Innovations in
Incidence Geometry

Algebraic, Topological and Combinatorial

Étude de certains espaces métriques

Jacques Tits

msp

Vol. 16 No. 1 2018

Innovations in Incidence Geometry
Algebraic, Topological and Combinatorial

vol. 16, no. 1, 2018
dx.doi.org/10.2140/iig.2018.16.37

msp

Étude de certains espaces métriques

Jacques Tits

[13] Originally published in *Bull. Soc. Math. Belg.* **5** (1952), 44–52. Reused with permission.

Étude de certains espaces métriques,

par J. Tits,
Chercheur qualifié du F. N. R. S.

1. Dans son traité des Groupes de Transformations [4], S. Lie a énoncé, en conclusion d'une série de remarques critiques qu'il fait à propos des travaux de Riemann et de Helmholtz sur les fondements de la géométrie, un problème nommé par lui « problème de Riemann-Helmholtz », et mieux connu depuis sous le nom de problème de Helmholtz-Lie :

« Trouver des propriétés qui appartiennent simultanément à l'ensemble des mouvements euclidiens et aux deux ensembles de mouvements non euclidiens (elliptiques et hyperboliques) et distinguant ces trois ensembles de tous les autres ensembles possibles de mouvements d'une variété numérique (Zahlenmannigfaltigkeit) ».

S. Lie donne deux solutions à ce problème, l'une de nature infinitésimale, l'autre s'inspirant plus directement des résultats de Helmholtz (dont Lie montre par ailleurs qu'ils contiennent des inexactitudes et des éléments superflus), et qui ne met en jeu que des points « à distance finie les uns des autres ». Nous indiquerons brièvement en quoi consiste la seconde de ces solutions.

Les axiomes par lesquels Lie caractérise le groupe de tous les mouvements euclidiens et non euclidiens à n dimensions sont essentiellement les suivants :

a. R_n est une variété numérique (Zahlenmannigfaltigkeit) et les « mouvements » de R_n forment un groupe réel et continu, engendré par des transformations infinitésimales.

b. Un point donné y_o^i étant fixé, tout autre point x_o^i se déplace sur un lieu donné par une équation $W(y_o^i, x_o^i\,;\, x^i) = 0$ représentant en général une variété à $n - 1$ dimensions qui ne passe pas par $y_o^i(W(y_o^i, x_o^i\,;\, y_o^i) \neq 0)$ et que Lie appelle une pseudo-sphère (1)

(1) Qui n'a évidemment rien de commun avec la pseudo-sphère, surface à courbure constante négative.

de centre y_o^i. En outre la condition suivante est réalisée au moins dans un certain domaine de R_n : Si l'on fixe $q < n - 1$ points $P_1, \ldots, P_q$, un autre point P, en position générale, se meut librement sur la variété intersection des pseudo-sphères de centres $P_1, \ldots, P_q$ qui passent par P.

Il convient de signaler que Helmholtz posait à la base de son axiomatique un postulat de « libre mobilité » qui n'est autre chose que la condition *b* supposée vérifiée pour toute valeur de *q*. La constatation du fait que l'on peut se débarasser de cette condition pour $q = n - 1$ ([2]) est un progrès significatif de Lie par rapport à Helmholtz. Notons qu'on déduit immédiatement du postulat de libre mobilité le nombre de paramètres $N = n(n+1)/2$ du groupe des mouvements de R_n, tandis que la seule conclusion immédiate que l'on puisse tirer des axiomes de Lie est que $N = n(n+1)/2$ ou $n(n+1)/2 - 1$.

S. Lie montre que pour $n = 3$ et $n = 4$, les axiomes *a* et *b* ($q = 1, 2, \ldots, n - 1$) sont indépendants. Par contre il écrit qu'il est probable, selon lui, que pour $n > 4$ ils ne le soient plus ; on verra plus loin qu'il en est bien ainsi.

2. A l'époque où Lie écrivait, la topologie, et en particulier la topologie générale, était encore peu développée ; ses considérations ont, de ce fait, un caractère essentiellement local ; ainsi, il ne semble pas faire de différence entre la géométrie sphérique et la géométrie elliptique (qui sont localement semblables). D'autre part, il fait des hypothèses d'analyticité dont on aurait avantage à se libérer.

En 1930, A. Kolmogoroff [3] a caractérisé de façon purement topologique les groupes des mouvements des espaces de Riemann (connexes) à courbure constante : espaces hyperboliques, euclidiens, elliptiques et sphériques ; il ne fait cependant qu'énoncer des résultats sans en donner les démonstrations. Les axiomes de Kolmogoroff sont les suivants ([3]) :

([2]) Pour $q \geqslant n$, la variété intersection des pseudo-sphères de centres $P_1, \ldots, P_q$ qui passent par P se compose généralement d'un nombre fini de points. La condition *b* perd alors de son intérêt, au moins lorsqu'on n'étudie que le comportement local (au voisinage de la transformation identique) du groupe des mouvements.

([3]) Pour des raisons de facilité d'exposé, nous changeons l'ordre dans lequel ces axiomes sont énoncés par Kolmogoroff, ainsi que la forme de certains d'entre eux.

A. R est un espace topologique localement compact, connexe, et G est un groupe transitif d'homéomorphismes de R.

B. R peut être muni d'une structure uniforme (au sens d'A. Weil) invariante pour G ; cette condition est certainement remplie si R est métrisable et si l'on peut définir dans R une métrique invariante pour G (c'est-à-dire telle que G soit un groupe d'isométries).

C. R est métrisable.

D. p et q étant des points de R, on désignera par G_p le groupe des transformations de G qui conservent p, et par $O_p(q)$ l'« orbite de centre p » lieu des transformés de q par les transformations de G_p. Alors, si deux points q et r ne se trouvent pas sur la même orbite de centre p, $O_p(q)$ sépare r de p, ou $O_p(r)$ sépare q de p.

D_n. $p_1, p_2, \ldots,$ et q étant des points de R, on désignera par $G_{p_1, \ldots, p_n}$ le groupe des transformations de G qui conservent $p_1, \ldots, p_k$ et par $O_{p_1, \ldots, p_k}(q)$ l'« orbite de centre $(p_1, \ldots, p_k)$ », lieu des transformés de q par les transformations de ce groupe. Soient alors p_3 un point de $O_{p_1}(p_2)$, p_4 un point de $O_{p_1,p_2}(p_3)$, ..., p_{n-1} un point de $O_{p_1, \ldots, p_{n-3}}(p_{n-2})$, p_n, q, et r trois points de $O = O_{p_1, \ldots, p_{n-2}}(p_{n-1})$; si q et r ne se trouvent pas sur la même orbite de centre $(p_1, \ldots, p_n)$, $O_{p_1, \ldots, p_n}(q)$ sépare sur Or de p_n, ou bien $O_{p_1, \ldots, p_n}(r)$ sépare sur Oq de p_n.

Kolmogoroff affirme que, ces axiomes étant satisfaits, on peut établir une correspondance biunivoque et bicontinue entre R et un espace de Riemann à courbure constante, telle que G corresponde au groupe de toutes les isométries (déplacements ou retournements) de cet espace.

On remarquera l'analogie des conditions D et D_n avec la condition b de Lie (cf. § 1). Contrairement à Lie, Kolmogoroff postule D_n pour toute valeur de n, mais cela lui permet d'abandonner l'hypothèse d'une dimension finie (qui est évidemment essentielle chez Lie).

Plaçons-nous dans le cas où R est un espace métrique et où G est un groupe d'isométries de R ; nous noterons la distance de deux points p et q par $\overline{pq}$. Dans ce cas, l'orbite $O_p(q)$ est contenue dans la sphère $S_p(q)$ de centre p et de rayon $\overline{pq}$ (lieu des points qui sont à la même distance de p que q). Il est clair que si, pour tout q, $O_p(q)$ couvre entièrement $S_p(q)$, la condition D est réalisée ([4]) ; les axiomes B, C et D peuvent donc être remplacés par les axiomes plus forts, ou au moins équivalents, suivants :

B′. R est un espace métrique et G est un groupe d'isométries de R.

D′. L'orbite $O_p(q)$ est la sphère (au sens de la métrique) de centre p et de rayon $\overline{pq}$.

Par suite de la transitivité de G, D′ est encore équivalent à

D″. Si quatre points p, q, r, s satisfont à la relation $\overline{pq} = \overline{rs}$, il existe au moins une transformation de G transformant p et q respectivement en r et s.

Nous dirons avec H. C. Wang qu'un espace métrique est *2-points homogène* si le groupe de toutes ses isométries satisfait à la condition D″. H. C. Wang a déterminé ([6], [7]) tous les espaces 2-points homogènes compacts et connexes, ainsi que tous les espaces 2-points homogènes localement compacts, connexes, satisfaisant à une condition supplémentaire que nous n'énoncerons pas ici.

De ce que nous avons vu, il résulte que *si l'on peut déterminer tous les couples* R, G *satisfaisant aux axiomes* A, B, C, D, *on connaîtra par le fait même tous les espaces 2-points homogènes localement compacts et connexes ;* ce résultat incluera donc simultanément les résultats cités de Kolmogoroff et de Wang.

L'article de Kolmogoroff m'a été signalé par Monsieur le Professeur Hopf qui m'a suggéré d'en compléter les démonstrations et de chercher, par un affaiblissement convenable des axiomes de Kolmogoroff, à retrouver en outre les théorèmes de Wang. J'ai pu déterminer, et j'indiquerai plus loin (cf. § 4), quels sont tous les couples R, G qui satisfont aux conditions A, B, D (la condition C en est une conséquence) et tels que G soit complet ([5]) et que R *soit de dimension finie ;* j'ai dû faire cette

---

([4]) On peut voir que la réciproque est vraie, c'est-à-dire que la condition D est équivalente à la condition $O_p(q) = S_p(q)$; il apparaît d'ailleurs intuitivement qu'il doit en être ainsi.

([5]) Nous entendons par là que G est complet dans la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles compacts. Si G n'est pas complet, il est partout dense dans un groupe complet qui satisfait aux mêmes conditions (A, B, D) que lui. Notons que l'hypothèse ajoutée ici ne change rien à nos conclusions sur la détermination des espaces 2-points homogènes, puisque le groupe de toutes les isométries d'un espace métrique localement compact est toujours complet.

dernière hypothèse pour pouvoir appliquer le théorème de Montgomery-Zippin-Gleason d'après lequel tout groupe localement compact de dimension finie est un groupe de Lie généralisé (au sens de A. Gleason) ; si ce théorème reste valable lorsqu'on laisse de côté l'hypothèse de dimension finie, il en est de même de mes résultats ([6]).

3. Avant d'énumérer les espaces-groupes R, G qui satisfont aux conditions A, B, D, nous indiquerons encore une propriété intéressante de ceux-ci.

Commençons par faire la remarque élémentaire suivante : Ayant choisi un étalon de longueur dans l'espace (euclidien) ordinaire, on peut y mesurer n'importe quelle distance si l'on connaît le groupe des mouvements de l'espace (c'est-à-dire si on sait y déplacer librement un corps solide). En effet, la seule connaissance du groupe des mouvements de l'espace permet de comparer deux longueurs $\overline{ab}$ et $\overline{cd}$ (il suffit de transporter c en a et de tracer la sphère de centre a et de rayon $\overline{cd}$), d'ajouter deux longueurs ($\overline{ab} = k + m$ s'il existe au moins un point c tel que $\overline{ac} = k$ et $\overline{bc} = m$, et s'il n'existe aucun point d tel que $\overline{ad} = k$ et $\overline{bd} < m$), de diviser une longueur par deux ($\overline{cd} = \frac{1}{2}k$ si $\overline{cd} + \overline{cd} = k$) et de faire un passage à la limite (si lim. $b_i = b$, lim $\overline{ab_i} = \overline{ab}$).

Recherchons quelles sont les hypothèses qu'on a dû faire implicitement sur l'espace R, le groupe G des mouvements et la métrique pour pouvoir effectuer les constructions précédentes ; ce sont essentiellement les hypothèses suivantes : G est transitif et satisfait aux conditions B et D du § 2 ; la métrique est continue, invariante pour G et *convexe*, c'est-à-dire que si $\overline{ab} = k + m$, il existe au moins un point c tel que $\overline{ac} = k$ et $\overline{bc} = m$ ([7]).

Ceci nous amène à énoncer la proposition suivante, qui demande évidemment encore à être démontrée (nous ne le ferons pas ici),

---

([6]) D'après une information que j'ai reçue tout récemment de M. R. Kadison, H. Yamabe aurait démontré qu'il en est bien ainsi (note ajoutée au texte de cette conférence le 1er mars 1953).

([7]) La définition que l'on donne généralement d'une métrique convexe est moins restrictive : Une métrique est convexe si, étant donnés deux points a et b quelconques, il existe au moins un troisième point c tel que $\overline{ac} = \overline{bc} = \frac{1}{2}\overline{ab}$. Lorsque l'espace considéré est localement compact (et ce sera toujours le cas ici), les deux définitions sont équivalentes.

les remarques précédentes n'ayant que la valeur d'une indication très grossière :

Si un espace-groupe R, G *satisfait aux conditions* A, B, D, *du* § 2, R *peut être muni d'une métrique convexe, invariante pour* G ; *cette métrique est univoquement déterminée, au choix de l'unité de longueur près.*

Cet énoncé renferme en particulier l'affirmation du § 2 suivant laquelle l'axiome C est une conséquence des axiomes A, B, D.

4. *Un couple* R, G, *formé d'un espace* R *de dimension finie et d'un groupe complet* ([8]) G *d'homéomorphismes de* R, *satisfaisant aux conditions* A, B, D, *du* § 2, *est de l'un des types suivants :*

P_r) R. est un espace affin réel et G est le groupe de toutes les affinités, ou le groupe de toutes les affinités directes (c'est-à-dire conservant l'orientation) ([9]), qui laissent invariante la forme quadratique $\Sigma \Delta x_i$ ([10]) (groupe des déplacements euclidiens).

P_c) R est un espace affin complexe, et G est le groupe de toutes les affinités, ou le groupe de toutes les affinités et antiaffinités, qui laissent invariante la forme hermitienne $\Sigma \Delta x_i \cdot \overline{\Delta x_i}$ (groupe hermitien complexe), ou le sous-groupe formé par celles de ces transformations dont le déterminant est une racine k-ième de l'unité, où k est un entier quelconque ([11]).

P_q) R est un espace affin quaternionien, et G est le groupe de toutes les affinités $y^i = a^i_j x^j c + b^i$ qui laissent invariante la forme hermitienne $\Sigma \Delta x_i \cdot \overline{\Delta x_i}$ (groupe hermitien quaternionien), ou le sous-groupe obtenu en laissant seulement varier c dans un sous-groupe fermé du groupe multiplicatif des quaternions.

P_o) R est l'espace affin à 2 dimensions construits sur les octaves de Cayley et G est le groupe de toutes les affinités (transformations transformant une droite en une droite) de R qui laissent invariante la « forme hermitienne » $\Delta x_1 . \overline{\Delta x_1} + \Delta x_2 . \overline{\Delta x_2}$.

E_r) R est un espace projectif réel et G est le groupe de toutes les projectivités, ou le groupe de toutes les projectivités directes

([8]) Cf. note 5.

([9]) Seulement lorsque la dimension de R est différente de 1.

([10]) Nous prenons des accroissements Δx_i comme variables, pour que la forme considérée soit invariante pour les translations (qui appartiennent au groupe G).

([11]) Seulement lorsque la dimension complexe de R est différente de 1.

(conservant l'orientation) [12], conservant une hyperquadrique sans points réels $\Sigma X_i^2 = 0$.

E'_r) R est une sphère euclidienne et G est le groupe de toutes les rotations, ou le groupe de toutes les rotations et retournements, de cette sphère.

E_c) R est un espace projectif complexe et G est le groupe de toutes les projectivités, ou le groupe de toutes les projectivités et antiprojectivités, conservant une hyperquadrique d'Hermite sans points $\Sigma X_i \overline{X_i} = 0$.

E_q) R est un espace projectif quaternionien et G est le groupe de toutes les projectivités conservant une hyperquadrique d'Hermite sans points $\Sigma X_i \overline{X_i} = 0$.

E_o) R est le plan projectif des octaves de Cayley (variables non homogènes x et y), et G est le groupe de toutes les collinéations conservant une « conique d'Hermite » sans points $x\bar{x} + y\bar{y} + 1 = 0$.

H_r, H_c, H_q, H_o) On obtient ces cas à partir des cas E_r, E_c, E_q, E_o en introduisant un signe (—) dans l'équation de l'hyperquadrique (hyperquadrique ordinaire ou hyperquadrique d'Hermite) invariante pour G ; cette hyperquadrique a alors des points, et il faut prendre pour R son intérieur.

O_1) R est l'ensemble de tous les octaves de Cayley sans partie réelle et G est le groupe de toutes les transformations $y = x^\rho + b$, ou le groupe de toutes les transformations $y = \pm x^\rho + b$, où $x \to x^\rho$ est un automorphisme de l'algèbre des octaves et où b est une octave sans partie réelle.

O_2) R est l'algèbre des octaves de Cayley et G est le groupe de toutes les « affinités » $y = ax^\rho + b$, où $x \to x^\rho$ est un automorphisme de l'algèbre et où $|a| = 1$.

Il ne peut être question de démontrer ici ces résultats.

5. Nous allons à présent indiquer, pour chacun des couples R, G du § 4, quelle est la métrique convexe définie sur R et invariante pour G (cf. § 3).

---

[12] Qui n'est défini que si la dimension de R est impaire.

Les espaces métriques R *correspondant aux cas* P_r, P_c, P_q, P_o, O_1 et O_2 *sont des espaces euclidiens (réels)*. Dans les cas P_r, P_c, P_q et P_o, la métrique est le produit de la racine carrée de la forme (quadratique ou hermitienne) invariante pour G, dont il est question dans la description de ces cas, par une constante arbitraire (dépendant de l'unité de longueur choisie) ; dans les cas O_1 et O_2, elle est donnée par $\overline{ab} = k|a - b|$, où a et b sont des octaves et k est une constante positive arbitraire.

Les espaces métriques correspondant aux cas E_r, E'_r, H_r *sont respectivement les espaces elliptiques (de Riemann), les sphères euclidiennes, et les espaces hyperboliques (de Lobatchevsky). Les espaces métriques correspondant aux cas* E_r, H_c, E_q, H_q *sont des espaces hermitiens elliptiques et hyperboliques, complexes et quaternioniens, de G. Fubini et E. Study* [13].

Dans tous les cas cités ici, à l'exception de E'_r, ainsi que dans les cas E_o et H_o, la métrique peut être définie par le procédé standard que voici :

R est un (ou une partie d'un) espace projectif réel, complexe, quaternionien ou « octavien » ; deux points a et b de R déterminent donc une « droite » ab qui est, suivant le cas, un espace conforme réel à 1, 2, 4 ou 8 dimensions ; cette droite coupe l'hyperquadrique (hyperquadrique ordinaire ou hyperquadrique d'Hermite) invariante pour G suivant une hypersphère à 0 (couple de points), 1, 3 ou 7 dimensions (qui sera imaginaire dans les cas E) ; la circonférence contenue dans la « droite » ab, passant par a et b, et orthogonale à cette hypersphère, coupe celle-ci en deux points p et q. Cela étant, la distance $\overline{ab}$ est donnée par la formule $\overline{ab} = k \log (a, b, p, q)$, où k est une constante réelle ou imaginaire pure suivant qu'on est dans un cas H ou dans un cas E, et où (a, b, p, q) désigne le birapport des points a, b, p, q pris sur la circonférence précitée ; cette circonférence est la géodésique de R qui joint a à b. Les « droites » de R, munies de la métrique induite par celle de R, sont des sphères euclidiennes ou des espaces de Lobatchevsky à 1, 2, 4 ou 8 dimensions.

Notons enfin que tous les espaces métriques dont il a été ques-

---

(13) Cf. E. CARTAN [1].

tion ici sont des espaces Riemanniens symétriques, au sens d'E. Cartan ([14]).

6. On peut donner, sur la base des résultats du § 4, de nouvelles solutions au problème de Helmoltz-Lie. Nous en indiquerons une :

Soit R *un espace de dimension finie, et* G *un groupe complet d'homéomorphismes de* R, *satisfaisant aux axiomes* A, B, D *et* D_1 (*cf.* § 2). *On peut établir une correspondance biunivoque et bicontinue entre* R *et un espace de Riemann à courbure constante, telle que* G *corresponde au groupe de toutes les isométries ou au groupe de tous les déplacements (isométries conservant l'orientation) de cet espace.*

Il nous semble probable que l'hypothèse suivant laquelle G est complet peut être laissée de côté. Dans tous les cas, si G n'est pas complet, il est partout dense dans un groupe complet qui satisfait aux mêmes conditions et auquel la proposition précédente est applicable.

BIBLIOGRAPHIE

1. E. Cartan : Leçons sur la géométrie projective complexe. Paris, 1931.
2. — : Sur certaines formes Riemanniennes remarquables des géométries à groupe fondamental simple. *Ann. Ec. Norm.*, **44** (1927), 345-467.
3. A. Kolmogoroff : Zur topologisch-gruppentheoretischen Begründung der Geometrie. Gött. Nachr., 1930.
4. S. Lie : Theorie der Transformationsgruppen, Leipzig 1893. Partic. le tome III.
5. J. Tits : Le plan projectif des octaves et les groupes de Lie exceptionnels. A paraître dans le *Bull. Cl. Sci. de l'Acad. R. Belg.*
6. H. C. Wang : Two-point homogeneous spaces. *Ann. of Math.*, **55** (1952), 177-191.
7. H. C. Wang : Two therems on metric spaces. *Pacific Journal of Math.*, **1** (1951), 473-480.

([14]) Cf. [2]. Les espaces considérés dans cet article par E. Cartan n'ont été nommés par lui « espaces Riemanniens symétriques » que plus tard.

Les espaces métriques correspondent à E_0 et à H_0 ne sont autres que les espaces clos et ouvert du type FII de E. Cartan [2] (cf. [5]).

Innovations in Incidence Geometry

msp.org/iig

See inside back cover or msp.org/iig for submission instructions.

The subscription price for 2019 is US $275/year for the electronic version, and $325/year (+$20, if shipping outside the US) for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues and changes of subscriber address should be sent to MSP.

Innovations in Incidence Geometry: Algebraic, Topological and Combinatorial (ISSN 2640-7345 electronic, 2640-7337 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online. Periodical rate postage paid at Berkeley, CA 94704, and additional mailing offices.

IIG peer review and production are managed by EditFlow® from MSP.

PUBLISHED BY

mathematical sciences publishers

nonprofit scientific publishing

http://msp.org/

Innovation in Incidence Geometry

Vol. 16 No. 1 2018

Complement to the Collected Works of Jacques Tits

edited by Bernhard Mühlherr and Hendrik Van Maldeghem

This volume contains 31 writings of Jacques Tits that were not included in his four-volume *Œuvres – Collected Works*, published by the European Mathematical Society in 2013 in the series Heritage of European Mathematics.