ILLINOIS JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 34, Number 2, Summer 1990

HOMOTOPIE FILTREE ET FIBRES C^∞

PAR

STEPHEN HALPERIN[1] ET DANIEL TANRÉ[2]

This paper is dedicated to the memory of K.T. Chen

1. Introduction

Dans trois articles fondamentaux, Quillen [19], [20] et Sullivan [21] introduisent (entre autres choses) une théorie d'homotopie dans la catégorie des ADGC (algèbres différentielles graduées commutatives) sur **Q**. Dans cette optique, une ADGC devient, non seulement un outil pour le calcul d'une algèbre de cohomologie, mais aussi un représentant d'un *type d'homotopie* à partir duquel on peut calculer bien d'autres invariants homotopiques, par exemple, une algèbre de Lie d'homotopie.

Dans cet article, nous établissons une théorie analogue pour la catégorie des ADGC filtrées. Le principe est le même que celui de Quillen: on définit trois classes de morphismes qui joueront les rôles de cofibrations, de fibrations et d'équivalences faibles dans une catégorie à modèles, et l'on essaie ensuite de vérifier les axiomes. Dans ce cas, comme nous le verrons par la suite, la plupart des axiomes se vérifient, ce qui permet la construction d'une théorie d'homotopie. En analogie avec les ADGC ordinaires, on peut donc considérer une ADGC filtrée non plus comme une machine pour le calcul d'une suite spectrale, mais comme le représentant d'un type d'homotopie, qui possède de nombreux autres invariants intéressants, par exemple, une suite spectrale d'algèbres de Lie (§9).

Si l'idée est, comme dans le cas des ADGC ordinaires, d'établir un analogue d'une catégorie à modèles, la technique provient d'un tout autre domaine: celui de la *perturbation*. Elle intervient de la manière suivante: on fixe un entier $r \geq 0$ et, à l'aide du foncteur "r-ième terme de la suite spectrale", on envoie la catégorie des ADGC filtrées dans celle des ADGC bigraduées, où s'applique directement la théorie classique. Le problème principal devient alors, de remonter aux ADGC filtrées, et c'est ce problème qu'on résout par un processus de perturbation.

Received February 10, 1989
[1]This research partially supported by an NSERC operating grant.
[2]U.A. au C.N.R.S. 751.

Cette théorie permet de nombreuses applications; celle sur laquelle nous voulons surtout insister ici est la construction des modèles minimaux de Sullivan pour des fibrés C^∞ à bases non simplement connexes (§11).

Rappelons de quoi il s'agit. On considère un fibré

$$\pi\colon M \to N,$$

C^∞ et localement trivial, dont la fibre F est connexe et de cohomologie réelle de dimension totale finie, et l'on cherche un modèle de l'ADGC $(A_{DR}(M), d_M)$ des formes différentielles sur M. Ici nous entendons par modèle un morphisme

$$\phi\colon (C, d) \xrightarrow{\simeq} (A_{DR}(M), d_M)$$

d'ADGC, où l'algèbre sous-jacente, C, ne dépend que de N et de F, et tel que

$$H(\phi)\colon H(C) \to H_{DR}(M)$$

soit un isomorphisme.

L'existence de tels modèles dans le cas où N est 1-connexe est un point-clef dans la théorie de Sullivan des modèles minimaux. Remarquons tout d'abord que si l'on travaille, non dans la catégorie des ADGC, mais dans celle des $(A_{DR}(N), d_N)$-modules différentiels, alors un résultat de Hirsch [16] et de Brown [3] établit l'existence d'un modèle de la forme

$$(A_{DR}(N) \otimes_{\mathbf{R}} H_{DR}(F), D) \xrightarrow{\simeq} (A_{DR}(M), d_M), \tag{1.1}$$

toujours sous l'hypothèse que N soit 1-connexe.

Mais il est, en général, impossible de trouver un modèle de la forme (1.1) sans perdre la structure multiplicative en cohomologie. Ce problème est résolu par l'introduction du modèle minimal de Sullivan, $(\Lambda Z, d) \xrightarrow{\simeq} (A_{DR}(F), d_F)$, et la construction par Grivel [10], (N toujours 1-connexe), d'un modèle d'ADGC de la forme

$$(A_{DR}(N) \otimes_{\mathbf{R}} \Lambda Z, D) \xrightarrow{\simeq} (A_{DR}(M), d_M); \tag{1.2}$$

où D induit d_N sur $A_{DR}(N) \otimes_{\mathbf{R}} 1$ et $D - 1 \otimes d$ envoie ΛZ sur $A^+_{DR}(N) \otimes_{\mathbf{R}} \Lambda Z$.

Rappelons maintenant que le fibré $\pi\colon M \to N$ détermine une action du groupe $\pi_1(N)$ sur chaque espace $H^p_{DR}(F)$, $p \geq 0$. Le modèle (1.1) de Brown existe toujours si toutes ces actions sont nilpotentes; qu'il en soit de même pour le modèle (1.2) a été démontré par Halperin [14; §20]. Mais ce n'est pas le cas en général, comme on le constate sur des exemples simples.

Voyons maintenant comment notre théorie permet la construction des modèles sans aucune restriction sur l'action de $\pi_1(N)$. Le fibré $\pi\colon M \to N$ induit une filtration bien connue sur $(A_{DR}(M), d_M)$, d'où une suite spectrale. Nous fixons $r = 0$ et cherchons donc un modèle de (E_0, d_0).

La solution est jolie: il existe un fibré vectoriel $(\Lambda\xi, d)$ en "modèles minimaux de Sullivan" sur N dont la fibre type n'est autre que le modèle minimal $(\Lambda Z, d)$ de $(A_{DR}(F), d_F)$. (Le fibré $(\Lambda\xi, d)$ peut être défini directement à partir de l'homomorphisme $\pi_1(N) \to \mathrm{Aut}(\Lambda\xi, d)/\mathrm{Aut}_0$ qui se déduit de l'action de $\pi_1(N)$ sur $H_{DR}(F)$ comme nous le verrons dans un deuxième article, à suivre.) De plus, il existe un modèle (d'ADGC bigraduées) de la forme

$$\left(A_{DR}(N) \otimes_{C^\infty(N)} C^\infty(\Lambda\xi), 1 \otimes d\right) \xrightarrow{\simeq} (E_0, d_0).$$

Ceci étant donné, la théorie permet de perturber ce modèle afin d'arriver au modèle voulu:

$$\left(A_{DR}(N) \otimes_{C^\infty(N)} C^\infty(\Lambda\xi), D\right) \xrightarrow{\simeq} \left(A_{DR}(M), d_M\right), \tag{1.3}$$

où D induit d_N sur $A_{DR}(N) \otimes 1$ et $D - 1 \otimes d$ envoie $C^\infty(\Lambda\xi)$ sur $A^+_{DR}(N) \otimes_{C^\infty(N)} C^\infty(\Lambda\xi)$. (La partie de D qui envoie $C^\infty(\Lambda\xi)$ sur $A^1_{DR}(N) \otimes C^\infty(\Lambda\xi)$ n'est autre qu'une connexion linéaire pour $(\Lambda\xi, d)$.) Et, comme dans le cas (1.2), nous montrons que ce modèle est unique à isomorphisme près.

Remarquons aussi que si l'action de $\pi_1(N)$ est nilpotente alors le fibré vectoriel $(\Lambda\xi, d)$ est trivial. On en déduit des isomorphismes $C^\infty(\Lambda\xi) = C^\infty(N) \otimes_{\mathbf{R}} \Lambda\xi$ et

$$A_{DR}(N) \otimes_{C^\infty(N)} C^\infty(\Lambda\xi) = A_{DR}(N) \otimes_{\mathbf{R}} \Lambda Z;$$

et l'on retrouve ainsi le modèle (1.2). Signalons aussi qu'il est possible que le fibré vectoriel, $(\Lambda\xi, d)$, soit trivial sans que l'action de $\pi_1(N)$ soit nilpotente; ce cas a été considéré par Gómez-Tato [9].

Le principe de chercher un modèle d'un objet en perturbant quelque chose de plus simple, qui est de toute première importance dans cet article, a été utilisé depuis longtemps en topologie algébrique. Le modèle (1.1) de Hirsch et de Brown se construit ainsi, par exemple.

Un deuxième exemple est le Tor différentiel d'Eilenberg-Moore [18] d'une algèbre différentielle (A, d), qui est l'homologie d'un complexe obtenu en perturbant la différentielle dans la bar construction sur $H(A)$. Dans le cas où $(A, d) = (A_{DR}(X), d_X)$, cette perturbation a été réalisée de manière analytique par K.T. Chen [4] à l'aide des intégrales itérées; il retrouve ainsi la cohomologie $H^*(\Omega X; \mathbf{R})$ de l'espace des lacets. Cette situation a été ensuite formalisée par Gugenheim [12] puis généralisée par Gugenheim et Stasheff [13], le modèle de Hirsch et Brown s'intégrant à cette généralisation. Adaptée à la tour de Postnikov par Lambe et Stasheff [17], celle-ci fournit un algorithme pour le calcul de la cohomologie des groupes nilpotents, finiment engendrés, sans torsion. D'autres exemples se trouvent dans les articles récents de Cenkl-Porter [26] et Saneblidze [27].

Au sein de l'homotopie rationnelle, le procédé de perturbation paraît dans l'article d'Halperin-Stasheff [15], où le modèle minimal d'un espace X (et donc son type d'homotopie rationnelle) est obtenu en perturbant le modèle de $H^*(X; \mathbf{Q})$. Ces résultats ont ensuite été adaptés au cadre des fibrations par Vigué-Poirrier [25] et Thomas [24] permettant ainsi le calcul de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore.

Le cheminement de l'article se lit sans difficulté dans la table des matières suivante. Nous nous limitons ici à remarquer que le §8 contient une définition de minimalité qui se réduit à celle de Sullivan dans le cadre de ses modèles, mais qui a un sens dans toute catégorie à modèles. De plus, l'unicité à isomorphisme près d'un modèle minimal est évidente; la question intéressante devient celle de leur existence.

Table des Matières

2. Algèbre différentielle filtrée

Dans cet article, sauf mention contraire, la graduation et la filtration d'un objet, A, sont sur $\mathbf{Z}$; nous les notons $A = \bigoplus_n A^n$ et

$$\dots F^p(A) \supset F^{p+1}(A) \dots;$$

Le *degré* dans un objet bigradué est la somme des bidegrés. Une *algèbre filtrée* est une algèbre munie d'une filtration telle que $F^p \cdot F^q \subset F^{p+q}$. Toutes les différentielles augmentent le degré de 1, et, comme d'habitude, *algèbre différentielle graduée commutative* est condensée en ADGC. Un morphisme ϕ d'objets différentiels induit $H(\phi)$ en (co)homologie; si $H(\phi)$ est un isomorphisme, ϕ est appelé un *quasi-isomorphisme* et est noté $\xrightarrow{\simeq}$.

Un objet gradué filtré, muni d'une différentielle respectant la filtration, est appelé un *objet différentiel filtré*. La suite spectrale qui en découle est notée $(E_r^{p,q}, d_r)$; nous écrirons E_r^p pour $E_r^{p,*}$ et Z_r^p pour $F^p \cap d^{-1}F^{p+r}$; nous rappelons que

$$E_r^p = Z_r^p | \left(Z_{r-1}^{p+1} + dZ_{r-1}^{p-r+1} \right).$$

Le complété, $\hat{A}$, d'un objet filtré A, est défini par

$$\hat{A} = \varprojlim_{p \geq 0} A/F^p(A);$$

les noyaux $F^p(\hat{A})$ des surjections $\hat{A} \to A/F^p(A)$ définissent une filtration sur $\hat{A}$ qui fait de $A \to \hat{A}$ un morphisme d'objets filtrés. Si ce morphisme est un isomorphisme, A est *complet* ($\hat{A}$ est toujours complet); si $A = \bigcup_{p \leq 0} F^p(A)$, A est dit *co-complet*.

Rappelons en particulier le résultat suivant d'Eilenberg et Moore:

THÉORÈME 2.1 [5]. *Soit ϕ un morphisme de $\mathbf{Z}$-modules différentiels, gradués, filtrés, complets et co-complets. Si $E_r(\phi)$ est un isomorphisme (pour un r quelconque) alors $H(\phi)$ est aussi un isomorphisme.*

Nous fixons, désormais, un anneau commutatif, R, concentré en degré zéro. Si Y est un R-module gradué, nous notons ΛY la R-algèbre graduée commutative libre sur Y. Si Y et Z sont des R-modules gradués filtrés, nous notons le complété du produit tensoriel par $Y \hat{\otimes}_R Z$.

Rappelons maintenant que l'un des buts de cet article est d'établir, pour les ADGC filtrées, une théorie homotopique analogue à celle de Quillen-Sullivan pour les ADGC ordinaires. L'idée de base est de fixer un $r \geq 0$ et de maîtriser la situation filtrée en regardant le terme E_r de la suite spectrale.

Cette idée se réalise très bien dans la catégorie des ADGC filtrées, complètes et co-complètes, et définies sur R. Néanmoins, dans les applications on a parfois besoin du cadre plus général des *(R, r)-algèbres*; elles sont définies juste ci-dessous, ainsi que les notions de *(R, r)-quasi-isomorphisme*, *(R, r)-fibration* et *(R, r)-extension* qui joueront respectivement des rôles analogues à ceux d'équivalence faible, de fibration et de cofibration dans une catégorie à modèles de Quillen.

DÉFINITION 2.2. (i) Une *(R, r)-algèbre*, (A, d), est une ADGC filtrée, complète et co-complète, munie d'un homomorphisme d'anneaux:

$$\omega \colon R \to Z_{r+1}^{0,0}(A).$$

(ii) Un *morphisme de (R, r)-algèbres, ou (R, r)-morphisme*, est un morphisme, $\phi \colon A \to A'$, d'ADGC, conservant les filtrations et satisfaisant à $\phi \circ \omega = \omega'$.

(iii) Un (R, r)-*quasi-isomorphisme* est un morphisme, ϕ, de (R, r)-algèbres tel que $E_{r+1}(\phi)$ soit un isomorphisme. (D'après 2.1, ϕ est alors lui-même un quasi-isomorphisme.)

(iv) Une (R, r)-*fibration* est un morphisme, ϕ, de (R, r)-algèbres tel que $Z_r^p(\phi)$ soit surjectif pour tout $p \in \mathbf{Z}$.

(v) Une (R, r)-*extension* est un morphisme de (R, r)-algèbres de la forme

$$(A, d) \to \left(A \hat{\otimes}_R \Lambda Y, D\right), \quad a \mapsto a \otimes 1,$$

où:

(a) Y est un R-module projectif, bigradué sur $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, et la filtration de ΛY est celle définie par $F^p(Y) = Y^{\geq p, *}$;

(b) $Y^{p, *} \subset Z_r^p(A \hat{\otimes}_R \Lambda Y)$;

(c) Y est la somme directe d'une famille bien ordonnée de sous-modules $Y_\alpha \subset Y^{p(\alpha), q(\alpha)}$, $\alpha \in \mathscr{I}$, satisfaisant à

$$D\colon Y_\alpha \to A \otimes_R \Lambda Y_{<\alpha} + Z_r^{p(\alpha)+r+1}\left(A \hat{\otimes}_R \Lambda Y\right).$$

(Une telle décomposition de Y est appelée *structure nilpotente* pour la (R, r)-extension.)

Remarque 2.3. Soit (A, d) une (R, r)-algèbre. L'homomorphisme $\omega\colon R \to Z_{r+1}^{0,0}(A)$ induit une structure de R-ADGC dans $E_r(A)$. De plus, E_r convertit les (R, r)-quasi-isomorphismes en des quasi-isomorphismes ordinaires et les (R, r)-fibrations en des surjections. Finalement, E_r transforme les (R, r)-extensions $A \to A \hat{\otimes}_R \Lambda Y$ en des inclusions de la forme

$$\left(E_r(A), d_r\right) \to \left(E_r(A) \otimes_R \Lambda Y, D_r\right), \quad z \mapsto z \otimes 1,$$

avec $D_r\colon Y_\alpha \to E_r(A) \otimes_R \Lambda Y_{<\alpha}$.

En somme, le foncteur E_r transforme les notions définies en (2.2) en des quasi-isomorphismes, des surjections, et des KS-extensions de R-ADGC, ces dernières jouant respectivement les rôles d'équivalences faibles, de fibrations et de cofibrations dans la théorie ordinaire.

Remarque 2.4. Il résultera du Lemme 4.6 (iii) (dans le §4) appliqué au couple $(D, \mathrm{id}_{A \hat{\otimes}_R \Lambda Y})$ que

$$Z_r^p\left(A \hat{\otimes}_R \Lambda Y\right) = \left[\bigoplus_q Z_r^q(A) \otimes_R (\Lambda Y)^{p-q, *}\right]^{\wedge}.$$

Remarque 2.5. Il résulte de la condition $D_r\colon Y_\alpha \to E_r(A) \otimes_R \Lambda Y_{<\alpha}$ que $(E_r(A) \otimes_R \Lambda Y, D_r)$ a les mêmes propriétés qu'un $(E_r(A), d_r)$-module *semi-free* dans le sens de [1] et [7]. En particulier, pour tout module différentiel (M, δ)

sur $(E_r(A), d_r)$, la cohomologie de

$$M \otimes_R \Lambda Y = M \otimes_{E_r(A)} (E_r(A) \otimes_R \Lambda Y)$$

s'identifie au Tor différentiel d'Eilenberg et Moore [18]:

$$H(M \otimes_R \Lambda Y) = \mathrm{Tor}^{E_r(A)}(M, E_r(A) \otimes_R \Lambda Y).$$

3. Propriétés des (R, r)-algèbres

Nous rassemblons ici des propriétés élémentaires des (R, r)-algèbres, correspondant pour la plupart à des axiomes de Quillen. Notons toutefois que certains axiomes ne sont pas vérifiés; par exemple, la catégorie des (R, r)-algèbres peut ne pas contenir d'objet initial.

PROPOSITION 3.1. (i) *La composition de deux (R, r)-extensions (respectivement de deux (R, r)-fibrations) est une (R, r)-extension (respectivement une (R, r)-fibration).*

(ii) *Si*

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

sont des (R, r)-morphismes et si deux des trois morphismes α, β et $\beta \circ \alpha$ sont des (R, r)-quasi-isomorphismes, alors il en est de même pour le troisième.

Soient maintenant

$$A \xleftarrow{\alpha} B \xrightarrow{\gamma} C \quad \text{et} \quad E \xrightarrow{\varepsilon} F \xleftarrow{\eta} G$$

des (R, r)-morphismes. La filtration sur $A \otimes_R C$ induit une filtration sur $A \otimes_B C$ et le complété $A \hat{\otimes}_B C$ est une (R, r)-algèbre. De même

$$E \times_F G = \{(e, g) \in E \times G | \varepsilon(e) = \eta(g) |\},$$

filtrée par $F^p(E \times_F G) = (E \times_F G) \cap (F^p(E) \times F^p(G))$, est une (R, r)-algèbre. Evidemment

$$\text{(3.2)} \qquad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\gamma} & C \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_C} \\ A & \xrightarrow[i_A]{} & A \hat{\otimes}_B C \end{array}$$

et

$$\begin{tikzcd} E \times_F G \arrow[r, "\rho_G"] \arrow[d, "\rho_E"'] & G \arrow[d, "\eta"] \\ E \arrow[r, "\varepsilon"'] & F \end{tikzcd} \tag{3.3}$$

sont respectivement un diagramme cartésien et un diagramme cocartésien dans la catégorie des (R, r)-algèbres.

PROPOSITION 3.4. *Dans le diagramme* (3.2), *supposons que* γ *soit une* (R, r)*-extension. Alors*:

(i) i_A *est une* (R, r)*-extension.*

(ii) *Si* ϕ: $A \to A'$ *est un* (R, r)*-quasi-isomorphisme il en est de même pour*

$$\phi \otimes \mathrm{id}\colon A \mathbin{\hat{\otimes}_B} C \to A' \mathbin{\hat{\otimes}_B} C.$$

(iii) *Si* γ *est un* (R, r)*-quasi-isomorphisme,* i_A *l'est également.*

Démonstration. (i) γ étant une (R, r)-extension, nous l'écrivons sous la forme

$$B \to B \mathbin{\hat{\otimes}_R} \Lambda Y = C.$$

L'identification $A \mathbin{\hat{\otimes}_B} C = A \mathbin{\hat{\otimes}_B} (B \mathbin{\hat{\otimes}_R} \Lambda Y) = A \mathbin{\hat{\otimes}_R} \Lambda Y$ fait apparaître i_A comme une (R, r)-extension.

(ii) Identifions $E_r(\phi \otimes \mathrm{id})$ à

$$E_r(\phi) \otimes \mathrm{id}\colon E_r(A) \otimes_R \Lambda Y \to E_r(A') \otimes_R \Lambda Y.$$

Compte tenu de la Remarque 2.5, on a

$$E_{r+1}(\phi \otimes \mathrm{id}) = \mathrm{Tor}^{E_r(B)}(E_r(\phi), E_r(C));$$

ceci entraîne qu'il est un isomorphisme puisque $E_r(\phi)$ est un quasi-isomorphisme.

(iii) Le morphisme $E_r(i_A)$ n'est autre que l'inclusion $E_r(A) \to E_r(A) \otimes_R \Lambda Y$, qui s'identifie à $E_r(A) \otimes_{E_r(B)} E_r(\gamma)$. Comme ci-dessus, la Remarque 2.5 et l'hypothèse sur γ impliquent que $E_{r+1}(i_A) = \mathrm{Tor}^{E_r(B)}(E_r(A), E_r(\gamma))$ est un isomorphisme. ∎

PROPOSITION 3.5. *Dans le diagramme* (3.3), *supposons que* η *soit une* (R, r)*-fibration. Alors*:

(i) ρ_E *est une* (R, r)*-fibration.*

(ii) *Si* ϕ: $E' \to E$ *est un* (R, r)*-quasi-isomorphisme, il en est de même pour*

$$\phi \times \mathrm{id}\colon E' \times_F G \to E \times_F G.$$

(iii) *Si* η *est un* (R, r)*-quasi-isomorphisme,* ρ_E *l'est également.*

Pour la démonstration nous aurons besoin du lemme suivant, probablement bien connu.

LEMME 3.6. *Fixons $r \geq 0$ et supposons que h: $E \to F$ soit un morphisme de $\mathbf{Z}$-modules différentiels gradués filtrés, tel que $Z_r^p(h)$ soit surjectif pour tout p. Munissons* $\ker h$ *de la filtration induite. Alors*:

(i) *Le morphisme évident*

$$\lambda\colon E_r(\ker h) \to \ker E_r(h)$$

induit un isomorphisme en homologie.

(ii) *$E_r(h)$ est un quasi-isomorphisme si et seulement si $H(E_r(\ker h)) = 0$.*

Démonstration (i) Soit $\zeta \in E_r^{p,*}(\ker h)$ un cycle qui devient un bord dans $\ker E_r(h)$. Représentons ζ par $z \in Z_r^p(\ker h)$; notre hypothèse entraîne que $z = v + du$, où

$$v \in Z_{r-1}^{p+1}(E), \quad u \in Z_r^{p-r}(E)$$

et

$$h(u) = a + db, \quad a \in Z_{r-1}^{p-r+1}(F), b \in Z_{r-1}^{p-2r+1}(F).$$

Le calcul $0 = h(z) = h(v) + dh(u) = h(v) + da$ montre que $da \in F^{p+1}(F)$, d'où $a \in Z_r^{p-r+1}(F)$. Evidemment $b \in Z_r^{p-2r}(F)$ et notre hypothèse sur h entraîne que

$$a = h(x),\ x \in Z_r^{p-r+1}(E) \quad \text{et} \quad b = h(y),\ y \in Z_r^{p-2r}(E).$$

Posons $w = u - x - dy \in Z_r^{p-r}(\ker h)$. Alors

$$z - dw = v + dx \in Z_{r-1}^{p+1}(\ker h).$$

Il s'ensuit que dw représente ζ, qui est donc un bord.

L'injectivité de $H(\lambda)$ est ainsi établie; la démonstration de la surjectivité est similaire.

(ii) Notre hypothèse sur h entraîne la surjectivité de $E_r(h)$, d'où le résultat. ∎

Démonstration de la Proposition 3.5. L'énoncé (i) est une évidence; en particulier

$$0 \to \ker E_r(\rho_E) \to E_r(E \times_F G) \xrightarrow{E_r(\rho_E)} E_r(E) \to 0$$

est une suite exacte courte. Pour établir le (ii), nous considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} E_r(\ker \rho_{E'}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \ker E_r(\rho_{E'}) \arrow[d, "\sigma"] \\ E_r(\ker \rho_E) \arrow[r] & \ker E_r(\rho_E) \end{tikzcd}$$

où σ est la restriction de $E_r(\phi \times \mathrm{id})$. Il résulte du Lemme 3.6 que $H(\sigma)$ est un isomorphisme, et ceci entraîne (lemme des cinq) que $E_r(\phi \times \mathrm{id})$ est un quasi-isomorphisme.

L'énoncé (iii) découle encore plus directement de (3.6). ■

4. Existence des modèles

Dans une théorie homotopique (à la Quillen), tout morphisme ϕ se factorise en

$$\phi\colon A \xrightarrow{i} C \xrightarrow{m} A',$$

avec i une cofibration et m une équivalence faible. Une telle factorisation est appelée un modèle de ϕ. Ceci conduit au concept suivant.

DÉFINITION 4.1. Un *modèle* d'un morphisme $\phi\colon A \to A'$ de (R, r)-algèbres est une factorisation de ϕ en

$$A \xrightarrow{i} A \mathbin{\hat{\otimes}_R} \Lambda Y \xrightarrow{m} A'$$

avec i une (R, r)-extension et m un (R, r)-quasi-isomorphisme.

Le résultat principal de cette section est l'existence de tels modèles:

THÉORÈME 4.2. *Tout morphisme, $\phi\colon (A, d) \to (A', d')$, de (R, r)-algèbres admet un modèle.*

L'idée de la démonstration est de construire d'abord un modèle "classique" pour le morphisme $E_r(\phi)$, et ensuite de le "perturber" afin d'arriver au modèle voulu de ϕ.

Rappelons (2.3) que $E_r(\phi)\colon (E_r(A), d_r) \to (E_r(A'), d_r')$ est un morphisme de R-ADGC. La technique classique de construction des modèles de Sullivan ([21], [2], [14]) adaptée au cas bigradué comme dans [15; §3], donne la proposition suivante:

PROPOSITION 4.3. *Le morphisme $E_r(\phi)$ se factorise en*

$$E_r(\phi)\colon (E_r(A), d_r) \xrightarrow{\lambda} (E_r(A) \otimes_R \Lambda Y, D_r) \xrightarrow{\psi} (E_r(A'), d_r'),$$

où

(i) $\lambda(x) = x \otimes 1$,

(ii) ψ *est un quasi-isomorphisme de R-ADGC,*

(iii) Y *est un R-module projectif bigradué, somme directe d'une famille bien ordonnée de sous-modules* $Y_\alpha \subset Y^{p(\alpha), q(\alpha)}$, *satisfaisant à*

$$D_r\colon Y_\alpha \to E_r(A) \otimes_R \Lambda Y_{<\alpha},$$

(iv) *par rapport à la bigraduation induite sur* $E_r(A) \otimes_R \Lambda Y$, D_r *est homogène de bidegré* $(r, 1-r)$.

Démonstration. Nous construisons Y de la forme $Y = \bigoplus_{i \geq 0} Y_i$ tel que $D_r Y_0 = 0$ et

$$D_r Y_i \subset E_r(A) \otimes_R \Lambda Y_{<i}.$$

En effet, soit $\eta\colon Y_0 \to \operatorname{coker} H(E_r(\phi))$ une surjection avec Y_0 projectif; étendons $E_r(\phi)$ en $\psi(0)\colon E_r(A) \otimes_R \Lambda Y_0 \to E_r(A')$ de sorte que $\psi(0)\colon Y_0 \to \ker d_r'$ soit un relèvement de η.

Maintenant, si $\psi(i)\colon (E_r(A) \otimes_R \Lambda Y_{\leq i}, D_r) \to (E_r(A'), d_r')$ est construit, nous choisissons une surjection, de bidegré $(r, 1-r)$, d'un R-projectif Y_{i+1} sur $\ker H(\psi_i)$. Le relèvement de cette surjection en $D_r\colon Y_{i+1} \to$ cocycles de $E_r(A) \otimes_R \Lambda Y_{\leq i}$ et le relèvement de $\psi(i) \circ D_r\colon Y_{i+1} \to \operatorname{Im} d_r'$ en $\psi(i+1)\colon Y_{i+1} \to E_r(A')$, avec $d_r' \circ \psi(i+1) = \psi(i) \circ D_r$, terminent la construction du pas $i+1$. ■

La deuxième partie de la démonstration du Théorème 4.2 est le "Théorème de perturbation" suivant. On considère un morphisme $\phi\colon (A, d) \to (A', d')$, de (R, r)-algèbres, et on suppose donnée une factorisation de $E_r(\phi)$ de la forme

$$E_r(\phi)\colon (E_r(A), d_r) \xrightarrow{\lambda} (E_r(A) \otimes_R \Lambda Y, D_r) \xrightarrow{\psi} (E_r(A'), d_r'),$$

satisfaisant aux conditions (i)–(iv) de la Proposition 4.3.

THÉORÈME 4.4 (THÉORÈME DE PERTURBATION). *Avec les données ci-dessus, il existe un* (R, r)*-modèle de* ϕ *de la forme*

$$m\colon \big(A \mathbin{\hat{\otimes}_R} \Lambda Y, D\big) \to (A', d')$$

tel que $E_r(m) = \psi$.

Démonstration. Il suffit de construire le couple (D, m) induisant (D_r, ψ) au niveau E_r, puisque $E_r(m) = \psi$ sera un quasi-isomorphisme par hypothèse. Fixons tout d'abord quelques conventions, afin d'alléger les notations. Pour

$s \leq r$, nous posons

$$Z_s^p = \left[\bigoplus_q Z_s^q(A) \otimes_R (\Lambda Y)^{p-q,*} \right]^\wedge \subset A \hat{\otimes}_R \Lambda Y$$

et

$$E_s^p = \bigoplus_q E_s^q(A) \otimes_R (\Lambda Y)^{p-q,*}.$$

Nous notons ρ^p: $Z_r^p \to E_r^p$ la surjection obtenue en tensorisant les surjections $Z_r^q(A) \to E_r^q(A)$ avec $\mathrm{id}_{\Lambda Y}$.

Soit enfin $\mathscr{I}$ l'ensemble bien ordonné indexant la décomposition $Y = \bigoplus_{\alpha \in \mathscr{I}} Y_\alpha$ (cf. (4.3 (iii)).

DÉFINITION 4.5. Un *couple approximant* est constitué d'une dérivation δ de $A \hat{\otimes}_R \Lambda Y$, de degré 1, et d'un homomorphisme ξ: $A \hat{\otimes}_R \Lambda Y \to A'$ d'algèbres graduées, qui induisent respectivement d et ϕ sur A et qui, pour tout $\alpha \in \mathscr{I}$, satisfont à:

(i) δ: $Y_\alpha \to [Z_r^{p(\alpha)+r} \cap (A \hat{\otimes}_R \Lambda Y_{<\alpha})] + Z_r^{p(\alpha)+r+1}$;

(ii) ξ: $Y_\alpha \to Z_r^{p(\alpha)}(A')$;

(iii) les restrictions de δ et ξ à Y_α relèvent, respectivement, D_r et ψ.

Nous aurons besoin de certaines propriétés de ces couples résumées dans l'enoncé suivant.

LEMME 4.6. *Pour tout couple approximant* (δ, ξ), *et tout* $\alpha \in \mathscr{I}$ *on a*:

(i) δ: $Z_r^p \cap (A \hat{\otimes}_R \Lambda Y_{<\alpha}) \to Z_r^{p+r} \cap (A \hat{\otimes}_R \Lambda Y_{<\alpha}) + Z_r^{p+r+1}$.

(ii) $\rho^{p+r}\delta = D_r\rho^p$.

(iii) $Z_s^p = \delta^{-1}F^{p+s} \cap F^p$, $s \leq r$.

(iv) $\ker \rho^p \cap (A \hat{\otimes}_R \Lambda Y_{<\alpha}) \subset \delta(Z_{r-1}^{p-r+1} \cap (A \hat{\otimes}_R \Lambda Y_{<\alpha})) + Z_{r-1}^{p+1}$.

La démonstration de 4.6 se trouve en-dessous; avant de la donner, nous énonçons deux autres lemmes, qui forment l'essentiel de la démonstration du Théorème 4.4.

LEMME 4.7. *Il existe un couple approximant* (δ, ξ) *tel que* δ *laisse stable* $A \hat{\otimes}_R \Lambda Y_{\leq \alpha}$, *pour tout* α.

LEMME 4.8. *Soit* $i \geq 0$ *et soit* (δ_i, ξ_i) *un couple approximant vérifiant* (*pour* $\alpha \in \mathscr{I}$):

$(4.9)_i$ δ_i^2: $Y_\alpha \to Z_r^{p(\alpha)+2r+i}$ *et*

$(4.10)_i$ $\xi_i\delta_i - d'\xi_i$: $Y_\alpha \to Z_r^{p(\alpha)+r+i}(A')$.

Il existe alors un couple approximant $(\delta_{i+1}, \xi_{i+1})$ *satisfaisant à* $(4.9)_{i+1}$, *à* $(4.10)_{i+1}$ *et tel que*

$(4.11)_{i+1}$ $\delta_{i+1} - \delta_i$: $Y_\alpha \to Z_r^{p(\alpha)+r+i}$ *et* $\xi_{i+1} - \xi_i$: $Y_\alpha \to Z_r^{p(\alpha)+i}(A')$, $\alpha \in \mathscr{I}$.

La démonstration du Théorème 4.4 est immédiate à partir des Lemmes 4.6, 4.7 et 4.8. Le premier montre que tout couple approximant satisfait à $(4.9)_0$ et à $(4.10)_0$; et l'on déduit de 4.7 et de 4.8 une suite infinie (δ_i, ξ_i) vérifiant $(4.9)_i$, $(4.10)_i$ et $(4.11)_i$. Il suffit alors de poser

$$D = \varinjlim_i \delta_i \quad \text{et} \quad m = \varinjlim_i \xi_i.$$

Il reste à démontrer les trois lemmes.

Démonstration de 4.6. Les propriétés (i) et (ii), ainsi que l'inclusion $\subset$ de (iii) découlent immédiatement de la définition 4.5. Terminons la démonstration de (iii) en montrant que tout $z \in F^p \cap \delta^{-1}F^{p+s}$ est aussi dans Z_s^p. Puisque $z \in F^p$ il est de la forme

$$z = \sum_j a_j \otimes_R \Phi_j + \Omega, \ \Phi_j \in (\Lambda Y)^{p_j, *}, \qquad a_j \in F^{p-p_j}(A), \ \Omega \in F^{p+s}.$$

L'hypothèse $\delta z \in F^{p+s}$ entraîne:

$$\sum_j [da_j] \otimes_R \Phi_j = 0,$$

$[da_j]$ notant la classe de da_j dans $A/F^{p+s-p_j}(A)$.

Soit $\{e_j\}$ une base d'un R-module libre; posons $\zeta\colon e_j \mapsto [da_j]$. Puisque

$$\sum e_j \otimes_R \Phi_j \in \ker(\zeta \otimes_R \mathrm{id}),$$

on a

$$\sum e_j \otimes_R \Phi_j = \sum v_i \otimes_R \Psi_i \quad \text{avec } v_i \in \ker \zeta.$$

Ecrivons $v_i = \Sigma r_{ij} e_j$ avec $r_{ij} \in R$. En choisissant $\Psi_i \in (\Lambda Y)^{q_i, *}$—ce qui est toujours possible—nous pouvons supposer que $r_{ij} = 0$ si $q_i \neq p_j$.

Puisque $\{e_j\}$ est une base, on a $\Phi_j = \Sigma_i r_{ij} \Psi_i$ et donc

$$z = \sum_i a_i' \otimes_R \Psi_i + \Omega \quad \text{avec } a_i' = \sum_j r_{ij} a_j.$$

Par construction, $\Sigma_j r_{ij}[da_j] = \zeta v_i = 0$; d'où $\Sigma_j r_{ij} da_j \in F^{p+s-q_i}(A)$. Puisque $p_j = q_i$ et $dr_{ij} \in F^{r+1}(A)$, on obtient $(dr_{ij})a_j \in F^{p-q_i+s+1}(A)$; d'où

$$da_i' \in F^{p+s-q_i}(A), \qquad a_i' \in Z_s^{p-q_i}(A) \quad \text{et} \quad z \in Z_s^p.$$

Il reste à démontrer (iv). Soit $z \in \ker \rho^p \cap (A \mathbin{\hat{\otimes}_R} \Lambda Y_{<\alpha})$ et écrivons

$$z = \sum_j a_j \otimes_R \Phi_j + \Omega, \begin{cases} \Phi_j \in (\Lambda Y_{<\alpha})^{p_j, *}, \\ a_j \in Z_r^{p-p_j}(A), \\ \Omega \in F^{p+r+1} \subset Z_{r-1}^{p+1}. \end{cases}$$

Puisque $\rho^p\Omega = 0$, on a $\Sigma_j \rho^{p-p_j} a_j \otimes_R \Phi_j = 0$, et nous pouvons donc choisir les a_j, Φ_j tels que $\rho^{p-p_j} a_j = 0$ pour tout j. Par conséquent

$$a_j = db_j + c_j,\ b_j \in Z_{r-1}^{p-p_j-r+1}(A), \quad c_j \in Z_{r-1}^{p-p_j+1}(A).$$

Il en résulte $z - \Sigma_j db_j \otimes_R \Phi_j \in Z_{r-1}^{p+1}$.

Mais

$$\sum_j b_j \otimes_R \Phi_j \in Z_{r-1}^{p-r+1} \cap \left(A \mathbin{\hat{\otimes}_R} \Lambda Y_{<\alpha}\right)$$

et

$$\delta\left(\sum_j b_j \otimes_R \Phi_j\right) - \sum_j db_j \otimes_R \Phi_j = \sum_j \pm b_j \cdot \delta\Phi_j \in Z_{r-1}^{p+1}.$$

Ceci donne $z = \delta(\Sigma_j b_j \otimes_R \Phi_j) + \Omega', \Omega' \in Z_{r-1}^{p+1}$, et termine la démonstration. ∎

Démonstration de 4.7. Puisque Y est R-projectif, il existe pour tout α des relèvements

$$\omega_1\colon Y_\alpha \to Z_r^{p(\alpha)+r} \cap \left(A \mathbin{\hat{\otimes}_R} \Lambda Y_{<\alpha}\right) \quad \text{et} \quad \omega_2\colon Y_\alpha \to Z_r^{p(\alpha)}(A')$$

de D_r et de ψ. Soit δ' la dérivation sur $A \mathbin{\hat{\otimes}_R} \Lambda Y$ induisant ω_1 sur Y et s'annulant dans A, et soit $\xi\colon A \mathbin{\hat{\otimes}_R} \Lambda Y \to A'$ l'homomorphisme d'algèbres graduées filtrées induisant ϕ sur A et ω_2 sur Y.

Construisons maintenant une extension de d en une dérivation, δ'', de $A \mathbin{\hat{\otimes}_R} \Lambda Y$. Il suffit de définir $\delta''\colon Y \to A \mathbin{\hat{\otimes}_R} \Lambda Y$ tel que $\delta''(ry) = dr \otimes_R y + r\delta'' y$, $r \in R$. Soit

$$Y_\alpha \xrightarrow{\lambda} \bigoplus_j R \cdot e_j \xrightarrow{\mu} Y_\alpha$$

une rétraction sur Y_α d'un R-module libre, et écrivons $\lambda y = \Sigma \lambda_j(y) e_j$. Posons

$$\delta'' y = \sum_j d\lambda_j(y) \otimes_R \mu(e_j).$$

Puisque l'image de R dans A est contenue dans $Z_{r+1}^{0,0}$, on a

$$\delta''\colon Y_\alpha \to Z_r^{r+1}(A) \otimes_R Y_\alpha \subset Z_r^{p(\alpha)+r+1}.$$

Le couple approximant cherché consiste alors en $(\delta' + \delta'', \xi)$. ∎

Démonstration de 4.8. Nous avons à construire un couple approximant $(\delta_{i+1}, \xi_{i+1})$ à partir d'un autre couple (δ_i, ξ_i). Rappelons que $\mathscr{I}$ indexe la décomposition $Y = \bigoplus_{\alpha \in \mathscr{I}} Y_\alpha$, et supposons sans nuire à la généralité que $\mathscr{I}$ contient un dernier élément ω avec $Y_\omega = 0$.

Nous allons procéder par récurrence sur $\mathscr{I}$, définissant ainsi une famille $(\delta_\alpha, \xi_\alpha)_{\alpha \in \mathscr{I}}$, de couples approximants qui satisfont aux trois hypothèses de récurrence suivantes:

$(4.12)_\alpha$ Les formules $(4.9)_i$ et $(4.10)_i$ sont vérifiées par $(\delta_\alpha, \xi_\alpha)$ sur tout Y, et les formules $(4.9)_{i+1}$ et $(4.10)_{i+1}$ par $(\delta_\alpha, \xi_\alpha)$ sur $Y_{<\alpha}$.

$(4.13)_\alpha$ Pour tout $\beta \in \mathscr{I}$, $\delta_\alpha - \delta_i$: $Y_\beta \to Z_r^{p(\beta)+r+i}$ et $\xi_\alpha - \xi_i$: $Y_\beta \to Z_r^{p(\beta)+i}(A')$;

$(4.14)_\alpha$ Pour tout $\beta < \alpha$, le couple $(\delta_\beta, \xi_\beta)$ coïncide avec $(\delta_\alpha, \xi_\alpha)$ sur $Y_{<\beta}$ et sur $Y_{\geq \alpha}$.

Remarquons tout d'abord que, une fois cette construction terminée, il suffit de poser $(\delta_{i+1}, \xi_{i+1}) = (\delta_\omega, \xi_\omega)$. Passons donc à la construction. Si α_0 est l'élément initial de $\mathscr{I}$, nous satisfaisons aux hypothèses ci-dessus pour α_0 en posant $(\delta_{\alpha_0}, \xi_{\alpha_0}) = (\delta_i, \xi_i)$. Supposons maintenant $(\delta_\beta, \xi_\beta)$ construit pour tout $\beta < \gamma$.

Nous allons distinguer deux cas: dans le cas I, γ n'est pas de la forme $\alpha + 1$; dans le cas II, $\gamma = \alpha + 1$.

Cas I. γ n'est pas de la forme $\alpha + 1$. Dans ce cas, nous posons

$$(\delta_\gamma, \xi_\gamma) = \varinjlim_{\beta < \gamma} (\delta_\beta, \xi_\beta),$$

ce qui a un sens à cause de (4.14). Clairement, $(\delta_\gamma, \xi_\gamma)$ est un couple approximant qui satisfait à $(4.13)_\gamma$ et à $(4.14)_\gamma$; il reste a vérifier $(4.12)_\gamma$.

Soit $y \in Y_{\beta_0}$. Comme tout élément de $A \hat{\otimes}_R \Lambda Y$,

$$\delta_\gamma y = u + v, \quad u \in A \otimes_R \Lambda\left(Y_{\beta_1} \oplus \cdots \oplus Y_{\beta_s}\right), \; v \in F^{p(\beta_0)+3r+i+1},$$

où $\beta_1, \dots, \beta_s$ dépendent de $\delta_\gamma y$. Choisissons $\alpha < \gamma$ tel que si $\beta_i < \gamma$, alors $\beta_i < \alpha$, $0 \leq i \leq s$. En particulier, on déduit de (4.14) que $\delta_\gamma y = \delta_\alpha y$, $\delta_\gamma u = \delta_\alpha u$ et

$$\delta_\gamma^2 y - \delta_\alpha^2 y = \delta_\gamma u + \delta_\gamma v - \delta_\alpha u - \delta_\alpha v = \left(\delta_\gamma - \delta_\alpha\right) v.$$

On a donc

$$\delta_\gamma^2 - \delta_\alpha^2 \colon Y_{\beta_0} \to F^{p(\beta_0)+3r+i+1} \subset Z_r^{p(\beta_0)+2r+i+1};$$

ainsi δ_γ satisfait à $(4.9)_i$ sur $Y_{\geq \gamma}$ et à $(4.9)_{i+1}$ sur $Y_{<\gamma}$. La démonstration de $(4.10)_i$ et $(4.10)_{i+1}$ est identique.

Cas II. $\gamma = \alpha + 1$. Nous construirons des applications R-linéaires

$$f\colon Y_\alpha \to Z_r^{p(\alpha)+r+i} \quad \text{et} \quad g\colon Y_\alpha \to Z_r^{p(\alpha)+i}(A')$$

respectivement de degré un et de degré zéro. Si $i = 0$, nous imposerons en plus

$$f\colon Y_\alpha \to Z_{r-1}^{p(\alpha)+r+1} \cap \left(A \mathbin{\hat{\otimes}_R} \Lambda Y_{<\alpha}\right) \quad \text{et} \quad g\colon Y_\alpha \to Z_{r-1}^{p(\alpha)+1}(A').$$

Ensuite nous définirons le couple $(\delta_\gamma, \xi_\gamma)$ comme coïncidant avec $(\delta_\alpha, \xi_\alpha)$ sur A et sur $Y_{\neq\alpha}$, et par

$$\delta_\gamma|_{Y_\alpha} = \delta_\alpha - f \quad \text{et} \quad \xi_\gamma|_{Y_\alpha} = \xi_\alpha + g.$$

Il est clair que, indépendamment des choix de f et de g, cette construction fournira un couple approximant satisfaisant à $(4.13)_\gamma$ et à $(4.14)_\gamma$. Il est également clair que

$$\delta_\gamma - \delta_\alpha\colon Z_r^p \to Z_r^{p+r+i},$$

d'où

$$\delta_\gamma^2 - \delta_\alpha^2 = \delta_\gamma(\delta_\gamma - \delta_\alpha) + (\delta_\gamma - \delta_\alpha)\delta_\alpha$$

enverra chaque Y_β dans $Z_r^{p(\beta)+2r+i}$. De plus, pour $y \in Y_\beta$, $\beta < \alpha$, on aura

$$\delta_\gamma y = \delta_\alpha y = a + b, \quad a \in A \mathbin{\hat{\otimes}_R} \Lambda Y_{<\beta},\ b \in Z_r^{p(\beta)+r+1},$$

d'où

$$\delta_\gamma^2 y - \delta_\alpha^2 y = (\delta_\gamma - \delta_\alpha) b \in Z_r^{p(\beta)+2r+i+1}.$$

En somme, pour tout f, δ_γ satisfera à $(4.9)_i$ sur Y et à $(4.9)_{i+1}$ sur $Y_{<\alpha}$. Pour tout f et tout g, $(4.10)_i$ (resp. $(4.10)_{i+1}$) sera aussi vérifiée sur Y (resp. sur $Y_{<\alpha}$) en raison des mêmes arguments.

Il suffit donc de choisir (f, g) tel que

$$\delta_\gamma^2\colon Y_\alpha \to Z_r^{p(\alpha)+2r+i+1} \quad \text{et} \quad \xi_\gamma\delta_\gamma - d'\xi_\gamma\colon Y_\alpha \to Z_r^{p(\alpha)+r+i+1}(A').$$

Le même type de calcul montre que pour ceci il suffit que

$$(4.16) \qquad \delta_\alpha^2 - \delta_\alpha f\colon Y_\alpha \to Z_r^{p(\alpha)+2r+i+1}$$

et que

$$(4.17)\qquad \xi_\alpha\delta_\gamma - d'(\xi_\alpha + g): Y_\alpha \to Z_r^{p(\alpha)+r+i+1}(A').$$

Procédons maintenant à la construction de f et de g; il sera utile de distinguer les cas $i = 0$ et $i > 0$.

Cas II(a). $i = 0$. Soit $y \in Y_\alpha$. En utilisant (4.5)(i), nous écrivons

$$\delta_\alpha^2 y = u + v, \quad u \in Z_r^{p(\alpha)+2r} \cap \left(A \mathbin{\hat{\otimes}_R} \Lambda Y_{<\alpha}\right),\ v \in Z_r^{p(\alpha)+2r+1}.$$

En particulier, $\rho^{p(\alpha)+2r}u = \rho^{p(\alpha)+2r}\delta_\alpha^2 y = D_r^2 y = 0$, d'après (4.6)(ii). Il résulte donc de (4.6)(iv) que

$$u \in \delta_\alpha\left(Z_{r-1}^{p(\alpha)+r+1} \cap \left(A \mathbin{\hat{\otimes}_R} \Lambda Y_{<\alpha}\right)\right) + Z_{r-1}^{p(\alpha)+2r+1};$$

d'où

$$\delta_\alpha^2: Y_\alpha \to \delta_\alpha\left(Z_{r-1}^{p(\alpha)+r+1} \cap \left(A \mathbin{\hat{\otimes}_R} \Lambda Y_{<\alpha}\right)\right) + Z_{r-1}^{p(\alpha)+2r+1}.$$

Remarquons ensuite que la surjection induite par δ_α,

$$Z_{r-1}^{p(\alpha)+r+1} \to \frac{\delta_\alpha\left(Z_{r-1}^{p(\alpha)+r+1}\right) + Z_{r-1}^{p(\alpha)+2r+1}}{Z_{r-1}^{p(\alpha)+2r+1}},$$

est une application R-linéaire entre R-modules. Puisque Y_α est R-projectif, il existe une application R-linéaire,

$$f: Y_\alpha \to Z_{r-1}^{p(\alpha)+r+1} \cap \left(A \mathbin{\hat{\otimes}_R} \Lambda Y_{<\alpha}\right)$$

telle que $\delta_\alpha^2 - \delta_\alpha f: Y_\alpha \to Z_{r-1}^{p(\alpha)+2r+1}$.

Montrons maintenant que f satisfait à (4.16):

$$\delta_\alpha^2 - \delta_\alpha f: Y_\alpha \to Z_r^{p(\alpha)+2r+1}.$$

En effet, l'hypothèse de récurrence $(4.12)_\alpha$ entraîne que $\delta_\alpha^2 f: Y_\alpha \to Z_r^{p(\alpha)+3r+1}$. Puisque

$$\delta_\alpha: Y_\alpha \to \left[Z_r^{p(\alpha)+r} \cap \left(A \mathbin{\hat{\otimes}_R} \Lambda Y_{<\alpha}\right)\right] + Z_r^{p(\alpha)+r+1},$$

il résulte (également de $(4.12)_\alpha$) que

$$\delta_\alpha^2 \circ \delta_\alpha: Y_\alpha \to Z_r^{p(\alpha)+3r+1}.$$

Ceci montre que $\delta_\alpha(\delta_\alpha^2 - \delta_\alpha f)$ envoie Y_α dans $Z_r^{p(\alpha)+3r+1}$, et, d'après (4.16)(iii), entraîne (4.16).

Considérons enfin $\xi_\alpha \delta_\gamma - d'\xi_\alpha$: $Y_\alpha \to Z_r^{p(\alpha)+r}(A')$; cette application est R-linéaire et son image représente zéro dans $E_r^{p(\alpha)+r}(A')$. Le même argument que ci-dessus nous donne, alors, une application R-linéaire g: $Y_\alpha \to Z_{r-1}^{p(\alpha)+1}(A')$ telle que

$$\xi_\alpha \delta_\gamma - d'\xi_\alpha - d'g: Y_\alpha \to Z_{r-1}^{p(\alpha)+r+1}(A').$$

De plus,

$$d'\big(\xi_\alpha \delta_\gamma - d'\xi_\alpha - d'g\big) = \big(d'\xi_\alpha - \xi_\alpha \delta_\gamma\big)\delta_\gamma + \xi_\alpha \delta_\gamma^2. \tag{4.18}$$

Puisque δ_γ: $Y_\alpha \to A \hat{\otimes}_R \Lambda Y_{<\alpha} + Z_r^{p(\alpha)+r+1}$ ((4.5)(i)), il résulte de $(4.12)_\alpha$ que le premier terme à droite dans (4.18) envoie Y_α dans $Z_r^{p(\alpha)+2r+1}(A')$. Qu'il en soit de même pour le deuxième terme est une conséquence de la propriété de δ_γ^2 que l'on vient d'établir: δ_γ^2: $Y_\alpha \to Z_r^{p(\alpha)+2r+1}$.

Ceci montre que $\xi_\alpha \delta_\gamma - d'(\xi_\alpha + g)$ envoie Y_α dans $Z_r^{p(\alpha)+r+1}(A')$ et établit donc (4.17). ■

Cas II(b): $i > 0$. Puisque δ_α^2 est A-linéaire, il résulte de $(4.12)_\alpha$ que δ_α^2 envoie Z_r^p dans Z_r^{p+2r+i} et $Z_r^p \cap (A \hat{\otimes}_R \Lambda Y_{<\alpha})$ dans $Z_r^{p+2r+i+1}$. Nous tirons donc de (4.5)(i) que

$$\delta_\alpha^3: Y_\alpha \to Z_r^{p(\alpha)+3r+i+1}.$$

Si $y \in Y_\alpha$ on a, par conséquent (cf. (4.6)(iii)), que $\delta_\alpha^2 y \in Z_r^{p(\alpha)+2r+i}$ représente un D_r cocyle.

Posons maintenant $\theta = \xi_\alpha \delta_\alpha - d'\xi_\alpha$. Il satisfait à $\theta(a \cdot \Phi) = (-1)^{\deg a}\phi(a) \cdot \theta\Phi$, $a \in A$. D'après $(4.12)_\alpha$, θ envoie Z_r^p dans $Z_r^{p+r+i}(A')$ et $Z_r^p \cap (A \hat{\otimes}_R \Lambda Y_{<\alpha})$ dans $Z_r^{p+r+i+1}(A')$. En particulier, on déduit de (4.5)(i) que

$$\theta\delta_\alpha: Y_\alpha \to Z_r^{p(\alpha)+2r+i+1}(A').$$

Simplifions les notations une fois de plus en posant

$$P = \rho^{p(\alpha)+2r+i} \circ \delta_\alpha^2: Y_\alpha \to E_r^{p(\alpha)+2r+i},$$

et

$$Q = \rho_{A'}^{p(\alpha)+r+i} \circ \theta: Y_\alpha \to E_r^{p(\alpha)+r+i}(A').$$

Le fait que $\delta_\alpha^2 y$ représente un D_r-cocycle se traduit par

$$D_r \circ P = 0.$$

De l'égalité $d'\theta - \xi\delta_\alpha^2 = \theta\delta_\alpha$: $Y_\alpha \to Z_r^{p(\alpha)+2r+i+1}(A')$, on tire que

$$d_r' \circ Q = \psi \circ P.$$

Utilisons maintenant le fait que $H(\psi)$ est un isomorphisme et que Y_α est projectif pour en déduire des applications R-linéaires

$$u\colon Y_\alpha \to E_r^{p(\alpha)+r+i} \quad \text{et} \quad v\colon Y_\alpha \to E_r^{p(\alpha)+i}(A').$$

satisfaisant à

$$D_r \circ u = P \quad \text{et} \quad Q - \psi u = d_r' v.$$

Relevons u en une application f: $Y_\alpha \to Z_r^{p(\alpha)+r+i}$. Alors $\delta_\alpha^2 y$ et $\delta_\alpha f y$ représentent le même élément Py; c'est-à-dire,

$$\delta_\alpha^2 - \delta_\alpha f\colon Y_\alpha \to \delta_\alpha\left(Z_{r-1}^{p(\alpha)+r+i+1}\right) + Z_{r-1}^{p(\alpha)+2r+i+1}$$

comme le montre (4.6)(iv). En modifiant f "par des éléments de $Z_{r-1}^{p(\alpha)+r+i+1}$", nous pouvons donc supposer qu'il relève u et que

$$\delta_\alpha^2 - \delta_\alpha f\colon Y_\alpha \to Z_{r-1}^{p(\alpha)+2r+i+1}.$$

Etablissons maintenant (4.16). Puisque

$$\delta_\alpha^2 f(Y_\alpha) \subset \delta_\alpha^2\left(Z_r^{p(\alpha)+r+i}\right) \subset Z_r^{p(\alpha)+3r+2i} \subset Z_r^{p(\alpha)+3r+i+1}$$

et puisqu'on a vu au début du cas II(b) qu'il en est de même avec $\delta_\alpha^3(Y_\alpha)$ on a

$$\delta_\alpha\left(\delta_\alpha^2 - \delta_\alpha f\right)Y_\alpha \subset Z_r^{p(\alpha)+3r+i+1} \subset F^{p(\alpha)+3r+i+1}.$$

On vient d'obtenir $(\delta_\alpha^2 - \delta_\alpha f)Y_\alpha \subset F^{p(\alpha)+2r+i+1}$ et (4.16) découle de (4.6)(iii).

Relevons enfin v en une application g: $Y_\alpha \to Z_r^{p(\alpha)+i}(A')$. En modifiant g "par des éléments de $Z_{r-1}^{p(\alpha)+i+1}(A')$", nous pouvons supposer que g relève v et que

$$\theta - \xi_\alpha f - d'g\colon Y_\alpha \to Z_{r-1}^{p(\alpha)+r+i+1}(A').$$

Un argument, toujours du même style, montre qu'en fait

$$\theta - \xi_\alpha f - d'g\colon Y_\alpha \to Z_r^{p(\alpha)+r+i+1}(A'),$$

ce qui donne précisément (4.17).

Le cas II(b), le Lemme, et le Théorème 4.4 sont maintenant démontrés. ∎

5. Théorème de relèvement

Cette section est consacrée à la démonstration du

THÉORÈME 5.1. *Soit*

$$(5.2)\qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\psi} & C \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta} \\ A \hat{\otimes}_R \Lambda Y & \xrightarrow[\phi]{} & B \end{array}$$

un diagramme commutatif de (R, r)-algèbres, dans lequel: (i) *i est une (R, r)-extension, et* (ii) *η est une (R, r)-fibration et un (R, r)-quasi-isomorphisme.*

Alors, il existe un morphisme χ: $A \hat{\otimes}_R \Lambda Y \to C$ (de (R, r)-algèbres) qui relève ϕ et induit ψ sur A.

Démonstration. Celle-ci s'effectue à nouveau par un processus de perturbation, à partir du niveau E_r de la suite spectrale.

Fixons une structure nilpotente, $Y = \oplus_{\alpha \in \mathscr{I}} Y_\alpha$, pour la (R, r)-extension $(A \hat{\otimes}_R \Lambda Y, D)$, avec Y_α de bidegré $(p(\alpha), q(\alpha))$. Comme dans le §4, nous simplifions

$$Z_j^p\big(A \hat{\otimes}_R \Lambda Y\big) \quad \text{et} \quad E_j^p\big(A \hat{\otimes}_R \Lambda Y\big)$$

en Z_j^p et E_j^p; la différentielle de E_j sera notée D_j.

Puisque $Z_r^p(\eta)$ est surjectif, $Y_\alpha \subset Z_r^{p(\alpha)}$, et Y_α est R-projectif, il existe un morphisme d'algèbres graduées filtrées,

$$\chi_0\colon A \hat{\otimes}_R \Lambda Y \to C,$$

qui induit ψ sur A, relève ϕ et envoie Y_α dans $Z_r^{p(\alpha)}(C)$. Il s'ensuit (voir (4.6)(iii))

$$\chi_0\colon Z_r^p \to Z_r^p(C) \quad \text{et} \quad \chi_0 D - d_C \chi_0\colon Y^{p,*} \to Z_r^{p+r}(C).$$

En commençant avec χ_0, nous construisons maintenant, par récurrence sur i, une suite infinie de morphismes d'algèbres graduées filtrées,

$$(5.3)\qquad \chi_i\colon A \hat{\otimes}_R \Lambda Y \to C,$$

vérifiant

$(5.4)_i$ χ_i induit ψ sur A,
$(5.5)_i$ $\chi_i D - d_C \chi_i$: $Y_\beta \to Z_r^{p(\beta)+r+i}(\ker \eta)$, $\beta \in \mathscr{I}$,

et pour $i \geq 1$,

$$(5.6)_i \quad \chi_i - \chi_{i-1}\colon Y_\beta \to Z_r^{p(\beta)+i-1}(\ker \eta),\ \beta \in \mathscr{I}.$$

(Remarquons que $(5.6)_i$ implique qu'on a $\eta\chi_i = \eta\chi_0 = \phi$ sur Y, et donc que χ_i relève ϕ.)

Le théorème devient une conséquence immédiate de l'existence de cette suite: il suffit de poser $\chi = \varinjlim_i \chi_i$.

Passons à la construction; nous supposons χ_j construit pour $j \leq i$ et nous définissons χ_{i+1}. Nous procédons par récurrence sur l'ensemble $\mathscr{I}$ indexant la décomposition de Y; sans nuire à la généralité, nous pouvons supposer que $\mathscr{I}$ possède un dernier élément ω.

Comme dans la démonstration du Lemme 4.8, cette récurrence se réduit facilement à l'étape suivante. Nous supposons donné un morphisme χ_α: $A \hat{\otimes}_R \Lambda Y \to C$ d'algèbres graduées filtrées, induisant ψ sur A, envoyant Y_β dans $Z_r^{p(\beta)}(\ker \eta)$, et tel que χ_α satisfasse à $(5.5)_i$. Nous supposons en plus que

$$\chi_\alpha D - d_C\chi_\alpha\colon Y_\beta \to Z_r^{p(\beta)+r+i+1}(\ker \eta), \quad \beta < \alpha;$$

c'est-à-dire que χ_α vérifie $(5.5)_{i+1}$ sur $Y_{<\alpha}$.

Nous cherchons alors une application R-linéaire f: $Y_\alpha \to Z_r^{p(\alpha)+i}(\ker \eta)$ telle qu'en posant

$$\chi_{\alpha+1} = \chi_\alpha \text{ sur } A \text{ et sur } Y_{\neq\alpha}, \quad \chi_{\alpha+1} = \chi_\alpha + f \text{ sur } Y_\alpha,$$

nous définissions un morphisme $\chi_{\alpha+1}$: $A \hat{\otimes}_R \Lambda Y \to C$ qui vérifie $(5.5)_i$ sur tout Y, et $(5.5)_{i+1}$ sur $Y_{\leq\alpha}$. L'existence d'un tel f établit le pas de récurrence sur α et l'existence de χ_{i+1} s'ensuit.

Il reste à construire f. Posons $\theta = \chi_\alpha D - d_C\chi_\alpha$. Cette χ_α-dérivation s'annule sur A, et notre hypothèse sur χ_α entraîne que

$$\theta\colon Z_r^p \cap \left(A \hat{\otimes}_R \Lambda Y_{<\alpha}\right) \to Z_r^{p+r+i+1}(\ker \eta)$$

et

$$\theta\colon Z_r^p \to Z_r^{p+r+i}(\ker \eta).$$

D'autre part, d'après la Définition 2.2(v), on a

$$(5.7) \qquad D\colon Y_\alpha \to Z_r^{p(\alpha)+r} \cap \left(A \hat{\otimes}_R \Lambda Y_{<\alpha}\right) + Z_r^{p(\alpha)+r+1}.$$

De $d_C\theta = -\theta D$ nous tirons $d_C\theta$: $Y_\alpha \to Z_r^{p(\alpha)+2r+i+1}(\ker \eta)$; d'où

$$\theta\colon Y_\alpha \to Z_{r+1}^{p(\alpha)+r+i}(\ker \eta).$$

Mais, η étant une (R, r)-fibration et un (R, r)-quasi-isomorphisme, nous déduisons du Lemme 3.6 que $E_{r+1}(\ker \eta) = H(E_r(\ker \eta)) = 0$. Il existe donc une application R-linéaire,

$$f\colon Y_\alpha \to Z_r^{p(\alpha)+i}(\ker \eta)$$

telle que $\theta - d_C f\colon Y_\alpha \to Z_r^{p(\alpha)+r+i+1}(\ker \eta)$.

Soit $\chi_{\alpha+1}$ défini à l'aide de cette application:

$$\chi_{\alpha+1} = \chi_\alpha \text{ sur } A \text{ et sur } Y_{\neq \alpha} \quad \text{et} \quad \chi_{\alpha+1} = \chi_\alpha + f \text{ sur } Y_\alpha.$$

Posons $g = \chi_{\alpha+1} - \chi_\alpha$; alors g envoie Z_r^p dans $Z_r^{p+i}(\ker \eta)$. De plus, on a

$$\chi_{\alpha+1} D - d_C \chi_{\alpha+1} = \theta + gD - d_C g.$$

De l'équation (5.7) et du fait que g s'annule dans $A \hat{\otimes}_R \Lambda Y_{<\alpha}$, nous déduisons que

$$gD\colon Y_\alpha \to Z_r^{p(\alpha)+r+i+1}(\ker \eta).$$

Mais, sur Y_α, $\chi_{\alpha+1} D - d_C \chi_{\alpha+1} = \theta - d_C f + gD$ et on constate que $\chi_{\alpha+1}$ vérifie $(5.5)_{i+1}$ sur Y_α. Que $\chi_{\alpha+1}$ satisfasse à $(5.5)_{i+1}$ sur $Y_{<\alpha}$ et à $(5.5)_i$ sur tout Y est aussi évident.

Le théorème est donc démontré. ∎

6. Homotopie

A l'aide des résultats précédents, nous allons maintenant, en appliquant les idées de Quillen [19], introduire la notion d'homotopie dans le cadre des (R, r)-algèbres. Fixons donc une (R, r)-extension $A \to C$, et considérons la (R, r)-algèbre $C \hat{\otimes}_A C$. Les inclusions

$$\lambda_0, \lambda_1\colon C \to C \hat{\otimes}_A C, \quad \lambda_0\colon c \mapsto c \otimes 1, \quad \lambda_1\colon c \mapsto 1 \otimes c$$

sont des (R, r)-extensions, d'après la Proposition 3.4 (i), tandis que la multiplication définit un (R, r)-morphisme

$$\mu\colon C \hat{\otimes}_A C \to C$$

tel que $\mu \circ \lambda_i = \mathrm{id}_C$.

DÉFINITION 6.1. Un *objet cylindre* pour une (R, r)-extension $A \to C$ est un modèle,

$$m\colon \left(C \hat{\otimes}_A C\right) \hat{\otimes}_R \Lambda X \to C,$$

de μ.

Nous considérerons les morphismes λ_i également comme des inclusions $C \to (C \hat{\otimes}_A C) \hat{\otimes}_R \Lambda X$.

DÉFINITION 6.2. Deux morphismes f_0, f_1: $C \to B$ de (R, r)-algèbres, coïncidant sur A, sont *homotopes* (*rel* A) s'il existe un objet cylindre $(C \hat{\otimes}_A C) \hat{\otimes}_R \Lambda X \xrightarrow{\simeq} C$ pour $A \to C$ et un morphisme

$$F: \left(C \hat{\otimes}_A C\right) \hat{\otimes}_R \Lambda X \to B$$

tels que $F \circ \lambda_i = f_i$. Cette relation est notée $f_0 \sim f_1$ (rel A), et F est appelé une *homotopie de* f_0 *vers* f_1 (*rel* A).

PROPOSITION 6.3. (i) *Si* $f_0 \sim f_1$ (*rel* A), *alors tout objet cylindre pour* $A \to C$ *est la source d'une homotopie de* f_0 *vers* f_1 (*rel* A).

(ii) *La relation* $f_0 \sim f_1$ (*rel* A) *est une relation d'équivalence.*

Démonstration. Si m: $(C \hat{\otimes}_A C) \hat{\otimes}_R \Lambda X \to C$ est un objet cylindre pour $A \to C$ alors $m \circ \lambda_i = \mathrm{id}_C$ et m est à la fois une (R, r)-fibration et un (R, r)-quasi-isomorphisme. Le premier énoncé est donc une conséquence immédiate du Théorème 5.1.

Remarquons maintenant que $f \circ m$ est une homotopie de f vers f (rel A). De plus, $m \circ \tau$ est aussi un objet cylindre pour $A \to C$, où τ est l'involution de $C \hat{\otimes}_A C$ définie par $\tau \circ \lambda_i = \lambda_{1-i}$. Si (F, m) est une homotopie (rel A) de f_0 vers f_1, alors $(f, m \circ \tau)$ est une homotopie (rel A) de f_1 vers f_0.

Soit enfin $(C \hat{\otimes}_A C) \hat{\otimes}_R \Lambda X' \xrightarrow{m'} C$ un deuxième objet cylindre. Considérons

$$E = \left(C \hat{\otimes}_A C\right) \hat{\otimes}_R \Lambda X$$

comme C-module à droite via λ_1 et $E' = (C \hat{\otimes}_A C) \hat{\otimes}_R \Lambda X'$ comme C-module à gauche via λ'_0. Il résulte alors de la Proposition 3.4 que les inclusions

$$E, E' \to E \hat{\otimes}_C E'$$

sont des (R, r)-extensions et des (R, r)-quasi-isomorphismes. Ainsi,

$$C \hat{\otimes}_A C \xrightarrow{\phi} E \hat{\otimes}_C E' \xrightarrow{m.m'} C, \quad \phi(c \otimes c') = \lambda_0(c) \otimes \lambda'_1(c),$$

constitue également un objet cylindre pour $A \to C$. La transitivité de la relation d'homotopie (rel A) en découle de manière évidente. ■

PROPOSITION 6.4. *Si* $f_0 \sim f_1$ (*rel* A), *alors* $E_{r+1}(f_0) = E_{r+1}(f_1)$ *et* $H(f_0) = H(f_1)$. *En particulier*, f_0 *est un* (R, r)*-quasi-isomorphisme* (*resp*., *un quasi-isomorphisme*) *si et seulement si* f_1 *l'est.*

Démonstration. Pour un objet cylindre

$$\left(C \hat{\otimes}_A C\right) \hat{\otimes}_R \Lambda X \xrightarrow{m} C,$$

on a que $E_{r+1}(m)$ est un isomorphisme et donc aussi $H(m)$. Il en résulte: $E_{r+1}(\lambda_i) = E_{r+1}(m)^{-1}$ et $H(\lambda_i) = H(m)^{-1}$, ce qui implique le résultat. ■

Considérons maintenant des morphismes de (R, r)-algèbres

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & C & & B \\ {\scriptstyle\phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi} & \text{et} & \downarrow{\scriptstyle\eta} \\ A' & \longrightarrow & C' & & B' \end{array}$$

le carré à gauche étant commutatif et les flèches horizontales étant des (R, r)-extensions. De la définition d'homotopie et du Théorème 5.1 découle le résultat suivant:

PROPOSITION 6.5. (i) *Si f_0, f_1: $C \to B$ sont homotopes (rel A), alors $\eta f_0 \sim \eta f_1$ (rel A).*

(ii) *Si g_0, g_1: $C' \to B$ sont homotopes (rel A'), alors $g_0\psi \sim g_1\psi$ (rel A).*

(iii) *Si η est une (R, r)-fibration et une (R, r)-équivalence et si f_0, f_1: $C \to B$ coïncident sur A, alors $f_0 \sim f_1$ (rel A) si et seulement si $\eta f_0 \sim \eta f_1$ (rel A).* ■

Remarque 6.6. Dans la Proposition 6.4 on voit facilement que $E_r(C \hat{\otimes}_A C \hat{\otimes}_R \Lambda X)$ est un objet cylindre pour $E_r(C)$ dans la catégorie des R-ADGC bigraduées. Il en résulte que $E_r(f_0)$ est homotope à $E_r(f_1)$, (rel $E_r(A)$). De même, f_0 est homotope à f_1 (rel A) dans la catégorie des $\mathbf{Z}$-ADGC. ■

7. Le cas $\mathbf{Q} \subset R$

Nous considérons ici les (R, r)-algèbres où l'anneau R contient $\mathbf{Q}$. L'importance de cette hypothèse réside dans l'observation classique suivante: soit α: $X \xrightarrow{\cong} Y$ un isomorphisme de degré 1 de $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels gradués et soit $(\Lambda_{\mathbf{Q}}(X \oplus Y), \delta)$ la $\mathbf{Q}$-ADGC définie par $\delta|_X = \alpha$; alors $H(\Lambda_{\mathbf{Q}}(X \oplus Y), \delta) = \mathbf{Q}$. De ceci nous déduisons:

LEMME 7.1. *Supposons $\mathbf{Q} \subset R$. Alors tout morphisme η: $B \to B'$ de (R, r)-algèbres se factorise en*

$$\eta\colon B \xrightarrow{i} B'' \xrightarrow{\xi} B'$$

où (i) *ξ est une (R, r)-fibration,* (ii) *i est une (R, r)-extension et un (R, r)-quasi-isomorphisme et* (iii) *il existe un (R, r)-morphisme ρ: $B'' \to B$ vérifiant $\rho i = \mathrm{id}_B$. Pour tout choix de tels i, ρ, ξ on a $i\rho \sim \mathrm{id}_{B''}$ (rel B).*

Démonstration. Soit X le $\mathbf{Q}$-espace bigradué défini par $X^{p,*} = Z_r^p(B')$, et soit B'' la (R, r)-algèbre définie par les conditions

$$B'' = \big(B \hat{\otimes}_{\mathbf{Q}} \Lambda_{\mathbf{Q}}(X \oplus Y), d''\big), \quad d''|_B = d_B,\ d''\colon X^{p,q} \xrightarrow{\cong} Y^{p+r,q-r+1}.$$

Si $\overline{X} = R \otimes_{\mathbf{Q}} X$, $\overline{Y} = R \otimes_{\mathbf{Q}} Y$, alors l'écriture $B'' = B \hat{\otimes}_R \Lambda(\overline{X} \oplus \overline{Y})$ identifie $i\colon B \to B''$ à une (R, r)-extension. Un inverse à droite, $\rho\colon B'' \to B$ est défini en posant $\rho(\overline{X} \oplus \overline{Y}) = 0$ et la remarque au début de cette section montre que ρ et i sont des (R, r)-quasi-isomorphismes.

Notons enfin l'identification $X^{p,*} = Z_r^p(B')$ par β et définissons ξ par les conditions $\xi|_B = \eta$ et $\xi|_X = \beta$.

Puisque $\rho i = \mathrm{id}_B$, ρ est une (R, r)-fibration. Le dernier énoncé découle donc de la Proposition 6.5 (iii). ■

Considérons maintenant un diagramme commutatif de (R, r)-morphismes:

(7.2)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "\eta"] \\ C \arrow[r, "\phi"'] & B \end{tikzcd}$$

THÉORÈME 7.3. *Supposons* $\mathbf{Q} \subset R$. *Si, dans* (7.2), η *est une* (R, r)*-fibration et* i *est à la fois une* (R, r)*-extension et un* (R, r)*-quasi-isomorphisme, alors il existe un* (R, r)*-morphisme* $\gamma\colon C \to E$ *qui étend* ψ *et relève* ϕ.

Démonstration. La preuve est une conséquence formelle des résultats des §§3, 5 et du Lemme 7.1. En effet, la Proposition 3.5 nous donne une (R, r)-fibration

$$\rho_C\colon C \times_B E \to C;$$

et en appliquant le Lemme 7.1 au morphisme $A \to C \times_B E$, nous arrivons au diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i'"] \arrow[dd, "i"'] & A' \arrow[d, "\rho"] & \\ & C \times_B E \arrow[r, "\rho_E"] \arrow[d, "\rho_C"] & E \\ C \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] & C & \end{tikzcd}$$

avec i' un (R, r)-quasi-isomorphisme et ρ une (R, r)-fibration.

Evidemment (voir (3.1)), $\rho_C \circ \rho$ est une (R, r)-fibration. Puisque $(\rho_C \circ \rho) \circ i' = i$, $\rho_C \circ \rho$ est également un (R, r)-quasi-isomorphisme. On déduit donc du Théorème 5.1 un morphisme $\gamma'\colon C \to A'$ qui relève id_C et étend i'. Posons $\gamma = \rho_E \rho \gamma'$. ■

De ce théorème, nous déduisons formellement (comme dans la théorie de Quillen) trois applications.

APPLICATION 7.4. *Supposons* $\mathbf{Q} \subset R$. *Si* i: $A \to B$ *est une* (R, r)*-extension et un* (R, r)*-quasi-isomorphisme alors il admet un* (R, r)*-morphisme (rétraction)* ρ: $B \to A$ *vérifiant* $\rho i = \mathrm{id}_A$. *Un tel morphisme vérifie*: $i\rho \sim \mathrm{id}_B$ *(rel* A*).*

Démonstration. D'après le Lemme 7.1, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{i'} & A' & \xrightarrow{\rho'} & A \\ {\scriptstyle i}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \xi} & & \\ B & \xrightarrow[\mathrm{id}_B]{} & B & & \end{array}$$

avec ξ une (R, r)-fibration et $\rho' i' = \mathrm{id}_A$. Soit γ: $B \to A'$ un relèvement de id_B étendant i'; il suffit de poser $\rho = \rho'\gamma$. Le dernier énoncé découle de la Proposition 6.5 (iii). ■

Considérons ensuite un diagramme commutatif de (R, r)-morphismes:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & E \\ {\scriptstyle i}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \eta} \\ C & \xrightarrow[f]{} & B \end{array}$$

dans lequel i est une (R, r)-extension et η une (R, r)-fibration.

APPLICATION 7.5 (RELÈVEMENT D'HOMOTOPIE). *Supposons* $\mathbf{Q} \subset R$. *Soit* g: $C \to E$ *un morphisme de* (R, r)*-algèbres induisant* h *sur* A *et soit*

$$\Phi\colon \left(C \hat{\otimes}_A C\right) \hat{\otimes}_R \Lambda X \to B$$

une homotopie (rel A*) de* ηg *vers* f.

Alors Φ *se relève en une homotopie (rel* A*) de* g *vers un* (R, r)*-morphisme* f': $C \to E$. *En particulier,* f' *relève* f.

Démonstration. Il suffit de constater que λ_0: $C \to (C \hat{\otimes}_A C) \hat{\otimes}_R \Lambda X$ est une (R, r)-extension et un (R, r)-quasi-isomorphisme, et d'appliquer le Théorème 7.3 au diagramme

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{g} & E \\ {\scriptstyle \lambda_0}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \eta} \\ C \hat{\otimes}_A C \hat{\otimes}_R \Lambda X & \xrightarrow[\Phi]{} & B \end{array}$$ ■

Finalement, considérons des morphismes de (R, r)-algèbres

(7.6)
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\psi} & E \\ {\scriptstyle i}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \eta} \\ C & & B \end{array}$$

i étant une (R, r)-extension et η étant un (R, r)-quasi-isomorphisme.

APPLICATION 7.7. *Supposons* $\mathbf{Q} \subset R$. *Alors* η *induit une bijection*

$$[C, E]_A \xrightarrow{\cong} [C, B]_A$$

entre les ensembles de classes d'homotopie (*rel* A) *de morphismes de* (R, r)-*algèbres.*

Démonstration. Le Lemme 7.1, appliqué à η, réduit le problème à deux cas particuliers: (a) η est aussi une (R, r)-extension et (b) η est aussi une (R, r)-fibration. Dans le cas (b) le résultat est une conséquence immédiate du Théorème 5.1 et de la Proposition 6.5(iii).

Dans le cas (a) le résultat provient de (7.4), appliqué à η. ■

8. Modèles minimaux: unicité

Fixons un morphisme

$$\phi: A \to B$$

de (R, r)-algèbres. Dans le §4 nous avons montré l'existence de modèles pour ϕ, ici nous traitons de leur unicité.

Supposons donc que

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & A \mathbin{\hat{\otimes}_R} \Lambda X \arrow[dr, "m"] & \\ A \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i'"'] & & B \\ & A \mathbin{\hat{\otimes}_R} \Lambda X' \arrow[ur, "m'"'] & \end{tikzcd}$$

soient deux modèles de ϕ. L'application 7.7 du §7 nous fournit alors le théorème d'unicité suivant:

THÉORÈME 8.1. *Si* $\mathbf{Q} \subset R$, *il existe un* (R, r)-*quasi-isomorphisme*

$$\gamma: A \mathbin{\hat{\otimes}_R} \Lambda X \to A \mathbin{\hat{\otimes}_R} \Lambda X',$$

induisant l'identité sur A, *et tel que* $m'\gamma \sim m$ (*rel* A). *L'ensemble de tels morphismes,* γ, *constitue exactement une classe d'homotopie* (*rel* A).

Ce théorème montre (dans le cas $\mathbf{Q} \subset R$) qu'un modèle de ϕ est déterminé à (R, r)-quasi-isomorphisme près. Nous allons maintenant introduire les modèles minimaux et montrer que ces derniers sont déterminés à isomorphisme près (toujours pour $\mathbf{Q} \subset R$), comme dans le cas classique de Sullivan.

Fixons donc une (R, r)-extension $A \to A \hat{\otimes}_R \Lambda Y$. Nous aurons à considérer les diagrammes commutatifs de (R, r)-algèbres de la forme

(8.2)
$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\eta"] \\ A \arrow[ur, "\psi"] \arrow[r] & A \hat{\otimes}_R \Lambda Y \end{tikzcd}$$

dans lequel η est toujours supposé être un (R, r)-quasi-isomorphisme.

Définition 8.3. (i) La (R, r)-extension $A \to A \hat{\otimes}_R \Lambda Y$ est *minimale* si pour tout diagramme (8.2) il existe un morphisme σ: $A \hat{\otimes}_R \Lambda Y \to E$ induisant ψ sur A et satisfaisant à $\eta \circ \sigma = \mathrm{id}$.

(ii) Un modèle $A \hat{\otimes}_R \Lambda X \to B$ de ϕ est un *modèle minimal* si la (R, r)-extension $A \to A \hat{\otimes}_R \Lambda X$ est minimale.

Constatons tout de suite que (d'après le Théorème 5.1) l'extension $A \to A \hat{\otimes}_R \Lambda Y$ est minimale si et seulement si, pour tout diagramme (8.2), η est toujours une (R, r)-fibration.

Soit maintenant γ: $A \hat{\otimes}_R \Lambda X \to A \hat{\otimes}_R \Lambda X'$ un morphisme entre deux (R, r)-extensions minimales, induisant l'identité sur A. D'après la Définition 8.3, si γ est un (R, r)-quasi-isomorphisme alors γ est un isomorphisme de (R, r)-algèbres, d'où:

Théorème 8.4. *Si $\mathbf{Q} \subset R$, alors deux modèles minimaux quelconques de ϕ: $A \to B$ sont reliés par un isomorphisme de (R, r)-algèbres induisant l'identité sur A.*

Il est moins évident de donner des critères pratiques pour la minimalité d'une (R, r)-extension. Nous en donnerons un, qui fait aussi le lien avec la définition classique de Sullivan. Ce critère se compose des deux conditions suivantes sur la (R, r)-extension $A \to A \hat{\otimes}_R \Lambda Y$:

(8.5) $A \hat{\otimes}_R \Lambda Y$ est concentré en degrés ≥ 0;

(8.6) $A \hat{\otimes}_R \Lambda Y$ possède une structure nilpotente (2.2(v)), $Y = \bigoplus_\alpha Y_\alpha$, $Y_\alpha \subset Y^{p(\alpha), q(\alpha)}$, telle que

$$\beta \leq \alpha \Rightarrow p(\beta) + q(\beta) \leq p(\alpha) + q(\alpha).$$

Le lien avec le cas classique est évident: la condition (8.5) y est automatique et la condition (8.6) y est équivalente à celle de Sullivan, comme on le démontre dans [14; Chap. 2]. Dans notre cadre nous avons:

THÉORÈME 8.7. *Une* (R, r)*-extension* $(A, d) \to (A \hat{\otimes}_R \Lambda Y, D)$, *satisfaisant à* (8.5) *et* (8.6) *est minimale.*

Nous donnerons dans le Théorème 8.11 une utilisation pratique de ce critère, qui établit l'existence des modèles minimaux dans un cadre très général. Entreprenons d'abord la démonstration de (8.7), qui s'effectue par la succession des trois lemmes ci-dessous; le premier est le lemme fondamental. La démonstration de celui-ci est basée sur une idée de Gómez-Tato [8] que nous remercions pour nous l'avoir expliquée.

LEMME 8.8. *Si* (8.5) *et* (8.6) *sont satisfaits, il existe (pour tout diagramme* (8.2)) *un morphisme de R-ADGC bigraduées,*

$$\tau\colon E_r(A) \otimes_R \Lambda Y \to E_r(E),$$

tel que $\tau|_{E_r(A)} = E_r(\psi)$ *et* $E_r(\eta) \circ \tau = \mathrm{id}$.

LEMME 8.9. *L'existence d'un* τ *satisfaisant aux conclusions du Lemme* 8.8 *entraîne l'existence d'une* (R, r)*-extension* $A \to (A \hat{\otimes}_R \Lambda Y, D')$ *et d'un morphisme*

$$\chi\colon \left(A \hat{\otimes}_R \Lambda Y, D'\right) \to (E, d_E)$$

tels que $\chi|_A = \psi$ *et* $E_r(\chi) = \tau$ *(et* $D_r' = D_r$).

LEMME 8.10. *Soit* θ: $(B \hat{\otimes}_R \Lambda Z, D') \to (A \hat{\otimes}_R \Lambda Y, D)$ *un morphisme de* (R, r)*-algèbres (entre deux* (R, r)*-extensions) tel que les deux extensions satisfassent à* (8.5), θ *induise un isomorphisme de B sur A, et* $E_r(\theta)$ *soit un isomorphisme. Alors* θ *est un isomorphisme.*

Le Théorème 8.7 découle immédiatement des trois lemmes: il suffit d'appliquer (8.10) à $\theta = \eta \circ \chi$ et de poser $\sigma = \chi \circ \theta^{-1}$. Etablissons donc les lemmes.

Démonstration de (8.8). Supposons τ construit sur $E_r(A) \otimes_R \Lambda Y_{<\alpha}$ et étendons le à Y_α; cela fournira une démonstration par récurrence sur α. Posons $E_r = E_r(A) \otimes \Lambda Y$ et $E_{r,<\alpha} = E_r(A) \otimes_R \Lambda Y_{<\alpha}$. Notons F le module $\tau(E_{r,<\alpha})$. Puisque $E_r(\eta) \circ \tau = \mathrm{id}$, τ est injectif. Le morphisme

$$\overline{E_r(\eta)}\ :\ E_r(E)/F \to E_r/E_{r,<\alpha}$$

est donc un quasi-isomorphisme de R-modules différentiels. (Ces quotients n'ont pas de structure d'algèbre!)

En particulier, Y_α étant projectif, il existe un morphisme λ, de R-modules bigradués, de Y_α vers les cocycles de $E_r(E)/F$ tel que $H(E_r(\eta)) \circ H(\lambda) = H(j)$, j notant l'inclusion $Y_\alpha \to E_r/E_{r, <\alpha}$.

D'autre part, les hypothèses (8.5) et (8.6) entraînent que $E_r/E_{r, <\alpha}$ est concentré en degrés $\geq p(\alpha) + q(\alpha)$. En particulier, ce module ne contient pas de cobords de degré $p(\alpha) + q(\alpha)$ et nous avons donc que $E_r(\eta) \circ \lambda = j$. Le morphisme

$$(\text{proj}, E_r(\eta)) \colon E_r(E) \to (E_r(E)/F) \times_{E_r/F} E_r$$

étant surjectif, nous relevons $(\lambda, \mathrm{id}_{Y_\alpha})$ en un morphisme τ: $Y_\alpha \to E_r(E)$ qui satisfait donc à

$$\text{proj} \circ \tau = \lambda \quad \text{et} \quad E_r(\eta) \circ \tau = \mathrm{id}_{Y_\alpha}.$$

Ceci étend τ à l'algèbre $E_r(A) \otimes_R \Lambda Y_{\leq \alpha}$; cette extension commute aux différentielles car l'image de λ est contenue dans les cocycles de $E_r(E)/F$. ■

Démonstration de (8.9). Par hypothèse (voir (8.2)), η est un (R, r)-quasi-isomorphisme. $E_r(\eta)$ est donc aussi un quasi-isomorphisme et, puisque $E_r(\eta) \circ \tau = \mathrm{id}$, il en est de même pour τ. Il suffit, alors d'appliquer le Théorème 4.4 à ψ: $A \to E$ avec $E_r(\psi)$ décomposé en $E_r(A) \to E_r(A) \otimes_R Y \xrightarrow{\tau} E_r(E)$. ■

Démonstration de (8.10). Nous ne perdons rien en supposant que $A = B$ et que θ induise l'identité sur A. Pour que θ soit un isomorphisme de (R, r)-algèbres, il suffit que le gradué associé, $E_0(\theta)$ soit un isomorphisme. Nous sommes donc réduits à montrer que pour $0 \leq s \leq r - 1$,

$$E_{s+1}(\theta) \text{ isomorphisme} \Rightarrow E_s(\theta) \text{ un isomorphisme.}$$

Rappelons d'abord que tout élément $y \in Y$ est un D_s-cocyle. Puisque $E_s(\theta)$ est un quasi-isomorphisme, on a $y = E_s(\theta)\Phi + D_s\Omega$, et $\deg \Omega = \deg y - 1$. Une récurrence sur le degré montre maintenant, à l'aide de (8.5), que $E_s(\theta)$ est surjectif. Puisque $E_s(\theta)$ est aussi un quasi-isomorphisme il est surjectif au niveau des cocycles. Par conséquent, il existe un morphisme de R-ADGC bigraduées, ξ: $(A \otimes_R \Lambda Y, D_s) \to (A \otimes_R \Lambda Z, D_s')$ tel que $\xi|_A = \mathrm{id}_A$ et $E_s(\theta) \circ \xi = \mathrm{id}$.

Le même argument, appliqué cette fois à ξ, montre que celui-ci est aussi surjectif, d'où ξ et $E_s(\theta)$ sont des isomorphismes. Le lemme, et le Théorème 8.7 sont donc démontrés. ■

Etablissons, enfin, notre théorème d'existence:

THÉORÈME 8.11. *Soit ϕ: $A \to A'$ un (R, r)-morphisme et supposons que A et $E_{r+1}(A')$ sont concentrés en degrés ≥ 0. Si $H^0(E_r(A)) = H^0(E_r(A')) = R$ et si R est un corps alors ϕ admet un modèle satisfaisant à* (8.5) *et à* (8.6). *En particulier, ce modèle est minimal.*

Démonstration. Si l'on applique la méthode classique de construction de modèles minimaux par récurrence sur le degré [21], [14; Chap. 6], on trouve un modèle

$$E_r(A) \otimes \Lambda Y^{*,*} \to E_r(A')$$

de $E_r(\phi)$ satisfaisant à (8.6) et tel que Y soit concentré en degrés > 0. Le Théorème 4.4, appliqué à ce modèle, fournit le modèle de ϕ voulu. ■

9. Suite spectrale d'algèbres de Lie d'homotopie

Dans ce paragraphe nous nous limitons, pour simplifier, au cas où $R = \mathbf{k}$ est un corps de caractéristique zéro. Fixons $r \geq 0$ et supposons que A soit une $(\mathbf{k}, r)$-algèbre telle que $\mathbf{k} \subset \ker d$ et $E_{r+1}(A)$ soit concentré en degrés ≥ 0. D'après les résultats du §8 , l'inclusion $\mathbf{k} \to A$ admet un modèle minimal,

$$((\Lambda Y)\hat{}, d) \xrightarrow{\simeq} (A, d_A), \tag{9.1}$$

unique à isomorphisme près.

Considérons maintenant le modèle $(\Lambda Y, d_r) \xrightarrow{\simeq} (E_r(A), d_r)$ induit par (9.1). Comme nous l'avons remarqué dans le Théorème 8.11, Y est concentré en degrés > 0 et satisfait à (8.6), d'où en particulier d_r: $Y^n \to \Lambda Y^{\leq n}$, $n \geq 1$. Il en résulte que

$$d_r\colon Y \to (\Lambda Y)^+ \cdot (\Lambda Y)^+$$

et donc que d_r est la somme de dérivations δ et ω satisfaisant à

$$\delta\colon Y \to \Lambda^2 Y \quad \text{et} \quad \omega\colon Y \to \Lambda^{\geq 3} Y.$$

(On note $\Lambda^s Y$ le sous espace engendré par les éléments $y_1 \wedge \cdots \wedge y_s$, $y_i \in Y$.) Clairement, $\delta^2 = 0$.

Soit L l'espace bigradué dual de Y: $L_{p,q} = \mathrm{Hom}(Y^{p,q}, \mathbf{k})$. D'après ([20], [23; I.1(3)]), δ induit un crochet

$$[\ ,\ ]\colon L \times L \to L, \quad \langle [f, g]; y\rangle = \pm\langle f, g; \delta y\rangle$$

qui fait de L une algèbre de Lie graduée.

Par contre, une différentielle, D, est induite sur $\hat{Y}$ par d via la suite exacte

$$(\Lambda^{\geq 2}Y)^\wedge \to (\Lambda^+ Y)^\wedge \to \hat{Y}.$$

Elle respecte la filtration; d'où une suite spectrale (E_i, D_i) qui commence avec $E_{r+1} = Y$, puisque d_r: $Y \to \Lambda^{\geq 2}Y$.

THÉORÈME 9.1. *La suite spectrale duale de (E_i, D_i) est une suite spectrale d'algèbres de Lie.*

Remarque 9.2. L'unicité du modèle minimal entraîne que cette suite spectrale d'algèbres de Lie est un invariant de A.

Démonstration de 9.1. La différentielle D s'étend de manière unique en une dérivation de $(\Lambda Y)^\wedge$, qu'on note aussi D, et $D^2 = 0$ sur tout $(\Lambda Y)^\wedge$. On obtient ainsi une ADGC filtrée dont la suite spectrale associée est donnée par $(\Lambda E_i, D_i)$, D_i notant l'extension de D_i: $E_i \to E_i$ en une dérivation de ΛE_i.

Il suffit donc de montrer qu'il existe une suite d'applications σ_i: $E_i \to \Lambda^2 E_i$, commutant à D_i, et telle que $\sigma_{r+1} = \delta$ et $H(\sigma_i) = \sigma_{i+1}$. Mais on peut interpréter

$$\delta\colon \big((\Lambda Y)^\wedge, D\big) \to \big((\Lambda Y)^\wedge, D\big)$$

comme une sorte de morphisme entre espaces linéaires différentiels filtrés, qui induit donc un morphisme de suites spectrales. ■

DÉFINITION 9.3. La suite spectrale d'algèbres de Lie du Théorème 9.1 est appelée la *suite spectrale d'algèbres de Lie d'homotopie* de la $(\mathbf{k}, r)$-algèbre A.

Remarque 9.4. Il est possible d'introduire la notion *d'homotopie pointée* comme dans le cas de Sullivan [14; Chap. 5]. Ceci fait, on peut montrer qu'un morphisme ϕ de $(\mathbf{k}, r)$ algèbres augmentées induit un morphisme entre les suites spectrales d'algèbres de Lie qui ne dépend que de la classe d'homotopie pointée de ϕ.

10. Exemples

Nous détaillons, maintenant, quelques exemples de filtrations et de modèles, en commençant avec le modèle introduit dans [15].

Exemple 10.1. Soit (A, d) une R-ADGC; filtrons la en posant $F^0 = A$ et $F^1 = 0$ et choisissons r.

(a) $r = 0$. Evidemment $(E_0(A), d_0) = (A, d)$ possède un modèle

$$(\Lambda Y^{0,*}, d) \xrightarrow{\simeq} (E_0(A), d)$$

entièrement concentré en degré filtrant 0, de différentielle $d\colon Y^{0,q} \to (\Lambda Y)^{0,q+1}$. C'est le modèle classique de Sullivan de (A, d), et aucune perturbation n'est nécessaire.

(b) $r = 1$. On a $(E_1(A), d_1) = (H(A), 0)$, et son modèle prend la forme

$$(\Lambda Y^{*,*}, d) \xrightarrow{\simeq} (H(A), 0)$$

avec Y concentré en degrés filtrants ≤ 0; c'est le modèle bigradué d'Halperin-Stasheff [15; 3.4]. Le modèle $(\Lambda Y, D) \xrightarrow{\simeq} (A, d)$ obtenu en perturbant $(\Lambda Y, d)$ est le modèle filtré de [15; 4.4].

Supposons en particulier que R soit un corps de caractéristique zéro, que $H^{<0}(A) = 0$, $H^0(A) = R$ et que chaque $H^i(A)$ soit de dimension finie. Dans le §9 nous avons construit une suite spectrale d'algèbres de Lie qui se déduit de la $(R, 1)$-algèbre (A, d). Si l'on applique le foncteur "algèbre enveloppante" on obtient donc une suite spectrale d'algèbres de Hopf et, d'après [15; 7.14] celle-ci s'identifie à la suite spectrale d'Eilenberg-Moore convergeant de $\operatorname{Tor}^{H(A)}(R, R)$ vers $\operatorname{Tor}^A(R, R)$.

Exemple 10.2. Une R-ADGC, (A, d) possède une deuxième filtration naturelle; il suffit de poser $F^p(A) = A^{\geq p}$. Pour simplifier nous supposerons que R est un corps de caractéristique zéro, que $A^0 = R$ et que $A^{<0} = 0$. Considérons donc les différentes possibilités pour r.

(a) $r = 0$. Cette fois-ci $(E_0(A), d_0) = (A, 0)$ et le modèle filtré $(\Lambda Y, D) \xrightarrow{\simeq} (A, d)$ est obtenu en perturbant un modèle bigradué

$$(\Lambda Y, d) \xrightarrow{\simeq} (A, 0),$$

qui satisfait à $Y = \{Y^{p,q} | q \leq 0 \text{ et } p + q > 0\}$. Il n'est pas nécessaire, donc, de compléter et la suite spectrale d'algèbres de Lie (9.1) converge dans ce cas de

$$\pi_*(A) \Rightarrow \pi_*(A, d).$$

Du Théorème 1.1 de [6] nous obtenons alors:

PROPOSITION 10.3. *Si $H(A, d)$ est de dimension finie et si $\pi_*(A, d)$ est de dimension infinie alors $\pi_*(A)$ est de croissance exponentielle.* ■

Revenons maintenant aux autres valeurs possibles de r.

(b) $r = 1$. On obtient de nouveau le modèle de Sullivan.

(c) $r = 2$. On obtient de nouveau le modèle bigradué de $(H(A), 0)$ perturbé en modèle de (A, d), quitte à identifier l'opposé du degré complémentaire de notre modèle au degré filtrant du modèle (10.1) (b).

Exemple 10.3. *Un quasi-isomorphisme qui n'est pas un* (R, r)*-quasi-isomorphisme.*

Soit $R = \mathbf{Q}$ et considérons l'ADGC $(A, d) = (\Lambda(x, y, z), d)$ où $dx = yz$, $dy = zx$ et $dz = xy$ et $\deg x = \deg y = \deg z = 1$. Nous la filtrons par $F^p(A) = A^{\geq p}$ et nous posons $r = 0$.

Soit $\phi\colon (\Lambda u, 0) \to (\Lambda(x, y, z), d)$ le morphisme défini par $\phi u = xyz$, avec $\deg u = 3$ et $u \in F^3$. Clairement ϕ est un quasi-isomorphisme mais pas un $(\mathbf{Q}, 0)$-quasi-isomorphisme. Pour construire son $(\mathbf{Q}, 0)$-modèle il faut déformer

$$(\Lambda u, 0) \to (\Lambda(u, x, y, z, a), d) \xrightarrow{\psi} (\Lambda(x, y, z), 0),$$
$$da = u - xyz, \quad a \text{ de bidegré } (3, -1),\ \psi a = 0,\ \psi u = xyz.$$

La déformation s'écrit $(\Lambda(u, x, y, z, a), D)$, $Du = 0$, $Dx = yz$, $Dy = zx$, $Dz = xy$, $Da = u - xyz$. La fibre, $(\Lambda(x, y, z, a), \overline{D})$ est acyclique mais pas $(\mathbf{Q}, 0)$-acyclique; en particulier l'inclusion

$$(\Lambda|(x, y, z), d) \to (\Lambda(x, y, z, a), \overline{D})$$

est homotope mais pas $(\mathbf{Q}, 0)$-homotope, à l'application constante.

11. Fibrés C^∞

Dans cette section les variétés, N, seront toujours de classe C^∞, de dimension finie, et leur topologie sera supposée Hausdorff et séparable. Les fibrés vectoriels, ξ, sur N seront de classe C^∞ et de rang constant fini; un morphisme $\sigma\colon \xi \to \eta$ sera une application C^∞ se restreignant en des applications linéaires $\sigma_x\colon \xi_x \to \eta_x$ $(x \in N)$ entre les fibres. Le $C^\infty(N)$-module des sections de ξ est noté $C^\infty(\xi)$ et $(A_{DR}(N), d)$ notera l'ADGC des formes différentielles sur N. Remarquons tout de suite que pour tout ξ, $C^\infty(\xi)$ est $C^\infty(N)$-projectif d'après un théorème de Swan [22]. (Le cas C^∞ est rédigé en détail dans [11; Chap. II, §5].)

Fixons donc un fibré C^∞ à fibre une variété F:

$$\pi\colon M \to N;$$

c'est-à-dire que N est recouvert par des ouverts U_α et il existe des difféomorphismes

$$f_\alpha\colon U_\alpha \times F \xrightarrow{\cong} \pi^{-1}(U_\alpha)$$

tels que $\pi f_\alpha(x, y) = x$. La fibre de π au point $x \in N$ est la sous-variété $\pi^{-1}(x)$; elle sera notée F_x.

Filtrons $A_{DR}(M)$ en prenant pour $F^p(A_{DR}(M))$ l'idéal engendré par

$$A_{DR}(\pi)\left(A_{DR}^{\geq p}(N)\right)$$

et filtrons $A_{DR}(N)$ par les idéaux $F^p = A_{DR}^{\geq p}(N)$. Alors

$$A_{DR}(\pi)\colon A_{DR}(N) \to A_{DR}(M)$$

est un morphisme d'ADGC filtrées, complètes et cocomplètes. De plus, $C^\infty(N) = A_{DR}^0(N)$ étant inclus dans $Z_1^{0,0}(A_{DR}(N))$, on a

$$A_{DR}(\pi)\colon C^\infty(N) \to Z_1^{0,0}(A_{DR}(M)).$$

Par conséquent, nous pouvons considérer $A_{DR}(\pi)$ comme *morphisme de* $(C^\infty(N), 0)$*-algèbres* et le but de cette section est *la construction d'un modèle minimal du morphisme* $A_{DR}(\pi)$. D'après le Théorème 8.4, ce modèle sera unique à isomorphisme près.

Explicitons tout d'abord le gradué, $E_0(A_{DR}(M))$, associé à la filtration $F^p(A_{DR}(M))$. Soient T_M et T_N les fibrés tangents et $V_M \subset T_M$ le sous fibré vectoriel (*fibré vertical*) dont la restriction à chaque F_x est son fibré tangent. Un sous-fibré $H_M \subset T_M$ complémentaire (appelé *fibré horizontal*) s'identifie à l'image réciproque de T_N; un choix de H_M détermine donc des isomorphismes d'algèbres:

$$\begin{aligned} A_{DR}(M) &= C^\infty(\Lambda T_M^*) \\ &= C^\infty(\Lambda H_M^* \otimes \Lambda V_M^*) \\ &= C^\infty(\Lambda H_M^*) \otimes_{C^\infty(M)} C^\infty(\Lambda V_M^*) \\ &= A_{DR}(N) \otimes_{C^\infty(N)} C^\infty(\Lambda V_M^*), \end{aligned}$$

voir [11; §2.24 et §2.26]. Nous simplifierons $(E_i(A_{DR}(M)), d_i)$ en $(E_i(M), d_i)$; les isomorphismes ci-dessus fournissent l'identification

$$(11.1) \qquad E_0^{p,q}(M) \cong A_{DR}^p(N) \otimes_{C^\infty(N)} C^\infty(\Lambda^q V_M^*).$$

Simplifions aussi $E_i(A_{DR}(\pi))$ en $E_i(\pi)$; alors $E_0(\pi)$ s'identifie à l'inclusion

$$(11.2) \qquad E_0(\pi)\colon A_{DR}(N) \to A_{DR}(N) \otimes_{C^\infty(N)} C^\infty(\Lambda V_M^*).$$

Remarque 11.3. Soit $\Phi \in A_{DR}^{p+q}(M)$. Pour $z \in M$, nous noterons Φ_z la fonction $(p+q)$-linéaire et alternée obtenue en restreignant Φ aux vecteurs tangents en z à M. Il résulte des isomorphismes précédents que: $\Phi \in F^p$ si et seulement si, pour tout $z \in M$, $\Phi_z(h_1, \ldots, h_{p+q}) = 0$ quand au moins $q+1$ des h_i sont verticaux.

Revenons à $E_0(M)$. Nous allons construire un quasi-isomorphisme

(11.4)
$$\left(A_{DR}(N) \otimes_{C^\infty(N)} \Lambda Y, D_0\right) \xrightarrow{\simeq} \left(A_{DR}(N) \otimes_{C^\infty(N)} C^\infty(\Lambda V_M^*), d_0\right),$$

tel que

(i) Y est somme directe de $C^\infty(N)$-modules projectifs $Y_\alpha \subset Y^{0,q(\alpha)}$,
(ii) L'ensemble $\mathscr{I} = \{\alpha\}$ est bien ordonné,
(iii) D_0: $Y_\alpha \to \Lambda Y_{<\alpha}$,
(iv) $\beta \leq \alpha \Rightarrow q(\beta) \leq q(\alpha)$.

Le Théorème 4.4 entraîne alors que $(A_{DR}(N) \otimes_{C^\infty(N)} \Lambda Y, D_0)$ peut être perturbé en un modèle du $(C^\infty(N), 0)$-morphisme $A_{DR}(\pi)$, et le Théorème 8.7 entraîne que ce modèle est minimal.

Passons à la construction de (11.4), et constatons tout d'abord que la différentielle d_0 s'annule sur $A_{DR}(N)$. Elle est donc de la forme $d_0 = \mathrm{id} \otimes d_V$, $(C^\infty(\Lambda V_M^*), d_V)$ étant une $C^\infty(N)$-ADGC. Ainsi il nous suffit de construire un quasi-isomorphisme de la forme

$$\phi\colon (\Lambda Y, D_0) \xrightarrow{\simeq} (C^\infty(\Lambda V_M^*), d_V) \tag{11.5}$$

où $(\Lambda Y, D_0)$ satisfait aux propriétés décrites ci-dessus. Puisque $A_{DR}^p(N)$ est égal à $C^\infty(\Lambda^p T_N^*)$, il est projectif d'après le théorème de Swan [22], [11; Chap. II, §5]; $\mathrm{id}_{A_{DR}(N)} \otimes \phi$ sera alors le quasi-isomorphisme (11.4) cherché.

La construction du modèle minimal de $A_{DR}(\pi)$ se ramène ainsi à celle de ϕ, qui à son tour se déduit d'une construction géométrique: *un fibré vectoriel "en modèles minimaux de Sullivan"*. En effet, l'ADGC $(C^\infty(\Lambda V_M^*), d_V)$ pourrait être interprêtée comme "module de sections d'un fibré vectoriel $\bigcup_{x \in N} A_{DR}(F_x)$", bien que ce dernier ne soit pas vraiment un fibré vectoriel dans notre sens! Néanmoins les inclusions $F_x \to M$ induisent des surjections d'ADGC réelles,

$$\varepsilon_x\colon (C^\infty(\Lambda V_M^*), d_V) \to (A_{DR}(F_x), d_x).$$

En outre, pour tout fibré vectoriel ξ sur N, un $C^\infty(N)$-morphisme

$$\psi\colon C^\infty(\xi) \to C^\infty(\Lambda V_M^*)$$

détermine des applications linéaires ψ_x: $\xi_x \to A_{DR}(F_x)$, $x \in N$, par la condition

$$\psi_x(\sigma(x)) = \varepsilon_x(\psi(\sigma)).$$

Nous construirons donc un vrai fibré vectoriel gradué "en modèles minimaux de Sullivan" sur N,

$$(\Lambda\zeta, d) = \bigcup_{x \in N} ((\Lambda\zeta)_x, d_x)$$

et un vrai quasi-isomorphisme

$$\phi\colon (C^\infty(\Lambda\zeta),\delta) \to (C^\infty(\Lambda V_M^*), d_V),$$

δ induit par d, tel que pour tout $x \in N$,

$$\phi_x\colon ((\Lambda\zeta)_x, d_x) \to (A_{DR}(F_x), d_x)$$

soit un modèle minimal.

Précisons maintenant, en commençant par quelques définitions. En particulier, un *fibré vectoriel gradué*, ζ, sur N, à fibre l'espace gradué réel, Z, de type fini est une suite, ζ^k, de fibrés vectoriels à fibre Z^k; le $C^\infty(N)$-module gradué $C^\infty(\zeta)$ est le module de composantes $C^\infty(\zeta^k)$. Si ζ est concentré en degrés > 0, le fibré vectoriel en algèbres graduées, $\Lambda\zeta$, à fibre ΛZ, prend un sens de la même manière.

Remarquons aussi que tout morphisme de fibrés vectoriels gradués, d: $\zeta \to \Lambda\zeta$, de degré 1 s'étend de façon unique en un morphisme d: $\Lambda\zeta \to \Lambda\zeta$ tel que chaque d_x soit une dérivation de $(\Lambda\zeta)_x$; nous dirons que d est une *dérivation de* $\Lambda\zeta$. Si $d^2 = 0$, d est une *différentielle* et si pour chaque k, le rang de d_x: $(\Lambda\zeta)_x^k \to (\Lambda\zeta)_x^{k+1}$ est indépendant de x nous dirons que d est de *rang constant*.

Nous pouvons maintenant énoncer notre résultat principal: l'existence du quasi-isomorphisme (11.5) en découle d'office.

PROPOSITION 11.6. *Supposons le modèle minimal de $A_{DR}(F)$ de type fini. Il existe, alors, un couple $(\Lambda\zeta, d)$ et un quasi-isomorphisme de $C^\infty(N)$-ADGC,*

$$\phi\colon (C^\infty(\Lambda\zeta),\delta) \xrightarrow{\simeq} (C^\infty(\Lambda V_M^*), d_V),$$

δ étant induit par d, tels que:

(i) *ζ est un fibré vectoriel gradué sur N concentré en degrés > 0 et d est une différentielle et une dérivation de degré* 1.

(ii) *ζ est la somme directe de sous fibrés ζ_i $i = 1, 2, 3, \ldots$ tels que $\zeta_i \subset \zeta^{q(i)}$, d: $\zeta_i \to \Lambda\zeta_{<i}$ et $q(1) \le q(2) \le \ldots$.*

(iii) *Les morphismes ϕ_x: $(\Lambda\zeta_x, d_x) \to (A_{DR}(F_x), d_x)$ induits par ϕ sont des quasi-isomorphismes, et donc des modèles minimaux.*

(iv) *$Y = C^\infty(\zeta)$ est un $C^\infty(N)$-module projectif et $C^\infty(\Lambda\zeta) = \Lambda Y$.*

Remarque 11.7. Rappelons ([21], [14]) que le modèle minimal de $A_{DR}(F)$ est le modèle minimal rationnel de l'espace topologique F, tensorisé avec $\mathbf{R}$. L'hypothèse qu'il soit de type fini entraîne que chaque $H_k(F;\mathbf{R})$ est de dimension finie; si F est aussi nilpotent alors ces deux conditions sont équivalentes.

Démonstration de (11.6). D'après le théorème de Swan [22], [11; Chap. II, § 5], $Y = C^\infty(\zeta)$ est projectif et $\Lambda Y = C^\infty(\Lambda\zeta)$, ce qui règle la condition (iv).

Constatons aussi que les difféomorphismes $f_{\alpha,x}\colon F \xrightarrow{\cong} F_x$, $x \in U_\alpha$ induisent des bijections

$$\{H(f_{\alpha,x})\} : U_\alpha \times H(F) \xrightarrow{\cong} \bigcup_{x \in U_\alpha} H_{DR}(F_x)$$

dont les fonctions de transition sont localement constantes. Ces bijections munissent donc

$$\mathscr{H} = \bigcup_{x \in H} H_{DR}(F_x)$$

de la structure d'un fibré vectoriel plat en algèbres graduées: c'est le fibré classique de coefficients locaux. Nous aurons besoin du lemme, bien connu, suivant, faisant intervenir les morphismes $\varepsilon_x\colon C^\infty(\Lambda V_M^*) \to A_{DR}(F_x)$:

LEMME 11.8. *Il existe un isomorphisme unique de $C^\infty(N)$-algèbres graduées,*

$$\varepsilon\colon H(C^\infty(\Lambda V_M^*), d_V) \xrightarrow{\cong} C^\infty(\mathscr{H})$$

tel que $\varepsilon(\alpha)(x) = H(\varepsilon_x)(\alpha)$, $x \in N$, $\alpha \in H(C^\infty(\Lambda V_M^*))$.

Entreprenons maintenant la construction de $(\Lambda\zeta, d)$ et de ϕ. Nous procédons par récurrence en supposant construits $(\Lambda\zeta^{<q}, d)$ et un morphisme

$$\phi\colon (C^\infty(\Lambda\zeta^{<q}), \delta) \to (C^\infty(\Lambda V_M^*), d_V)$$

satisfaisant à:

- $(\mathrm{i})_q$ $\zeta^{<q}$ est un fibré vectoriel gradué sur N, concentré en degrés $k \in [1, q - 1]$ et d est une différentielle et une dérivation de degré 1.
- $(\mathrm{ii})_q$ $\zeta^{<q}$ est la somme directe de sous-fibrés $\zeta_i \subset \zeta_i^{q(i)}$, $1 \le i \le s$, tels que $d\colon \zeta_i \to \Lambda\zeta_{<i}$ et $q(1) \le \cdots \le q(s) < q$.
- $(\mathrm{iii})_q$ Les applications $H^k(\phi_x)\colon H^k(\Lambda\zeta_x^{<q}) \to H^k_{DR}(F_x)$ sont bijectives pour $k < q$ et injectives pour $k = q$.

Le pas de récurrence consistera alors en la construction de ζ^q et en l'extension de d à $\Lambda\zeta^{\le q}$ et de ϕ à $C^\infty(\Lambda\zeta^{\le q})$ tels que $\phi\delta = d_V\phi$ et $(\mathrm{i})_{q+1}$, $(\mathrm{ii})_{q+1}$ et $(\mathrm{iii})_{q+1}$ soient satisfaits. Une fois ceci accompli nous aurons $(\Lambda\zeta, d)$ et ϕ avec (i)–(iv) satisfaits et il restera seulement à vérifier que $H(\phi)$ est un isomorphisme.

Effectuons maintenant le pas de récurrence. Les morphismes ϕ_x se relèvent (à homotopie près) en des morphismes $\psi_x\colon (\Lambda\zeta_x^{<q}, d_x) \to (\Lambda Z_x, d_x)$, $(\Lambda Z_x, d_x)$ étant un modèle minimal de Sullivan de $A_{DR}(F_x)$. Puisque $H(\psi_x)$

est bijectif en degrés $< q$, et est injectif en degré q, il résulte de [14; Chap. 7] que ψ_x est un isomorphisme sur $\Lambda Z_x^{<q}$. Les $(\Lambda Z_x, d_x)$ étant tous isomorphes (à un modèle minimal de $A_{DR}(F)$), il en résulte que:

(11.9) Pour tout k, les rangs de

$$d_x\colon (\Lambda\zeta_x^{<q})^k \to (\Lambda\zeta_x^{<q})^{k+1}$$

et de

$$H^k(\phi_x)\colon H^k(\Lambda\xi_x^{<q}) \to H^k_{DR}(F_x)$$

sont indépendants de $x \in N$.

On déduit de (11.9) que les espaces $H(\Lambda\zeta_x^{<q})_{x\in N}$ sont les fibres d'un fibré vectoriel gradué $H(\Lambda\zeta^{<q})$ et que $C^\infty(H(\Lambda\zeta^{<q})) = H(C^\infty(\Lambda\zeta^{<q}), \delta)$. Le morphisme

$$H(\phi)\colon H(C^\infty(\Lambda\zeta^{<q})) \to H(C^\infty(\Lambda V_M^*), d_V)$$

s'identifie alors, à l'aide de l'isomorphisme ε du Lemme 11.8, à un morphisme

$$C^\infty(H(\Lambda\zeta^{<q})) \to C^\infty(\mathscr{H}).$$

Comme tout morphisme de modules de sections, celui-ci est induit par un morphisme

$$\Phi\colon H(\Lambda\zeta^{<q}) \to \mathscr{H}$$

de fibrés vectoriels et on vérifie sans problème que $\Phi_x = H(\phi_x)$. Il résulte alors de (11.9) que Φ_x^k a un rang indépendant de x.

L'image de Φ^q est donc un sous-fibré; nous écrivons $\mathscr{H}^q = \operatorname{Im}\Phi^q \oplus \zeta_{s+1}^q$. Nous posons $d = 0$ sur ζ_{s+1}^q et nous étendons ϕ à $C^\infty(\zeta_{s+1}^q)$ en choisissant un relèvement de la surjection

$$(\ker d_V)^q \to H^q(C^\infty(\Lambda V_M^*), d_V) \xrightarrow{\cong} C^\infty(\mathscr{H}^q) \to C^\infty(\zeta_{s+1}^q).$$

Posons $\xi = \zeta^{<q} \oplus \zeta_{s+1}^q$ et notons ψ l'extension ci-dessus de ϕ. Il résulte de la description explicite [14; Chap. 6] des modèles minimaux que (comme pour $(\Lambda\zeta^{<q}, d)$) toutes les ADGC $(\Lambda\xi_x, d_x)$ sont isomorphes et que $H^k(\psi_x)$ est de rang constant.

En particulier, nous obtenons un morphisme Ψ: $H(\Lambda\xi) \to \mathscr{H}$ de fibrés vectoriels gradués avec $\Psi_x = H(\psi_x)$. Posons ζ_{s+2}^q égal au noyau de Ψ^{q+1} et notons

$$K^{q+1} \subset (\Lambda\xi)^{q+1}$$

le sous-fibré dont la fibre en x est $(\ker d_x)^{q+1}$. Relevons l'inclusion

$$\zeta^q_{s+2} \to H^{q+1}(\Lambda\xi)$$

en un morphisme $d\colon \zeta^q_{s+2} \to K^{q+1}$ et choisissons

$$\phi\colon C^\infty(\zeta^q_{s+2}) \to C^\infty(\Lambda^q V^*_M)$$

tel que $\phi \circ \delta = d_V \circ \phi$.

Cette procédure peut être répétée, et s'arrête après un nombre fini d'étapes, puisque le modèle minimal de $A_{DR}(F)$ est supposé de type fini. Le pas de récurrence est donc terminé.

Nous avons maintenant construit $(\Lambda\zeta, d)$ et un morphisme

$$\phi\colon (C^\infty(\Lambda\zeta), \delta) \to (C^\infty(\Lambda V^*_M), d_V),$$

satisfaisant aux conditions (i) à (iv). L'argument donné auparavant pour ϕ restreint à $\Lambda\zeta^{<q}$, identifie ici $H(\phi)$ au morphisme

$$C^\infty(H(\Lambda\zeta)) \to C^\infty(\mathscr{H})$$

induit par $\Phi\colon H(\Lambda\zeta) \to \mathscr{H}$, avec $\Phi_x = H(\phi_x)$. Il résulte de (iii) que Φ est un isomorphisme et il en est donc de même pour $H(\phi)$. ∎

RÉFÉRENCES

1. L. Avramov and S. Halperin, "Through the looking glass, a dictionary between rational homotopy and local algebra,', in *Algebra, algebraic topology and their interactions*, Lecture Notes in Math., no. 1183, Springer Verlag, Berlin, 1986, pp. 1–27.
2. A.K. Bousfield and V.K.A.M. Gugenheim, *On P.L. de Rham theory and rational homotopy type*, Mem. Amer. Math. Soc., vol. 179, 1976.
3. E.H. Brown, *Twisted tensor products*, Ann. of Math., vol. 69, (1959), pp. 223–246.
4. K.T. Chen, *Iterated integrals of differential forms and loop space homology*, Ann. of Math., vol. 97, (1973), pp. 217–246.
5. S. Eilenberg and J.C. Moore, *Limits and spectral sequences*, Topology, vol. 1 (1961), pp. 1–23.
6. Y. Félix, S. Halperin and J.-C. Thomas, *The homotopy Lie algebra for finite complexes*, Publ. Math. I.H.E.S., vol. 56 (1982) pp. 387–410.
7. ______, *Gorenstein spaces*, Adv. in Math., vol. 71 (1988), pp. 92–112.
8. A. Gómez-Tato, *Modelos minimales para la cohomologia torcida*, Thèse, Univ. de Santiago de Compostela, 1987.
9. ______, *Théorie de Sullivan pour la cohomologie à coefficients locaux*, Trans. Amer. Math. Soc., à paraître.
10. P.P. Grivel, *Formes différentielles et suites spectrales*, Ann. Inst. Fourier, vol. 29 (1979), pp. 17–37.
11. W. Greub, S. Halperin and R. Vanstone, *Connections, curvature and cohomology*, vol. I, Academic Press, N.Y., 1972.
12. V.K.A.M. Gugenheim, *On a perturbation theory for the homology of a loop space*, J. Pure Appl. Alg., vol. 25, (1982), pp. 197–205.

13. V.K.A.M. GUGENHEIM and J.D. STASHEFF, *On perturbations and $A(\infty)$-structures*, Bull. Soc. Math. Belg., vol. 37 (1986), pp. 237–246.
14. S. HALPERIN, *Lectures on minimal models*, Mém. SMF nouvelle série 9/10, 1983.
15. S. HALPERIN and J.D. STASHEFF, *Obstructions to homotopy equivalences*, Adv. in Math., vol. 32 (1979) pp. 233–279.
16. G. HIRSCH, *Sur les groupes d'homologie des espaces fibrés*, Bull. Soc. Math. Belg., vol. 6 (1953), pp. 79–96.
17. L. LAMBE and J.D. STASHEFF, *Applications of perturbation theory to iterated fibrations*, Manuscripta Math., vol. 58 (1987), pp. 363–376.
18. J.C. MOORE, *Algèbre homologique et homologie des espaces classifiants*, Séminaire Cartan 1959–60, Exposé 7.
19. D. QUILLEN, *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Math., no. 43, Springer Verlag, Berlin, 1967.
20. ______, *Rational homotopy theory*, Ann. of Math., vol. 90 (1969), pp. 205–295.
21. D. SULLIVAN, *Infinitesimal computations in topology*, Publ. IHES, vol. 47 (1977) pp. 269–331.
22. R. G. SWAN, *Vector bundles and projective modules*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 105 (1962), pp. 264–277.
23. D. TANRÉ, *Homotopie rationnelle: Modèles de Chen, Quillen, Sullivan*, Lecture Notes in Math., no. 1025, Springer Verlag, Berlin, 1983.
24. J.-C. THOMAS, *Eilenberg-Moore models for fibrations*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 274 (1982), pp. 203–225.
25. M. VIGUÉ-POIRRIER, *Réalisations de morphismes donnés en cohomologie et suite spectrale d'Eilenberg-Moore*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 265 (1981), pp. 447–484.
26. B. CENKL and R. PORTER, *Polynomial cochains on manifolds*, preprint.
27. S. SANEBLIDZE, *The set of multiplicative predifferentials and the rational cohomology algebra of fibre spaces*, J. Pure Appl. Alg., à paraître.

SCARBOROUGH COLLEGE, UNIVERSITY OF TORONTO
SCARBOROUGH, CANADA

UFR DE MATHÉMATIQUE, UNIVERSITÉ DE LILLE
VILLENEUVE D'ASCQ, FRANCE