ILLINOIS JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 40, Number 3, Fall 1996

COMPARAISON DE NORMES POUR LES POLYNÔMES HOMOGÈNES EN PLUSIEURS VARIABLES

EPHREM RAZAFIMANANTSOA

Résumé

Dans [3], E. Bombieri et al établissent une inégalité portant sur les produits de polynômes homogènes en plusieurs variables. Ils déterminent la meilleure constante indépendante du nombre de variables qui vérifie une minoration du type $[PQ] \geq C$ $[P][Q]$. Nous obtenons la meilleure constante indépendante du nombre de variables lorsque P et Q sont égaux. L'inégalité est stricte dès que le degré est supérieur ou égal à deux. Nous améliorons alors la constante en introduisant le nombre de variables. Nous appliquons ces résultats à une représentation intégrale de la norme de Bombieri; nous en déduisons une amélioration des inégalités connues entre les normes L^2 et L^4 d'un polynôme à plusieurs variables.

1. Minoration de la norme de P^2

Soit P un polynôme homogène à N variables et coefficients complexes de degré m. Pour chaque indice $i_1, \ldots, i_m$, $1 \leq i_1 \leq N, \ldots, 1 \leq i_m \leq N$, nous definissons

$$c_{i_1,\ldots,i_m} = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m P}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}}.$$

Par la formule de Taylor nous obtenons l'écriture symétrique du polynôme P (voir [3], [4], [5]):

$$P = \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} c_{i_1,\ldots,i_m} x_{i_1} \cdots x_{i_m}.$$

A cette écriture correspond la norme de Bombieri de P définie par

$$[P] = \left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} |c_{i_1,\ldots,i_m}|^2 \right)^{1/2}.$$

Nous notons par $[\cdot, \cdot]$ le produit scalaire hermitien associé à cette norme.

Received March 22, 1995.
1991 Mathematics Subject Classification. Primary 30C15.

Soit $(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k})_{i_1,\ldots,i_k}$ la base canonique, écrite dans l'ordre lexicographique, de $\underbrace{\mathbb{C}^N \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^N}_{k-fois}$ en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Soit Q un autre polynôme homogène à N variables et à coefficients complexes de degré n. On suppose $n \geq m$ et on pose $d = n - m$. On définit alors l'opérateur $H_k(P, Q)$, pour $0 \leq k \leq m$, par

$$\begin{aligned} H_k(P, Q) : \mathbb{C}^N \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^N &\longrightarrow \mathbb{C}^N \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^N \\ e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} &\longrightarrow \textstyle\sum_{j_1,\ldots,j_{d+k}=1}^N \left[P_{i_1,\ldots,i_k},\ Q_{j_1,\ldots,j_{d+k}}\right] e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_k} \end{aligned}$$

où $P_{i_1,\ldots,i_k}$ est le polynôme

$$P_{i_1,\ldots,i_k} = \frac{(m-k)!}{m!} \frac{\partial^k P}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} = \sum_{i_{k+1},\ldots,i_m=1}^{N} c_{i_1,\ldots,i_m} x_{i_{k+1}} \cdots x_{i_m}.$$

On note encore $H_k(P, Q)$ la matrice de cet opérateur. C'est une matrice de taille $N^k \times N^{d+k}$.

THÉORÈME 1. *On a*

$$[PQ]^2 = \frac{m!n!}{(m+n)!} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{n}{m-k} \|H_k(P, Q)\|_{HS}^2,$$

où $\|A\|_{HS} = [tr(A^t \overline{A})]^{1/2}$ *est la norme de Hilbert-Schmidt d'un opérateur* A.

Démonstration. La démonstration n'est qu'une simple introduction des $H_k(P, Q)$ dans l'identité initialement établie par Bombieri et al dans [3], et redémontrée, sous forme plus précise, par d'autres auteurs (B. Beauzamy et J. Dégot dans [4], B. Reznick dans [9]).

Soient $U = (u_1, \ldots, u_m)$ et $V = (v_1, \ldots, v_n)$. On dit que (U, V) forme un shuffle de type (m, n) si $\{u_1, \ldots, u_m,\ \ v_1, \ldots, v_n\}$ est une permutation de $\{1, \ldots, m+n\}$ telle que $u_1 < \cdots < u_m$ et $v_1 < \cdots < v_n$. On note par $\mathrm{sh}(m, n)$ l'ensemble des shuffles de type (m, n). Son cardinal est $|\mathrm{sh}(m, n)| = \frac{(m+n)!}{m!n!}$. D'après [5], on a l'identité

$$[PQ]^2 = \left(\frac{m!n!}{(m+n)!}\right)^2 \sum_{(U,V),(U'V')\in \mathrm{sh}(m,n)} \sum_{l_{U\cap U'}=1}^{N} \sum_{l_{V\cap V'}=1}^{N} \left| \sum_{l_W=1}^{N} c_{l_{U\cap U'} l_W}\, \bar{d}_{l_W l_{V\cap V'}} \right|^2$$

où l_U désigne $(l_{U_1}, \ldots, l_{U_m})$ et $W = U \cap V'$. Ceci peut encore s'écrire

$$[PQ]^2 = \left(\frac{m!n!}{(m+n)!}\right)^2 \sum_{(U,V),(U'V')\in \mathrm{sh}(m,n)} \sum_{l_{U\cap U'}=1}^{N} \sum_{l_{V\cap V'}=1}^{N} \left|[P_{l_{U\cap U'}},\ Q_{l_{V\cap V'}}]\right|^2.$$

Pour chaque shuffle (U, V), il existe $\binom{m}{k}\binom{n}{m-k}$ shuffles (U', V') tels que $|U \cap U'| = k$. D'où, en faisant varier k de 0 à m, on déduit que

$$\begin{aligned}
[PQ]^2 &= \frac{m!n!}{(m+n)!} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\binom{n}{m-k} \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{N} \sum_{j_1,\dots,j_{d+k}=1}^{N} \left|[P_{i_1,\dots,i_k},\ Q_{j_1,\dots,j_{d+k}}]\right|^2 \\
&= \frac{m!n!}{(m+n)!} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\binom{n}{m-k} tr(H_k(P,Q)^t\overline{H}_k(P,Q)) \\
&= \frac{m!n!}{(m+n)!} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\binom{n}{m-k} \|H_k(P,Q)\|_{HS}^2.
\end{aligned}$$

COROLLAIRE 2 (INÉGALITÉ DE BOMBIERI [2]). *On a*

$$[PQ]^2 \geq \frac{m!n!}{(m+n)!} [P]^2 [Q]^2,$$

avec égalité si et seulement si $H_{m-1}(P, Q)$ est l'opérateur identiquement nul.

Démonstration. On remarque que

$$\begin{aligned}
\|H_m(P,Q)\|_{HS}^2 &= \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{N} \sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{N} \left|[P_{i_1,\dots,i_m},\ Q_{j_1,\dots,j_n}]\right|^2 \\
&= \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{N} \sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{N} \left|c_{i_1,\dots,i_m}\ \bar{d}_{j_1,\dots,j_n}\right|^2 \\
&= [P]^2\,[Q]^2.
\end{aligned}$$

Et on obtient l'inégalité de Bombieri en appliquant le Théorème 1. De plus on a l'égalité si et seulement si pour tout $0 \leq k < m$ l'opérateur $H_k(P, Q)$ est identiquement nul. Or la nullité de $H_{k+1}(P, Q)$ entraîne celle de $H_k(P, Q)$ car $[P_{i_1,\dots,i_k},\ Q_{j_1,\dots,j_{d+k}}] = \sum_{i=1}^{N} [P_{i_1,\dots,i_k i},\ Q_{j_1,\dots,j_{d+k} i}]$.

THÉORÈME 3. *Si on pose $C_m = \frac{m!m!}{(2m)!}$, alors $2C_m$ est la meilleure parmi toutes les constantes C indépendantes du nombre de variables qui vérifient l'inégalité*

$$[P^2]^2 \geq C[P]^4.$$

De plus si $m \geq 2$ on a

$$[P^2]^2 > 2C_m[P]^4.$$

Démonstration. D'après le Théorème 1,

$$[P^2]^2 = C_m \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}^2 \|H_k\|_{HS}^2,$$

où on note $H_k = H_k(P, P)$. Pour tout $0 \le k \le m$ on a

$$\begin{aligned}\|H_k\|_{HS}^2 &= \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{N} \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{N} \left|[P_{i_1,\dots,i_k},\ P_{j_1,\dots,j_k}]\right|^2 \\ &\ge \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{N} \left[P_{i_1,\dots,i_k}\right]^4,\end{aligned}$$

et cette dernière somme est strictement positive (sinon P serait nul). De même on remarque que $\|H_0\|_{HS}^2 = [P]^4$, par conséquent

$$[P^2]^2 = 2C_m\,[P]^4 + C_m \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m}{k}^2 \|H_k\|_{HS}^2,$$

et

$$[P^2]^2 \ge 2C_m\,[P]^4$$

avec une inégalité stricte si $m \ge 2$.

Soit $P = x_1^m + \cdots + x_N^m$. On a respectivement $[P]^4 = N^2$ et $[P^2]^2 = N + 2C_m(N^2 - N)$.

D'où l'on déduit

$$\frac{[P^2]^2}{[P]^4} = 2C_m + \frac{1}{N}(1 - 2C_m),$$

et cette quantité tend vers $2C_m$ quand on augmente le nombre de variables.

Remarque. Par une méthode récursive, J.-L. Frot a démontré que

$$[P^n]^2 \ge \frac{n!(m!)^n}{(mn)!}[P]^{2n}.$$

Mais cette méthode n'exprime pas les termes négligés.

Introduisons maintenant le nombre de variables N dans la minoration. Commençons par énoncer quelques lemmes.

LEMME 4. *Pour $0 \le k \le m$, on a l'égalité*

$$\|H_k\|_{HS}^2 = \|H_{m-k}\|_{HS}^2.$$

Démonstration. On a

$$
\begin{aligned}
\|H_k\|_{HS}^2 &= \sum_{i_1,\dots,i_k} \sum_{j_1,\dots,j_k} \left|[P_{i_1,\dots,i_k},\ P_{j_1,\dots,j_k}]\right|^2 \\
&= \sum_{i_1,\dots,i_k} \sum_{j_1,\dots,j_k} \left| \sum_{i_{k+1},\dots,i_m} c_{i_1,\dots,i_m} \bar{c}_{j_1,\dots,j_k i_{k+1},\dots,i_m} \right|^2 \\
&= \sum_{i_1,\dots,i_k} \sum_{j_1,\dots,j_k} \left(\sum_{i_{k+1},\dots,i_m} \sum_{j_{k+1},\dots,j_m} c_{i_1,\dots,i_m} \bar{c}_{j_1,\dots,j_k i_{k+1},\dots,i_m} \bar{c}_{i_1,\dots,i_k j_{k+1},\dots,j_m} c_{j_1,\dots,j_m} \right) \\
&= \sum_{i_{k+1},\dots,i_m} \sum_{j_{k+1},\dots,j_m} \left(\sum_{i_1,\dots,i_k} \sum_{j_1,\dots,j_k} c_{i_1,\dots,i_m} \bar{c}_{i_1,\dots,i_k j_{k+1},\dots,j_m} \bar{c}_{j_1,\dots,j_k i_{k+1},\dots,i_m} c_{j_1,\dots,j_m} \right) \\
&= \|H_{m-k}\|_{HS}^2.
\end{aligned}
$$

LEMME 5. (IDENTITÉ DE LAGRANGE). *Soient $a_1, \dots, a_n$ n nombres complexes. On a alors*

$$\sum_{i=1}^n |a_i|^2 = \frac{1}{n} |\sum_{i=1}^n a_i|^2 + \frac{1}{2n} \sum_{i,j=1}^n |a_i - a_j|^2.$$

On pourra consulter Mitrinovic [8] pour la démonstration.

LEMME 6. *Pour $0 \le k \le m$ on a*

$$tr(H_k) = [P]^2.$$

Démonstration. On a

$$tr(H_k) = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^N [P_{i_1,\dots,i_k}]^2 = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^N \sum_{i_{k+1},\dots,i_m=1}^N |c_{i_1,\dots,i_m}|^2 = [P]^2.$$

THÉORÈME 7. *Si $m = 2p$, posons*

$$C_{m,N} = C_m \left[2 \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\binom{m}{k}^2}{\binom{N+k-1}{k}} + \frac{\binom{m}{p}^2}{\binom{N+p-1}{p}} \right].$$

Si $m = 2p+1$, posons

$$C_{m,N} = 2C_m \sum_{k=0}^{p} \frac{\binom{m}{k}^2}{\binom{N+k-1}{k}}.$$

Alors on obtient l'inégalité

$$[P^2]^2 \ \ge\ C_{m,N}[P]^4.$$

Démonstration. Pour $0 \leq k \leq m$, soit r_k le rang de la matrice H_k. On a $0 < r_k \leq \binom{N+k-1}{k}$. Et puisque H_k est hermitienne, $\|H_k\|_{HS}^2 = tr(H_k^t \overline{H}_k) = \sum_{i=1}^{r_k} |\lambda_i|^2$ où les $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r_k}$ sont les valeurs propres non-nulles de H_k (ce sont des réels strictement positifs). En appliquant le Lemme 5, puis le Lemme 6, on obtient

$$\|H_k\|_{HS}^2 \geq \frac{1}{r_k}(\sum_{i=1}^{r_k} \lambda_i)^2 \geq \frac{1}{\binom{N+k-1}{k}}[P]^4.$$

On termine la démonstration grâce au Théorème 1 et au Lemme 4.

Remarques. **1.** On retrouve le fait que $C_{m,N}$ tend vers $2C_m$ quand N tend vers l'infini.

2. D'une façon plus précise, r_k vérifie: $0 < r_k \leq \min(\binom{N+k-1}{k}, \binom{N+(m-k)-1}{m-k})$.

3. Suivant la terminologie de [6], la matrice H_1 et son rang r_1 sont respectivement la matrice d'inertie et le rang du polynôme P.

4. En appliquant une représentation intégrale de la norme $[\cdot]$ décrite par Legrangérard dans [7], on aboutit à l'inégalité suivante:

$$[P^2]^2 \geq \frac{m!m!}{(2m)!} \sum_{k=0}^{m} \frac{\binom{m}{k}^2}{\binom{N+k-1}{k}} [P]^4$$

(voir la démonstration de la Proposition 15 ci-après). L'amélioration de la constante est obtenue grâce à l'égalité $\|H_k\|_{Hs}^2 = \|H_{m-k}\|_{Hs}^2$ du Lemme 4.

2. Etude des polynômes extrémaux

On obtient l'égalité $[P^2]^2 = C_{m,N}[P]^4$ si et seulement si pour tout $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, H_k est de rang maximal $\rho_k = \binom{N+k-1}{k}$ et ses valeurs propres non-nulles sont identiques. C'est à dire, si et seulement si pour tout $1 \leq k \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, H_k est unitairement équivalente à la matrice

$$\lambda_k D_k = \lambda_k \begin{pmatrix} I_{\rho_k} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $\lambda_k = \frac{[P]^2}{\rho_k}$ et I_{ρ_k} est la matrice identité de taille $\binom{N+k-1}{k} \times \binom{N+k-1}{k}$.

PROPOSITION 8. *Soit $S = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$. Alors le polynôme P est extrémal, c'est à dire vérifie l'égalité $[P^2]^2 = C_{m,N}[P]^4$, si et seulement si*

(i) *les $\binom{N+S-1}{S}$ polynômes $(P_{i_1,\ldots,i_S})_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_S \leq N}$ sont deux à deux orthogonaux*

(ii) *et $[P_{i_1,\ldots,i_S}]^2 = \lambda_S [x_{i_1} \cdots x_{i_S}]^2 = \frac{1}{\rho_S}[x_{i_1} \cdots x_{i_S}]^2 [P]^2$.*

Démonstration. L'hypothèse (i) entraîne que H_S est de rang maximal ρ_S, et la seconde que H_S est équivalente à $\lambda_S\ D_S$ car il y a exactement $\frac{1}{[x_{i_1}\cdots x_{i_S}]^2}$ polynômes identiques $P_{i_1,\dots,i_S}$.

Maintenant supposons ces hypothèses vérifiées pour $k \leq S$.

On a alors $[P_{i_1,\dots,i_{k-1}},\ P_{j_1,\dots,j_{k-1}}] = \sum_{i_k=1}^{N}[P_{i_1,\dots,i_k},\ P_{j_1,\dots,j_{k-1}i_k}]$ et par hypothèse ce terme est nul si $\{i_1,\dots,i_{k-1}\} \neq \{j_1,\dots,j_{k-1}\}$, sinon il est égal à

$$\begin{aligned}\sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{\rho_k}[x_{i_1}\cdots x_{i_k}]^2[P]^2 &= \frac{1}{\rho_k}.\frac{N+k-1}{k}[x_{i_1}\cdots x_{i_{k-1}}]^2[P]^2\\ &= \frac{1}{\rho_{k-1}}[x_{i_1}\cdots x_{i_{k-1}}]^2[P]^2.\end{aligned}$$

Réciproquement soit P un polynôme extrémal. En particulier, on a $H_S^2 = \lambda_S H_S$.

Notons H_S^0 la matrice de taille $\rho_S \times \rho_S$ définie pour $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_S \leq N$ par

$$H_S^0(e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_S}) = \sum_{1\leq j_1\leq\cdots\leq j_S\leq N} \frac{[P_{i_1,\dots,i_S},\ P_{j_1,\dots,j_S}]}{[x_{i_1}\cdots x_{i_S}][x_{j_1}\cdots x_{j_S}]}\, e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_S}.$$

Si H_S est de rang maximal ρ_S, nécessairement H_S^0 est aussi de rang ρ_S, c'est à dire que H_S^0 est régulière. On en déduit

$$\begin{aligned}&H_S^{02}(e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_S})\\ &= \sum_{1\leq j_1\leq\cdots\leq j_S\leq N}\ \sum_{1\leq l_1\leq\cdots\leq l_S\leq N} \frac{[P_{i_1,\dots,i_S}, P_{l_1,\dots,l_S}][P_{l_1,\dots,l_S}, P_{j_1,\dots,j_S}]}{[x_{i_1}\cdots x_{i_S}][x_{l_1}\cdots x_{l_S}]^2[x_{j_1}\cdots x_{j_S}]} e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_S}\\ &= \sum_{1\leq j_1\leq\cdots\leq j_S\leq N}\ \sum_{l_1\cdots l_S=1} \frac{[P_{i_1,\dots,i_S},\ P_{l_1,\dots,l_S}][P_{l_1,\dots,l_S},\ P_{j_1,\dots,j_S}]}{[x_{i_1}\cdots x_{i_S}][x_{j_1}\cdots x_{j_S}]}\, e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_S}\\ &= \sum_{1\leq j_1\leq\cdots\leq j_S\leq N} \lambda_S\, \frac{[P_{i_1,\dots,i_S},\ P_{j_1,\dots,j_S}]}{[x_{i_1}\cdots x_{i_S}][x_{j_1}\cdots x_{j_S}]}\, e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_S}\\ &= \lambda_S\ H_S^0(e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_S}).\end{aligned}$$

Comme H_S^0 est régulière, on a $H_S^0 = \lambda_S I_{\rho_S}$. Et par suite on obtient $[P_{i_1,\dots,i_S}]^2 = \lambda_S[x_{i_1}\cdots x_{i_S}]^2$.

Exemple. Les polynômes

$$\begin{aligned}P &= x_1^4 + 2i\sqrt{3}x_1^2x_2^2 + x_2^4\\ Q &= x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - \frac{3}{2}(1 - i\sqrt{7})(x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2)\\ R &= x_1^6 + 5i\sqrt{2}x_1^3x_2^3 + x_2^6\end{aligned}$$

sont extrémaux.

Définition. On appelle contribution à la norme $[P]$ de la variable x_i la quantité $[P_i]$.

PROPOSITION 9. *Si $m = 2$ ou $m = 3$, les assertions suivantes sont équivalentes*:

(i) *Le polynôme P est extrémal.*
(ii) *Les N polynômes P_i forment un système orthonormal.*
(iii) *Les N faces de l'hypercube de P sont orthogonales deux à deux, et chaque variable a la même contribution à la norme $[P]$.*

Exemple. Les polynômes $x_1^2 + \cdots + x_N^2$ et $x_1^3 + \cdots + x_N^3$ sont extrémaux.

Remarque. Si $m \geq 4$ alors les assertions (ii) et (iii) de la Proposition 9 ne sont plus suffisantes. En particulier le polynôme $P = x_1^m + \cdots + x_N^m$ n'est pas extrémal pour $m \geq 4$.

Nous allons maintenant étudier l'action d'un changement de variables unitaire (voir [6] pour la théorie).

LEMME 10. *Soit A une matrice unitaire de taille $N \times N$. Notons $\tilde{P}$ le polynôme $\tilde{P} = \overline{A}P = P(\overline{A}X)$ et $\tilde{H}_k = H_k(\tilde{P}, \tilde{P})$. Le rang de $\tilde{H}_k$ et le rang de H_k sont égaux, et plus précisément,*

$$\tilde{H}_k = {}^t\underbrace{(\overline{A} \otimes \cdots \otimes \overline{A})}_{k\ fois} H_k \underbrace{(A \otimes \cdots \otimes A)}_{k\ fois}.$$

Démonstration. Notons $A = (\alpha_{ij})$. On a alors

$$\begin{aligned}\tilde{P} &= \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} d_{i_1,\ldots,i_m} x_{i_1} \cdots x_{i_m} \\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} \sum_{s_1,\ldots,s_m=1}^{N} \bar{\alpha}_{s_1 i_1} \cdots \bar{\alpha}_{s_m i_m} c_{s_1,\ldots,s_m} x_{i_1} \cdots x_{i_m}.\end{aligned}$$

Ce qui conduit à

$$\begin{aligned}&\tilde{H}_k(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}) \\ &\quad = \sum_{j_1,\ldots,j_k} \left[\tilde{P}_{i_1,\ldots,i_k},\ \tilde{P}_{j_1,\ldots,j_k}\right] e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_k} \\ &\quad = \sum_{j_1,\ldots,j_k} \sum_{i_{k+1},\ldots,i_m} d_{i_1,\ldots,i_m} \bar{d}_{j_1,\ldots,j_k i_{k+1},\ldots,i_m} e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_k}\end{aligned}$$

$$= \sum_{j_1,\dots,j_k}\sum_{i_{k+1},\dots,i_m}\sum_S\sum_T \bar{\alpha}_{s_1i_1}\cdots\bar{\alpha}_{s_mi_m}c_S\alpha_{t_1j_1}\cdots\alpha_{t_kj_k}\alpha_{t_{k+1}i_{k+1}}\cdots\alpha_{t_mi_m}\bar{c}_T$$
$$e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_k}$$
$$= \sum_{j_1,\dots,j_k}\sum_S\sum_T \bar{\alpha}_{s_1i_1}\cdots\bar{\alpha}_{s_ki_k}c_S\bar{c}_T\alpha_{t_1j_1}\cdots\alpha_{t_kj_k}\delta_{s_{k+1}t_{k+1}}\cdots\delta_{s_mt_m}\, e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_k}$$
$$= \sum_{j_1,\dots,j_k}\sum_{s_1,\dots,s_k}\sum_{t_1,\dots,t_k} \bar{\alpha}_{s_1i_1}\cdots\bar{\alpha}_{s_ki_k}\left(\sum_{s_{k+1},\dots,s_m} c_{s_1\cdots s_m}\bar{c}_{t_1\cdots t_ks_{k+1}\cdots s_m}\right)$$
$$\alpha_{t_1j_1}\cdots\alpha_{t_kj_k}e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_k},$$

où δ_{st} est le symbole de Kronecker. D'autre part, on a

$$(A\otimes\cdots\otimes A)e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_k} = \sum_{j_1,\dots,j_k}\alpha_{i_1j_1}\cdots\alpha_{i_kj_k}e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_k}$$

et

$$H_k(e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_k}) = \sum_{j_1,\dots,j_k}\sum_{i_{k+1}\dots,i_m} c_{i_1,\dots,i_m}\,\bar{c}_{j_1,\dots,j_ki_{k+1},\dots,i_m}e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_k}.$$

PROPOSITION 11. *Si P est extrémal alors dans tout changement de variables unitaire $P \longrightarrow \tilde{P} = \overline{A}P$, $\tilde{P}$ est aussi extrémal.*

Démonstration. Si P est extrémal, alors il existe une matrice unitaire U telle que

$$H_k = {}^t\overline{U}(\lambda_kD_k)U$$

pour tout $1 \le k \le \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$. Or d'après le lemme précédent,

$$\tilde{H}_k = {}^t(\overline{A}\otimes\cdots\otimes\overline{A})\,{}^t\overline{U}(\lambda_kD_k)U(A\otimes\cdots\otimes A) = {}^t\overline{\tilde{U}}(\lambda_kD_k)\tilde{U},$$

où $\tilde{U}$ est la matrice unitaire $U(A\otimes\cdots\otimes A)$.

PROPOSITION 12. *Si $m = 2$, alors les polynômes extrémaux sont, à des changements de variables unitaires près, les $a_1x_1^2 + \cdots + a_Nx_N^2$ avec $|a_1| = \cdots = |a_N|$.*

Démonstration. Soit P une forme quadratique. Si P est de rang N alors il existe une matrice unitaire A telle que

$$\tilde{P} = \overline{A}P = a_1x_1^2 + \cdots + a_Nx_N^2.$$

Et d'après la proposition précédente, si P est extrémal alors $\tilde{P}$ l'est aussi, d'où $|a_1| = \cdots = |a_N|$.

3. Application à une représentation intégrale de $[P]$

Notons $S_N = \{z = (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N / |z| = (\sum_{i=1}^N |z_i|^2)^{1/2} = 1\}$ et σ la mesure de probabilité sur S_N invariante par rotation. Suivant Legrandgérard [7], on a

$$[P]^2 = \binom{m+N-1}{m} \int_{S_N} |P(z)|^2 d\sigma(z).$$

THÉORÈME 13. *Tout polynôme homogène P de degré m et à N variables vérifie l'inégalité*

$$\int_{S_N} |P(z)|^4 d\sigma(z) \geq \gamma_{m,N} \left(\int_{S_N} |P(z)|^2 d\sigma(z) \right)^2$$

avec

$$\gamma_{m,N} = \frac{\binom{m+N-1}{m}^2}{\binom{2m+N-1}{2m}} C_{m,N} ,$$

où $C_{m,N}$ a été défini au Théorème 7.

COROLLAIRE 14. *Soit P une forme quadratique en N variables ($N \geq 2$), alors P vérifie*

$$\int_{S_N} |P(z)|^4 d\sigma(z) \geq \frac{2(N+1)}{(N+3)} \left(\int_{S_N} |P(z)|^2 d\sigma(z) \right)^2 \geq \frac{6}{5} \left(\int_{S_N} |P(z)|^2 d\sigma(z) \right)^2 .$$

Le Théorème 13 améliore l'inégalité classique

$$\int_{S_N} |P(z)|^4 d\sigma(z) \geq \left(\int_{S_N} |P(z)|^2 d\sigma(z) \right)^2 .$$

En effet:

PROPOSITION 15. pour tout $m \geq 1$ et tout $N \geq 2$, la constante $\gamma_{m,N}$ est strictement supérieure à 1.

Démonstration. On remarque que $\gamma_{m,N} = \frac{1}{C_m} \frac{\binom{m+N-1}{m}}{\binom{2m+N-1}{m}} C_{m,N}$. Or on sait que

$$C_{m,N} > C_m \sum_{k=0}^{m} \frac{\binom{m}{k}^2}{\binom{N+k-1}{k}} = \frac{C_m}{\binom{m+N-1}{m}} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{m+N-1}{m-k}.$$

En appliquant la formule de convolution de Chu-Vandermonde à la dernière sommation, on obtient $C_{m,N} > \frac{C_m}{\binom{m+N-1}{m}} \binom{2m+N-1}{m}$.

PROPOSITION 16. *Pour tout $m \geq 1$ et tout $N \geq 2$, la constante $\gamma_{m,N}$ est strictement inférieure à 2 et $\gamma_{m,N} \longrightarrow 2$ quand $N \longrightarrow +\infty$.*

Démonstration. En effet d'une part on a

$$C_{m,N} < 2C_m \sum_{k=0}^{m} \frac{\binom{m}{k}^2}{\binom{N+k-1}{k}} = 2C_m \frac{\binom{2m+N-1}{m}}{\binom{m+N-1}{m}},$$

d'où l'on tire que $\gamma_{m,N} < 2$.

D'autre part $C_{m,N} \longrightarrow 2C_m$ quand $N \longrightarrow +\infty$, ce qui entraîne que

$$\begin{aligned} \lim_{N\to+\infty} \gamma_{m,N} &= \lim_{N\to+\infty} \frac{2\binom{m+N-1}{m}}{\binom{2m+N-1}{m}} \\ &= \lim_{N\to+\infty} 2 \times \frac{N\cdots(m+N-1)}{(m+N)\cdots(2m+N-1)} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Par un procédé d'interpolation, on obtient pour tout $2 \leq r \leq 4$ une comparaison entre la norme L^r et la norme L^4 d'un polynôme homogène en plusieurs variables.

THÉORÈME 17. *Soit P un polynôme homogène de degré m et à N variables. Alors pour tout r, $2 \leq r \leq 4$, on a l'inégalité*

$$\|P\|_r \leq (\gamma_{m,N})^{\frac{4-r}{4r}} \|P\|_4$$

où

$$\|P\|_p = \left(\int_{S_N} |P(z)|^p d\sigma(z)\right)^{\frac{1}{p}}$$

est la norme L^p du polynôme P.

Démonstration. Pour tout r, $2 \leq r \leq 4$, on a l'inégalité d'interpolation

$$\|P\|_r \leq \|P\|_2^\theta \, \|P\|_4^{1-\theta}$$

où θ vérifie l'égalité $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{4}$ (voir par exemple Beauzamy [1]); donc $\theta = \frac{4-r}{r}$. En appliquant le théorème 13, il vient

$$\|P\|_r \leq \|P\|_2^\theta \, \|P\|_4^{1-\theta} \leq \left[(\gamma_{m,N})^{\frac{1}{4}} \|P\|_4\right]^\theta \|P\|_4^{1-\theta} = (\gamma_{m,N})^{\frac{4-r}{4r}} \|P\|_4 ,$$

ce qui constitue le résultat annoncé.

REFERENCES

1. B. Beauzamy, *Espaces d'Interpolation Réels: Topologie et Géométrie*, Lecture Notes in Math., vol 666, Springer Verlag, New York, 1978.
2. B. Beauzamy, *Products of many-variable polynomials: Pairs that are maximal in Bombieri's norm*, J. Number Theory **55** (1995), 129–143.
3. B. Beauzamy, E. Bombieri, P. Enflo, and H. Montgomery, *Products of polynomials in many variables*, J. Number Theory **36** (1990), 219–245.
4. B. Beauzamy and J. Dégot, *Differential identities*, Transactions A.M.S. **347** (1995), 2607–2619.
5. B. Beauzamy, J. L. Frot, and C. Millour, *Massively parallel computations on many-variable polynomials: when seconds count*, *Mathematics and computer science*, Annals of Maths and IA **16** (1996), 251–283.
6. J. L. Frot and C. Millour, *Rang d'un polynôme homogène à plusieurs variables*, to appear.
7. Y. Legrandgérard, *On some representations of the norme* $[\cdot]_2$, to appear.
8. D.-S. Mitrinovic, *Analytic inequalities*, Springer Verlag, New York, 1970
9. B. Reznick, *An inequality for products of polynomials*, Proceedings A.M.S. **117** (1993), 1063–1073.

INSTITUT DE CALCUL MATHÉMATIQUE
PARIS