ILLINOIS JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 30, Number 4, Winter 1986

SUR LA STRUCTURE DES ESPACES DE L.S. CATÉGORIE DEUX

PAR

YVES FELIX[1] ET JEAN-CLAUDE THOMAS[2]

0. Introduction

0.1. Tous les espaces S considérés dans cet article sont supposés 1-connexes, ayant le type d'homotopie d'un cw complexe et de cohomologie rationnelle $H^*(S; \mathbf{Q})$ de dimension finie en chaque degré. Chaque groupe abélien $\pi_i(S) \otimes \mathbf{Q}$ est alors de rang fini et le crochet de Whitehead, défini sur $\pi_*(S)$, munit $\pi(\Omega S) \otimes \mathbf{Q}$ d'une structure d'algèbre de Lie graduée appelée *l'algèbre de Lie d'homotopie rationnelle de S.*

Le but de cet article est l'étude de cette structure d'algèbre de Lie lorsque S est de catégorie rationnelle 2. Rappelons que la *catégorie de Lusternik-Schnirelmann* d'un espace topologique S, notée cat S, est le plus petit entier m tel que S puisse être recouvert par $m + 1$ ouverts contractiles dans S. La catégorie rationnelle d'un espace 1-connexe, notée $\mathrm{cat}_0(S)$, est par définition la catégorie du rationnalisé $S_{\mathbf{Q}}$ de S, et nous avons la relation

$$\mathrm{cat}_0 S \leq \mathrm{cat}\, S \qquad [31].$$

Le premier calcul de $\pi_*(\Omega S) \otimes \mathbf{Q}$ est dû à Hilton en 1955 [15]. Hilton y démontrait que, si S est un bouquet de sphères 1-connexes, alors $\pi_*(\Omega S) \otimes \mathbf{Q}$ est une algèbre de Lie graduée libre. Tout espace de catégorie rationnelle un ayant le type d'homotopie rationnelle d'un bouquet de sphères, le résultat de Hilton se généralise à ces espaces.

Pour les espaces de catégorie deux, ceci n'est plus vrai. La situation est beaucoup plus complexe. Par exemple, l'homotopie rationnelle de l'espace $(S^2 \vee S^2) \times S^2$ a un centre non nul. Ces espaces de catégorie deux constituent en fait rationnellement le premier type non évident de structure cellulaire. Ils ont été beaucoup étudiés, notamment par J.M. Lemaire dans sa thèse [18]. Ils sont très riches: C'est parmi ces espaces que D. Anick trouva un contre-exemple à la conjecture de Serre [1].

Received December 5, 1983.
[1] Chercheur qualifie au F.N.R.S.
[2] E.R.A. au C.N.R.S. 07590

0.2. Un 1-cône est par définition une suspension. Par récurrence un espace S sera dit un n-cône s'il a le type d'homotopie rationnelle de la cofibre d'une application continue d'un bouquet de sphères dans un $n-1$ cône. Une conjecture de Lemaire et Sigrist [21] s'énonce alors comme suit:

Conjecture Si S est un espace 1-connexe de catégorie rationnelle n, alors S est un n-cône.

Dans un premier temps nous montrons (Théorème 1) qu'un espace de LS catégorie 2 est un 2-cône , résolvant ainsi la conjecture de Lemaire-Sigrist dans le premier cas non trivial. Plus précisément, S a le type d'homotopie rationnelle de la cofibre d'une application continue f entre deux bouquets de sphères

$$\bigvee_{i=1}^{n} S^{d_i} \xrightarrow{f} \bigvee_{j=1}^{m} S^{d_j} \xrightarrow{g} S$$

telle que l'application induite par g en homologie sphèrique $H_*^s(g)$ soit bijective.

0.3. En ajoutant à S des cellules, de façon à rendre g surjective en homotopie, nous obtenons un cw complexe relatif $(\hat{S}, S)$ pour lequel nous démontrons le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *La fibre homotopique de l'inclusion naturelle k: $S \hookrightarrow \hat{S}$ a le type d'homotopie rationnelle d'un bouquet de sphères. La suite exacte longue d'homotopie de la fibration associée à k définit une extension triviale d'algèbres de Lie*

$$0 \to \mathbf{L}(U) \to \pi(\Omega S) \otimes \mathbf{Q} \to L_S \to 0$$

où $\mathbf{L}(U)$ désigne l'algèbre de Lie libre engendrée par un espace vectoriel U.

0.4. La structure de $\pi(\Omega S) \otimes \mathbf{Q}$ est donnée par cette extension. Elle fournit en outre le théorème suivant:

THÉORÈME 3–4. *Si* $\operatorname{cat}_0(S) = 2$ *et* $\dim \pi(\Omega S) \otimes \mathbf{Q} = \infty$, *alors*:

(a) *Si $S \neq S$, alors $\pi(\Omega S) \otimes \mathbf{Q}$ est une algèbre de Lie semi-simple infinie et est un produit semi-direct $\mathbf{L}(U) \ltimes L_S$ avec* $\dim U \geq 4$.

(b) *Si $S = \hat{S}$ alors $\pi(\Omega S) \otimes \mathbf{Q} = L_S$ et tout idéal résoluble de L_S est une algèbre de Lie libre à un seul générateur.*

Si en outre $\dim S = n$, *alors*:

(c) *Pour tout entier p, il existe $i \in]pn, (p+1)n[$ tel que $\pi_i(\Omega S) \otimes \mathbf{Q} \neq 0$.*

0.5. Il est bien connu [28], [9], [8] que les techniques de l'homotopie rationnelle s'appliquent à l'étude des anneaux locaux. Nous obtenons ainsi, en particulier:

THÉORÈME 5. *Soit* (A, m) *un anneau local noetherien de caractéristique zéro tel que* $m^3 = 0$. *Notons* L_A *l'algèbre de Lie des éléments primitifs de l'algèbre de Hopf* $\mathrm{Ext}_A(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ *et* $L_A^{(1)}$ *la sous-algèbre de Lie engendrée par les éléments de degré* 1. *Supposons que* A *n'est pas une intersection complète.*

(i) *Si* $L_A \neq L_A^{(1)}$, *alors* L_A *est semi-simple et contient une sous-algèbre de Lie libre à deux générateurs.*

(ii) *Si* $L_A = L_A^{(1)}$, *alors*:

(a) *Tout idéal résoluble de* L_A *a une dimension inférieure ou égale à deux.*

(b) *Si* L_A *n'est pas semi-simple, alors* L_A *contient une sous-algèbre de Lie libre de codimension finie.*

0.6. En utilisant le dictionnaire de [8, Théorème 1.4] le Théorème 3 se transpose non seulement aux anneaux locaux mais également aux algèbres de Lie graduées de type fini sur un corps de caractéristique zéro **k**. Nous laissons le soin au lecteur d'établir la correspondance.

0.7. Récemment, par des technique différentes, C. Löfwall [23] et R. Bøgvad [4] ont obtenu des résultats complémentaires fort intéressants sur le centre des algèbres de Lie graduées de dimension globale 2.

0.8. Le texte s'organise de la manière suivante:

(0) Introduction.
(1) Homotopie rationnelle.
(2) Espaces de catégorie 2 et 2-cônes.
(3) Homotopie d'un 2-cône.
(4) Structure de l'algèbre de Lie $\pi(\Omega S) \otimes \mathbf{Q}$.
(5) Applications à la cohomologie des anneaux locaux.
(6) Questions et problèmes.

1. Homotopie rationnelle et L.S. catégorie

L'homotopie rationnelle et la théorie des modèles minimaux sont les principaux outils de ce papier. Nous utiliserons les techniques standard de [3], [12], [27], [29]. Pour la commodité du lecteur, nous rappelons maintenant brièvement quelques définitions, notions et résultats.

1.1. Une *algèbre différentielle graduée commutative* (a.d.g.c.) (A, d_A) est une algèbre graduée A, commutative au sens gradué,

$$x \cdot y = (-1)^{|x| \cdot |y|} y \cdot x \cdot \text{ avec } |x| = \text{degré } de\ x,$$

munie d'une dérivation $d_A : A^p \to A^{p+1}$ vérifiant $(d_A)^2 = 0$.

Un morphisme d'a.d.g.c. φ: $(A, d_A) \to (B, d_B)$ induisant un isomorphisme en cohomologie est appelé un *quasi-isomorphisme*.

Si $X = \oplus_{p \geq 2} X^p$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel gradué, ΛX désigne l'algèbre commutative graduée libre sur X.

ΛX = l'algèbre extérieure (X^{impair}) $\otimes$ algèbre symétrique (X^{pair}). De façon évidente $\Lambda X = \mathbf{Q} \oplus \Lambda^+ X$ où $\Lambda^+ X$ désigne l'idéal d'augmentation de ΛX.

Une algèbre différentielle graduée commutative de la forme $(\Lambda X, d)$ est dite *minimale* si $d(X) \subset \Lambda^+ X \cdot \Lambda^+ X$.

Le *modèle minimal* d'une a.d.g.c. (A, d_A) est une paire formée d'une a.d.g.c. minimale $(\Lambda X, d)$ et d'un quasi-isomorphisme φ: $(\Lambda X, d) \to (A, d_A)$. Chaque a.d.g.c. (A, d_A) vérifiant $H^1(A, d_A) = 0$ a un modèle minimal unique à isomorphisme près [29].

Le *modèle minimal d'un espace S* est, par définition, le modèle minimal de l'algèbre des P.L. formes rationnelles sur S. Inversement, chaque algèbre minimale $(\Lambda X, d)$ est le modèle minimal d'un espace topologique, noté $\langle(\Lambda X, d)\rangle$, qui est sa réalisation géométrique [29].

ΛX est muni de deux graduations, l'une provenant de celle de X, l'autre de la décomposition $\Lambda X = \oplus_{p \geq 0} \Lambda^p X$ où $\Lambda^p X$ est l'espace vectoriel engendré par les mots de longueur p dans une base fixée de X. Comme $\operatorname{Im} d \subset \Lambda^+ X \cdot \Lambda^+ X$, d peut s'écrire comme somme de dérivations d_i $(i \geq 2)$ vérifiant $d_i(X) \subset \Lambda^i X$. En particulier $d_2^2 = 0$ et $(\Lambda X, d_2)$ est une a.d.g.c. minimale.

1.2. Le crochet de Whitehead sur $\pi_*(S)$ induit, par l'isomorphisme canonique de degré-1

$$\partial_*: \pi_*(S) \xrightarrow{\cong} \pi_*(\Omega S),$$

une structure d'algèbre de Lie sur $\pi_*(\Omega S) \otimes \mathbf{Q}$ isomorphe à l'algèbre de Lie des éléments primitifs de $H_*(\Omega S; Q)$.

$s^{-1} \operatorname{Hom}(X; \mathbf{Q})$ est aussi muni d'une structure d'algèbre de Lie graduée par la formule

$$\langle [s^{-1}\alpha, s^{-1}\beta]; x \rangle = \langle d_2 x; \alpha \wedge \beta \rangle.$$

THÉORÈME. (Andrews-Arkowitz, Sullivan). *Les algèbres de Lie graduées*

$$\pi_*(\Omega S) \otimes \mathbf{Q} \quad \textit{et} \quad s^{-1} \operatorname{Hom}(X; \mathbf{Q})$$

sont isomorphes.

1.3. L'entier m étant fixé, l'idéal $\Lambda^{>m} X$ est d-stable. Soit q: $(\Lambda X, d) \to (\Lambda X / \Lambda^{>m} X, \bar{d})$ la projection canonique et $(\Lambda Y, D)$ un modèle minimal de l'a.d.g.c. quotient $(\Lambda X / \Lambda^{>m} X, d)$. Nous obtenons ainsi le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda X, d) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "q"'] & (\Lambda Y, D) \arrow[d, "\eta"] \\
& (\Lambda X / \Lambda^{>m} X, \bar{d})
\end{tikzcd}$$

où η est un quasi-isomorphisme.

DÉFINITION [6]. $\mathrm{cat}(\Lambda X, d)$ est le plus petit entier m tel que α ait un inverse homotopique à gauche.

THÉORÈME [6]. *Si* $(\Lambda X, d)$ *est le modèle minimal d'un espace* S, *alors* $\mathrm{cat}(\Lambda X, d) = \mathrm{cat}_0(S)$.

1.4. Désignons par $\mathscr{C}^*$ le foncteur de Koszul défini comme suit [27, appendice B], [17]: Si $L = \oplus_{i \geq 2} L_i$ désigne une algèbre de Lie graduée,

$$\mathscr{C}^*(L) = \left(\Lambda s^{-1}\mathrm{Hom}(L, \mathbf{Q}), d_2\right)$$

où la différentielle d_2 est purement quadratique et définie par

$$\langle d_2 x; \alpha \wedge \beta\rangle = \pm\langle x; [\alpha, \beta]\rangle.$$

Un cw complexe est dit *coformel* [26] si $\mathscr{C}^*(\pi(\Omega S) \otimes \mathbf{Q})$ est un modèle minimal de S. Le type d'homotopie d'un espace coformel ne dépend que de sa structure d'algèbre de Lie d'homotopie rationnelle. En particulier, tous les produits de Whitehead d'ordre supérieur sont nuls.

1.5. Dans [8] nous montrons que la dimension globale d'une algèbre de Lie L (gl-dim L) est égale à la catégorie de $\mathscr{C}^*(L)$, c'est-à-dire à la catégorie rationnelle de l'espace conformel associé à L.

2. Espaces de catégorie 2 et 2-cônes

2.1. THÉORÈME 1. *Si S est un espace* 1-*connexe de catégorie* 2 *et de* Q-*type fini alors S a le type d'homotopie rationnelle du cône d'une* $\mathbf{Q}$-*type application* f *entre deux bouquets de sphères de type fini vérifiant en outre* $H^s(g)$ *bijectif.* [$H_*^s(X; \mathbf{Q})$ *désigne l'homologie sphérique de* X, *c'est-à-dire l'image de l'homomorphisme de Hurewicz*

$$\pi_*(X) \otimes \mathbf{Q} \xrightarrow{h} H_*(X; \mathbf{Q}),$$

et $H_*^s(g)$ *désigne le morphisme induit entre les homologies sphériques*].

Remarques. (a) Ceci démontre la conjecture de Lemaire-Sigrist [21] lorsque $\mathrm{cat}_0(S) \leq 2$. Il en résulte aussi que $(f(S) = 3) \Rightarrow (\mathrm{cat}_0 S = 3)$. Ainsi, par exemple, l'espace $S = (S^2 \vee \mathbf{C}P^2)\cup_{\alpha_2} e^7$ avec $\alpha = [i_2, h]$ où i_2 désigne le générateur de $\pi_2(S^2)$ et h l'élément de Hopf de $\pi_5(\mathbf{C}P^2)$, est de catégorie 3 [21].

(b) Soit f: $S_1 \to S_2$ une application continue entre deux cw complexes 1-connexes de $\mathbf{Q}$-type fini. Supposons que $\pi_*(f) \otimes \mathbf{Q}$ soit injective, alors d'après [6, 5.1], si S_2 est rationnellement un 2-cône, il en est de même de S_1. En particulier, tout retract d'un 2-cône est un 2-cône.

2.2. La démonstration du Théorème 1 se base sur le lemme suivant dont la démonstration est reportée au paragraphe 2.4.

LEMME 2. *Supposons* $\mathrm{cat}(\Lambda X, d) = 2$ *et* W *un sous-espace maximal d'indécomposables de* ΛX *vérifiant* $dW \subset \Lambda^2 W$, *alors il existe une décomposition de* ΛX *sous la forme* $\Lambda X = \Lambda W \otimes \Lambda V$ *avec*

(a) $dV \subset (\Lambda W \otimes \Lambda^+ V) \oplus \Lambda^{\geq 3} W$,

(b) $[\ker d \cap ((\Lambda W \otimes \Lambda^+ V) \oplus \Lambda^{\geq 3} W)] \subset d(\Lambda X)$.

2.3. *Démonstration du théorème* 1 Soit S un espace de catégorie rationnelle 2 et de modèle minimal $(\Lambda X, d)$. Avec les notations du lemme considérons la composé des projections canoniques

$$(\Lambda X, d) \xrightarrow{q} (\Lambda X / \Lambda^{\geq 3} X, \bar{d}) \xrightarrow{l} (\Lambda W / \Lambda^{\geq 3} W, \bar{d}).$$

Le lemme montre que l'application l a bien un sens et que le composé lq est injectif en cohomologie. Ecrivons

$$H(\Lambda W / \Lambda^{\geq 3} W, \bar{d}) = \mathrm{Im}(lq) \oplus T.$$

T est représenté dans $(\Lambda X, d)$ par un sous-espace R contenu dans $\Lambda^2 W$, de sorte que nous obtenons un quasi-isomorphisme

$$(\Lambda X, d) \xrightarrow{k} (\Lambda W / \Lambda^{\geq 3} W \oplus R, \bar{d}).$$

Munissons W de la graduation "inférieure" un, l'a.d.g.c.

$$(\Lambda W / \Lambda^{\geq 3} W \oplus R, \bar{d})$$

devient bigraduée. Son modèle minimal $(\Lambda X, d)$ est donc muni, quitte à remplacer X par un autre espace d'indécomposables, d'une bigraduation faisant de k un morphisme bigradué.

Notons $\overline{H}_1 = s^{-1} H_2\ (\Lambda X, d)$ et choisissons une section σ de la projection canonique $(\Lambda^2 X_1) \wedge \mathrm{Ker}\, d \to H_2(\Lambda X, d)$. Définissons alors la loi de multiplication et la différentielle dans l'a.d.g.c.

$$(\Lambda W / \Lambda^{\geq 3} W \oplus R \oplus \overline{H}_1, \hat{d})$$

par les règles, $\Phi \cdot \bar{h} = 0$, $\bar{h}_1 \cdot \bar{h}_2 = 0$, $\hat{d}(\bar{h}) = \sigma(h)$. Clairement

$$H_{\geq 2}(\Lambda W / \Lambda^{\geq 3} W \oplus R \oplus \overline{H}_1, \hat{d}) = 0.$$

Considérons maintenant la suite exacte d'a.d.g.c.

$$0 \to \left(\Lambda W/\Lambda^{\geq 3}W \oplus R, \bar{d}\right) \xrightarrow{i} \left(\Lambda W/\Lambda^{\geq 3}W \oplus R \oplus \overline{H}_1, \hat{d}\right) \to \left(\overline{H}_1, 0\right) \to 0.$$

Il résulte de [12, Théorème 15.18] que cette suite exacte peut être réalisée par une cofibration

$$\Sigma S_1 \xrightarrow{f} \Sigma S_2 \xrightarrow{g} S_Q,$$

où ΣS_1 (resp. ΣS_2) désigne la suspension de S_1 (resp. S_2). S a donc le type d'homotopie rationnelle du cône d'une application entre suspensions. ■

2.4. *Démonstration du lemme.* Considérons le diagramme commutatif suivant, où p est un quasi-isomorphisme:

$$\begin{tikzcd} (\Lambda X, d) \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "i"'] & (\Lambda X/\Lambda^{>2}X, \bar{d}) \\ & (\Lambda X \otimes \Lambda T, D). \arrow[u, "p"'] \end{tikzcd}$$

Comme $(\Lambda X, d)$ est de catégorie 2, i admet une rétraction

$$r\colon (\Lambda X \otimes \Lambda T, D) \to (\Lambda X, d)$$

vérifiant $r|_X = \mathrm{id}$ [6]. Pour obtenir le résultat souhaité, nous allons construire par récurrence un espace vectoriel d'indécomposables $W \oplus (v_i)_{1 \leq i \leq j}$ vérifiant:

(1) $dv_i \in (\Lambda^+ V_{<i} \otimes \Lambda W) \oplus \Lambda^{\geq 3}W \quad [V_{<i} = (v_1, \dots, v_{i-1})]$;

(2) $\operatorname{Ker} d \cap ((\Lambda^+ V_{\leq j} \otimes \Lambda W) \oplus \Lambda^{\geq 3}W) \subset d(\Lambda X)$;

(3) Il existe une suite de générateurs t_i de T avec

$$Dt_i \in \Lambda W \otimes \Lambda T_{<i}, \; r(t_i) = v_i \text{ et } p(t_i) = 0.$$

Supposons avoir construit $(v_1, \dots, v_j)$ vérifiant (1), (2) et (3). Quitte à effectuer un changement de base, nous pouvons supposer que $W \oplus (v_i)_{1 \leq i \leq j} \subset X$. Soit alors σ un élément de degré minimal dans un supplémentaire de $W \oplus (v_i)$ dans X.

$$d\sigma \in \left(\Lambda^+ V_{\leq j} \otimes \Lambda W\right) \oplus \Lambda^{\geq 2}W.$$

$d\sigma = \alpha + \beta$ avec α dans $\Lambda^2 W$ et β dans $(\Lambda^+ V_{\leq j} \otimes \Lambda W) \oplus \Lambda^{\geq 3}W$. $d\alpha = d\beta = 0$. Par (2), β est un d-cobord, α est donc aussi un d-cobord. Posons $\alpha = d\gamma$ $(\gamma \in W)$ et $v'_{j+1} = \sigma - \gamma$.

L'hypothèse d'induction montre que la restriction de la rétraction r à $\Lambda W \otimes \Lambda T_{\leq j}$ est un isomorphisme

$$r: (\Lambda W \otimes \Lambda T_{\leq j}, D) \to (\Lambda W \otimes \Lambda V_{\leq j}, d),$$

$r^{-1}(dv'_{j+1})$ est un cocycle de $(\Lambda W \otimes \Lambda T_{\leq j}, D)$. Comme $p(r^{-1}dv'_{j+1}) = 0$, il existe un Φ dans $(\Lambda X \otimes \Lambda T, D)$ avec $D\Phi = r^{-1}(dv'_{j+1})$. $p\Phi$ est un cocycle. p étant surjective au niveau cochaînes et au niveau cohomologies, p est surjective sur les cocyles. Il existe donc un cocycle α avec $p(\alpha) = p(\Phi)$. Posons dans ce cas $\Phi' = \Phi - \alpha$. $d\Phi' = r^{-1}dv'_{j+1}$; $p(\Phi') = 0$. Φ' appartient donc à $\Lambda^+ T \otimes \Lambda X$. Φ' est indécomposable, car autrement $r\Phi'$ serait décomposable et ceci contredit l'hypothèse de maximalité sur W.

Avec un changement de générateurs, on peut supposer $\Phi' \in T$. On pose alors $t_{j+1} = \Phi'$ et $v_{j+1} = r(t_{j+1})$. Comme $dv_{j+1} = dv'_{j+1}$, les hypothèses 1 et 3 sont vérifiées jusqu'en $j + 1$.

A ce niveau, la restriction de r à $\Lambda W \otimes \Lambda T_{\leq j+1}$ est un isomorphisme

$$r: (\Lambda W \otimes \Lambda T_{\leq j+1}, D) \to (\Lambda W \otimes \Lambda V_{\leq j+1}, d).$$

Si maintenant $\alpha \in \ker d \cap ((\Lambda^+ V_{\leq j+1} \otimes \Lambda W) \oplus \Lambda^{\geq 3} W)$, alors $pr^{-1}\alpha = 0$, $r^{-1}(\alpha) = D(u)$ et $\alpha = dr(u)$ ce qui prouve (2). ■

3. Homotopie d'un 2-cône

3.1. Soit S le cône d'une application f entre suspensions

$$\Sigma S_1 \xrightarrow{f} \Sigma S_2 \xrightarrow{g} S.$$

Supposons que $H^s_*(g)$ soit bijectif. Définissons L_S comme l'algèbre de Lie $\pi_*(\Omega\Sigma S_2) \otimes \mathbf{Q}/\mathrm{Im}\, \pi_*(\Omega f) \otimes \mathbf{Q}$. L_S est non seulement un invariant de la cofibration, mais surtout un invariant de S (Prop. 3.4.). D'après [19, prop. 2.10], on a clairement:

PROPOSITION. $L_S \cong \mathrm{Im}\, \pi_*(\Omega g) \otimes \mathbf{Q}$.

3.2. L'intérêt de L_S réside dans le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Si S est de catégorie rationnelle 2, alors S a le type d'homotopie rationnelle de l'espace total d'une fibration $F \to E \to B$ où $\pi_*(\Omega B) \otimes \mathbf{Q} = L_S$ et où F a le type d'homotopie rationnelle d'un bouquet de sphères. La suite exacte d'homotopie de la fibration induit en outre une extension d'algèbres* *de Lie*

$$0 \to \mathbf{L}(U) \to \pi_*(\Omega S) \otimes \mathbf{Q} \to L_S \to 0.$$

Démonstration. Soit $f\colon \Sigma S_1 \to \Sigma S_2$ une application continue de cofibre

$$\Sigma S_2 \xrightarrow{g} S.$$

Nous pouvons supposer (§2) que $H_*^s(g)$ est bijectif. Notons alors $(\Lambda Z, d)$ un modèle minimal à différentielle quadratique de ΣS_2 et R un supplémentaire des cocycles dans $\Lambda^2 Z$. $I = R \oplus \Lambda^{\geq 3} Z$ est un idéal acyclique. Comme $\pi_*(f) \otimes \mathbf{Q}$ est injectif, f admet un modéle surjectif du type

$$(\Lambda Z/I, \bar{d}) \xrightarrow{\bar{f}} (\tilde{H}^*(\Sigma S_1), 0).$$

Il résulte alors de [12, Théorème 15.18] que $\ker \bar{f}$ est un modèle de S. Munissons $(\Lambda Z/I, \bar{d})$ d'une nouvelle graduation, notée inférieurement, en munissant Z de la graduation 1. Munissons également $\tilde{H}^*(\Sigma S_1; \mathbf{Q})$ de la graduation 1. $\bar{f}$ devient ainsi un morphisme bigradué d'a.d.g.c. bigraduées. $\ker \bar{f}$ est donc aussi bigradué. Notons

$$(\Lambda X, d) \xrightarrow{u} (\ker \bar{f}, d)$$

un modèle minimal muni d'une bigraduation $X = \oplus X_p^q$ pour laquelle u est homogène. φ induit à son tour un morphisme bigradué ψ rendant commutatif à homotopie près le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (\ker \bar{f}, d) \arrow[r, "\varphi"] & (\Lambda Z/I, \bar{d}) \arrow[r, "\bar{f}"] & \tilde{H}^*(\Sigma S_1; \mathbf{Q}) \arrow[r] & 0. \\
& (\Lambda X, d) \arrow[u, "u", "\wr"'] \arrow[r, "\psi"] & (\Lambda Z, d) \arrow[u, "\wr"'] & &
\end{tikzcd}$$

Considérons maintenant la fibration rationnelle [12], [30]

$$(\Lambda X_1, d) \to (\Lambda X, d) \to (\Lambda X_{\geq 2}, \bar{d})$$

$(\Lambda X_{\geq 2}, \bar{d})$ est quasi-isomorphe à $(\Lambda X \otimes \Lambda \overline{X}_1, D)$ où $\overline{X}_1$ est muni de la graduation inférieure 0 et où D vérifie $D\bar{x}_1 - x_1 \in \Lambda^2(X \oplus \overline{X}_1)$. Cette dernière a.d.g.c. est elle-même quasi-isomorphe à $(\ker \bar{f} \otimes \Lambda \overline{X}_1, D')$:

$$(\Lambda X \otimes \Lambda \overline{X}_1, D) \xrightarrow[\cong]{u \otimes \mathrm{id}} (\ker \bar{f} \otimes \Lambda \overline{X}_1, D').$$

Comme $\ker\bar{f}$ est concentré en graduations 0, 1 et 2, il en est de même de $\ker\bar{f}\otimes\Lambda\bar{X}_1$ et donc $H_{\geq 3}(\Lambda X_{\geq 2}, \bar{d}) = H_{\geq 3}(\ker\bar{f}\otimes\Lambda\bar{X}_1, D') = 0$. Il en résulte que $(\Lambda X_{\geq 2}, \bar{d})$ a le type d'homotopie rationnelle d'un bouquet de sphères d'homologie réduite $H_2(\Lambda X_{\geq 2}, \bar{d}) \cong X_2 = U$.

Il en résulte que

$$L_S = \operatorname{Im}\pi(\Omega g)\otimes\mathbf{Q} = \operatorname{Im} s^{-1}\mathrm{Hom}(\psi_1, \mathbf{Q}) = s^{-1}\mathrm{Hom}(X_1, \mathbf{Q}). \blacksquare$$

3.3. Proposition. *Soit S un espace de catégorie rationnelle 2, les conditions suivantes sont équivalentes.*

(1) *S est coformel.*

(2) *Toute cofibration*

$$\Sigma S_1 \xrightarrow{f} \Sigma S_2 \xrightarrow{g} S$$

avec $H_*^s(g)$ bijectif vérifie $L_S = \pi_*(\Omega S)\otimes\mathbf{Q}$.

(3) *Il existe une cofibration*

$$\Sigma S_1 \xrightarrow{f} \Sigma S_2 \xrightarrow{g} S$$

avec $H_*^s(g)$ bijectif et $\pi_*(g)\otimes\mathbf{Q}$ surjectif.

(4) *$\pi_*(\Omega S)\otimes\mathbf{Q}$ est engendrée comme algèbre de Lie par un espace vectoriel V tel que le morphisme de Hurewicz restreint*

$$h|_V\colon \pi_*(S)\otimes\mathbf{Q}\to H_*(S;\mathbf{Q})$$

soit injectif.

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2) Avec les notations de la démonstration du Théorème 2, $X_{\geq 2}$ doit être nul, car autrement d ne peut pas être quadratique. $X = X_1$ et donc $L_S \cong \pi_*(\Omega S)\otimes\mathbf{Q}$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Evident.

(3) $\Rightarrow$ (4) Résulte du diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_*(\Sigma S_2;\mathbf{Q}) & \xrightarrow{\quad H_*(g;\mathbf{Q})\quad} & H_*(S;\mathbf{Q}) \\ \uparrow h & & \uparrow h \\ \pi_*(\Sigma S_2)\otimes\mathbf{Q} & \xrightarrow{\quad \pi_*(g)\otimes\mathbf{Q}\quad} & \pi_*(S)\otimes\mathbf{Q} \end{array}$$

(4) $\Rightarrow$ (1) $s^{-1}\mathrm{Hom}(X;\mathbf{Q})$ doit être engendré comme algèbre de Lie par

$$s^{-1}\mathrm{Hom}(X\cap\ker d, \mathbf{Q}) = s^{-1}\mathrm{Hom}(X_1\cap\ker d, \mathbf{Q}).$$

Comme $d(X_2) \subset \Lambda^3 X_1$, $X_2 = 0$. Il en résulte que $d(X_3) \subset \Lambda^4 X_1$ et donc que $X_3 = 0$, et ainsi de suite. Finalement, $X = X_1$ et S est coformel (1.4). ■

3.4. PROPOSITION. *La classe d'isomorphisme de L_S est canonique.*
Démonstration. Toute cofibration

$$\Sigma S_1 \xrightarrow{f} \Sigma S_2 \xrightarrow{g} S$$

avec $H_*^s(g)$ bijectif fournit un modèle de Quillen $(\mathbb{L}(V), d)$ vérifiant

$$V = V_0 \oplus V_1, d(V_0) = 0, d(V_1) \subset L(V_0), V_0 \cong s^{-1}H_*^s(S; \mathbf{Q}).$$

Comme L_S est isomorphe à $H_0(\mathbb{L}(V), d)$, montrons que cette dernière algèbre de Lie est canonique.

Soient donc $(\mathbb{L}(V), d)$ et $(\mathbb{L}(V'), d')$ deux modèles minimaux de Quillen de S du type précédent et φ: $(\mathbb{L}(V), d) \to (\mathbb{L}(V'), d')$ un isomorphisme: $\varphi = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varphi_i$ avec $\varphi_i(\mathbb{L}(V))_k \subset \mathbb{L}(V')_{k-i}$. L'hypothèse $H_*^s(g)$ bijectif montre alors que la restriction de φ_0 aux indécomposables est un isomorphisme.

Construisons donc $\psi(\mathbb{L}(V), d) \to (\mathbb{L}(V'), d')$ en posant $\psi(V_i) = \varphi_0(V_i)$ et en étendant ψ en un morphisme d'algèbres de Lie. Un petit calcul montre que ψ est compatible avec les différentielles Comme ψ restreint aux indécomposables est un isomorphisme, ψ est un isomorphisme et $H_0(\mathbb{L}(V), d) \simeq H_0(\mathbb{L}(V'), d')$. ■

3.5. Dans la fibration $F \to E \to B$ du paragraphe 3.2., la représentation d'holonomie définit une opération de $H_*(\Omega B; \mathbf{Q})$ sur $H_*(F; \mathbf{Q})$. Ceci fournit l'action de L_S sur U du Théorème 2.

De simples calculs montrent alors: La dimension globale de L_S est 3 si et seulement si U est un $U(L_S)$-module libre.

Plus généralement, la dimension globale de L_S est égale à deux plus la dimension projective de U comme L_S-module

$$\operatorname{gl}\dim(L_S) = 2 + \operatorname{proj}\dim(U).$$

$\operatorname{Tor}^3_{U(L_S)}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}) \cong U \otimes_{\mathrm{U(L_S)}} \mathbf{Q}.$

4. Structure de l'algèbre de Lie de $\pi_*(\Omega S) \otimes \mathbf{Q}$

Dans cette section, nous démontrons les Théorèmes 3 et 4 de l'introduction.

4.1. THÉORÈME 3. *Soit S un cw-complexe 1-connexe de $\mathbf{Q}$-type fini tel que* $\operatorname{cat}_0 S = 2$ *et* $\dim \pi(S) \otimes \mathbf{Q} = \infty$.

(a) *Si S n'est pas coformel, alors $\pi(\Omega S) \otimes \mathbf{Q}$ est isomorphe au produit semi-direct* $\mathbf{L}(U) \ltimes L_S, \dim U \geq 4$ *et* $\pi(\Omega S) \otimes \mathbf{Q}$ *ne contient pas d'idéaux résolubles non nuls.*

(b) *Si S est coformel, alors tout idéal résoluble de L_S est soit une algèbre libre engendrée par un élément de degré impair, soit le centre $Z(S) = (\alpha)$ de L_S et dans ce cas $|\alpha|$ est pair.*

4.2. Théorème 4. *Si, en outre,* $\dim S \leq n$, *alors pour tout entier p, il existe $i \in]pn, (p+1)n[$ tel que $\pi_i(\Omega S) \otimes \mathbf{Q} \neq 0$.*

4.3. *Remarques.* (1) Le Théorème 3 exprime que $\pi(\Omega S) \otimes \mathbf{Q}$ est "semi-simple" si S est non coformel.

(2) Du Théorème 3 et de [7], il résulte que $\pi(\Omega S) \otimes \mathbf{Q}$ contient une sous-algèbre de Lie libre sur deux générateurs sauf peut-être si $\pi(\Omega S) \otimes \mathbf{Q} = L_S$ est "semi-simple".

(3) Dans tous les cas, $\pi(\Omega S) \otimes \mathbf{Q}$ contient une sous-algèbre "semi-simple" de codimension finie.

4.4. *Exemples.* (1) Les espaces de catégorie 2, $S^3 \times (S^5 \vee S^5)$ et $S^2 \times (S^5 \vee S^5)$ sont coformels. L'inclusion de $S^3 \to S^3 \times (S^5 \vee S^5)$ et l'application de Hopf $S^3 \to S^2$ définissent des éléments non triviaux dans le centre de chacune des algèbres de Lie d'homotopie.

(2) Soit S le cw complexe défini par

$$S = S_a^2 \vee S_b^2 \vee S_c^2 \bigcup_{\omega_1} e^4 \bigcup_{\omega_2} e^4$$

avec $\omega_1 = [i_a, i_a] - [i_b, i_b]$ et $w_2[i_b, i_b] - [i_c, i_c]$ où i_a (resp. i_b, i_c) désigne l'injection de S_a^2 (resp. S_b^2, S_c^2) dans S.

$\mathrm{cat}_0 S = 2$, $\dim \pi(\Omega S) \otimes \mathbf{Q} = 2$ et $[i_a, i_a]$ est dans le centre de $\pi(\Omega S) \otimes \mathbf{Q}$. Par suite, S est coformel et $\pi_{>4}(\Omega S) \otimes \mathbf{Q}$ est une sous-algèbre libre de $\pi(\Omega S) \otimes \mathbf{Q}$ [7]

(3) Considérons l'espace formel S d'algèbre de cohomologie

$$H = \Lambda(x, y, z, t)/(xy, x^2 - y^2, zx, ty, zt), |x| = |y| = 2, |z| = |t| = 3,$$

alors

$$S \sim_{\mathbf{Q}} (S_a^2 \vee S_b^2 \vee S_c^3 \vee S_d^3) \bigcup_{[a,a]-[b-b]} e^4 \bigcup_{[a,c]} e^5 \bigcup_{[b,d]} e^5.$$

$\mathrm{cat}_0 S = e(S) = n(S) = 2$ [6] et $[a, b]$ est un élément du centre de

$$\pi(\Omega S) \otimes \mathbf{Q} \simeq \mathbf{L}(a, b, c, d) \Big/ \left(\begin{matrix} [a,a] - [b,b] \\ [a,c], [b,d] \end{matrix} \right)$$

Par suite S est coformel.

La démonstration du Théorème 3(a) respose sur la Proposition 4.5 suivante.

Rappelons que d'après 3.2, nous avons une fibration (*) $F \to S \to B$ avec $\pi_*(\Omega B) \otimes \mathbf{Q} = L_S$, F un wedge de sphères, $\pi_*(\Omega(F)) \otimes \mathbf{Q} \cong \mathbb{L}(U)$, ainsi que la suite exacte d'algèbres de Lie scindée

$$0 \to \mathbb{L}(U) \to \pi(\Omega S) \otimes \mathbf{Q} \to L_S \to 0.$$

Pour tout espace M et toute application f, notons E l'espace total de la fibration image réciproque de (*) par f:

$$\begin{array}{ccc} F & = & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \xrightarrow{\bar{f}} & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & B. \end{array}$$

4.5. PROPOSITION. *Sous les hypothèses du Théorème* 3 *et si*

$$L_S \neq \pi(\Omega S) \otimes \mathbf{Q},$$

pour tout $\alpha \in \pi(\Omega S) \otimes \mathbf{Q}$ *se projetant en* $\bar{\alpha} \neq 0 \in L_S$, *il existe* f: $M \to B$ *tel que*

$$E = \Big(\bigvee_{i \geq 1} S^{d_i}\Big) \vee P \quad \textit{et} \quad \alpha \in \pi_*(\Omega P) \otimes \mathbf{Q}.$$

Plus précisément:

(a) *Si* $|\alpha| = 2k$, *alors* $M = P = S^{2k+1}$.

(b) *Si* $|\alpha| = 2k - 1$ *et* $[\alpha, \alpha] \neq 0$, *alors* $M = P = S^{2k}$.

(c) *Si* $|\alpha| = 2k - 1$ *et* $[\alpha, \alpha] = 0$, *alors* $M = K(\mathbf{Q}, 2k)$ *et* P *désigne l'espace formel d'algèbre de cohomologie* $\Lambda x/x^3$, $|x| = 2k$.

4.6. *Preuve*. Soit $(\Lambda X, d)$ le modèle minimal bigradué de S introduit dans la preuve de 3.2 et $x \in X_1$ tel que $\langle x, \alpha \rangle = 1$. Quitte à quotienter par des générateurs de degré plus petit que celui de x, on peut supposer que $dx = 0$. Comme $\operatorname{cat}(\Lambda X, d) = 2 = e(\Lambda X, d)$ [6], il existe $n \geq 3$ et y tel que $dy = x^n$. En fait, on a les trois possibilitiés suivantes:

(a) $|\alpha|$ est pair, alors $y = 0$.

(b) $|\alpha|$ est impair et $[\alpha, \alpha] \neq 0$, alors $y \in X_1$ et $n = 2$.

(c) $|\alpha|$ est impair et $[\alpha, \alpha] = 0$, alors $y \in X_2$ et $n = 3$.

Considérons alors la projection p: $(\Lambda X_1, d) \to (H, 0)$ où

$$H = \begin{cases} (\Lambda x) & \text{dans le cas } a \text{ ou } c \\ (\Lambda x/x^2) & \text{dans le cas } b, \end{cases}$$

et le diagramme de somme amalgamée

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda X_{\geq 2}, \hat{d}) \arrow[r, equal] & (\Lambda X_{\geq 2}, \hat{d}) \\
(\Lambda X, d) \arrow[u] \arrow[r, "\bar{p}"] & (\mathrm{H}, 0) \otimes_{\Lambda X_1} (\Lambda X, d) \xrightarrow{\cong} (H \otimes \Lambda X_{\geq 2}, \hat{d}) \arrow[u] \\
(\Lambda X_1, \mathrm{d}) \arrow[u, hook] \arrow[r, "p"'] & (H, 0). \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

On construit alors un KS modèle de $\bar{p}$ [12]:

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda X, d) \arrow[r, "\bar{p}"] \arrow[dr] & (H \otimes \Lambda X_{\geq 2}, \hat{d}) \\
& (\Lambda X \otimes \Lambda \overline{Y}, d') \arrow[u, "\sim"] \to (\Lambda \tilde{Y}, \bar{d}')
\end{tikzcd}$$

où $\overline{Y}$ est concentré en graduation zéro, d'où la suite de quasi-isomorphismes

$$\left(H \otimes \Lambda X_{\geq 2}, \hat{d}\right) \xleftarrow{\sim} (\Lambda X \otimes \Lambda \overline{Y}, d') \xleftarrow[\mu]{} (\ker \bar{f} \otimes \Lambda \overline{Y}, d'')$$

où $\ker \bar{f}$ et μ sont définis comme dans la preuve de 3.2.

Puisque $H_{\geq 3}(\ker \bar{f} \otimes \Lambda \overline{Y}, d'') = 0$, le seul produit éventuellement non nul dans $H(H \otimes \Lambda X_{\geq 2}, \tilde{d})$ est représenté par x^2.

Comme, $(H \otimes \Lambda X_{\geq 2}, \tilde{d})$ est un modèle de E [12] la démonstration est terminée. ■

4.7. *Preuve du Théorème* 3(a). (1) *Estimation de* $\dim U$. L'hypothèse $L_S \neq \pi_*(\Omega S) \otimes \mathbf{Q}$ entraîne évidemment que $\dim U \geq 1$.

Supposons que L_S ne soit pas concentré en degrés impairs, alors d'après 4.5(a), il existe une fibration

$$F \to E \to S^{2k+1} \quad \text{telle que } E = \bigvee_{i \geq 1} S^{d_i} \vee S^{2k+1}.$$

Considérons la suite exacte longue d'homotopie de cette fibration

$$0 \to \mathbf{L}(U) \to \mathbf{L}(U \oplus (\alpha)) \to \mathbf{L}(\alpha) \to 0.$$

En considérant la suite spectrale [18] convergente

$$\mathrm{Tor}_*^{T(\alpha)}\big(\mathbf{Q}, \mathrm{Tor}_*{}^{T(U)}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q})\big) \Rightarrow \mathrm{Tor}_*{}^{T(V \oplus \alpha)}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q})$$

on voit facilement par un "argument de coin" que

$$\mathrm{Tor}_1^{T(\alpha)}\big(\mathbf{Q}, \mathrm{Tor}_1^{T(U)}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q})\big) = 0$$

d'où $U \cong \mathrm{Tor}_1^{T(U)}(\mathbf{Q},\mathbf{Q})$ est un $T(\alpha)$-module libre, ce qui entraîne que dim $U = \infty$.

Supposons maintenant que L_S soit concentré en degrés impairs, L_S est abélienne et $\mathscr{C}^*(L_S) = \Lambda Y$ est une algèbre symétrique ($Y = Y^{\mathrm{pair}}$) et d'après (3.2), $(\Lambda Y/\Lambda^{\geq 3}Y, 0)$ est un modèle de S.

La projection canonique $(\Lambda Y, 0) \to (\Lambda Y/\Lambda^{\geq 3}Y, 0)$ correspondant à la projection $S \to B$, il en résulte que

$$\left(\Lambda Y/\Lambda^{\geq 3}Y \otimes \Lambda\overline{Y}, d\right) = \left(\left(\Lambda Y/\Lambda^{\geq 3}Y, 0\right) \otimes_{\Lambda Y} (\Lambda Y \otimes \Lambda\overline{Y}, d')\right)$$

est un modèle de f. Ainsi,

$$\dim U = \dim H^*(F,\mathbf{Q}) = \dim H\left(\Lambda Y/\Lambda^{\geq 3}Y \otimes \Lambda\overline{Y}, d\right).$$

Considérons alors la suite exacte courte

$$0 \to \left(\Lambda^{\geq 3}Y \otimes \Lambda\overline{Y}, d'\right) \to \left(\Lambda Y \otimes \Lambda\overline{Y}, d'\right) \to \left(\Lambda Y/\Lambda^{\geq 3}Y \otimes \Lambda\overline{Y}, d\right) \to 0$$

et la graduation définie par la longueur des mots en Y. Comme $(\Lambda Y \otimes \Lambda\overline{Y}, d')$ est acyclique,

$$\dim H\left(\Lambda Y/\Lambda^{\geq 3}Y \otimes \Lambda\overline{Y}, d\right) = \dim H\left(\Lambda^{\geq 3}Y \otimes \Lambda\overline{Y}, d'\right).$$

Or $H(\Lambda^{\geq 3}Y \otimes \Lambda\overline{Y}, d') = d'(\Lambda^2 Y \otimes \Lambda\overline{Y})$. Ce dernier espace s'identifiant lui-même à un supplémentaire de $d'(Y \otimes \Lambda\overline{Y})$ dans $\Lambda^2 Y \otimes \Lambda\overline{Y}$. Il en résulte que

$$\dim U < \infty \quad \text{si} \dim Y < \infty$$

et que si $\dim Y = 1$, $\dim U = 0$, donc $\dim Y \geq 2$ et alors $\dim U \geq 4$

(2) *Semi-simplicité de* $\pi(\Omega S) \otimes \mathbf{Q}$. Soit $\alpha \in I$, $\alpha \neq 0$ et supposons que I soit un idéal résoluble, alors la projecton $\bar{\alpha}$ de α dans L_S est différente de zéro. D'après (4.5), il existe $\beta \in \mathbb{L}(U)$ tel que $\mathbb{L}(\alpha, \beta)$ soit une sous-algèbre libre de $\pi(\Omega S) \otimes \mathbf{Q}$ ce qui contredit le fait que I est résoluble.

4.8. *Preuve du Théorème* 3(b). Si S est coformel, d'après (3.3),

$$L_S = \pi(\Omega S) \otimes \mathbf{Q}.$$

Considérons un idéal résoluble I de L_S, alors $I_{\mathrm{pair}} = \oplus_{i=1}^{\infty} I_{2i}$ est une sous-algèbre de Lie de dimension globale ≤ 2 [6, Théorème 5.1] qui est résoluble. Nécessairement [8, Théorème 2], dim I_{pair} est finie. En appliquant alors [6, Prop. 10.6] à $\mathscr{C}^*(I_{\mathrm{pair}})$ nous obtenons que dim $I_{\mathrm{pair}} \leq 2$. Puisque dim $L_S = \infty$, choisissons $\alpha \neq 0$, $\alpha \in (L_S)_{\mathrm{pair}}$ tel que $|\alpha| > \sup\{i \mid I_i \neq 0\}$.

Alors $I_{\mathrm{pair}} \oplus (\alpha)$ est une sous-algèbre de L_S. Par suite gl-dim$(I_{\mathrm{pair}} \oplus (\alpha)) \leq 2$, ce qui n'est possible que si gl-dim$(I_{\mathrm{pair}}) \leq 1$.

Or si $\dim(I_{\text{pair}}) = 0$, $I = 0$ et si

$$\text{gl-dim}(I_{\text{pair}}) = \dim(I_{\text{pair}}) = 1,$$

alors il n'y a que deux possibilités:

(a) $I_{\text{imp}} = (\beta)$ et $([\beta, \beta]) = I_{\text{pair}}$.

(b) $I_{\text{imp}} = 0$ et $(\beta) = I_{\text{pair}}$ et dans ce cas $I_{\text{pair}} = I$ est le centre de L_S. ∎

4.9. *Preuve du Théorème* 4. Supposons l'existence d'un $p > 0$ tel que, pour chaque i, $pn < i < (p+1)n$, $\pi_i(\Omega S) \otimes \mathbf{Q} = 0$.

Désignons alors par c_k un crochet de longueur $k - 1$ de la forme

$$c_k = [\alpha_k, [\alpha_{k-1}, [\dots[\alpha_2, \alpha_1]\dots]$$

avec $|\alpha_i| \leq n - 1$, $\alpha_i \in L_S$.

Désignons par c_i les crochets intermédiaires

$$c_i = [\alpha_i, [\alpha_{i-1}, \dots [\alpha_2, \alpha_1]\dots].$$

Comme $|c_i| \geq 1$ et $|c_i| - |c_{i-1} \leq n - 1$, c_k doit être nul pour $k > pn$. L_S est donc de dimension finie. Or $\pi_*(S) \otimes \mathbf{Q}$ est de dimension infinie. Il en résulte que S n'est pas coformel.

Si $(\Lambda X, d)$ désigne le modèle minimal de S, supposons que pour tout i,

$$pn + 1 < i \leq (p+1)n, \quad X^i = 0.$$

Soit alors k maximal tel que $k \leq pn + 1$ et $X^k \neq 0$. Toute application linéaire f: $X^k \to \mathbf{Q}$ se prolonge en une dérivation θ_f de ΛX de degré $-k$ avec $[\theta, d] = 0$. par définition, θ_f est un élément non nul du groupe de Gottlieb $G_\psi(S) \cong Z(S)$ [7] ce qui contredit 4.1(a). ∎

5. Applications à la cohomologie des anneaux locaux (A, m) vérifiant $m^3 = 0$

5.1. Soit (A, m) un anneau local (commutatif, noetherien) de corps résiduel $\mathbf{K} = A/m$. La q^e déviation de A, $e_q(A)$, est égale au nombre de variables de degré q sur A [2]. La première déviation $e_1(A)$ est égale à la dimension d'immersion de A et la série de Poincaré de A est définie par la formule

$$P_A(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \dim_k(\operatorname{Tor}_j^A(\mathbf{K}, \mathbf{K}) t^j = \prod_{q=1}^{\infty} \frac{(1 + t^{2q-1})^{e_{2q-1}}}{(1 - t^{2q})^{e_{2q}}}.$$

Si A est une intersection complète, alors $e_q(A) = 0$ pour $q > 2$ [11] et nous avons la conjecture d'Avramov-Gulliksen [2]: "Si A n'est pas une intersection complète, alors $e_q(A) > 0\ \forall q$".

5.2. Supposons désormais $m^3 = 0$ et $\mathbf{K}$ de caractéristique zéro. Soit $\mathrm{Ext}_A^{(1)}(\mathbf{K}, \mathbf{K})$ la sous-algébre de Hopf de $\mathrm{Ext}_A(\mathbf{K}, \mathbf{K})$ engendrée par les éléments de degré 1 [24]. Désignons aussi par L_A (resp. $L_A^{(1)}$ l'algèbre de Lie des éléments primitifs de $\mathrm{Ext}_A(\mathbf{K}, \mathbf{K})$ (resp. $\mathrm{Ext}_A^{(1)}(\mathbf{K}, \mathbf{K})$).

Comme indiqué en [24], $P_A = P_{\mathrm{gr}(A)}$, $L_A = L_{\mathrm{gr}(A)}$, de sorte que nous pouvons supposer A gradué ($A = \mathbf{K} \oplus A^2 \oplus A^4$, $A^2 = m/m^2$, $A^4 = m^2/m^3$).

A admet d'autre part un modèle bigradué $(\Lambda Z, d)$ au sens d'Halperin-Stasheff [14]. Nous obtenons de façon classique la fibration de l'espace des lacets

$$(\Lambda Z, d) \to (\Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z}, D) \to (\Lambda \bar{Z}, 0) \qquad [29]$$

avec $(\bar{Z})_q^p = Z_{q-1}^{p+1}$, $D\bar{z} - z \in \Lambda^2(Z \oplus \bar{Z})$ et $e_p = \dim Z_{p-1}$.

Dans [14], on démontre en plus que

$$(\Lambda \bar{Z})_p = \mathrm{Tor}_p^A(\mathbf{K}, \mathbf{K}) = \mathrm{Hom}\big(\mathrm{Ext}_A^p(\mathbf{K}, \mathbf{K})\big).$$

Du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, il résulte alors que les algèbres de Lie graduées $\pi(\Omega(\Lambda Z, d)) = \mathrm{Hom}(\bar{Z}, \mathbf{K})$ et L_A sont isomorphes.

5.3. De l'hypothèse $m^3 = 0$, il résulte que $\mathrm{cat}(\Lambda Z, d) \leq 2$ [6, 9.3]. Si S est une réalisation géométrique de l'a.d.g.c. $(\Lambda Z, d)$, alors l'algèbre de Lie L_S est isomorphe à $L_A^{(1)}$; la suite exacte (3.2) redonne la suite exacte de Löfwall [24]

$$0 \to \mathbf{L}(U) \to L_A \to L_A^{(1)} \to 0.$$

Les résultats du §4 se traduisent alors dans ce contexte. En particulier, nous obtenons

THÉORÈME 5. *Si (A, m) est un anneau local de corps résiduel $\mathbf{k}$ de caractéristique zéro vérifiant $m^3 = 0$ et $\dim L_A = \infty$, alors:*

(1) *Si $L_A \neq L_A^{(1)}$, L_A est semi-simple et contient une sous-algèbre de Lie libre à au moins deux générateurs.*

(2) *Si $L_A = L_A^{(1)}$, alors*

(a) *toute sous-algèbre résoluble de L_A est de dimension ≤ 4,*

(b) *tout idéal résoluble est de dimension ≤ 2,*

(c) *si L_A n'est pas semi-simple, alors L_A contient une sous-algèbre de Lie libre de codimension finie.*

COROLLAIRE. *L_A contient une algèbre de Lie semi-simple de codimension finie.*

6. Questions et problèmes

6.1. Comme nous l'avons remarqué en 3.4, si $\operatorname{cat}_0 S = 2$, l'algèbre de Lie L_S détermine complètement le type d'homotopie rationnelle de S. Inversement, toute algèbre de Lie de présentation finie peut être réalisée comme le L_S d'un cw-espace S, 1-connexe de $\mathbf{Q}$-type fini.

Q1. *Quelles conditions doit supporter L_S pour que $H^*(S, \mathbf{Q})$ satisfasse à la dualité de Poincaré?*

(Remarquons que si L_S est le quotient d'une algèbre de Lie libre par une suite inerte d'au moins deux relations, alors cela n'est jamais possible).

6.2. Pour les espaces de catégorie rationnelle 2 vérifiant une hypothèse technique supplémentaire (non coformel ou centre non nul), le Théorème 4.1. résout la conjecture suivante:

Conjecture (Avramov-Félix). Si $\operatorname{cat}_0(S) < \infty$, $\pi_*(\Omega S) \otimes \mathbf{Q} = \infty$, alors $\pi_*(\Omega S) \otimes \mathbf{Q}$ contient une sous-algèbre de Lie libre à au moins deux générateurs.

La taille de cette algèbre de Lie libre est une autre question. Celle-ci ne peut pas toujours être de codimension finie comme cela peut être vu dans l'exemple suivant:

$$S = (S^3 \vee S^3) \times (S^3 \vee S^3).$$

Q2. *Si* $\operatorname{cat}_0 S = 2$ *et* $\dim \pi_*(\Omega S) \otimes \mathbf{Q} = \infty$, $\pi_*(\Omega S) \otimes \mathbf{Q}$ *contient-elle une sous-algèbre de Lie libre L telle que la série de Poincaré de UL,* $\sum_{i \geq 0} \dim \operatorname{Tor}_i^{UL}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ *et la série de Poincaré de ΩS,*

$$\sum_{i \geq 1} \dim H^i(\Omega S; \mathbf{Q}) t^i$$

aient le même rayon de convergence?

6.3. D'après [7], si $\operatorname{cat}_0 S = 2$ on a la relation $\dim G^{\psi}(S) = \dim Z(S) \leq \operatorname{cat}_0 S$. Par contre, on peut lire en [6] que $\dim G^{\psi}(S) \leq \operatorname{cat}_0 S$, sans restriction sur $\operatorname{cat}_0 S$.

Q3. *Est-ce que* $\dim Z(S) \leq \operatorname{cat}_0 S$ *si* $\operatorname{cat}_0(S) \geq 3$?

6.4. Soit S un espace de catégorie 2. De la Proposition 4.5, nous déduisons que, si S est non coformel et $\dim S = n$, il y a deux possibilités pour L_S: soit L_S contient un élément α de degré pair $\leq 2(n-1)$ soit $L_S = L_S^{\mathrm{imp}}$ et dans ce cas $\dim H^*(F, \mathbf{Q})$ est finie.

Dans le premier cas, il existe $\beta \in \mathbf{L}(U)$, $\dim U = \infty$ tel que $\mathbf{L}(\alpha, \beta)$ soit une sous-algèbre de $\pi(\Omega S) \otimes \mathbf{Q}$. Le problème est alors de déterminer en fonction de n le plus petit degré possible pour β.

Q4. *Existe-t-il une fonction $f(n)$ telle que si $d|_{(\Lambda X)} \leq f(n)$ est quadratique, alors d est quadratique?*

BIBLIOGRAPHIE

1. D. ANICK, *A counter example to a conjecture of Serre*, Ann. of Math., vol. 115 (1982), pp. 1–33.
2. L. AVRAMOV, *Free Lie subalgebra of the cohomology of a local ring*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 270 (1982), pp. 589–608.
3. H. BAUES et J.M. LEMAIRE, *Minimal models in homotopy theory*, Math. Ann., vol. 255 (1977), pp. 219–242.
4. R. BØGVAD, *Graded Lie algebras in local algebra and rational homotopy*, Thesis, Stockholm, 1983.
5. Y. FELIX, *Modèles bifiltrés. Une plaque tournante en homotopie rationnelle*, Canadian J. Math., vol. 23 (1981), 1448–1458.
6. Y. FELIX et S. HALPERIN, *Rational LS category and its applications*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 273 (1982), pp. 1–38.
7. Y. FELIX, S. HALPERIN et J.C. THOMAS, *Sur les espaces de catégorie deux*, Math. Scand., vol. 55 (1984), pp. 216–228.
8. ______, *The homotopy Lie algebra for finite complexes*, Publ. I.H.E.S., no. 56 (1983), 387–410.
9. Y. FELIX et J.C. THOMAS, *The radius of convergence of Poincaré series of a loop space*, Invent. Math., vol. 68 (1982), 257–274.
10. D. GOTTLIEB, *Evaluation subgroup of homotopy groups*, Amer. J. Math., vol. XCI (1969), pp. 729–756.
11. T.H. GULLIKSEN, *On the deviations of a local ring*, Math. Scand., vol. 47 (1980), 5–20.
12. S. HALPERIN, *Lectures on minimal models*, Publ. I.R.M.A. Lille, vol. 3, no. 4, 1976.
13. ______, *Spaces whose rational homology and Ψ-homotopy are both finite dimensional*, Preprint, 1981.
14. S. HALPERIN et J. STASHEFF, *Obstructions to homotopy equivalences*, Advances in Math., vol. 30 (1979), pp. 233–279.
15. P. HILTON, *On the homotopy groups of the union of spheres*, J. London Math. Soc., vol. 30 (1955), pp. 154–172.
16. C. JACOBSON, *On local flat homomorphisms and the Yoneda Ext-algebra of the fiber*, Stockholm reports, no. 8, 1982.
17. J.L. KOSZUL, *Homologie et cohomologie des algèbres de Lie*, Bull. Soc. Math. France, vol. 78 (1950), pp. 65–127.
18. J. M. LEMAIRE, *Algèbres connexes et cohomologie des espaces de lacets*, Lecture Notes in Math., vol. 422, Springer, N.Y., 1974.
19. ______, *Un lemme sur l'homologie de certains espaces de lacets*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 269 (1969), 1122–1124.
20. ______, *Autopsie d'un meurtre dans l'homologie d'une algèbre de chaînes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. 4e série, vol. 11 (1978), pp. 93–100.
21. J.M. LEMAIRE et F. SIGRIST, *Sur les invariants d'homotopie rationnelle liés à la LS catégorie*, Comm. Math. Helv., vol. 56 (1981), pp. 103–122.
22. ______, *Dénombrement de types d'homotopie rationnelle*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 287 (1978), pp. 109–111.
23. C. LÖFWALL, *On the center of graded Lie algebras*, Reports of Dept. of Math. Stockholm, Sweden, no. 28, 1982.
24. ______, *On the subalgebra generated by the one dimensional elements in the Yoneda Ext-algebra*, Stockholm reports, no. 5, 1976.

25. J. NEISENDORFER, *Lie algebra coalgebras and rational homotopy theory for nilpotent spaces*, Pacific J. Math., vol. 74 (1978), pp. 429–460.
26. J. NEISENDORFER et T. MILLER, *Formal and coformal spaces*, Illinois J. Math., vol. 22 (1978), pp. 565–580.
27. D. QUILLEN, *Rational homotopy theory*, Ann. of Math., vol. 90 (1969), pp. 205–295.
28. J.E. ROOS, *Homology of loop spaces and of local rings*, Proc. 18th Scand. Congress Math., Aarhus, Denmark, 1980.
29. D. SULLIVAN, *Infinitesimal computations in topology*, Publ. I.H.E.S., no. 47 (1978), pp. 269–331.
30. J.C. THOMAS, *On the rational homotopy of Serre fibrations*, Ann. Inst. Fourier, vol. 31 (1981), pp. 71–90.
31. G. TOOMER, *Lusternik-Schnirelmann category and the Milnor-Moore spectral sequence*, Math. Zeitschr. vol. 138 (1974), pp. 123–143.

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
LOUVAIN-LA-NEUVE, BELGIQUE

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I
VILLENEUVE D'ASCQ, FRANCE