ILLINOIS JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 24, Number 3, Fall 1980

INTERPOLATION DANS LE POLYDISQUE DE C^n

BY
ERIC AMAR

Introduction

Soit $\mathbf{D}$ le disque unité de $\mathbf{C}$ et $\mathbf{T} = \{z \in \mathbf{C};\ |z| = 1\}$ le tore de dimension un muni de la mesure de Lebesgue λ.

On note, pour p positif, $H^p(\lambda)$ les classes de Hardy:

$$H^p(\lambda) = \left\{ f \text{ analytique dans } \mathbf{D}, \text{ t.q. } \sup_{r<1} \int |f(rz)|^p \, d\lambda(z) = \|f\|_p^p < +\infty \right\};$$

$$H^\infty(\lambda) = \left\{ f \text{ analytique dans } \mathbf{D}, \text{ t.q. } \sup_{z \in \mathbf{D}} |f(z)| = \|f\|_\infty < +\infty \right\}.$$

Soit σ une suite dans $\mathbf{D}$, $\sigma = \{z_k, k \in \mathbf{N}\}$, et considérons l'opérateur T_p défini sur $H^p(\lambda)$ ainsi:

$$\forall f \in H^p(\lambda),\ T_p f = \{(1 - |z_i|^2)^{1/p} f(z_i),\ i \in \mathbf{N}\};$$

L. Carleson [9] a caractérisé les suites σ qui sont d'interpolation $H^\infty(\lambda)$, c.à.d. telles que $T_\infty H^\infty(\lambda) = l^\infty(\mathbf{N})$: il faut et il suffit que

$$\inf_{i \in \mathbf{N}} \prod_{j \neq i} \left| \frac{z_i - z_j}{1 - \bar{z}_i z_j} \right| \geq \delta > 0. \tag{C}$$

H. Shapiro et A. L. Shields [12] ont montré que la condition (C) était également nécessaire et suffisante pour que, pour $p \geq 1$, $T_p H^p(\lambda) = l^p(\mathbf{N})$ et V. Kabaila [13] a obtenu le même résultat pour $0 < p < 1$; de plus P. Beurling [14] a montré que si (C) était vérifiée alors il y avait extension linéaire bornée de $l^\infty(\mathbf{N})$ dans $H^\infty(\lambda)$, c.à.d. il existe un opérateur U_∞ borné de $l^\infty(\mathbf{N})$ dans $H^\infty(\lambda)$ tel que $T_\infty U_\infty =$ identité de $l^\infty(\mathbf{N})$.

Dans ce travail on étudie ce type de problèmes dans le polydisque unité $\mathbf{D}^n$ de $\mathbf{C}^n$. Après avoir défini convenablement les classes de Hardy $H^p(\lambda_n)$ et l'opérateur T_p associé à une suite de $\mathbf{D}^n$ on obtient tout d'abord le:

THEOREME 1. *Soit σ une suite d'interpolation pour $H^\infty(\lambda_n)$ et T_p l'opérateur associé; on a alors:*

(i) $T_p H^p(\lambda_n) = l^p(\mathbf{N})$, *pour* $p \geq 1$;

(ii) *il existe une extension linéaire bornée U_p de $l^p(\mathbf{N})$ dans $H^p(\lambda_n)$, pour $p > 0$.*

Received March 7, 1977.

On utilise, pour montrer ce théorème l'étude que nous avons faite dans [3] et le théorème d'extension linéaire de $l^\infty(\mathbf{N})$ dans $H^\infty(\lambda_n)$ dû à A. Bernard [2] et qui généralise le résultat de P. Beurling.

On peut remarquer que même dans le cas du disque $\mathbf{D}$ le résultat ii) n'était pas connu, de plus, avec essentiellement la même preuve le théorème 1 reste valable en remplaçant le polydisque de $\mathbf{C}^n$ par un domaine Ω strictement pseudo-convexe.

Dans le cas $n = 1$ on a rappelé que la réciproque du théorème 1 était vraie mais si $n \geq 2$ il n'en est plus de même à cause du contre-exemple étudié dans [1]:

THEOREME 2. *Il existe une suite σ dans $\mathbf{D}^2$ qui est telle que $T_2 H^2(\lambda_2) = l^2(\mathbf{N})$ mais qui n'est pas d'interpolation $H^\infty(\lambda_2)$.*

On considère également des suites d'interpolation pour $H^\infty(\lambda_n)$ qui sont symétrisables et on montre que, pour ces suites on a $T_p H^p(\lambda_n) = l^p(\mathbf{N})$, $\forall\, p > 0$, ce qui complète le théorème 1 dans ce cas.

On introduit ensuite, comme dans [4], la notion d'ensemble de type S dans $\mathbf{D}^n$ et on caractérise de plusieurs manières les suites σ situées dans $W \times \mathbf{D}$, où W est de type S dans $\mathbf{D}^{n-1}$, qui sont telles que $T_p H^p(\lambda_n) = l^p(\mathbf{N})$; on montre en particulier:

THEOREME 3. *Soit σ une suite dans $W \times \mathbf{D}$, où W est de type S dans $\mathbf{D}^{n-1}$; alors si pour un $p > 0$, $T_p H^p(\lambda_n) = l^p(\mathbf{N})$, σ est d'interpolation $H^\infty(\lambda_n)$.*

Enfin dans le dernier paragraphe on montre que tous nos résultats se généralisent aux fonctions analytiques à valeurs vectorielles.

Je tiens à remercier E. Kronstadt et C. Neville pour de très interressantes correspondances sur le sujet.

1. Notations et premieres definitions

Soit

$$\mathbf{D}^n = \{\mathbf{z} = (z^1, \ldots, z^n) \in \mathbf{C}^n,\ |z^i| < 1,\ i = 1, 2, \ldots n\}$$

le polydisque unité de $\mathbf{C}^n$,

$$\mathbf{T}^n = \{\mathbf{z} = (z^1, \ldots, z^n) \in \mathbf{C}^n,\ |z^i| = 1,\ i = 1, 2, \ldots n\}$$

le tore de dimension n que l'on munit de la mesure de Lebesgue normalisée λ_n.

Pour $p > 0$ on note $H^p(\lambda_n)$ les espaces de Hardy classiques:

$$H^p(\lambda_n) = \left\{ f \text{ analytique dans } \mathbf{D}^n \text{ t.q. } \sup_{r<1} \int_{\mathbf{T}^n} |f(r\mathbf{z})|^p \, d\lambda_n(\mathbf{z}) = \|f\|_p^p < +\infty \right\}$$

et

$$H^\infty(\lambda_n) = \left\{ f \text{ analytique dans } \mathbf{D}^n \text{ t.q. } \sup_{\mathbf{z} \in \mathbf{D}^n} |f(z)| = \|f\|_\infty < +\infty \right\}.$$

Soit $\sigma = \{\mathbf{z}_k, k \in \mathbf{N}\}$ une suite dans $\mathbf{D}^n$ et p t.q. $0 < p \leq +\infty$, on note T_p l'opérateur défini sur $H^p(\lambda_n)$ ainsi: $T_p f = \{((1 - |\mathbf{z}_k|^2))^{1/p} f(\mathbf{z}_k), k \in \mathbf{N}\}$ pour $f \in H^p(\lambda_n)$ et avec la *convention* $\forall\, \mathbf{z} \in \mathbf{D}^n$, $\mathbf{z} = (z^1, \ldots, z^n)$, on pose $((1 - |\mathbf{z}|^2)) = \prod_{j=1}^n (1 - |z^j|^2)$.

DEFINITIONS. (i) On dit que σ est *d'interpolation* $H^p(\lambda_n)$ si $T_p(H^p(\lambda_n)) \geq l^p(\mathbf{N})$.

(ii) On dit que σ est *fortement d'interpolation* $H^p(\lambda_n)$ si, de plus, il existe $C > 0$ avec $\forall f \in H^p(\lambda_n)$, $\|T_p f\|_p \leq C\|f\|_p$.

(iii) On dit que σ a la *propriété d'extension linéaire bornée* si il existe un opérateur linéaire U_p de $l^p(\mathbf{N})$ dans $H^p(\lambda_n)$ et une constante $D > 0$ tels que

$$T_p U_p(\omega) = \omega \quad \text{et} \quad \|U_p(\omega)\|_p \leq D\|\omega\|_p, \quad \forall\, \omega \in l^p(\mathbf{N}).$$

Il est clair que la propriété d'extension linéaire bornée implique celle d'interpolation.

On note, $\forall\, z = re^{i\phi} \in \mathbf{D}$, $\forall\, \theta \in [0, 2\pi]$,

$$P_z(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - \phi)}$$

le noyau de Poisson de z; de même si $\mathbf{z} = (z^1, \ldots, z^n) \in \mathbf{D}^n$ et $\boldsymbol{\theta} = (\theta^1, \ldots, \theta^n)$ on note

$$P_{\mathbf{z}}(\boldsymbol{\theta}) = P_z(\theta^1) \cdots P_{z^n}(\theta^n).$$

Soit $1 < p \leq +\infty$ et $z \in \mathbf{D}$, le noyau de Cauchy-Szegö normalisé dans $H^p(\lambda_1)$ sera noté

$$e_z^{(p)}(\zeta) = c(z, p)\frac{(1 - |z|^2)^{1/q}}{(1 - \bar{z}\zeta)}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

et la constante $c(z) = c(z, p)$ vérifiant $0 < \alpha(p) \leq c(z, p) \leq \beta(p)$ où α et β ne dépendent pas de $z \in \mathbf{D}$; dans $\mathbf{D}^n$ il vient alors

$$e_{\mathbf{z}}^{(p)}(\boldsymbol{\zeta}) = e_{z^1}^{(p)}(\zeta^1) \cdots e_{z^n}^{(p)}(\zeta^n) = c(\mathbf{z})\frac{((1 - |\mathbf{z}|^2))^{1/q}}{((1 - \bar{\mathbf{z}}\boldsymbol{\zeta}))}$$

avec $c(\mathbf{z}) = c(z^1) \cdots c(z^n)$ et $((1 - \bar{\mathbf{z}}\boldsymbol{\zeta})) = \prod_{j=1}^n (1 - \bar{z}^j\zeta^j)$.

2. Resultats generaux

On va montrer le théorème suivant.

THEOREME 2.1. *Soit σ une suite d'interpolation $H^\infty(\lambda_n)$ alors:*

(a) *pour tout $p > 0$, σ a la propriété d'extension linéaire bornée;*

(b) *pour tout $p \geq 1$, l'opérateur T_p est borné de $H^p(\lambda_n)$ dans $l^p(\mathbf{N})$, c'est à-dire σ est fortement d'interpolation $H^p(\lambda_n)$.*

Dans le cas $n = 1$, si σ est d'interpolation $H^p(\lambda_1)$, pour un $p > 0$, alors σ est d'interpolation $H^\infty(\lambda_1)$; ce n'est plus vrai pour $n > 1$ à cause de:

THEOREME 2.2. *Il existe une suite σ dans $\mathbf{D}^2$ qui est fortement d'interpolation $H^2(\lambda_2)$ mais qui n'est pas d'interpolation $H^\infty(\lambda_2)$.*

Le théorème 2.2 a été démontré dans [1]; montrons le théorème 2.1.

(a) *Supposons d'abord* $p > 1$, soit $\sigma = \{\mathbf{z}_i,\ i \in \mathbf{N}\}$ une suite d'interpolation dans $H^\infty(\lambda_n)$ de constante $C > 0$, c'est-à-dire $\forall\, \omega \in l^\infty(N)$, $\exists f \in H^\infty(\lambda_n)$ t.q. $T_\infty f = \omega$ et $\|f\|_\infty \leq C\|\omega\|_\infty$; une telle constante existe toujours grâce au théorème de l'application ouverte.

On sait qu'alors il existe une suite de fonctions $\{\varepsilon_i,\ i \in \mathbf{N}\}$ de $H^\infty(\lambda_n)$ telles que [2]

$$\forall\, i, j \in \mathbf{N},\ \varepsilon_i(\mathbf{z}_j) = \delta_{ij} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\varepsilon_i(\mathbf{z})| \leq C^2,\ \forall\, \mathbf{z} \in \mathbf{D}^n \tag{2.1}$$

On définit alors l'opérateur U_p comme suit:

$$\forall\, \omega \in l^p(\mathbf{N}),\ \omega = (\omega_i,\ i \in \mathbf{N}),\ U_p(\omega)(\zeta) = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i c(\mathbf{z}_i)^{-1} e_{\mathbf{z}_i}^{(p)}(\zeta)\varepsilon_i(\zeta),\ \zeta \in D^n;$$

on a alors, grâce à (2.1) et au fait que $e_{\mathbf{z}_i}^{(p)}(\mathbf{z}_i) = c(\mathbf{z}_i)((1 - |\mathbf{z}_i|^2))^{-1/p}$, $T_p U_p(\omega) = \omega$; d'autre part

$$\|U_p(\omega)\|_p^p = \int \left| \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i c(\mathbf{z}_i)^{-1} e_{\mathbf{z}_i}^{(p)}(\zeta)\varepsilon_i(\zeta) \right|^p d\lambda_n(\zeta),$$

par Hölder

$$\|U_p(\omega)\|_p^p \leq \int \left(\sum_i |\omega_i c(\mathbf{z}_i)^{-1} e_{\mathbf{z}_i}^{(p)}(\zeta)|^p \right) \left(\sum_i |\varepsilon_i(\zeta)|^q \right)^{p/q} d\lambda_n,$$

mais (2.1) implique $(\sum_i |\varepsilon_i(\zeta)|^q)^{p/q} \leq C^{2p}$ et $e_{\mathbf{z}_i}^{(p)}$ est normalisé dans $H^p(\lambda_n)$ donc

$$\|U_p(\omega)\|_p^p \leq C^{2p}\alpha^{-np}(p)\|\omega\|_p^p$$

puisque $c(\mathbf{z}_i)^{-1} \leq \alpha^{-n}$

Supposons que $0 < p \leq 1$, il existe un entier m tel que $p' = mp > 1$; posons alors

$$f_{\mathbf{z}}(\zeta) = (e_{\mathbf{z}}^{(p')}(\zeta))^m,\ \mathbf{z} \in \mathbf{D}^n,\ \zeta \in \mathbf{D}^n.$$

On a, bien sûr,

$$\|f_{\mathbf{z}}\|_p^p = \|e_{\mathbf{z}}^{(p')}\|_{p'}^{p'} = 1 \quad \text{et} \quad f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) = (e_{\mathbf{z}}^{(p')}(\mathbf{z}))^m = c^m(\mathbf{z}, p')((1 - |\mathbf{z}|^2))^{-1/p}. \tag{2.2}$$

Posons alors $U_p(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i c^{-m}(\mathbf{z}_i, p') f_{\mathbf{z}_i}(\zeta)\varepsilon_i(\zeta)$, $\forall\, \omega = \{\omega_i,\ i \in \mathbf{N}\} \in l^p(\mathbf{N})$. Clairement $(2.2) \Rightarrow T_p U_p(\omega) = \omega$; calculons $\|U_p(\omega)\|_p^p$:

$$\|U_p(\omega)\|_p^p = \int \left| \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i c^{-m}(\mathbf{z}_i, p') f_{\mathbf{z}_i}(\zeta)\varepsilon_i(\zeta) \right|^p d\lambda_n(\zeta)$$

mais par Hölder,

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} \omega_i f_{\mathbf{z}_i} \varepsilon^i\right|^{mp} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\omega_i f_{\mathbf{z}_i}|^{mp}\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\varepsilon_i|^{q'}\right)^{mp/q'}$$

avec q' conjugué de $p' = mp$ d'où prenant les racines m^e, $|\sum_i \omega_i f_{z_i} \varepsilon_i|^p \leq (\sum |\omega_i f_{\mathbf{z}_i}|^{mp}(\sum_{i=1}^{\infty} |\varepsilon_i|^{q'})^{p/q'}$, mais, puisque $m \geq 2$, on a $(\sum |\omega_i f_{\mathbf{z}_i}|^{pm})^{1/m} \leq \sum |\omega_i f_{\mathbf{z}_i}|^p$ et (2.1) implique $(\sum |\varepsilon_i|^{q'})^{p/q'} \leq C^{2p}$ on en déduit donc $\|U_p(\omega)\|_p^p \leq C^{2p}\alpha^{-mpn}\|\omega\|_p^p$, puisque, par (2.2) $\|f_{\mathbf{z}}\|_p^p = 1$, ce qui achève la preuve du (a).

Montrons le (b), nous ferons la démonstration dans $\mathbf{D}^2$, le cas général se montrant de manière identique.

On considère la fonction; pour $p \geq 1$,

$$\forall\, \omega \in l^q(\mathbf{N}),\ g_\omega(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i c(\mathbf{z}_i)^{-1} \bar{e}_{\mathbf{z}_i}^{(q)}(\xi)\varepsilon_i(\xi).$$

On a, comme pour $U(\omega)$, $\|g_\omega(\xi)\|_q^q \leq C^{2q}\alpha_{(q)}^{-nq}\|\omega\|_q^q$. Soit alors $f \in H^p(D^2)$ il vient

$$\left|\int_{\mathbf{T}^2} fg\, d\lambda_2\right| \leq C^2\alpha^{-n}(q)\|\omega\|_q\|f\|_p$$

et en développant

$$C^2\alpha^{-n}(q)\|\omega\|_q\|f\|_p \geq \left|\sum_i \omega_i c(z_i)^{-1} \int \varepsilon_i(\xi)f(\xi)e_{\mathbf{z}_i}^{-q}(\xi)\, d\lambda_2(\xi)\right|$$

$$\geq \left|\sum_i \omega_i((1 - |\mathbf{z}_i|^2))^{1/p} f(\mathbf{z}_i)\right| \quad \text{car } \varepsilon_i(\mathbf{z}_i) = 1.$$

Puisque ω_i est arbitraire dans $l^q(\mathbf{N})$, on en déduit

$$\sum_i ((1 - |z_i|^2))|f(\mathbf{z}_i)|^p \leq C^{2p}\alpha^{-np}(q)\|f\|_p^p,$$

ce qui achève la preuve du théorème 2.1.

Remarque. Le théorème 2.1 est très général et vaut dans le cadre des algèbres uniformes défini dans [3, chap. III].

En effet, soit A une algèbre uniforme, $\mathscr{M}$ son spectre et λ une mesure de probabilité sur $\mathscr{M}$.

On définit les espaces de Hardy usuels, si $p \geq 1$ $H^p(\lambda)$ est l'adhérence dans $L^p(\lambda)$ de A; $H^\infty(\lambda)$ est l'adhérence faible étoile de A dans $L^\infty(\lambda)$.

On note, pour $m \in \mathscr{M}$, $I_m = \{f \in A, \hat{f}(m) = m(f) = 0\}$.

Soit enfin, pour $p \geq 1$,

$$\mathscr{M}_p = \left\{m \in \mathscr{M}, \text{t.q. } \exists\, f \in H^p(\lambda), \int f\, d\lambda \neq 0 \text{ et } \langle f, g\rangle = \int f\bar{g}\, d\lambda = 0, \forall\, g \in I_m\right\}.$$

Comme pour $p = 2$ [3, chap. III], on pose: $\forall\, m \in \mathcal{M}_p$, $e_m^{(p)}$ un vecteur de $H^p(\lambda)$ tel que $\|e_m^{(p)}\|_p = 1$, $\langle e_m^{(p)}, 1\rangle \geq 0$ et $\forall\, g \in I_m$, $\langle e_m^{(p)}, g\rangle = 0$. Soit $f \in A$, $m \in \mathcal{M}_p$, on a

$$(*)\ \langle f, e_m^{(p)}\rangle = \hat{f}(m)\langle 1, e_m^{(p)}\rangle,$$

il suffit de poser $f = f - \hat{f}(m)1$ et de remarquer que $f - \hat{f}(m)1 \in I_m$; cela permet de définir, si $f \in H^\infty(\lambda)$, $\hat{f}(m)$ par

$$\hat{f}(m) = \langle f, e_m^{(p)}\rangle \frac{1}{\langle 1, e_m^{(p)}\rangle}$$

dès que $m \in \mathcal{M}_p$ pour $p \geq 1$; (clairement $\mathcal{M}_p \supset \mathcal{M}_{p'}$ si $p' < p$) et on vérifie comme

Soit alors σ une suite dans $\mathcal{M}$, on considère T_p l'opérateur de $H^p(\lambda)$ dans l'espace des suites ainsi défini:

$$\forall\, f \in H^p(\lambda),\ T_p f = \{\langle f, e_m^{(q)}\rangle, m \in \sigma \cap \mathcal{M}_q\} \quad \text{où } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Avec les définitions analogues à celles pour le polydisque, on a alors $(1/p + 1/q) = 1)$ le théorème suivant.

THEOREME 2.1′. *Soit σ une suite dans $\mathcal{M}_1$ d'interpolation poue $H^\infty(\lambda)$ alors:*
(a) $\forall\, p \geq 1$, *T_p est continu de $H^p(\lambda)$ dans $l^p(\mathbf{N})$;*
(b) *si p est tel que $\sigma \cap \mathcal{M}_p \subset \sigma \cap \mathcal{M}_q$ et qu'il existe $\delta > 0$ t.q. $|\langle e_m^{(q)}, e_m^{(p)}\rangle| \geq \delta$, $\forall\, m \in \sigma \cap \mathcal{M}_p$, alors il existe une extension linéaire bornée U_p de $l^p(\mathrm{N})$ dans $H^p(\lambda)$.*

Preuve. Identique au cas du polydisque car le théorème de [2] vaut de façon abstraite.

DEFINITION. On dira que la suite $\sigma = \{(z_k^1, \ldots, z_k^n), k \in \mathbf{N}\}$ de $\mathbf{D}^n$ est d'interpolation symétrisable (I.S.) si toutes les suites obtenues en conjuguant de toutes les façons possibles les composantes des points de σ sont d'interpolation pour $H^\infty(\mathbf{D}^n)$; exemples $\sigma = \{(z_n, w_n), n \in N\} \subset \mathbf{D}^2$ est (I.S.) si σ et $\tilde{\sigma} = \{(z_n, \bar{w}_n)\}$ sont d'interpolation $H^\infty(\mathbf{D}^2)$.

On a alors le théorème suivant.

THEOREME 2.3. *Soit σ une suite I. S. de $\mathbf{D}^n$ alors:*
(a) $\forall\, p > 0$, *il existe une extension linéaire bornée de $l^p(\mathbf{N})$ dans $H^p(\lambda_n)$;*
(b) $\forall\, p > 0$, *T_p est borné de $H^p(\lambda_n)$ dans $l^p(\mathbf{N})$.*

Preuve. Il faut montrer le (b); on fera la démonstration dans $\mathbf{D}^2$, le case général étant identique.

Soit $\sigma = \{(z_k, w_k), k \in \mathbf{N}\}$ une suite I.S. dans $\mathbf{D}^2$ et μ la mesure

$$\mu = \sum_{k \in \mathbf{N}} ((1 - |\mathbf{z}_k|^2))\delta_{\mathbf{z}_k}.$$

Si $f \in L^2(\lambda_2)$, notons $\tilde{f}$ l'intégrale de Poisson de f,

$$\tilde{f}(\mathbf{z}) = \int_{\mathbf{T}^2} f(\xi) P_{\mathbf{z}}(\xi)\, d\lambda_2(\xi),$$

on a alors:

Lemme 2.1. *Pour toute f dans $L^2(\lambda_2)$, f positive, on a l'inégalité*

$$\int \tilde{f}^2\, d\mu \leq 2C^2 \|f\|_2^2.$$

Preuve. Soit $\hat{f}$ la transformée de Fourier de f et posons, $\theta, \phi \in [0, 2\pi]$:

$$f_1(\theta, \phi) = \sum_{l \geq 0, m \geq 0} \hat{f}(l, m) e^{i(l\theta + m\phi)}; \quad f_2(\theta, \phi) = \sum_{l \geq 0, m < 0} \hat{f}(l, m) e^{i(l\theta + m\phi)};$$
$$f_3(\theta, \phi) = \sum_{l < 0, m \geq 0} \hat{f}(l, m) e^{i(l\theta + m\phi)}; \quad f_4(\theta, \phi) = \sum_{l < 0, m < 0} \hat{f}(l, m) e^{i(l\theta + m\phi)}.$$

On remarque que, les f_i étant orthogonales dans $L^2(\lambda_2)$ on a

$$f = f_1 + \cdots + f_4 \quad \text{et} \quad \|f\|_2^2 = \sum_{i=1}^{4} \|f_i\|_2^2 \tag{2.3}$$

et

$$\tilde{f}_1(z, w) = \sum_{l \geq 0, m \geq 0} \hat{f}(l, m) z^l w^m; \quad \tilde{f}_2(z, w) = \sum_{l \geq 0, m > 0} \hat{f}(l, -m) z^l \bar{w}^m;$$
$$\tilde{f}_2(z, w) = \sum_{l > 0, m \geq 0} \hat{f}(-l, m) \bar{z}^l w^m \quad \text{et} \quad \tilde{f}_4(z, w) = \sum_{l > 0, m > 0} \hat{f}(-l, -m) \bar{z}^l \bar{w}^m.$$

Posons enfin

$$g_1(z, w) = \tilde{f}_1(z, w); \quad g_2(z, w) = \tilde{f}_2(z, \bar{w});$$
$$g_3(z, w) = \tilde{f}_3(\bar{z}, w) \quad \text{et} \quad g_4(z, w) = \tilde{f}_4(\bar{z}, \bar{w});$$

il est clair que,

$$\forall\, i = 1, 2, 3, 4,\ g_i \in H^2(\lambda_2) \quad \text{et} \quad \|g_i\|_2 = \|f_i\|_2 \tag{2.4}$$

Calculons alors:

$$I = \int \tilde{f}^2\, d\mu = \int |\tilde{f}_1 + \cdots + \tilde{f}_4|^2\, d\mu \leq \left[\sum_{i=1}^{4} \left(\int |\tilde{f}_i|^2\, d\mu\right)^{1/2}\right]^2 \quad \text{d'où}$$
$$I \leq 2 \sum_{i=1}^{4} \int |\tilde{f}_i|^2\, d\mu \tag{2.5}$$

et $\int |\tilde{f}_1|^2\, d\mu = \int |g_1|^2\, d\mu \leq C^2 \|g_1\|_2^2$ car $g_1 \in H^2(\lambda_2)$, grâce au Th. 2.1 (b).

$$\int |\tilde{f}_2|^2\, d\mu = \sum_k (1 - |z_k|^2)(1 - |w_k|^2) |\tilde{f}_2(z_k, w_k)|^2$$
$$= \sum_k (1 - |z_k|^2)(1 - |w_k|^2) |g_2(z_k, w_k)|^2$$

mais l'hypothèse I.S. nous affirme que $\sigma_2 = \{(z_k, \bar{w}_k), k \in \mathbf{N}\}$ est aussi d'interpolation $H^\infty(\lambda_2)$ donc $\int |\tilde{f}_2|^2 \, d\mu \leq C^2 \|g_2\|_2^2$ et de même pour $i = 3$ et 4; portant cela dans (2.5) il vient $\int \tilde{f}^2 \, d\mu \leq 2C^2 \sum_{i=1}^4 \|g_i\|_2^2$; utilisant (2.4) puis (2.3) on a enfin $\int \tilde{f}^2 \, d\mu \leq 2C^2 \| f \|_2^2$.

Preuve du (b) *du théorème 2.3.* Pour $p > 0$ considérons $f \in H^p(\lambda_n)$, et, si f^* désigne les valeurs au bord de f, posons $g = |f^*|^{p/2}$; g est dans $L^2(\lambda_2)$ et positive et on peut donc lui appliquer le lemme 2.2.

$$\sum_k ((1 - |\mathbf{z}_k|^2)) |g(\mathbf{z}_k)|^2 \leq 2C^2 \|g\|_2^2 = 2C^2 \|f\|_p^p.$$

Mais $|f|^{p/2}$ est pluri-sousharmonique donc $|f(\mathbf{z})|^{p/2} \leq |g(\mathbf{z})|$ et

$$\sum_{k \in \mathbf{N}} ((1 - |\mathbf{z}_k|^2)) | f(\mathbf{z}_k)|^p \leq 2C^2 \| f \|_p^p,$$

ce qui achève la preuve du théorème 2.1.

Remarque. Il existe des suites d'interpolation pour $H^\infty(\mathbf{D}^2)$ qui ne sont pas I.S. (D. Amar, communication privée).

3. Ensembles de type S dans $\mathbf{D}^n$

Les résultats de ce paragraphe ont été montrés dans [4]; nous allons en rappeler quelques uns.

Soit σ une suite dans $\mathbf{D}^n$, on dit que σ est séparée si il existe $\delta > 0$ tel que $\forall$ $\mathbf{z}$, $\forall$ $w \in \sigma$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{w}$, $d_g(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \geq \delta$, où d_g désigne la distance de Gleason pour $H^\infty(\lambda_n)$ [5].

DEFINITION. Si W est inclus dans $\mathbf{D}^n$, on dit que W est un ensemble de type S si toute suite σ de W séparée est d'interpolation pour $H^\infty(\mathbf{D}^n)$, la constante d'interpolation de σ ne dépendant que de la constante de séparation de σ.

Remarque. Si $W \subset \mathbf{D}$, il est de type S si et seulement si on a l'équivalence

$$\{\sigma \text{ séparée}\} \Leftrightarrow \{\sigma \text{ interpolation } H^\infty(\lambda_1)\}$$

pour $\sigma \subset W$.

En effet, considérons les cellules

$$(k, l) \in \mathbf{N}^2, \ C_{k,l} = \left\{ z = re^{i\theta} \in \mathbf{D}, 2^{-k-1} < 1 - r \leq 2^{-k}, \ \frac{2\pi l}{2} \leq \theta < \frac{2\pi}{2}(l+1) \right\}$$

celles-ci recouvrent $\mathbf{D}$.

Considérons la suite σ_0 ainsi obtenue:

$$\sigma_0 = \{z_{k,l}, (k, l) \in I\}$$

où $z_{k,l} \in C_{k,l} \cap W$ avec $I = \{(k, l) \in \mathbf{N}^2, \text{ t.q. } C_{k,l} \cap W \neq \emptyset\}$. On a que σ_0 est l'union de 4 suites de W séparées (voir lemme 4.1) c'est-à-dire $\sigma_0 = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3 \cup \sigma_4$.

Comme σ_i est séparée, elle est d'interpolation pour une constante M_i; las measure associée $\mu_i = \sum_{z \in \sigma_i} (1 - |z|^2)\delta_z$ est donc de Carleson (voir Section 4) de constante C_i et la mesure $\mu_0 = \sum_{i=1}^{4} \mu'_i$ est encore de Carleson de constante $C_0 = \sum_{i=1}^{4} C_i$.

Soit maintenant une suite $\sigma \subset W$ séparée par une constante $\delta > 0$ dans chaque $C_{k,l}$ donc on peut écrire $\sigma = \bigcup_{i=1}^{N(\delta)} s_i$ avec au plus un point de s_i dans chaque $C_{k,l}$.

LEMME. *La mesure $v_i = \sum_{z \in v_i} (1 - |z|^2)\delta_z$ est de Carleson de constante C'_0 indépendante de C.*

Preuve. Soit

$$S_{h,\theta} = \left\{ z = re^{i\phi},\ 1 - h \leq r < 1,\ \frac{\theta - h}{2} \leq \phi < \theta + \frac{h}{2} \right\},$$

on a

$$v_i(S_{h,\theta}) = \sum_{z \in v_i \cap S_{h,\theta}} (1 - |z|^2).$$

Mais chaque point z de v_i se trouvre dans un disque de centre z' de σ_0 et de rayon $\delta_0(1 - |z_0|^2)$, où δ_0 est tel que $\forall\ z, w \in C_{k,l}, d_g(z, w) \leq \delta_0$; on en déduit, posant $h' = (1 + 2\delta_0)h$, que

$$v_i(S_{h,\theta}) \leq (1 + \delta_0)\mu_0(S_{h',\theta}) \leq (1 + 2\delta_0)^2 C_0 h.$$

On en déduit que la mesure $v = \sum_{z \in \sigma} (1 - |z|^2)\delta_z$ est de Carleson de constante $C' = (1 + 2\delta_0)^2 C_0 N(\delta)$ et donc que σ est d'interpolation pour $H^\infty(\lambda_1)$ de constante ne dépendant que de δ, C_0 étant fixée par W, grâce au théorème de Carleson [9].

Le premier exemple étudié fut le rayon [0, 1] dans $\mathbf{D}$ [9]. Plus généralement, on dira que Γ_{z_0} est un cône de sommet $z_0 \in \mathbf{T}$ et d'angle $\alpha > 0$ si

$$\bar{\Gamma}_{z_0} \subset \mathbf{D} \cup \{z_0\} \text{ et } \forall\ z \in \Gamma_{z_0},\quad \operatorname{Arg}(z - z_0) \in [-\alpha, +\alpha].$$

Il est facile de voir que Γ_{z_0} est un domaine de type S, et donc aussi une union finie de tels cônes.

L'exemple suivant généralise cette remarque. Soit $(\theta_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de réels positifs tendant vers 0 exponentiellement; par exemple $2^{-n-1} < \theta_n \leq 2^{-n}$. Soient $\Gamma_n^{(\alpha)}$ une famille de cônes d'angle $\alpha \geq 0$ telle que $\forall\ n \in \mathbf{N}$,

$$\Gamma_n^{(\alpha)} \cap \mathbf{T} = \{e^{i\theta_n}\} \quad \text{et} \quad \overline{U\Gamma_n^{(\alpha)}} \cap \mathbf{T} = \{1\} \bigcup_{n \geq 1} \{e^{i\theta_n}\}.$$

Posant $W = \bigcup_{n \geq 1} \Gamma_n^{(\alpha)}$, on a alors [4]:

PROPOSITION. *W est un domaine de type S.*

Si s est un arc de courbe de classe C^1 dans $\mathbf{D}$, alors s est de type S dans $\mathbf{D}$, quelque soit l'ordre de tangence de s avec T. (Ce résultat m'a été communiqué par E. Kronstadt.) On a également établi que [4]:

(3.1) Si $w_1, \ldots, w_k$ sont de type S dans $\mathbf{D}^n$, $w = \bigcup_{i=1}^k w_i$ est de type S dans $\mathbf{D}^n$.

(3.2) Si $w_1, \ldots, w_k$ sont de type S dans $\mathbf{D}$ alors $w = w_1 \times \cdots \times w_k$ est de type S dans $\mathbf{D}^k$; plus généralement, la même preuve donne que si w_i est de type S^{n_i} alors $w_1 \times \cdots \times w_k$ est de type S dans $\mathbf{D}^{n_1+\cdots+n_k}$.

Soit maintenant σ une suite dans $\mathbf{D} \times W$ où W est de type S dans $\mathbf{D}^{n-1}$. Partitionnons W en cellules à la Carleson [7], $\{C_k, k \in \mathbf{N}\}$, disjointes et telles que $\forall\, k \in \mathbf{N}$, $\forall\, \mathbf{z}, \mathbf{w} \in C_k$, $d_g(\mathbf{z}, \mathbf{w}) < \delta$, où d_g représente la distance de Gleason dans $H^\infty(\lambda_{n-1})$; on peut faire cela pour tout $\delta > 0$, la famille $\{C_k, k \in \mathbf{N}\}$ dépendant évidemment de δ.

Posons $\forall\, k \in \mathbf{N}$, $\sigma^k = \sigma \cap (\mathbf{D} \times C_k)$ et

$$\tilde{\sigma}^k = \{z \in \mathbf{D}, \text{ t.q. } \mathbf{y} \in C_k \text{ avec } (\mathbf{z}, \mathbf{y}) \in \sigma^k\},$$

c'est-à-dire que $\tilde{\sigma}^k$ est le projection sur la première coordonnée de σ^k.

Utilisant alors le théorème de N. Varopoulos [6] et celui de A. Bernard [2] on a montré le théorème suivant.

THEOREME 3.3. *Soit σ une suite dans $\mathbf{D} \times W$ où W est un ensemble de type S dans $\mathbf{D}^{n-1}$. Pour que σ soit d'interpolation $H^\infty(\lambda_n)$ il faut et il suffit que:*

(i) *σ soit séparée;*

(ii) *$\exists\, \delta > 0$ tel que $\forall\, k \in N$, la suite $\tilde{\sigma}^k$ soit d'interpolation pour $H^\infty(\lambda_1)$ de constante indépendante de k, c'est-à-dire $\forall\, k \in N$,*

$$\inf_{z \in \tilde{\sigma}^k} \prod_{\substack{w \in \tilde{\sigma}^k \\ w \neq z}} \left| \frac{z - w}{1 - \bar{z}w} \right| \geq \delta' > 0,$$

δ' indépendant de k.

Ce théorème donne une description "concrète" des suites d'interpolation σ de $D \times W$. Utilisant un théorème d'approximation dû à E. Kronstadt [8] on a aussi obtenu une description abstraite de ces suites.

THEOREME 3.4. *Soit $\sigma \subset \mathbf{D} \times W$ où W est un ensemble de type S dans $\mathbf{D}^{n-1}$. Pour que σ soit d'interpolation $H^\infty(\lambda_n)$ il faut et il suffit que il existe une suite d'idempotents élémentaires uniformément bornés dans $H^\infty(\lambda_n)$.*

Rappelons que si $\sigma = \{\mathbf{z}_i, i \in \mathbf{N}\}$, une suite d'idempotents élémentaires est une suite $\{\varepsilon_i, i \in \mathbf{N}\}$ telle que $\varepsilon_i(\mathbf{z}_j) = \delta_{ij}$ et $\varepsilon_i \in H^\infty(\lambda_n)$, $\forall\, i \in \mathbf{N}$.

Les résultats rappelés dans cette section généralisent des résultats dû à E. Kronstadt [8], et ce par des méthodes très différentes.

Nous aurons encore besoin de la notion suivante. Soit $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\} \in [0, 1]^n$ et convenons que

$$\begin{aligned} z^i_{\varepsilon_i} &= z^i \quad \text{si } \varepsilon_i = 1, \\ &= \bar{z}^i \quad \text{si } \varepsilon_i = 0. \end{aligned}$$

DÉFINITION. $W \subset \mathbf{D}^n$ est de type S complètement symetrisable (S.C.S.) si pour tout $\boldsymbol{\varepsilon} \in [0, 1]^n$ l'ensemble $W^{(\varepsilon)} = \{(z^1, \ldots, z^n) \in \mathbf{D}^n, (z^1_{\varepsilon_1}, \ldots, z^n_{\varepsilon_n}) \in W\}$ est de type S.

Clairement, si $W \subset \mathbf{D}$ est de type S.C.S. il est de type S. On montre en utilisant exactement les mêmes preuves que pour les ensembles de type S que les ensembles S.C.S. vérifient:

(3.3) toute union finie d'ensembles S.C.S. est encore S.C.S.;
(3.4) tout produit fini d'ensembles S.C.S. est encore S.C.S.

4. Interpolation H^p

THEOREME 4.1. *Soit μ une mesure sur $\mathbf{D}^n$, positive et telle que pour un p positif μ vérifie l'inégalité $H^p(\lambda_n)$, alors μ est une mesure de Carleson dans $\mathbf{D}^n$.*

La réciproque de ce théorème, vraie dans le cas $n = 1$ [9], est fausse en général pour $n > 1$ à cause d'un contre exemple de L. Carleson [10].

Preuve du théorème. Supposons d'abord $p > 1$. Soit alors l'ensemble $S_{\mathbf{h},\boldsymbol{\theta}}$ et considérons le pont $\mathbf{z} = z_{\mathbf{h},\boldsymbol{\theta}} = ((1 - h_1)e^{i\theta_1}, \ldots, (1 - h_n)e^{i\theta_n})$; associons lui le noyau de Cauchy Szegö normalisé dans $H^p(\lambda_n)$:

$$e^{(p)}_{\mathbf{z}} = c(\mathbf{z}) \prod_{j=1}^{n} \frac{(1 - |z^j|^2)^{1/q}}{(1 - \bar{z}^j\zeta^j)}.$$

Il est facile de vérifier que pour $\zeta^j \in S_{h_j,\theta_j}$ on a

$$\frac{1}{|1 - \bar{z}^j\zeta^j|} \geq \frac{\delta}{(1 - |z^j|^2)},$$

δ étant une constante strictement positive absolue. On en déduit que $\forall\, \zeta \in S_{\mathbf{h},\boldsymbol{\theta}}$,

$$|e^{(p)}_{\mathbf{z}}(\zeta)| \geq \delta\alpha(n, p) \prod_{j=1}^{n} \frac{(1 - |z^j|^2)^{1/q}}{(1 - |z^j|^2)} = \delta\alpha \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{(1 - |z^j|^2)^{1/p}}$$

mais $\mathbf{z} = z_{\mathbf{h},\boldsymbol{\theta}}$ donc $\forall\, \boldsymbol{\zeta} \in S_{\mathbf{h},\boldsymbol{\theta}}$,

$$|e^{(p)}_{\mathbf{z}}(\boldsymbol{\zeta})| \geq \frac{\delta\alpha}{2^{1/p}} \frac{1}{(h_1 h_2 \cdots h_n)^{1/p}}.$$

Appliquons à $e^{(p)}_{\mathbf{z}}$ l'inégalité $H^p(\lambda_n)$ de l'hypothèse, il vient

$$C\|e^{(p)}_{\mathbf{z}}\|^p_p \geq \int_{\mathbf{D}^n} |e^{(p)}_{\mathbf{z}}|^p \, d\mu \geq \int_{S_{\mathbf{h},\boldsymbol{\theta}}} |e^{(p)}_{\mathbf{z}}(\zeta)|^p \, d\mu(\zeta) \geq \frac{\delta^p\alpha^p}{2} \frac{\mu(S_{\mathbf{h},\boldsymbol{\theta}})}{h_1 h_2 \cdots h_n}.$$

Comme $e^{(p)}_{\mathbf{z}}$ est normalisé il vient

$$\mu(S_{\mathbf{h},\boldsymbol{\theta}}) \leq \frac{2c}{\delta^p\alpha^p} h_1 h_2 \cdots h_n,$$

donc μ est bien de Carleson.

Soit maintenant $0 < p < 1$. Il existe un entier $m \in \mathbf{N}$ tel que $p' = mp > 1$. Soit $f \in H^{p'}(\lambda_n)$ alors $f^m \in H^p(\lambda_n)$ et on a $\int_{\mathbf{D}^n} |f^m|^p \, d\mu \le C\|f^m\|_p^p$ donc

$$\int_{\mathbf{D}^n} |f|^{p'} \, d\mu \le C\|f\|_{p'}^{p'}$$

et l'on est ramené à la preuve ci-dessus. Pour $p = 2$ ceci est un case très particulier de l'étude [3 chap. III], et la preuve est analogue.

On va maintenant donner une réciproque de ce théorème dans le cas où la mesure μ est dans $\mathbf{D} \times W$ est de type S dans $\mathbf{D}^{n-1}$.

THEOREME 4.2. *Soit μ une mesure positive portée par $\mathbf{D} \times W$ où W est un ensemble de type S dans $\mathbf{D}^{n-1}$. Alors si μ est de Carleson elle vérifie les inégalités $H^p(\lambda_n)$, $\forall\, p > 1$.*

Ce théorème sera conséquence des lemmes suivants.

Considérons la partition de $\mathbf{D}$ en "cellules" à la Carleson $\forall\, k \in \mathbf{N}$, $\forall\, l \in \mathbf{N}$, $l < 2^k$,

$$C_{k,l} = \left\{ z = re^{i\theta} \in \mathbf{D},\ 2^{-k-1} < 1 - r \le 2^{-k},\ \frac{2\pi l}{2^k} \le \theta < \frac{2\pi}{2^k}(l+1) \right\}.$$

Un calcul classique montre qu'il existe une constante absolue $M > 0$ telle que $\forall\, k$, $\forall\, l$, $\forall\, z \in C_{k,l}$, on a

$$P_z(\theta) \le MP_w(\theta), \quad \forall\, \theta \in [0, 2\pi] \tag{4.1}$$

De même, posant $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbf{N}^n$, $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbf{N}^n$ on recouvre $\mathbf{D}^n$ par les "cellules" $C_{\mathbf{k},\mathbf{l}} = C_{k_1,l_1} \times \cdots \times C_{k_n,l_n}$.

Soit maintenant W un ensemble de type S dans $\mathbf{D}^n$ et considérons la famille d'indices $\Lambda = \{(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \text{ t.q. } C_{\mathbf{k},\mathbf{l}} \cap W \neq \emptyset\}$. Pour tout $(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \in \Lambda$ notons $z_{\mathbf{k},\mathbf{l}}$ un point de $C_{\mathbf{k},\mathbf{l}} \cap W$; notons aussi σ la suite $\sigma = \{z_{\mathbf{k},\mathbf{l}}, (\mathbf{k}, \mathbf{l}) \in \Lambda\}$. On a alors le lemme suivant.

LEMME 4.1. *La suite σ est l'union d'au plus 4^n sous-suites σ_i telles que $\forall\, i = 1, \ldots, 4^n$, σ_i soit séparée, donc d'interpolation $H^\infty(\lambda)$.*

En effet, en une dimension posons:

$$J_1 = \{(k, l) \text{ t.q. } k \equiv 0 \pmod 2,\ l \equiv 0 \pmod 2\},$$

$$J_2 = \{(k, l) \text{ t.q. } k \equiv 0 \pmod 2,\ l \equiv 1 \pmod 2\},$$

$$J_3 = \{(k, l) \text{ t.q. } k \equiv 1 \pmod 2,\ l \equiv 0 \pmod 2\},$$

$$J_4 = \{(k, l) \text{ t.q. } k \equiv 1 \pmod 2,\ l \equiv 1 \pmod 2\}.$$

Soit alors $i \in [1, \ldots, 4]$ et $(k, l) \in J_i$, $(k', l') \in J_i$, $(k, l) \neq (k', l')$; on voit facilement qu'il existe une constante absolue $\delta > 0$ telle que $\forall\, z \in C_{k,l}$, $\forall\, w \in C_{k',l'}$, $d_g(z, w) \ge \delta > 0$.

Dans $\mathbf{D}^n$, faisant tous les produits possibles, on obtient 4^n familles d'indices

$K_1, \ldots, K_{4^n}$ vérifiant: $\forall\, i \in [1, 2, \ldots, 4^n]$, $\forall\, (\mathbf{k}, \mathbf{l}) \in K_i$, $\forall\, (\mathbf{k}', \mathbf{l}') \in K_i$, $(\mathbf{k}', \mathbf{l}') \neq (\mathbf{k}, \mathbf{l})$, $\forall\, \mathbf{z} \in C_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}$, $\forall\, \mathbf{w} \in C_{\mathbf{k}', \mathbf{l}'}$ on a $d_g(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \geq \delta > 0$.

Posons alors, $\forall\, i \in [1, 2, \ldots, 4^n]$, $\Lambda_i = \Lambda \cap K_i$ et $\sigma_i = \{z_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}, (\mathbf{k}, \mathbf{l}) \in \Lambda_i\}$ on a bien que $\sigma = \bigcup_{i=1}^{4^n} \sigma_i$, et $\forall\, i \in [1, 2, \ldots, 4^n]$ σ_i est séparée. Comme de plus $\sigma_i \subset W$, $\forall\, i \in [1, 2, \ldots, 4^n]$, et que W est de type S, σ_i est bien d'interpolation $H^\infty(\lambda)$.

Preuve du théorème 4.2. On fera la démonstration dans $\mathbf{D}^{n+1}$ pour utiliser les notations ci-dessus.

Soit μ une mesure de Carleson portée par $W \times \mathbf{D}$, où W est ensemble de type S dans $\mathbf{D}^n$.

Recouvrons W par les cellules $C_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}$, et posons, si $k \in \mathbf{N}$, $l < 2^k$,

$$S_{k, l} = \left\{ z = re^{i\theta} \in \mathbf{D},\, 0 < 1 - r \leq 2^{-k},\ \frac{2\pi}{2^k} \leq \theta < \frac{2\pi}{2^k}(l+1) \right\};$$

de même dans $\mathbf{D}^n$: $S_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} = S_{k_1, l_1} \times \cdots \times S_{k_n, l_n}$; on a, avec les notations du lemme 4.1,

$$(\mathbf{z}_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} \in C_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} \cap W),\ 2^{-k_1} \cdots 2^{-k_n} \leq 2^n((1 - |\mathbf{z}_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}|^2)).$$

Pour $(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \in \Lambda$ définissons la mesure $\mu_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}$ ainsi: pour tout borélien B de $\mathbf{D}$, on pose

$$\mu_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}(B) = \frac{1}{((1 - |\mathbf{z}_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}|^2))} \mu(C_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} \times B);$$

on voit que $\mu_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}$ est une mesure de Carleson dans $\mathbf{D}$ de constante indépendante de $(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ car, si $S_{h, \theta}$ est un ensemble de Carleson dans $\mathbf{D}$ il vient

$$\mu_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}(S_{h, \theta}) = \frac{1}{((1 - |\mathbf{z}_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}|^2))} \mu(C_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} \times S_{h, \theta}) \leq Ah \frac{2^{-k_1} \cdots 2^{-k_n}}{((1 - |z_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}|^2))} \leq 2^n Ah,$$

où A est la constante de μ.

Soit f analytique dans $\mathbf{D}^{n+1}$ et continue dans $\bar{\mathbf{D}}^{n+1}$; on a

$$\int_{W \times \mathbf{D}} |f(\mathbf{z}, w)|^p \, d\mu = \sum_{i=1}^{4^n} \sum_{(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \in \Lambda_i} \int_{C_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} \times \mathbf{D}} |f(\mathbf{z}, w)|^p \, d\mu. \tag{4.2}$$

Etudions un terme de cette série

$$\int_{C_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} \times \mathbf{D}} |f(\mathbf{z}, w)|^p \, d\mu \leq \gamma \left(\int_{\mathbf{D}} \sup_{\mathbf{z} \in C_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}} |f(\mathbf{z}, w)|^p \, d\mu_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}(w) \right) ((1 - |z^0_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}|^2)) \tag{4.3}$$

avec

$$\gamma = \sup_{\mathbf{z} \in C_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}} \frac{((1 - |\mathbf{z}|^2}{((1 - |z^0_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}|^2))} \leq \left(\frac{1 + \delta}{1 - \delta} \right)^n.$$

Posons

$$g_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}(w) = \sup_{\mathbf{z} \in C_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}} |f(\mathbf{z}, w)|^2;$$

c'est une fonction sous-harmonique car $\forall\, \mathbf{z} \in C_{\mathbf{k},\mathbf{l}}$, $|f(\mathbf{z}, w)|^{p/2}$ est sous-harmonique.

Posons

$$g_{\mathbf{k},\mathbf{l}}(e^{i\theta}) = \sup_{\mathbf{z} \in C_{\mathbf{k},\mathbf{l}}} |f(\mathbf{z}, e^{i\theta})|^{p/2},$$

puisque $d\mu_{\mathbf{k},\mathbf{l}}$ est de Carleson de constant A indépendante de $(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ dans $\mathbf{D}$, il vient [14]

$$\int_{\mathbf{D}} |g_{\mathbf{k},\mathbf{l}}(w)|^2\, d\mu_{\mathbf{k},\mathbf{l}}(w) \leq C \|g^*_{\mathbf{k},\mathbf{l}}\|_2^2$$

soit

$$\int_{\mathbf{D}} \sup_{\mathbf{z} \in C_{\mathbf{k},\mathbf{l}}} |f(\mathbf{z}, w)|^p\, d\mu_{\mathbf{k},\mathbf{l}}(w) \leq C \int_{\mathbf{T}} \sup_{\mathbf{z} \in C_{\mathbf{k},\mathbf{l}}} |f(\mathbf{z}, e^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Portons dans (4.2)

$$\int |f|^p\, d\mu \leq C\gamma \sum_{i=1}^{4^n} \sum_{(\mathbf{k},\mathbf{l}) \in \Lambda_i} ((1 - |z^0_{\mathbf{k},\mathbf{l}}|^2)) \int_{\mathbf{T}} \sup_{\mathbf{z} \in C_{\mathbf{k},\mathbf{l}}} |f(\mathbf{z}, e^{i\theta})|^p\, d\theta.$$

Soit $z_{\mathbf{k},\mathbf{l}}(\theta)$ un point de $\bar{C}_{\mathbf{k},\mathbf{l}}$ où le $\sup_{\mathbf{z} \in C_{\mathbf{k},\mathbf{l}}} |f(\mathbf{z}, e^{i\theta})|$ est atteint (θ fixé, $f(\mathbf{z}, e^{i\theta})$ est continue en $\mathbf{z}$) et échangeons somme et intégrale:

$$\int |f|^p\, d\mu \leq \gamma C \sum_{i=1}^{4^n} \int_{\mathbf{T}} \left\{ \sup_{(\mathbf{k},\mathbf{l}) \in \Lambda_i} ((1 - |z^0_{\mathbf{k},\mathbf{l}}|^2)) |f(z_{\mathbf{k},\mathbf{l}}, e^{i\theta})|^p \right\} d\theta$$

On peut échanger $z^0_{\mathbf{k},\mathbf{l}}$ en $z_{\mathbf{k},\mathbf{l}}$ quitte à mettre γ en facteur et puisque $\{\mathbf{z}_{\mathbf{k},\mathbf{l}}, (\mathbf{k}, \mathbf{l}) \in \Lambda\}$ est d'interpolation grâce au lemme 4.1, on peut appliquer le théorème 2.1.b) et on a

$$\sum_{(\mathbf{k},\mathbf{l}) \in \Lambda_i} ((1 - |\mathbf{z}_{\mathbf{k},\mathbf{l}}|^2)) |f(\mathbf{z}_{\mathbf{k},\mathbf{l}}, e^{i\theta})|^p \leq C' \int_{\mathbf{T}^n} |f(\mathbf{z}, e^{i\theta})|^p\, d\lambda_n(\mathbf{z})$$

car la constante d'interpolation de $\{\mathbf{z}_{\mathbf{k},\mathbf{l}}(\theta), (\mathbf{k}, \mathbf{l}) \in \Lambda_i\}$ ne dépend pas de θ. Il vient donc

$$\int_{\mathbf{D}^{n+1}} |f|^p\, d\mu \leq 4^n \gamma^2 C C' \int_{\mathbf{T}^{n+1}} |f|^p\, d\lambda_{n+1}.$$

Soit maintenant $f \in H^p(\mathbf{D}^{n+1})$ et $\{f_k\} \in A(\mathbf{D}^{n+1})$ une suite convergent vers f dans $H^p(\mathbf{D}^{n+1})$. Le lemme de Fatou nous donne (f_k converge ponctuellement dans $\mathbf{D}^{n+1}$ vers f)

$$\int_{\mathbf{D}^{n+1}} \liminf_k |f_k|^p\, d\mu = \int_{\mathbf{D}^{n+1}} |f|^p\, d\mu \leq \liminf_k \int_{\mathbf{D}^{n+1}} |f_k|^p\, d\mu$$

puis (4.5)

$$\int_{\mathbf{D}^{n+1}} |f|^p\, d\mu \leq \liminf_k \gamma^2 C C' \|f_k\|_p^p = 4^n \gamma^2 C C' \|f\|_p^p$$

ce qui achève la preuve de ce théorème.

Si W est (S.C.S.) on a mieux:

THEOREME 4.3. *Soit μ une measure de Carleson portée par $W \times \mathbf{D}$, où W est un ensemble (S.C.S.) de $\mathbf{D}^n$, alors μ vérifie les inégalités $H^p(\mathbf{D}^{n+1})$, pour tout p positif.*

Preuve. Exactement comme pour le théorème précédent on considère les mesures de Carleson dans $\mathbf{D}$, $\mu_{\mathbf{k},\mathbf{l}}$, $(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \in \Lambda$ de constante $2^n A$ indépendante de $(\mathbf{k}, \mathbf{l})$.

Soit f continue sur $\mathbf{T}^{n+1}$ et positive, $\tilde{f}(\mathbf{z}, w)$ son intégrale de Poisson dans $\mathbf{D}^n \times \mathbf{D}$; si $\mathbf{z} \in \mathbf{D}^n$ et $w \in \mathbf{T}$, on note encore $\tilde{f}(\mathbf{z}, w) = \int_{\mathbf{T}^n} f(\zeta, w) P_{\mathbf{z}}(\zeta)\, d\lambda_n$ de même si $w \in \mathbf{D}$ et $\mathbf{z} \in \mathbf{T}^n$, $\tilde{f}(\mathbf{z}, w) = \int_{\mathbf{T}} f(\mathbf{z}, \zeta) P_w(\zeta)\, d\lambda_1(\zeta)$. On a

$$\begin{aligned} \int \tilde{f}^2\, d\mu &= \sum_{(\mathbf{k},\mathbf{l}) \in \Lambda} \int_{C_{\mathbf{k},\mathbf{l}} \times \mathbf{D}} \tilde{f}^2(\mathbf{z}, w)\, d\mu \\ &\leq M^{2n} \sum_{(\mathbf{k},\mathbf{l}) \in \Lambda} ((1 - \mathbf{z}_{\mathbf{k},\mathbf{l}}|^2)) \int_{\mathbf{D}} \tilde{f}^2(\mathbf{z}_{\mathbf{k},\mathbf{l}}, w)\, d\mu_{\mathbf{k},\mathbf{l}}(w) \end{aligned} \tag{4.6}$$

car $\tilde{f}(\mathbf{z}, w) = \int f P_{\mathbf{z}} \cdot P_w\, d\lambda_{n+1}$ et si $\mathbf{z} \in C_{\mathbf{k},\mathbf{l}}$, par (4.1) itéré:

$$\tilde{f}(\mathbf{z}, w) \leq M_n \tilde{f}(\mathbf{z}, \mathbf{l}, w).$$

Mais $\mu_{\mathbf{k},\mathbf{l}}$ est de Carleson de constante $2^n A$ donc $\exists\, A_1 > 0$ t.q., $\forall\, (\mathbf{k}, \mathbf{l}) \in \Lambda$,

$$\int_{\mathbf{D}} \tilde{f}^2(\mathbf{z}_{\mathbf{k},\mathbf{l}}, w)\, d\mu_{\mathbf{k},\mathbf{l}}(w) \leq A_1^2 \int_{\mathbf{T}} \tilde{f}^2(\mathbf{z}_{\mathbf{k},\mathbf{l}}, w)\, d\lambda_1(w);$$

portant dans (4.6) il vient

$$\int \tilde{f}^2\, d\mu \leq A_1^2 M^{2n} \sum_{(\mathbf{k},\mathbf{l}) \in \Lambda} ((1 - |\mathbf{z}_{\mathbf{k},\mathbf{l}}|^2)) \int_{\mathbf{T}} \tilde{f}^2(\mathbf{z}_{\mathbf{k},\mathbf{l}}, w)\, d\lambda_1(w) \tag{4.7}$$

Grâce au lemme 4.1 on peut diviser σ en au plus 4^n sous-suites σ_i qui soient d'interpolation $H^\infty(\lambda_n)$ de constante C_i; posant $C = \sup_i C_i$ il vient, $i = 1, 2, \ldots, 4^n$,

$$\sum_{(\mathbf{k},\mathbf{l}) \in \Lambda_i} ((1 - |\mathbf{z}_{\mathbf{k},\mathbf{l}}|^2)) \tilde{f}^2(\mathbf{z}_{\mathbf{k},\mathbf{l}}, w) \leq 2C^2 \int_{\mathbf{T}^n} \tilde{f}^2(\mathbf{z}, w)\, d\lambda_1(\mathbf{z}), \tag{4.8}$$

grâce au lemme 2.2, applicable car σ_i est d'interpolation $H^\infty(\lambda_n)$.

Dans (4.7) on échange somme et intégrale il vient

$$\int \tilde{f}^{\,2}\, d\mu \leq A_1^2 M^{2n} \sum_{i=1}^{4^n} \int_{\mathbf{T}} \sum_{(\mathbf{k},\mathbf{l}) \in \Lambda_i} ((1 - |\mathbf{z}_{\mathbf{k},\mathbf{l}}|^2)) \tilde{f}^{\,2}(\mathbf{z}_{\mathbf{k},\mathbf{l}}, w)\, d\lambda_1(w);$$

en y portant (4.8) on arrive à

$$\int \tilde{f}\, d\mu \leq A_1^2 M^{2n} 4^n \cdot 2 \cdot C^2 \int_{\mathbf{T}^{n+1}} |f|^2\, d\lambda_{n+1}.$$

Soit maintenant f dans $L^2(\mathbf{T}^{n+1}, \lambda_{n+1})$, $f \geq 0$, et $\{f_k,\ k \in \mathbf{N}\}$ une suite de fonctions positives de $\mathscr{C}(\mathbf{T}^{n+1})$ qui converge vers f en norme $L^2(\lambda_{n+1})$. On a que $\tilde{f}_k$ converge ponctuellement dans $\mathbf{D}^{n+1}$ vers $\tilde{f}$; appliquant le lemme de Fatou il vient alors

$$\int \lim_k \inf \tilde{f}_k^2 \, d\mu = \int \tilde{f}^2 \, d\mu \leq \lim_k \inf \int \tilde{f}_k^2 \, d\mu$$

d'où, puisque les f_k sont dans $\mathscr{C}(\mathbf{T}^{n+1})$

$$\text{(4.9)} \qquad \int \tilde{f}^2 \, d\mu \leq 4^n 2 A_1^2 M^{2n} C^2 \|f\|_2^2, \quad \forall f \in L^2(\lambda_{n+1}).$$

On achève alors la preuve du théorème 4.2 comme celle du théorème 2.3: soit $p > 0$ et $f \in H^p(\lambda_{n+1})$; $|f|^{p/2}$ est pluri-sous-harmonique donc appliquant (4.9) à $g = |f^*|^{p/2} \in L^2(\lambda_{n+1})$ on en déduit le théorème 4.3.

On va donner encore une caractérisation des suites d'interpolation $H^\infty(\lambda_{n+1})$ contenue dans $\mathbf{D} \times W$ où W est de type S dans $\mathbf{D}^n$.

A une suite $\sigma = \{\mathbf{z}_k, k \in \mathbf{N}\}$ on associe la mesure sur $\mathbf{D}^{n+1}$

$$\mu(\sigma) = \sum_{k \in \mathbf{N}} \prod_{j=1}^{n+1} (1 - |z_k^j|^2) \delta_{\mathbf{z}_k}.$$

THEOREME 4.4. *Soit σ une suite contenue dans $\mathbf{D} \times W$, où W est un ensemble de type S dans $\mathbf{D}^n$. Pour que σ soit d'interpolation $H^\infty(\lambda_{n+1})$, il faut et il suffit que σ soit séparée et que $\mu(\sigma)$ soit de Carleson.*

Si σ est d'interpolation $H^\infty(\lambda_{n+1})$, σ est clairement séparée; la mesure associée $\mu(\sigma)$ est de Carleson comme cela a été montré, dans un cadre plus général, dans [11] et dans [3, chap. III].

Réciproquement supposons σ séparée et $\mu(\sigma)$ de Carleson dans $\mathbf{D}^{n+1}$. Recouvrons $\mathbf{D}^{n+1}$ par les "cellules" $C_{\mathbf{k},\mathbf{l}}$. Puisque σ est séparée, dans chaque cellule $C_{\mathbf{k},\mathbf{l}}$ il y a au plus $n_{\mathbf{k},\mathbf{l}}$ points de σ avec $n_{\mathbf{k},\mathbf{l}} \leq N < +\infty$. On peut donc diviser σ en N sous-suites σ_i telles qu'il n'y ait qu'un point de σ_i dans chaque cellule $C_{\mathbf{k},\mathbf{l}}$. Grâce à (3.1) il suffit de montrer que σ_i est d'interpolation $H^\infty(\lambda_{n+1})$. Appelons donc encore σ cette sous-suite σ_i. Elle a la propriété suivante: si nous recouvrons W par des "cellules" $D_{\mathbf{k},\mathbf{l}} \subset \mathbf{D}^n$ et si nous appelons $\sigma^{\mathbf{k},\mathbf{l}} = \{(z, \mathbf{w}) \in \sigma, \mathbf{w} \in D_{\mathbf{k},\mathbf{l}}\}$ puis

$$\tilde{\sigma}^{\mathbf{k},\mathbf{l}} = \{z \in \mathbf{D}, \text{ t.q. } \mathbf{w} \in D_{\mathbf{k},\mathbf{l}}, (z, \mathbf{w}) \in \sigma\},$$

c.à.d. la projection sur la première coordonnée de $\sigma^{\mathbf{k},\mathbf{l}}$, alors: la suite $\tilde{\sigma}^{\mathbf{k},\mathbf{l}}$ est séparée uniformément par rapport à $(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ (4.6).

D'autre part, choisissons dans $\mathbf{D}_{\mathbf{k},\mathbf{l}}$, le point

$$w_{\mathbf{k},\mathbf{l}} = \{(w_{\mathbf{k},\mathbf{l}}^1, \ldots, w_{\mathbf{k},\mathbf{l}}^n); \qquad w_{\mathbf{k},\mathbf{l}}^j = (1 - 2^{-kj-1}) e^{i2\pi lj 2^{-kj}}\}.$$

Alors, comme pour la preuve du théorème 4.2 la mesure $\mu_{\mathbf{k},\mathbf{l}}$ ainsi définie: $\forall B$ borélien de $\mathbf{D}$,

$$\mu_{\mathbf{k},\mathbf{l}}(B) = \mu(\sigma)[B \times D_{\mathbf{k},\mathbf{l}}] \frac{1}{\prod_{j=1}^n (1 - |w_{\mathbf{k},\mathbf{l}}^j|^2)}$$

est de Carleson dans $\mathbf{D}$ de constante indépendante de $\mathbf{k}$, $\mathbf{l}$. Mais la mesure

$$\nu_{\mathbf{k},\mathbf{l}} = \sum_{z \in \tilde{\sigma}^{\mathbf{k},\mathbf{l}}} (1 - |z|^2)\delta_z$$

est telle que $\nu_{\mathbf{k},\mathbf{l}} \leq \mu_{\mathbf{k},\mathbf{l}}$, grâce au choix de $w_{\mathbf{k},\mathbf{l}}$, donc $\nu_{\mathbf{k},\mathbf{l}}$ est de Carleson dans $\mathbf{D}$ de constante indépendante de $\mathbf{k}$, $\mathbf{l}$: la suite $\sigma^{\mathbf{k},\mathbf{l}}$ est donc d'interpolation $H^\infty(\lambda_1)$ de constante indépendante de $\mathbf{k}$, $\mathbf{l}$ et on peut alors appliquer le théorème 3.3 pour conclure puisque σ est dans $\mathbf{D} \times W$ avec W de type S.

COROLLAIRE 4.1. *Soit σ une suite de $\mathbf{D} \times W$, où W est de type S dans $\mathbf{D}^{n-1}$. Pour que σ soit d'interpolation $H^\infty(\lambda_n)$ il faut et il suffit que σ soit fortement d'interpolation $H^p(\lambda_n)$ pour un $p > 1$.*

Si σ est d'interpolation $H^\infty(\lambda_n)$ alors grâce au théorème 2.1, σ est d'interpolation $H^p(\lambda_n)$, $\forall\, p > 1$.

Si σ est fortement d'interpolation $H^p(\lambda_n)$, $p > 0$, alors le théorème 4.1 nous affirme que $\mu(\sigma)$ est de Carleson. Pour appliquer le théorème 4.4 il reste à vérifier que σ est séparée, ce qui est fait dans le lemme suivant:

LEMME 4.2. *Soit σ une suite de $\mathbf{D}^n$ et $p > 0$ t.q. $\forall\, \mathbf{z}, \mathbf{w} \in \sigma$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{w}$, il existe $K > 0$ et $f \in H^p(\lambda_n)$ avec $\|f\|_p \leq K$ et $((1 - |\mathbf{z}|^2))^{1/p} f(\mathbf{z}) = 1$, $f(\mathbf{w}) = 0$, alors la suite σ est séparée.*

La preuve est très simple si $p = 2$ [3, chap. II] mais sans la factorisation en fonction intérieure et extérieure c'est plus long. Soit $p > 0$ et $f \in H^p(\lambda_n)$ alors

$$((1 - |\mathbf{z}|^2))^{1/p} |f(\mathbf{z})| \leq C^n(p) \|f\|_p; \tag{4.10}$$

en effet pour $n = 1$ la mesure $(1 - |z|^2)\delta_z$ est de Carleson dans $\mathbf{D}$ donc vérifie les inégalités $H^p(\lambda_1)$, $\forall\, p > 0$.

Supposons la vraie dans $\mathbf{D}^{n-1}$, et soit $f \in H^p(\lambda_n)$ on a $\forall\, \mathbf{z} \in \mathbf{D}^{n-1}$, $w \in \mathbf{D}$,

$$|f_r(\mathbf{z}, w)|^p ((1 - |\mathbf{z}\|^2)) \leq C^p(p, n-1) \int |f_r(\zeta, w)|^p \, d\lambda_{n-1}(\zeta)$$

avec $f_r(\zeta, \eta) = f(r\zeta, r\eta)$; mais, ζ fixé, $f_r(\zeta, \eta)$ est dans $H^p(\lambda_1)$ donc $|f_r(\zeta, w)|^p (1 - |w|^2) \leq C^p(p) \int |f_r(\zeta, \eta)|^p \, d\lambda_1(\eta)$ d'où en reportant, $\forall\, r < 1$,

$$((1 - |\mathbf{z}|^2))(1 - |w|^2) |f_r(\mathbf{z}, w)|^p \leq C^p(p) C^p(p, n-1) \|f_r\|_p^p$$

d'où, laissant tendre r vers 1, l'inégalité cherchée avec $C(p, n) = C^n(p)$.

Soit $0 < h < 1$ et $(z, w) \in \mathbf{C}^2$ t.q. $|z| \leq 1 - h$; $|w| \leq 1 - h$; posons $r = 1 - h/2$ et $z' = z/r$, $w' = w/r$ on a

$$\left| \frac{z - w}{1 - \bar{z}w} \right| \geq \frac{1}{4} \left| \frac{z' - w'}{1 - \bar{z}'w'} \right| \tag{4.11}$$

en effet posons $\rho = (1-h)/r$, on a $|z-w| = r|z'-w'|$, $|\bar z' w'| < \rho^2$ d'ou

$$
(4.11) \qquad \begin{aligned} |1-\bar z w| &= r^2 \left| \frac{1}{r^2} - \bar z' w' \right| \\ &\le r^2 \frac{\left(\frac{1}{r^2} - \rho^2\right)}{1-\rho^2} |1 - \bar z' w'| \le 4r |1-\bar z' w'|. \end{aligned}
$$

(a) Soit alors σ, $\mathbf{z}$, $\mathbf{w}$ et f comme dans le lemme 4.2 la preuve étant faite dans $\mathbf{D}^2$ et supposons de plus que $\mathbf{z} = (z^1, z^2)$; $\mathbf{w} = (w^1, w^2)$ avec $|z^1| = 1 - h_1$; $1 - 2h_1 \le |w^1| \le 1 - h_1$ et $|z^2| = 1 - h_2$; $1 - 2h_2 \le |w^2| \le 1 - h_2$. Posons $r_1 = 1 - h_1/2$; $r_2 = 1 - h_2/2$. Posons

$$G(\zeta, \eta) = f(r_1\zeta, r_2\eta) h_1^{1/p} h_2^{1/p}$$

on a par (4.7),

$$\|G\|_\infty \le 4C^2(p)\|f\|_p \le 4C^2(p)K;$$

d'autre part, posant, $\mathbf{z}' = (z^1/r_1, z^2/r_2)$; $\mathbf{w}' = (w^1/r_1, w^2/r_2)$, il vient $G(\mathbf{z}') \ge \frac{1}{4}$ et $G(\mathbf{w}') = 0$ donc il existe $\delta > 0$ ne dépendant que de K, $C(p)$ tel que, $d_g(\mathbf{z}', \mathbf{w}') \ge \delta > 0$; utilisant le fait que, $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbf{D}^2$, $\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{D}^2$, $d_g(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}) = \max\,[d_g(\zeta^1, \eta^1), d_g(\zeta^2, \eta^2)]$ et (4.8), on a que

$$d_g(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \ge \frac{\delta}{4}.$$

(b) Supposons que $|z^1| = 1 - h_1$ et $|w_1| < 1 - 2h_1$, $0 < h_1 < \frac{1}{2}$, alors on a

$$\left| \frac{z^1 - w^1}{1 - \bar z^1 w^1} \right| \ge \frac{1 - h_1 - (1 - 2h_1)}{1 - (1 - h_1)(1 - 2h_1)} \ge \frac{1}{3}$$

donc $d_g(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \ge \frac{1}{3}$. Les autres cas se traitent comme (a) ou (b) et cela prouve le lemme 4.2 et achève la preuve du corollaire 4.1.

COROLLAIRE 4.2. *Soit σ une suite contenue dans $\mathbf{D} \times W$ où W est un ensemble (S.C.S.) dans $\mathbf{D}^{n-1}$. Pour que σ soit d'interpolation $H^\infty(\lambda_n)$, il faut et il suffit que σ soit fortement d'interpolation $H^p(\lambda_n)$ pour un $p > 0$.*

Preuve. La nécessité résulte du théorème 4.3 et la suffisance de la preuve du corollaire 4.1.

5. Fonctions analytiques à valeurs vectorielles

Soit E un espace de Banach de dimension strictement positive, E' le dual de E et E'_1 la boule unité de E'.

On dit qu'une fonction f de D^n dans E est analytique à valeurs dans E si $\forall\, l \in E'_1$, $l \circ f(\mathbf{z})$ est une fonction numérique analytique dans $\mathbf{D}^n$; on note cet espace $\mathcal{O}(\mathbf{D}^n, E)$.

On définit $\forall\, p > 0$,

$$H^p(\lambda_n, E) = \{f \in \mathcal{O}(\mathbf{D}^n, E);\ \sup_{r<1} \int \|f_r\|_E^p \, d\lambda_n = \|f\|_{p,E}^p < +\infty\}$$

où f_r désigne la fonction $f_r(\mathbf{z}) = f(r\mathbf{z})$ et $\|a\|_E$ est la norme de a dans E;

$$H^\infty(\lambda_n, E) = \left\{f \in \mathcal{O}(\mathbf{D}^n, E),\ \sup_{\mathbf{z} \in \mathbf{D}^n} \|f\|_E = \|f\|_{\infty,E} < +\infty\right\}.$$

De même,

$$H^p_*(\lambda_n, E) = \left\{f \in \mathcal{O}(\mathbf{D}^n, E);\ \sup_{l \in E_1'} \sup_{r<1} \int |l \circ f_r|^p \, d\lambda_n = \|f\|_{p,*}^p < +\infty\right\}.$$

Pour $p \geq 1$, $\| \ \|_{p,E}$ et $\| \ \|_{p,*}$ sont des normes sur $H^p(\lambda_n, E)$ et $H^p_*(\lambda_n, E)$ qui vérifie $\forall\, f \in H^p(\lambda_n, E)$, $\|f\|_{p,*} \leq \|f\|_{p,E}$. Ces normes sont, en général, non équivalentes.

De même, on définit

$$l^p(\mathbf{N}, E) = \left\{\omega_i \in E,\ \sum_{i=1}^{\infty} \|\omega_i\|_E^p = \|\omega\|_{p,E}^p < +\infty\right\}$$

et

$$l^p_*(\mathbf{N}, E) = \left\{\omega_i \in E,\ \sup_{l \in E_1'} \sum_{i=1}^{\infty} |l(\omega_i)|^p = \|\omega\|_{p,*}^p < +\infty\right\}.$$

Ces deux espaces sont différents en général et, bien sûr, $l^p(\mathbf{N}, E) \subset l^p_*(\mathbf{N}, E)$.

Soit σ une suite de $\mathbf{D}^n$, $\sigma = \{\mathbf{z}_k, k \in \mathbf{N}\}$ et T_p l'opérateur linéaire ainsi définit

$$T_p f = \{((1 - |\mathbf{z}_k|^2))^{1/p} f(\mathbf{z}_k), k \in \mathbf{N}\}, \quad \forall\, f \in H^p(\lambda_n, E);$$

de même $T_{p,*}$ sera l'opérateur

$$T_{p,*} f = \{((1 - |\mathbf{z}_k|^2))^{1/p} f(\mathbf{z}_k), k \in \mathbf{N}\}, \quad \forall\, f \in H^{*p}(\lambda_n, E).$$

Definitions. On dit que—σ est *d'interpolation* $H^p(\lambda_n, E)$ si $T_p H^p(\lambda_n, E) \supseteq l^p(\mathbf{N}, E)$.

—σ est *fortement d'interpolation* $H^p(\lambda_n, E)$, si, de plus, $\exists\, C$ t.q.

$$\sum ((1 - |\mathbf{z}_k|^2)) \|f(\mathbf{z}_k)\|_E^p \leq C \|f\|_{p,E}^p, \quad \forall\, f \in H^p(\lambda_n, E).$$

—σ a la *propriété d'extension linéaire bornée de* $l^p(\mathbf{N}, E)$ dans $H^p(\lambda_n, E)$ si il existe un opérateur linéaire U_p de $l^p(\mathbf{N}, E)$ dans $H^p(\lambda_n, E)$ tel que $\forall\, \omega \in l^p(\mathbf{N}, E)$,

$$\|U_p(\omega)\|_{p,E} \leq C \|\omega\|_{p,E} \quad \text{et} \quad T_p U_p(\omega) = \omega.$$

De même avec H^p_*, l^p_* et $T_{p,*}$.

THEOREME 5.1. *Soit E un espace de Banach non trivial et σ une suite d'interpolation $H^\infty(\lambda_n, \mathbf{C})$ alors:*

(a) $0 < p \leq +\infty$, *σ a la propriété d'extension linéaire bornée de $l^p(\mathbf{N}, E)$ dans $H^p(\lambda_n, E)$.*

(b) $1 \leq p \leq +\infty$, *σ est fortement d'interpolation $H^p(\lambda_n, E)$.*

(a′) $0 < p \leq +\infty$, *σ a la propriété d'extension linéaire bornée de $l^p_*(\mathbf{N}, E)$ dans $H^p_*(\lambda_n, E)$.*

(b′) $1 \leq p \leq +\infty$, *σ est fortement d'interpolation $H^p_*(\lambda_n, E)$.*

De plus toutes les constantes sont indépendantes de l'espace de Banach E.

De même le théorème 2.3 admet une version vectorielle.

THEOREME 5.2. *Soit σ une suite d'interpolation symétrisable pour $H^\infty(\lambda_n)$ dans $\mathbf{D}^n$ alors:*

(a) $0 < p \leq +\infty$, *il existe une extension linéaire bornée de $l^p(\mathbf{N})$ dans $H^p(\lambda_n, E)$.*

(b) $0 < p \leq +\infty$, *σ est fortement d'interpolation $H^p(\lambda_n, E)$.*

(a′) $0 < p \leq +\infty$, *σ a la propriété d'extension linéaire bornée de $l^p_*(\mathbf{N}, E)$* dans *$H^p_*(\lambda_n, E)$.*

(b′) $0 < p \leq +\infty$, *σ est fortement d'interpolation $H^p_*(\lambda_n, E)$.*

De plus toutes les constantes sont indépendantes de l'espace de Banach E.

BIBLIOGRAPHIC

1. D. AMAR et E. AMAR, *Sur les suites d'interpolation en plusieurs variables*, Pacific J. Math., vol. 15 (1978), pp. 15–20.
2. A. BERNARD, *Algèbres quotient d'algèbres uniformes*, C.R. Acad. Sci. Paris, vol. 272 (1971), pp. 1101–1104.
3. E. AMAR, *Méthodes hilbertiennes et interpolation dans le spectre d'une algèbre de Banach*, Anal. Harm. Orsay, vol. 152 (1975).
4. D. AMAR et E. AMAR, *Bases d'exponentielles en plusieurs variables*, J. London Math. Soc. (2), vol. 16 (1977), pp. 253–265.
5. T. W. GAMELIN, *Uniform algebra*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.Y., 1969.
6. N. TH. VAROPOULOS, *Sur la réunion de deux compacts d'interpolation*, C.R. Acad. Sci. Paris, vol. 272 (1971), 950–952.
7. L. CARLESON, *The corona theorem*, Proc. 15th Scandinavian Congress, Oslo, 1968.
8. E. P. KRONSTADT, *Interpolating sequences in polydiscs*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 99 (1974), pp. 369–398.
9. L. CARLESON, *An interpolation problem for bounded analytic functions*, Amer. J. Math., vol. 80 (1958), pp. 921–930.
10. ———, Publ. Institut Mittag-Leffler, report 7, 1974.
11. N. TH. VAROPOULOS, *Sur un problème d'interpolation*, C.R. Acad. Sci. Paris, vol. 274 (1972).
12. H. SHAPIRO and A. L. SHIELDS, *On some interpolation problems for analytic functions*, Amer. J. Math., vol. 83 (1961), pp. 513–522.
13. V. KABAILA, *Interpolation sequences for H^p classes in the case $p < 1$*, Litovsk. Mat. Sb., vol. 3 (1963).
14. L. CARLESON, *Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem*, Proc. Inter. Congress Math., Stockholm, 1962.

UNIVERSITE DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY, FRANCE