il existe un réel $\xi_0 \in [g(\beta_{k-1}), g(\alpha_k)]$ tel que $G_0(\xi_0) = 0$.

On posera $f(\rho) = g_{\xi_0}(\rho)$, qui est une fonction décroissante ayant les propriétés (1) et (2).

Fin de la démonstration. On appelle E'' l'ensemble des points de $\sum$ de coordonnées (φ, θ) vérifiant $|\theta| < f(\rho)$. D'après la construction de E'', $\mu(E) = \mu'(E'')$, cette mesure commune étant égale à $2 \int_0^{\delta_0} \frac{\sin \sqrt{K}\rho}{\sqrt{K}} g(\rho)d\rho$. Il reste à montrer que la longueur de $\dot{E}$ est supérieure ou égale à celle de $\dot{E}''$. L'intervalle $[0, \delta_0]$ peut être décomposé en un nombre fini d'intervalles $[a_j, a_{j+1}]$, de telle sorte que sur chacun d'eux $\dot{E}$ soit défini par un nombre fini de fonctions C^1, que nous groupons par deux $\varphi_i(\rho)$ et $\psi_i(\rho)$, $i \in [C_j, C_{j+1}[$, de telle sorte que E soit l'ensemble des points, dont les coordonnées vérifient $\varphi_i(\rho) \leq \theta \leq \psi_i(\rho)$ pour un certain i. Nous faisons en sorte aussi, que sur chaque intervalle $]a_j, a_{j+1}[$, soit $f'(\rho) < 0$ sur l'intervalle entier, soit $f(\rho)$ y est constante.

La longueur de $\dot{E}$ est

$$\sum_j \int_{a_j}^{a_{j+1}} \sum_{i=C_j}^{C_{j+1}-1} \left\{\sqrt{1 + g[\rho, \varphi_i(\rho)][\varphi_i'(\rho)]^2} + \sqrt{1 + g[\rho, \psi_i(\rho)][\psi_i'(\rho)]^2}\right\}d\rho ,$$

et la longueur de $\dot{E}''$ est

$$2\int_0^{\delta_0}\sqrt{1+\left(\frac{\sin\sqrt{K}\rho}{\sqrt{K}}\right)^2[f'(\rho)]^2}d\rho\ .$$

D'autre part, en un point où $f'(\rho)$ existe et est négatif strictement,

$$(3)\qquad 2h(\rho) = 2\frac{\sin\sqrt{K}\rho}{\sqrt{K}}f(\rho) = \sum_{i=C_j}^{C_{j+1}-1}\int_{\varphi_i(\rho)}^{\psi_i(\rho)}\sqrt{g(\rho,\theta)}d\theta$$

pour $\rho\in[a_j, a_{j+1}]$, $g(\rho,\theta)$ étant le déterminant de la métrique sur V_2. En différentiant (3), on trouve

$$2\frac{\sin\sqrt{K}\rho}{\sqrt{K}}f'(\rho) + 2\cos\sqrt{K}\rho f(\rho) = \sum_{i=C_j}^{C_{j+1}-1}\int_{\varphi_i(\rho)}^{\psi_i(\rho)}\frac{\partial}{\partial\rho}\sqrt{g(\rho,\theta)}d\theta$$
$$+\sum_{i=C_j}^{C_{j+1}-1}\left[\psi_i'(\rho)\sqrt{g[\rho,\psi_i(\rho)]} - \varphi_i'(\rho)\sqrt{g[\rho,\varphi_i(\rho)]}\right]\ .$$

Or on sait, voir Aubin [1] que

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\operatorname{Log}\sqrt{g(\rho,\theta)}\geq\sqrt{K}\operatorname{cotg}\sqrt{K}\rho\ .$$

D'où

$$2\frac{\sin\sqrt{K}\rho}{\sqrt{K}}f'(\rho) + 2\cos\sqrt{K}\rho f(\rho)$$
$$\geq 2\sqrt{K}\operatorname{cotg}\sqrt{K}\rho h(\rho) + \sum_{i=C_j}^{C_{j+1}-1}\left[\psi_i'(\rho)\sqrt{g[\rho,\psi_i(\rho)]} - \varphi_i'(\rho)\sqrt{g[\rho,\varphi_i(\rho)]}\right],$$

qu'on peut écrire $2T\leq\sum_{i=C_j}^{C_{j+1}-1}(Y_i - X_i)$ en posant $T = -(\sin\sqrt{K}\rho/\sqrt{K})f'(\rho)$, $Y_i = \varphi_i'(\rho)\sqrt{g[\rho,\varphi_i(\rho)]}$ et $X_i = \psi_i'(\rho)\sqrt{g[\rho,\psi_i(\rho)]}$. Comme $f'(\rho) < 0$, $T > 0$, et on vérifie que dans ce cas

$$2\sqrt{1+T^2}\leq\sum_{i=C_j}^{C_{j+1}-1}\left(\sqrt{1+Y_i^2}+\sqrt{1+X_i^2}\right)\ .$$

En effet $2T_i = Y_i - X_i$ étant donné, $N_i = \sqrt{1+Y_i^2}+\sqrt{1+X_i^2}$ est minimum pour $Y_i = T_i = -X_i$.

N_i peut être interprété, comme la distance d'un point d'une droite Δ à deux points F et F', avec FF' parallèle à Δ. Le point de contact de l'ellipse de foyers F et F', tangente à Δ, correspond au minimum du problème. Et il est évident maintenant que $0 < T \leq \sum_i T_i$ entraîne $\sqrt{1+T^2}\leq\sum_i\sqrt{1+T_i^2}$.

Par conséquent, sur les intervalles où $f'(\rho) < 0$, la réunion des arcs correspondants à $\dot{E}''$, a une longueur inférieure ou égale à celle des arcs de $\dot{E}$. D'autre part, soit un arc maximal $\widehat{A'B'}$ de $\dot{E}''$, le long duquel $f(\rho)$ est constante ($f(\rho)$ constante sur $[\sigma, \tau]$). Par construction A' et B' appartiennent à $\dot{E}'$.

Le cercle de centre P et de rayon σ coupe $\dot{E}$ en au moins 2 points A_1 et A_2, et le cercle de rayon τ en au moins 2 points B_1 et B_2. On choisit A_1, B_1, A_2, B_2 de telle sorte que les points des arcs $\widehat{A_1B_1}$ et $\widehat{A_2B_2}$ soient tous à une distance de P comprise entre σ et τ. Nous avons alors, ce qui achève la démonstration:

$$\text{longueur de } \widehat{A_1B_1} + \text{longueur de } \widehat{A_2B_2} \geq 2(\tau - \sigma) = 2 \text{ longueur de } \widehat{A'B'} .$$

3. Le cas de l'espace euclidien R^n

Lemme 1. *Soit $f \not\equiv 0$ une fonction C^∞ sur V_n à support compact K, on peut l'approcher dans $H_1^q(V_n)$ par une suite de fonctions continues f_p, à support $K_p \subset K$, (le bord des K_p étant des sous-variétés de dimension $n - 1$), les f_p étant C^∞ sur K_p et ne présentant dans K_p qu'un nombre fini de points critiques non dégénérés.*

Démonstration. D'après Morse et Milnor [10], on peut approcher f uniformément sur V_n par une suite de fonctions g_p, C^∞, ne présentant que des points critiques non dégénérés, de telle sorte que les dérivées premières de g_p convergent uniformément vers celles de f sur K. Sur V_n: $|f - g_p| < 1/p$, et sur K: $|\nabla(f - g_p)| < 1/p$. Soit α_p vérifiant $1/p < \alpha_p < 2/p$, telq ue $g_p^{-1}(\alpha_p)$ et $g_p^{-1}(-\alpha_p)$ ne possèdent pas de points critiques; ce sont alors des sous-variétés de dimension $n - 1$, si elle ne sont pas vides.

Appelons $A_p = \{x \in V_n \mid g_p(x) \geq \alpha_p\}$ et $A_{-p} = \{x \in V_n \mid g_p(x) \leq -\alpha_p\}$. Considérons $f_p(x) = [g_p(x) - \alpha_p]\chi_{A_p}(x) + [g_p(x) + \alpha_p]\chi_{A_{-p}}(x)$. χ_E étant la fonction caractéristique de l'ensemble E.

Les fonctions f_p sont continues sur V_n et C^∞ sur leur support $K_p = A_p \cup A_{-p}$, qui est inclus dans K, car pour $x \in K_p$, $|g_p(x)| > 1/p$, d'où $|f(x)| > 0$.

Comme $|f(x) - f_p(x)| \leq (3/p)\chi_K(x)$, $\|f - f_p\|_q \to 0$ quand $p \to \infty$. D'autre part en un point x où $f(x) \neq 0$, $\nabla[f(x) - f_p(x)] \to 0$, car $x \in \bigcup_{p=1}^\infty K_p$. Et comme l'ensemble des points où l'on a simultanément $f(x) = 0$ et $\nabla f(x) \neq 0$ est de mesure nulle, $\nabla[f(x) - f_p(x)] \to 0$ presque partout quand $p \to \infty$. De plus $|\nabla[f - f_p]| \leq [\sup_K |\nabla f| + 1/p]\chi_K$, d'où d'après Lebesgue $\|\nabla(f - f_p)\|_q \to 0$.

Lemme 2. *Soit $f \geq 0$ une fonction continue sur $\sum$, ($\sum$ étant la sphère S_n, l'espace euclidien ou hyperbolique), C^∞ sur son support compact K, dont la frontière est une sous-variétéde dimension $n - 1$, f ne présentant sur K qu'un nombre fini de points critiques non dégénérés. Considérons un point $P \in \sum$ et la fonction $g(r)$ définie et décroissante sur $[0, \infty[$ telle que*

$$\mu\{Q \mid g[d(P, Q)] \geq a\} = \mu\{Q \mid f(Q) \geq a\} = \psi(a) ,$$

alors $\|\nabla g\|_q \leq \|\nabla f\|_q$ pour $1 \leq q < \infty$.

Démonstration. Dans l'énoncé $d(P, Q)$ est la distance de P à Q sur $\sum$, a est un réel strictement positif et μ est la mesure définie par la métrique. On note $g(Q) = g[d(P, Q)]$. Soient Q_i $(i = 1, \cdots, k)$ les points critiques de f dans K. Considérons les ensembles $\sum_a = f^{-1}(a)$. En tout point $Q \in \sum_a$ différent des points Q_i, le gradient de f n'est pas nul, soit $d\sigma(Q)$ l'élément d'aire sur $\sum_a$.

$$\int_\Sigma |\nabla f|^q \, dV = \int_0^\infty \left(\int_{\Sigma a} |\nabla f|^{q-1} \, d\sigma \right) da \, .$$

D'autre part lorsque a est différent de chacune des valeurs $a_i = f(Q_i)$, $\varphi(a) = \int_{\Sigma a} \frac{d\sigma}{|\nabla f|}$ existe, est continue et localement admet $-\psi(a)$ pour primitive. Donc $\varphi(a) = -\psi'(a)$ qui est considéré comme donné. Par conséquent $\int_{\Sigma a} |\nabla f|^{q-1} \, d\sigma$ est minimum, dans le cas $q > 1$, lorsque $|\nabla f|$ est constant sur $\sum_a$, d'après l'inégalité de Hölder:

$$\int_{\Sigma a} d\sigma \leq \left(\int_{\Sigma a} \frac{d\sigma}{|\nabla f|} \right)^{(q-1)/q} \left(\int_{\Sigma a} |\nabla f|^{q-1} \, d\sigma \right)^{1/q} .$$

Mais $\sum_a$ est le bord d'un ensemble de mesure $\psi(a)$ donné, d'où, d'après le théorème 4, l'aire de $\sum_a$ est supérieure ou égale à l'aire du bord de la boule de volume $\psi(a)$; ce qui achève la démonstration.

De plus, on vérifie que $g(r)$ est une fonction absolument continue et même lipschitzienne sur $[0, \infty[$.

Théorème 7. *Pour toute fonction* $f \in H_1^q(R^n)$ $(n > q \geq 1)$

$$\|f\|_p \leq K(n, q) \, \|\nabla f\|_q \, ,$$

on rappelle que $1/p = 1/q - 1/n$. $K(n, q)$ *a été défini dans la* 1 *ère partie.*

$\mathscr{D}(R^n)$ l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact est dense dans $H_1^q(R_n)$. Donc il suffit de démontrer le théorème pour $f \in \mathscr{D}(R^n)$. Mais d'après le lemme 1, la fonction f peut être approchée dans H_1^q par une suite f_i de fonctions continues sur R^n, C^∞ sur leurs supports compacts K_i, et ne présentant dans K_i qu'un nombre fini de points critiques non dégénérés.

De plus on considère, comme au lemme 2, la fonction $g_i(r)$ associée à la fonction $|f_i|$. Si nous démontrons que pour une telle fonction g_i:

$$\|g_i\|_p \leq K(n, q) \, \|\nabla g_i\|_q \, ,$$

nous pourrons alors écrire $\|f_i\|_p = \|g_i\|_p$ (par construction) et $\|\nabla g_i\|_q \leq \|\nabla f_i\|_q$ d'après le lemme 2. D'où nous aurons $\|f_i\|_p \leq K(n, q) \, \|\nabla f_i\|_q$ et le théorème 7 par densité. Reste donc à montrer le

Lemme 3. $g(r)$ *étant une fonction absolument continue décroissante sur* $[0, \infty[$, *nulle à l'* ∞

$$(\omega_{n-1})^{-1/n}\left(\int_0^\infty [g(r)]^p r^{n-1}dr\right)^{1/p} \leq K(n, q)\left(\int_0^\infty |g'(r)|^q\, r^{n-1}dr\right)^{1/q} .$$

Démonstration. Considérons le problème suivant pour $q > 1$: Quelle est la valeur maximale de $\int_0^\infty [g(r)]^p r^{n-1}dr$ lorsque $\int_0^\infty |g'(r)|^q r^{n-1}dr$ est une constante donnée strictement positive. L'équation d'Euler du problème est :

$$(|g'|^{q-1} r^{n-1})' = kg^{p-1}r^{n-1} ,$$

k étant une constante. On vérifie (λ étant un réel strictement positif) que la fonction $y = (\lambda + r^{q/(q-1)})^{1-n/q}$ est solution de l'équation d'Euler ; et d'après Bliss [5], y rend maximum $\int_0^\infty |g|^p\, r^{n-1}dr$.

C'est ainsi qu'on trouve la valeur de $K(n, q)$, la meilleure constante. En faisant tendre q vers 1, on obtient l'inégalité pour $q = 1$ et la valeur de $K(n, 1)$. C'est ainsi qu'on retrouve l'inégalité isopérimétrique habituelle (Federer [8]).

Remarque 2. Bliss considère une fonction mesurable sur R, $h(x) \geq 0$, telle que $J = \int_0^\infty h^q(x)dx$ soit finie et donnée, et la fonction $g(x) = \int_0^x h(t)dt$. Il démontre que $I = \int_0^\infty g^p(x)x^{\alpha-p}dx$ atteint sa valeur maximale pour la fonction $h(x) = (\lambda x^\alpha + 1)^{-(\alpha+1)/\alpha}$, avec p et q deux constantes vérifiant $p > q > 1$ et $\alpha = p/q - 1$. Pour obtenir le résultat mentionné plus haut, dans la démonstration du lemme 3, il suffit de faire le changement de variable $x = r^{-(n-q)/(q-1)}$, en n'oubliant pas qu'ici $1/p = 1/q - 1/n$. On a $\alpha = p/n$, $(\partial x/\partial r)^{1-q} = r^{n-1}$ et $x^{1+\alpha-p} = r^n$.

Corollaire 3. *Sur l'espace hyperbolique H_n, toute fonction $f \in H_1^q(H_n)$, $n > q \geq 1$, vérifie*

$$\|f\|_p \leq K(n, q)\, \|\nabla f\|_q .$$

Démonstration analogue, en utilisant le corollaire 2.

4. Le cas de la sphère S_n

Pour la sphère, on peut énoncer le théorème dans sa forme la plus raffinée. De plus cette étape est indispensable, car dans le cas général d'une variété V_n, on ramène le problème à la sphère S_n.

Théorème 8. *Pour la sphère S_n, il existe une constante $A(q)$, telle que pour $\forall\, \varphi \in H_1^q(S_n)$, $(1/p = 1/q - 1/n)$,*

$$\|\varphi\|_p^q \leq K^q(n, q)\, \|\nabla\varphi\|_q^q + A(q)\, \|\varphi\|_q^q \qquad si\ 1 \leq q < 2 ,$$

et

$$\|\varphi\|_p^{q/(q-1)} \le K^{q/(q-1)}(n,q)\, \|\nabla\varphi\|_q^{q/(q-1)} + A(q)\, \|\varphi\|_q^{q/(q-1)} \qquad si\ 2 \le q < n\ .$$

De ces inégalités on déduit l'inégalité plus faible du

Corollaire 4. *Pour la sphère S_n, il existe une constante $A'(q)$, $1 \le q < n$, telle que pour $\forall\varphi \in H_1^q(S_n)$*

$$\|\varphi\|_p \le K(n,q)\, \|\nabla\varphi\|_q + A'(q)\, \|\varphi\|_q\ .$$

Démonstration du théorème. Prenons un système de coordonnées géodésiques polaires, centré en P, l'élément de volume $dv = (\sin\alpha r/\alpha)^{n-1} dr d\Omega$, avec $\alpha = \pi/\delta$, δ le diamètre de la sphère ($r \le \delta$).

Comme pour le théorème 7, d'après le lemme 2, il suffit de faire la démonstration pour une fonction $\varphi(Q)$ égale à une fonction $g[r(P,Q)] = g(r) \ge 0$, absolument continue et décroissante sur $[0,\delta]$. D'après le théorème 7,

$$\begin{aligned}(4)\qquad &\left[\omega_{n-1}\int_0^\delta \left| g\left(\frac{\sin\alpha r}{\alpha r}\right)^{(n-1)/q}\right|^p r^{n-1} dr\right]^{q/p}\\ &\qquad \le \omega_{n-1} K^q(n,q) \int_0^\delta \left|\nabla\left[g\left(\frac{\sin\alpha r}{\alpha r}\right)^{(n-1)/q}\right]\right|^q r^{n-1} dr\ .\end{aligned}$$

Inégalité 1. *Pour $\beta \ge 1$, il existe μ et ν tels que*

$$(1+t)^\beta \le 1 + \mu t + \nu t^\beta \qquad pour\ t \ge 0\ .$$

On peut prendre par exemple $\mu = \beta(\beta-1)$ et $\nu = (\beta-1)^{\beta-1}$ si $\beta > 1$, et $\nu = 1$ si $\beta = 1$. Nous utilisons cette inégalité avec $\beta = q/(q-1)$ et $q \ge 2$, le deuxième membre de (4) se majore

$$\begin{aligned}&\left\{\int_0^\delta \left|\nabla\left[g\left(\frac{\sin\alpha r}{\alpha r}\right)^{(n-1)/q}\right]\right|^q r^{n-1} dr\right\}^{1/(q-1)}\\
&= \left\{\int_0^\delta \left[\left|\nabla g\left(\frac{\sin\alpha r}{\alpha r}\right)^{(n-1)/q} + g\nabla\left(\frac{\sin\alpha r}{\alpha r}\right)^{(n-1)/q}\right|^{q/(q-1)}\right]^{q-1} r^{n-1} dr\right\}^{1/(q-1)}\\
&\le \left\{\int_0^\delta \left[\left|\nabla g\right|^{q/(q-1)} \left(\frac{\sin\alpha r}{\alpha r}\right)^{(n-1)/(q-1)}\right.\right.\\
&\qquad + \mu |\nabla g|^{1/(q-1)} g \left(\frac{\sin\alpha r}{\alpha r}\right)^{(n-1)/(q(q-1))} \left|\nabla\left(\frac{\sin\alpha r}{\alpha r}\right)^{(n-1)/q}\right|\\
&\qquad \left.\left. + \nu g^{q/(q-1)} \left|\nabla\left(\frac{\sin\alpha r}{\alpha r}\right)^{(n-1)/q}\right|^{q/(q-1)}\right]^{q-1} r^{n-1} dr\right\}^{1/(q-1)}\\
&\le \left[\int_0^\delta |\nabla g|^q \left(\frac{\sin\alpha r}{\alpha r}\right)^{n-1} dr\right]^{1/(q-1)}\\
&\qquad + \mu\left[\int_0^\delta |\nabla g^q|\, \frac{1}{q}\left(\frac{\sin\alpha r}{\alpha r}\right)^{(n-1)/q} \left|\nabla\left(\frac{\sin\alpha r}{\alpha r}\right)^{(n-1)/q}\right|^{q-1} r^{n-1} dr\right]^{1/(q-1)}\end{aligned}$$

$$+\nu\left[\int_0^\delta g^q\left|\nabla\left(\frac{\sin\alpha r}{\alpha r}\right)^{(n-1)/q}\right|^q r^{n-1}dr\right]^{1/(q-1)},$$

d'après l'inégalité triangulaire.

Finalement nous avons, C étant une constante,

$$\left\{\omega_{n-1}\int_0^\delta\left|\nabla\left[g\left(\frac{\sin\alpha r}{\alpha r}\right)^{(n-1)/q}\right]\right|^q r^{n-1}dr\right\}^{1/(q-1)} \leq \|\nabla g\|_q^{q/(q-1)} + C\|g\|_q^{q/(q-1)}.$$

Car si on pose

$$\psi(r) = \frac{1}{q}\left(\frac{\sin\alpha r}{\alpha r}\right)^{(n-1)/q}\left|\left[\left(\frac{\sin\alpha r}{\alpha r}\right)^{(n-1)/q}\right]'\right|^{q-1},$$

$$\int_0^\delta[-g^q(r)]'\psi(r)r^{n-1}dr = [-g^q(r)\psi(r)r^{n-1}]_0^\delta + \int_0^\delta g^q(r)[\psi(r)r^{n-1}]'dr$$

le crochet est nul, car $\psi(\delta)=0$, d'une part, d'autre part $[\psi(r)r^{n-1}]'\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha r}\right)^{n-1}$ est borné sur $]0,\delta/2[$, car cette expression est équivalente à kr^{q-2}, quand $r\to 0$, avec $q\geq 2$.

Pour le premier membre de (4) nous ferons les calculs suivants:

$$\int_0^\delta g^p\left(\frac{\sin\alpha r}{\alpha r}\right)^{(n-1)p/q} r^{n-1}dr$$
$$= \int_0^\delta g^p\left(\frac{\sin\alpha r}{\alpha}\right)^{n-1}dr - \int_0^\delta g^p\left(\frac{\sin\alpha r}{\alpha}\right)^{n-1}\left[1-\left(\frac{\sin\alpha r}{\alpha r}\right)^{(n-1)(p/q-1)}\right]dr.$$

Or il existe a tel que $1-(\sin\alpha r/\alpha r)^{(n-1)(p/q-1)} \leq ar^2$ et b tel que

$$(5)\qquad |g(r)|^p r^n \leq b\|g\|_p^p,$$

car $g(r)$ est décroissante. Ainsi on peut écrire

$$a\omega_{n-1}\int_0^\delta g^p\left(\frac{\sin\alpha r}{\alpha}\right)^{n-1}r^2dr \leq ab^{2/n}\|g\|_p^{2p/n}\,\omega_{n-1}\int_0^\delta g^{p'}\left(\frac{\sin\alpha r}{\alpha}\right)^{n-1}dr$$

avec $p'=p(1-2/n)$ supérieur à q, car $q\geq 2$.

D'autre part voir Nirenberg [11], γ étant une constante,

$$\omega_{n-1}\int_0^\delta g^{p'}\left(\frac{\sin\alpha r}{\alpha}\right)^{n-1}dr \leq \mathrm{Cte}\,\|g\|_p^{n(q-2)/(n-q)}\,\|g\|_q^2$$
$$\leq \gamma\|g\|_p^{p'-q/(q-1)}\,\|g\|_q^{q/(q-1)}.$$

Inégalité 2. *Pour* $0\leq t\leq 1/2\mu$, $(\mu>0)$, $\beta\geq 1$,

$$(1 - \nu t)^\beta \leq 1 - \mu t \qquad avec \;\; \nu = 2\mu(1 - 2^{-1/\beta}) \; .$$

Appliquons cette inégalité avec $\beta = p(q-1)/q$ et $\mu = a\gamma b^{2/n}$. Alors ou bien $\|g\|_p \leq (2\mu)^{(q-1)/q} \|g\|_q$, et l'inégalité du théorème 8 est vérifiée avec $A(q) = 2\mu$ ou bien

$$\|g\|_p^p [1 - \nu(\|g\|_q/\|g\|_p)^{q/(q-1)}]^\beta \leq [1 - \mu(\|g\|_q/\|g\|_p)^{q/(q-1)}] \|g\|_p^p$$
$$\leq \|g\|_p^p - a\gamma b^{2/n} \|g\|_q^{q/(q-1)} \|g\|_p^{p-q/(q-1)} \leq \omega_{n-1} \int_0^\delta g^p \left(\frac{\sin \alpha r}{\alpha r}\right)^{(n-1)p/q} r^{n-1} dr \; .$$

D'où l'existence de $A(q)$:

$$\|g\|_p^{q/(q-1)} \leq K^{q/(q-1)}(n, q) \|\nabla g\|_q^{q/(q-1)} + (C + \nu) \|g\|_q^{q/(q-1)} \; .$$

Dans le cas $1 \leq q \leq 2$, on utilise l'inégalité 1, avec $\beta = q$, on trouve

$$\int_0^\delta \left| \nabla\left[g\left(\frac{\sin \alpha r}{\alpha r}\right)^{(n-1)/q}\right]\right|^q r^{n-1} dr \leq \int_0^\delta |\nabla g|^q \left(\frac{\sin \alpha r}{\alpha}\right)^{n-1} dr$$
$$+ \mu \int_0^\delta |\nabla g|^{q-1} g \left| \nabla\left(\frac{\sin \alpha r}{\alpha r}\right)^{(n-1)/q}\right| \left(\frac{\sin \alpha r}{\alpha r}\right)^{(n-1)(q-1)/q} r^{n-1} dr$$
$$+ \nu \int_0^\delta g^q \left| \nabla\left(\frac{\sin \alpha r}{\alpha r}\right)^{(n-1)/q}\right|^q r^{n-1} dr \; .$$

Inégalité 3. *$a, b, \alpha, \beta, \lambda, \mu$ étant des réels strictement positifs avec $\alpha + \beta = 1$, si $\lambda^\alpha \mu^\beta \geq 1$, alors $a^\alpha b^\beta \leq \lambda \alpha a + \mu \beta b$.*

Ici on prendra $\lambda = \mu = 1$ et on écrira

$$(q|g'|)^{q-1} g = |(g^q)'|^{q-1} g^{q(2-q)} \leq (q-1)|(g^q)'| + (2-q) g^q \; ,$$

et moyennant une intégration par partie, comme dans le cas $q \geq 2$, on trouve ici, C étant une constante,

$$\omega_{n-1} \int_0^\delta \left| \nabla\left[g\left(\frac{\sin \alpha r}{\alpha r}\right)^{(n-1)/q}\right]\right|^q r^{n-1} dr \leq \|\nabla g\|_q^q + C \|g\|_q^q \; .$$

Pour le ler membre de (4), comme précédemment, voir (5) nous écrirons

$$a\omega_{n-1} \int_0^\delta g^p \left(\frac{\sin \alpha r}{\alpha}\right)^{n-1} r^2 dr \leq a\omega_{n-1} \delta^{2-q} b^{(p-q)/p} \|g\|_p^{p-q} \int_0^\delta g^q \left(\frac{\sin \alpha r}{\alpha}\right)^{n-1} dr \; .$$

On applique maintenant l'inégalité 2 avec $\beta = p/q$:

$$\|g\|_p^p [1 - \nu(\|g\|_q/\|g\|_p)^q]^{p/q} \leq \|g\|_p^p - \mu \|g\|_q^q \|g\|_p^{p-q} \; ,$$

et nous trouvons le résultat annoncé, l'existence de $A(q)$.

5. Le cas général

Il s'agit maintenant de démontrer des inégalités du type de celles du théorème 8, mais pour une variété V_n ; nous supposerons au minimum la variété complète. Dans la 1ère section, nous avons abordé rapidement le cas des variétés non complètes. Dans le cas d'une variété compacte, aucune hypothèse particulière n'est à faire. Dans le cas d'une variété complète, nous devrons supposer au minimum une courbure bornée et l'existence d'un rayon d'injectivité strictement positif. Pour mettre les choses au point, démontrons tout d'abord le

Lemme 4. *Lorsque V_n est complète, $\mathscr{D}(V_n)$ est dense dans $H_1^q(V_n)$, $1 \leq q < \infty$.*

On considère les fonctions ψ_k sur V_n, définies de la manière suivante, P étant un point donné de V_n:

$$\begin{aligned} &\psi_k(Q) = 1 && \text{pour } d(P,Q) \leq k\ , \\ &\psi_k(Q) = 1 + k - d(P,Q) && \text{pour } k \leq d(P,Q) \leq k+1\ , \\ &\psi_k(Q) = 0 && \text{pour } d(P,Q) \geq k+1\ . \end{aligned}$$

Let fonctions $\psi_k(Q)$ sont lipschitziennes donc absolument continues, leur gradient, qui existe presque partout est inférieur à 1.

Soit $f \in H_1^q \cap C^\infty$, la suite $f_k = f\psi_k$ tend vers f dans H_1^q. En effet $f_k \to f$ presque partout et $|f_k| \leq |f|$. De même $|\nabla f_k| \to |\nabla f|$ presque partout et $|\nabla f_k| \leq |\nabla f| + |f|$. D'où d'après Lebesgue, $\|f_k\|_q \to \|f\|_q$ et $\|\nabla f_k\|_q \to \|\nabla f\|_q$. Ensuite on approche dans H_1^q, f_k par des fonctions de $\mathscr{D}(V_n)$ au moyen d'une régularisation: pour k donné, le support de f_k est compact, il existe donc $\delta_0 > 0$ tel que $B_M(\delta_0)$ existe pour $\forall\ M \in \operatorname{supp} f_k$.

Lemme 5. *$B_P(\delta)$ étant une boule de V_n, il existe une constante $K_{P,\delta}(n,q)$, telle que pour toute fonction $f \in H_1^q(V_n)$ à support compact inclus dans $B_P(\delta)$:*

$$\|f\|_p \leq K_{P,\delta}(n,q)\, \|\nabla f\|_q\ ,$$

$K_{P,\delta}(n,q)$ étant aussi voisin qu'on veut de $K(n,q)$, pour peu qu'on prenne δ suffisamment petit.

Démonstration. Soient un système de coordonnées géodésiques polaires en P, associé à l'application exponentielle, b^2 un majorant et $-a^2$ un minorant de la courbure dans une boule $B_P(\delta_0)$.

En tout point de $B_P(\delta_0)$ et pour toute direction i, les composantes g_{ii} de la métrique vérifient (voir Aubin [1])

$$\frac{\sin br}{br} \leq \sqrt{g_{ii}(r,\theta)} \leq \frac{\operatorname{sh} ar}{ar}\ .$$

ε étant donné, on peut prendre δ suffisamment petit, pour que $\operatorname{sh} ar/ar \leq 1 + \varepsilon$ et pour que $\sin br/br \geq 1 - \varepsilon$ lorsque $r \leq \delta$.

Si $|\nabla_E f|$ est le gradient euclidien et dE l'élément de volume euclidien,

$$(1-\varepsilon)^{n-1}dE \leq dV \leq (1+\varepsilon)^{n-1}dE \quad \text{et} \quad |\nabla_E f| \leq |\nabla f|(1+\varepsilon) \, .$$

Comme d'après le théorème 7,

$$\left(\int f^p dE\right)^{1/p} \leq K(n,q)\left(\int |\nabla_E f|^q \, dE\right)^{1/q} ,$$

on en déduit le lemme 5, avec $K_{P,\delta} = (1+\varepsilon)^{(n-1)/p+1}(1-\varepsilon)^{(1-n)/q}K(n,q)$.

Démontrons maintenant le théorème, qui sera le plus utile dans certains problèmes d'existence de solutions d'équations différentielles non linéaires. Ce théorème n'est pas le meilleur résultat, qu'on puisse raisonnablement espérer, ce sera celui qui fait l'objet de la 2ème conjecture.

Théorème 9. *Sur une variété riemannienne V_n compacte, pour $\forall \varepsilon > 0$, $\forall q' \in [1,q]$ et $\forall r \geq 1$, il existe une constante A, telle que pour $\forall \varphi \in H_1^q(V_n)$, avec $1 \leq q < n$,*

$$\|\varphi\|_p^r \leq [K^r(n,q)+\varepsilon] \, \|\nabla\varphi\|_q^r + A \, \|\varphi\|_{q'}^r \, .$$

Démonstration. Dans l'énoncé, comme dans tout l'article, $1/p = 1/q - 1/n$. Soit un recouvrement de V_n par un nombre fini k de boules $B_{P_i}(\delta)$, δ suffisamment petit pour que pour $\forall i$, $|K(n,q) - K_{P_i,\delta}(n,q)| < \eta$ et $h_i \in C^\infty$ une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement. Pour $\varphi \in H_1^q(V_n)$, écrivons en utilisant le lemme 5

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_p^q = \|\varphi^q\|_{p/q} &= \left\| \sum_{i=1}^k \varphi^q h_i \right\|_{p/q} \leq \sum_{i=1}^k \|\varphi^q h_i\|_{p/q} \\ &\leq \sum_{i=1}^k \|\varphi h_i^{1/q}\|_p^q \leq [K(n,q)+\eta]^q \sum_{i=1}^k \|\nabla(\varphi h_i^{1/q})\|_q^q \, .\end{aligned}$$

D'après l'inégalité triangulaire,

$$\|\nabla(\varphi h_i^{1/q})\|_q = \|\nabla\varphi h_i^{1/q} + \varphi\nabla h_i^{1/q}\|_q \leq \|\nabla\varphi h_i^{1/q}\|_q + \|\varphi\nabla h_i^{1/q}\|_q \, .$$

Et en utilisant l'inégalité 1 (4ème section), avec $H = \sup\limits_{1\leq i\leq k} \sup_V |\nabla(h_i^{1/q})|$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^k \|\nabla(\varphi h_i^{1/q})\|_q^q &\leq \sum_{i=1}^k \|\nabla\varphi h_i^{1/q}\|_q^q + \mu \sum_{i=1}^k \|\nabla\varphi h_i^{1/q}\|_q^{q-1} \|\varphi\nabla h_i^{1/q}\|_q + \nu \sum_{i=1}^k \|\varphi\nabla h_i^{1/q}\|_q^q \\ &\leq \|\nabla\varphi\|_q^q + \mu k H \|\nabla\varphi\|_q^{q-1} \|\varphi\|_q + \nu k H^q \|\varphi\|_q^q \, .\end{aligned}$$

On trouve β et γ étant deux constantes,

$$\|\varphi\|_p^q \leq [K(n,q)+\eta]^q \|\nabla\varphi\|_q^q + \beta \|\nabla\varphi\|_q^{q-1} \|\varphi\|_q + \gamma \|\varphi\|_q^q \, .$$

De plus d'après l'inégalité 3, pour $\forall \varepsilon_0 > 0$, $\exists M$ tel que

$$\|\nabla\varphi\|_q^{q-1}\|\varphi\|_q \leq \varepsilon_0\|\nabla\varphi\|_q^q + M\|\varphi\|_q^q \,.$$

D'où

$$(6) \qquad \|\varphi\|_p^q \leq \{[K(n, q) + \eta]^q + \beta\varepsilon_0\}\|\nabla\varphi\|_q^q + (\gamma + M\beta)\|\varphi\|_q^q \,.$$

De cette inégalité, on peut déduire les autres inégalités du théorème 9. On élève (6) à la puissance $r/q > 1$, on trouve d'après l'inégalité 1, β_0 et γ_0 étant deux constantes,

$$\|\varphi\|_p^r \leq [K^q(n, q) + \eta_0]^{r/q}\|\nabla\varphi\|_q^r + \beta_0\|\nabla\varphi\|_q^{r-q}\|\varphi\|_q^q + \gamma_0\|\varphi\|_q^r \,,$$

et puis on utilise l'inégalité 3 comme précédemment. Pour $r < q$, l'inégalité est plus faible.

D'autre part (d'après Lions [9]) voir aussi la 1ère partie, pour $\forall\, \alpha > 0$, $\exists\, \beta(\alpha)$ tel que $\|\varphi\|_q \leq \alpha\|\nabla\varphi\|_q + \beta(\alpha)\|\varphi\|_{q'}$. Le théorème 9 est entièrement démontré.

Comme on vient de le voir, pour la démonstration, la compacité de la variété n'est pas essentielle. On peut la remplacer par les trois hypothèses suivantes:

(i) La courbure est bornée sur V_n.

(ii) La variété possède un rayon d'injectivité $\delta_0 > 0$.

(iii) Pour $\forall\, \delta < \delta_0$, il existe un recouvrement uniformément localement fini de V_n par des boules $B_{P_i}(\delta)$, $i \in I$. (A propos de cette hypothèse voir Aubin [3].)

Ceci voulant dire, qu'il existe une constante k, éventuellement dépendant de δ, telle que tout point $M \in V_n$ possède un voisinage, dont les intersections avec les boules $B_{P_i}(\delta)$ sont vides, sauf au plus pour $k(\delta)$ d'entre elles. En effet avec les hypothèses (i) et (ii), le lemme 5 entraîne: pour $\forall\, \eta > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tel que pour $\forall\, P \in V_n$, $|K_{P,\delta}(n, q) - K(n, q)| < \eta$, δ ne dépendant pas de P.

D'autre part, il existe une partition de l'unité h_i, subordonnée au recouvrement uniformément localement fini, telle que les $|\nabla(h_i^{1/q})|$ soient uniformément bornées.

En effet soit δ fixé, tel que $4\delta < \delta_0$. Il existe un recouvrement localement uniformement fini de V_n par des boules de rayon δ. Soient P_i leurs centres. Tout point de V_n n'appartient qu'à k boules de rayon δ au maximum. Considérons une boule B de rayon 4δ, et les points P_i qui appartiennent à B. Ils sont au nombre de l. La courbure étant bornée, il existe, Aubin [1], ν et w deux réels positifs, tels que pour tout i, le volume de $B_{P_i}(\delta)$ soit supérieur à ν et le volume de B inférieur à w, quelque soit le centre P de B. Or on doit forcement avoir: $\nu l \leq kw$. Ainsi l est uniformement borné (quelque soit P). Nous considérons maintenant les fonctions γ_i définies par $\gamma_i(Q) = f[d(P_i, Q)]$, $f(x)$ étant une fonction C^∞ décroissante, égale à 1 pour $x \leq \delta$ et nulle pour $x \geq 2\delta$. Les fonctions $h_i = \gamma_i / \sum_{j\in I}\gamma_j$ forment une partition de l'unité ayant les propriétés voulues, car partout $1 \leq \sum_{j\in I}\gamma_j \leq l$.

Enfin comme la variété possède un rayon d'injectivité $\delta_0 > 0$, elle est complète, et $\mathscr{D}(R^n)$ est dense dans $H_1^q(V_n)$ d'après le lemme 4. D'où:

Corollaire 5. *Sur une variété riemannienne V_n, à courbure bornée, possédant un rayon d'injectivité $\delta > 0$ et la propriété du recouvrement uniformément localement fini, pour $\forall\, \varepsilon > 0$ et $\forall\, r \geq 1$, il existe une constante $A(q)$, telle que pour $\forall\, \varphi \in H_1^q(V_n)$:*

$$\|\varphi\|_p^r \leq [K^r(n, q) + \varepsilon]\, \|\nabla\varphi\|_q^r + A(q)\, \|\varphi\|_q^r \,.$$

Nous n'avons pas entièrement les conclusions du théorème 9, car nous ne savons pas si $\varphi \in L_{q'}$, pour $q' \in [1, q[$. Il est vraissemblable, que dans le théorème précédent, on puisse prendre $\varepsilon = 0$, surtout en regard du cas des variétés de dimension deux.

Nous somme ainsi amenés à faire la

Conjecture 2. *Pour une variété riemannienne compacte V_n, il existe une constante $A(q)$, telle que pour $\forall\, \varphi \in H_1^q(V_n)$,*

$$\|\varphi\|_p^q \leq K^q(n, q)\, \|\nabla\varphi\|_q^q + A(q)\, \|\varphi\|_q^q \,, \qquad si\ 1 \leq q < 2 \,,$$

et

$$\|\varphi\|_p^{q/(q-1)} \leq K^{q/(q-1)}(n, q)\, \|\nabla\varphi\|_q^{q/(q-1)} + A(q)\, \|\varphi\|_q^{q/(q-1)} \,, \qquad si\ 2 \leq q < n \,,$$

avec $1/p = 1/q - 1/n$.

Les démonstrations qui suivent, montrent que la conjecture 1 entraîne la conjecture 2. Et tout d'abord, nous allons démontrer en partie cette conjecture pour les variétés de dimension 2.

Théorème 10. *Pour une variété riemannienne compacte V_2, il existe une constante $A(q)$, telle que pour $\forall\, \varphi \in H_1^q(V_2)$, $1 \leq q < 2$, $1/p = 1/q - 1/2$,*

$$\|\varphi\|_p \leq K(2, q)\, \|\nabla\varphi\|_q + A(q)\, \|\varphi\|_q \,.$$

Si la variété est seulement complète, nous avons comme précédemment le

Corollaire 6. *Pour une variété V_2 à courbure bornée possèdant un rayon d'injectivité $\delta > 0$ et la propriété du recouvrement uniformément localement fini, il existe une constante $A(q)$, telle que pour $\forall\, \varphi \in H_1^q(V_2)$, $1 \leq q < 2$, $1/p = 1/q - 1/2$:*

$$\|\varphi\|_p \leq K(2, q)\, \|\nabla\varphi\|_q + A(q)\, \|\varphi\|_q \,.$$

Tout d'abord démontrons deux lemmes.

Lemme 6. *Soit $f \geq 0$ une fonction continue sur V_2, C^∞ sur son support compact K, dont la frontière est une sous-variété de dimension 1; K étant inclus dans une boule $B_P(\delta)$, où la courbure est majorée par α^2 et minorée par $-\beta^2$, (2δ étant inférieur au rayon d'injectivité et vérifiant $\alpha\delta < \pi$ et $\operatorname{sh} \beta\delta/\beta \leq 2 \sin \alpha\delta/\alpha$), f ne présentant sur K qu'un nombre fini de points critiques non dégénérés.*

Considérons un point $P \in S_2$, la sphère de courbure α, (resp. R^2 *si* $\alpha = 0$), et la fonction $g(r)$ définie et décroissante sur $[0, +\infty[$ telle que

$$\mu_{S_2}\{Q \in S_2 \mid g[d(P, Q)] \geq a\} = \mu_{V_2}\{Q \in V_2 \mid f(Q) \geq a\} = \psi(a) ;$$

alors

$$2\pi \int_0^{\pi/\alpha} |g'(r)|^q \frac{\sin \alpha r}{\alpha} dr \leq \|\nabla f\|_q^q \qquad \text{pour } 1 \leq q < \infty .$$

Se reporter au Lemme 2 pour les notations et la démonstration,

$$\int_{V_2} |\nabla f|^q \, dV = \int_0^\infty \left(da \int_{\Sigma a} |\nabla f|^{q-1} \, d\sigma \right) .$$

$\int_{\Sigma a} |\nabla f|^{q-1} \, d\sigma$ est minimum dans le cas $q > 1$, lorsque $|\nabla f|$ est constante sur $\sum_a$. De plus $\sum_a$ est le bord d'un ensemble de mesure $\psi(a)$ donné, d'où d'après le théorème 6, longueur de $\sum_a = \int_{\Sigma a} d\sigma \geq$ longueur du bord d'un disque qui sur la sphère de courbure α a pour aire $\psi(a)$. D'où le résultat. Etant donné que par construction même, pour $\forall\, p \geq 1$

$$2\pi \int_0^{\pi/\alpha} |g(r)|^p \frac{\sin \alpha r}{\alpha} dr = \|f\|_p^p ,$$

nous en déduisons le

Lemme 7. *Sur une variété* V_2 *à courbure majorée par* α^2 *et minorée par* $-\beta^2$, $\exists\, \delta > 0$, *dépendant seulement de* α, *de* β *et du rayon d'injectivité, tel que pour toute fonction* $\varphi \in C^\infty$ *à support compact inclus dans une boule* $B_P(\delta)$,

$$\|\varphi\|_p \leq K(2, q) \, \|\nabla \varphi\|_q + A'(q) \, \|\varphi\|_q ,$$

pour $1 \leq q < 2$, *avec* $1/p = 1/q - 1/2$, $A'(q)$ *étant la constante relative à la sphère de courbure* α *du corollaire* 4. *Si* $\alpha = 0$, $\|\varphi\|_p \leq K(2, q) \, \|\nabla \varphi\|_q$.

En effet d'après le lemme 1, sans nuire à la généralité, on peut se contenter de faire la démonstration pour des fonctions φ ayant toutes les propriétés des fonctions f du lemme 6.

Démonstration du théorème 10 *et du corollaire* 6. La courbure etant majorée par α^2 et minorée par $-\beta^2$ sur la variété V_2, qui admet un rayon d'injectitivé δ_0, il existe $\delta > 0$, d'après le lemme 7, avec les propriétés de ce lemme.

Soit $B_{P_i}(\delta)$ un recouvrement uniformément localement fini de V_2 et h_i une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement avec $|\nabla h_i|$ uniformément bornées. Nous écrivons alors

$$\|\varphi\|_p^q = \|\varphi^q\|_{p/q} \leq \sum_{i\in I} \|\varphi^q h_i\|_{p/q} = \sum_{i\in I} \|\varphi h_i^{1/q}\|_p^q$$
$$\leq \sum_{i\in I} [K(2,q)\,\|\nabla(\varphi h_i^{1/q})\|_q + A'(q)\,\|\varphi h_i^{1/q}\|_q]^q \,.$$

Nous utilisons l'inégalité triangulaire

$$\|\nabla(\varphi h_i^{1/q})\|_q \leq \|\nabla\varphi h_i^{1/q}\|_q + \|\varphi\nabla h_i^{1/q}\|_q$$

puis l'inégalité 1, E et G étant deux constantes on trouve

$$\|\varphi\|_p^q \leq K^q(2,q) \sum_{i\in I} \|\nabla\varphi h_i^{1/q}\|_q^q + E\,\|\nabla\varphi\|_q^{q-1}\,\|\varphi\|_q + G\,\|\varphi\|_q^q \,,$$

d'où il existe $A(q)$ tel que

$$\|\varphi\|_p^q \leq [K(2,q)\,\|\nabla\varphi\|_q + A(q)\,\|\varphi\|_q]^q \,.$$

Nous pouvons encore démontrer la conjecture 2 dans le cas des variétés à courbure constante. Le cas de la sphère a déjà été traité. Le cas de l'espace euclidien ou hyperbolique est très particulier, c'est l'objet de la 3e section.

Théorème 11. *Pour une variété riemannienne compacte V_n $(n > 2)$ à courbure constante, il existe $A(q)$ tel que pour $\forall\,\varphi \in H_1^q(V_n)$, $1/p = 1/q - 1/n$, $1 \leq q < n$,*

$$\|\varphi\|_p \leq K(n,q)\,\|\nabla\varphi\|_q + A(q)\,\|\varphi\|_q$$

et tel que pour $\forall\,\varphi \in H_1^2(V_n)$, $N = 2n/(n-2)$,

$$\|\varphi\|_N^2 \leq K^2(n,2)\,\|\nabla\varphi\|_2^2 + A(2)\,\|\varphi\|_2^2 \,.$$

Démonstrtion. La première inégalité du théorème se démontre par des calculs analogues à ceux du théorème 10, en utilisant le lemme 2, au lieu du lemme 6.

Pour la deuxième inégalité, nous écrirons d'après les théorèmes 7 et 8 ou le corollaire 3

$$\|\varphi\|_N^2 \leq \sum_{i\in I} \|\varphi\sqrt{h_i}\|_N^2 \leq K^2(n,2) \sum_{i\in I} \int_V |\nabla(\varphi\sqrt{h_i})|^2\,dV + C\,\|\varphi\|_2^2$$
$$\leq K^2(n,2)\Big[\int_V |\nabla\varphi|^2\,dV + \frac{1}{2}\sum_{i\in I}\int_V \nabla^\nu\varphi^2\nabla_\nu h_i dV$$
$$+ \sum_{i\in I}\int_V \varphi^2\nabla^\nu\sqrt{h_i}\nabla_\nu\sqrt{h_i}dV\Big] + C\,\|\varphi\|_2^2$$
$$\leq K^2(n,2)\Big[\|\nabla\varphi\|_2^2 + \int_V \sum_{i\in I} |\nabla\sqrt{h_i}|^2\varphi^2 dV\Big] + C\,\|\varphi\|_2^2 \,.$$

Corollaire 7. *Sur une variété riemannienne V_n, $(n > 2)$, à courbure constante, possédant un rayon d'injectitivé $\delta > 0$ et la propriété du recouvrement uniformément localement fini, il existe $A(q)$ tel que pour $\forall \varphi \in H_1^q(V_n)$, $1/p = 1/q - 1/n$, $1 \le q < n$,*

$$\|\varphi\|_p \le K(n, q)\,\|\nabla\varphi\|_q + A(q)\,\|\varphi\|_q\,,$$

et tel que pour $\forall \varphi \in H_1^2(V_n)$, $N = 2n/(n-2)$,

$$\|\varphi\|_N^2 \le K^2(n, 2)\,\|\nabla\varphi\|_2^2 + A(2)\,\|\varphi\|_2^2\,.$$

Bibliographie

[1] T. Aubin, *Fonction de Green et valeurs propres du Laplacien,* J. Math. Pures Appl. **53** (1974) 347–371.
[2] ——, *Equatins differentielles non lineaires et problème de Yamabe concernant la Combure scalaire,* J. Math. Pures Appl. **55** (1976) 269–296.
[3] ——, *Espaces de Sobolev sur les varietes Riemanniennes,* Bull. Sci. Math. **100** (1976) 149–173.
[4] F. Bernstein, *Über die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises auf der Kugeloberfläche und in der Ebene,* Math. Ann. **60** (1905) 117–136.
[5] G. A. Bliss, *An integral inequality,* J. London Math. Soc. **5** (1930) 40–46.
[6] G. Bouligand, *Ensembles impropres et nombre dimensionnel,* Bull. Sci. Math. **52** (1928) 320–344.
[7] A. Dinghas, *Einfacher Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel in Riemannschen Räumen konstanter Krümmung,* Math. Nachr. **2** (1949) 148–162.
[8] H. Federer, *Geometric measure theory,* Springer, Berlin, 1969.
[9] J. L. Lions, *Equations différentielles opérationnelles, et problèmes aux limites,* Springer, Berlin, 1961.
[10] J. Milnor, *Morse thoery,* Annals of Math. Studies, No. 51, Princeton University Press, Princeton, 1963.
[11] L. Nirenberg, *On elliptic partial differential equations,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Sci. Fis. Mat. **13** (1959) 116–162.
[12] S. L. Sobolev, *Sur un théorème d'analyse fonctionnelle,* Mat. Sb. **45** (1938) 471–496.

Université Paris VI