# KOMPAKTE PROJEKTIVE EBENEN[1]

VON HANS FREUDENTHAL

Die bekannte Lücke in der von Staudtschen Begründung der projektiven Geometrie wurde anfangs ausgefüllt durch die Einführung von Ordnungs- und Stetigkeitsaxiomen[2]. Später ging man dazu über, nichttriviale Inzidenzsätze axiomatisch zu fordern und auf Ordnungs- und Stetigkeitsaxiome mehr oder weniger zu verzichten[3]; will man sich den Weg zur komplexen Geometrie nicht abschneiden, so sind Ordnungs-Axiome sicher unzweckmässig. Ein Mittelweg ist es, als nicht-triviales ebenes Inzidenzaxiom jedenfalls "Desargues" zu Grunde zu legen und dann ein Stetigkeitsaxiom in der Form von Kompaktheits- und Zusammenhangsforderungen hinzuzufügen; man kommt mit "Desargues" zu einer Geometrie über einem Schiefkörper, der aus topologischen Gründen nur der der reellen oder komplexen Zahlen oder der Quaternionen sein kann[4].

Es fragt sich nun, wie weit man ohne "Desargues", aber mit topologischen Forderungen kommen kann. Es scheint erst, dass sich nichts Interessantes ergibt. Man kennt ja nicht-Desarguessche Ebenen (von der Art der Hilbertschen[5]), die topologisch mit der gewöhnlichen projektiven Ebene übereinstimmen.

Wir wollen nun doch topologische projektive Ebenen betrachten, die als topologische Räume Kontinua sind (man braucht statt des Zusammenhangs übrigens nur, dass sie positiv-dimensional sind). Wir zeigen dann, dass die Gerade in solch einer Ebene notwendig im Kleinen zusammenhängend ist, ja sogar im Kleinen zusammenziehbar, und noch mehr: Jede echte abgeschlossene Teilmenge der Geraden lässt sich auf der Geraden auf einen Punkt zusammenziehen, und als Zusammenziehung kann man eine Schar von (bis auf den Schluss) homöomorphen Abbildungen wählen.

Einer Vermutung von Poincaré zufolge würden die Sphären unter den Mannigfaltigkeiten charakterisiert sein durch die Eigenschaft: Jede echte abgeschlossene Teilmenge lässt sich auf einen Punkt zusammenziehen. Es liegt nahe, zu vermuten, dass die Geraden der topologischen projektiven Ebenen notwendigerweise Sphären sind. Nun weiss man noch nicht einmal, ob die genannten Geraden den Mannigfaltigkeits-Charakter besitzen. Doch

---

Received August 13, 1956.

[1] Das Ergebnis wurde auf dem Internationalen Mathematikerkongress, Amsterdam 1954, mitgeteilt.

[2] Das Resultat dieser recht langen Entwicklung findet man in lehrbuchartiger Form bei F. ENRIQUES, *Vorlesungen über projektive Geometrie*, Leipzig, 1903.

[3] Das fängt an bei H. WIENER, Jber. Deutschen Math. Verein., 1 (1893), 45–48.

[4] A. N. KOLMOGOROFF, Ann. of Math., 33 (1932), 163–174. Was hinzukommt, wenn man die Bedingung des Zusammenhangs fallen lässt, hat N. JACOBSON vollständig untersucht in Amer. J. Math., 58 (1936), 433–449.

[5] D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, Kap. V.

könnte das Problem, zu beweisen, dass die Geraden Sphären sind, leichter sein als das von Poincaré, denn man weiss von ihnen zum Beispiel auch noch, dass sie in hohem Masse homogen sein. Die Projektivitäten der Geraden erzeugen ja eine mindestens dreifach transitive Gruppe. Es ist nur schade, dass diese Gruppe nicht im Kleinen kompakt zu sein braucht und man bis jetzt mit solchen Gruppen nicht viel anfangen kann.

Verlangt man von der projektiven Ebene noch, dass sie eine einigermassen reguläre Mannigfaltigkeit ist, so zeigt ein Satz von G. Hirsch[6], dass ihre Dimension eine Potenz von 2 ist. Als Beispiele kennt man die projektiven Ebenen über den Algebren der reellen Zahlen, der komplexen Zahlen, der Quaternionen und der Oktaven. Die Geraden sind dann Sphären der Dimensionen 1, 2, 4, 8.

## 1. Axiome

Eine topologische projektive Ebene $E$ ist ein topologischer Raum[7], in dem nichtleere abgeschlossene echte Teilmengen als "Geraden" ausgezeichnet sind, so dass gilt:

1.1. Zu zwei verschiedenen Punkten $a$, $b$ von $E$ gibt es genau eine Gerade $\overline{ab}$, die beide enthält.

1.2. Zu zwei verschiedenen Geraden von $E$ gibt es genau einen Punkt, der in beiden enthalten ist.

1.3. Ist für je vier Punkte $a$, $b$, $c$, $d$ von $E$, die zu dreien nicht auf einer Geraden liegen, $\sigma(a, b, c, d)$ erklärt als der gemeinsame Punkt der Geraden $\overline{ab}$ und $\overline{cd}$, so ist $\sigma$ eine stetige Funktion seiner vier Argumente zusammen. Kurz gesagt: Schneiden und Verbinden sind stetige Operationen.

Ausser diesen Axiomen verlangen wir noch:

1.4. $E$ ist kompakt.

1.5. $E$ hat positive Dimension.

Die Geraden von $E$ sind, wie sich gleich zeigt, untereinander homöomorph. Eine von ihnen heisse $P$.

## 2. Satz

In $P$ lässt sich jede echte abgeschlossene Teilmenge auf einen Punkt zusammenziehen.

Ja sogar: *Sind $p$ und $q$ zwei verschiedene Punkte von $P$, so gibt es eine Schar von Homöomorphien $f_t$ $(0 \leqq t < 1)$ von $P$ auf sich, derartig dass*

*$f_t(x)$ stetig in $t$ und $x$ zusammen ist,*

$$f_t(p) = p, \qquad f_t(q) = q, \qquad f_t(P\backslash(p, q)) \subset P\backslash(p, q),$$

$\lim_{t=1} f_t(x) = p$ *gleichmässig in jeder abgeschlossenen Teilmenge von $P$, die $q$ nicht enthält.*

[6] G. Hirsch, Colloques Internationaux XII (1949), 35–42.

[7] Metrisierbarer separabler Raum. Zusatz bei der Korrektur: Nach einer Bemerkung des Herrn H. Salzmann kann man die Separabilität als Voraussetzung entbehren. Sie ergibt sich nämlich, wenn man in $c_n A$ von 4.1 das $A$ durch eine Umgebung von 0 ersetzt.

## 3. Beweis. Verwendung von 1.1–3

3.1. Eine perspektive Abbildung eines Geraden auf eine andere ($P$ auf $Q$ aus $a$) ist eine Homöomorphie. Man nehme nämlich auf $Q$ zwei Punkte $c$ und $d$ an. Das Bild von $x \in P$ ist $\sigma(a, x, c, d)$ und hängt nach 1.3 stetig von $x$ ab; ebenso umgekehrt. Die Eineindeutigkeit ist selbstverständlich.

$\Pi$ ist die Gruppe der Projektivitäten von $P$ (Produkte von Perspektivitäten). $\Pi$ ist mindestens dreifach transitiv. Jedes Element von $\Pi$ ist eine Homöomorphie.

3.2. Auf $P$ zeichne man drei willkürliche Punkte mit den Namen 0, 1 und $\infty$ aus. Man setzt $P' = P \backslash (\infty)$, $P'' = P' \backslash (0)$.

3.3. Hilfssatz. *In $\Pi$ gibt es eine Teilmenge $\Sigma$ mit den Eigenschaften:*

3.3.1. *Aus $f \in \Sigma$ folgt $f(\infty) = \infty$.*

3.3.2. *Zu $a, b, a', b' \in P'$ ($a \neq b$, $a' \neq b'$) gibt es genau ein $\varphi = \varphi_{a,b,a',b'} \in \Sigma$ mit $\varphi(a) = a'$, $\varphi(b) = b'$.*

3.3.3. *$\varphi_{a,b,a',b'}(x)$ ist stetig in seinen fünf Argumenten zusammen.*

3.3.4. *Für $b' \to \infty$ ($a, a', b$ fest, $x \neq a$) gilt $\varphi_{a,b,a',b'}(x) \to \infty$.*

3.3.5. *Für $b' \to a'$ ($a, a', b$ fest, $x \neq \infty$) gilt $\varphi_{a,b,a',b'}(x) \to a'$.*

3.4. *Beweis des Hilfssatzes.* Man wähle eine Gerade $Q \neq P$ durch $\infty$ und einen festen Punkt $p \notin P, \notin Q$. Für $a \neq b$, $a' \neq b'$ (alle in $P'$) setze man

$$q = \overline{a'(\overline{pa} \cap Q)} \cap \overline{b'(\overline{pb} \cap Q)}.$$

Man definiere

$$\varphi_{a,b,a',b'}(x) = \overline{(\overline{px} \cap Q)\, q} \cap P$$

und verstehe unter $\Sigma$ die Menge dieser $\varphi$. Dann sind 3.3.1,2,3 evident. Bei 3.3.4 beachte man, dass für $b' \to \infty$ gilt $q \to \overline{pa} \cap Q$; bei 3.3.5, dass für $b' \to a'$ gilt $q \to a'$.

3.5. *Bemerkung.* Diese Menge ist in der klassischen projektiven Geometrie sogar eine Gruppe. Ein derartiger Satz für *drei* Punktepaare (Analogon des Fundamentalsatzes des projektiven Geometrie) scheint im Allgemeinen nicht zu existieren.

3.6. *Eine Multiplikation*[8]. Man setze

$$xy = \varphi_{0,1,0,x}(y) \qquad \text{für } x, y \in P'',$$
$$x0 = 0y = 0 \qquad \text{für } x, y \in P',$$
$$x\infty = \infty y = \infty \qquad \text{für } x, y \in P \backslash (0).$$

3.6.1. Die Gleichung $xy = z$ ist bei gegebenen $x, z$ oder $y, z$ (alle in $P''$) eindeutig lösbar. (Klar nach 3.3.2.)

3.6.2. $xy$ ist stetig in $x$ und $y$ zusammen. Dies folgt für $x \in P''$ aus 3.3.3, für $x = \infty$ aus 3.3.4, für $x = 0$ aus 3.3.5.

3.6.3. Unter $AB$ verstehen wir die Menge der $ab$ mit $a \in A$, $b \in B$.

[8] Mit dieser Multiplikation wird $P''$ ein "Schiebraum" im Sinne der Endentheorie (H. Freudenthal, Math. Zeit. 33 (1931), 692–713) Weiterhin wird im Wesentlichen mit Methoden dieser Theorie gearbeitet, doch wird von ihr nichts vorausgesetzt.

## 4. Fortsetzung des Beweises. Verwendung von 1.4–5

4.1. *Sei $A$ kompakt in $P'$. Dann gibt es zu jeder Umgebung $V$ von 0 eine Umgebung $U$ von 0, so dass $UA \subset V$ ist.*

Dies folgt aus 3.6.2.

Insbesondere gilt: Ist $\lim c_n = 0$, so ist $c_n A$ in einer vorgeschriebenen Umgebung von 0 enthalten.

4.2. *Sei $U_n$ eine $\infty$ definierende Folge von Umgebungen, $0 \notin U_n$. Sei $C_n$ die 0 enthaltende Komponente von $P \backslash U_n$ und $C = \bigcup C_n$. Dann ist $C = P'$.*

*Beweis.* Wegen 3.6.2 gilt $aU_i \supset U_n$ für $a \neq 0$ und fast alle $n$. Also

$$aC_i \subset a(P\backslash U_i) \subset P\backslash U_n \qquad \text{für fast alle } n.$$

Nun ist $0 \in aC_i \cap C_n$ und $aC_i$ zusammenhängend, also

$$aC_i \subset C_n \subset C.$$

Also auch

$$aC \subset C \qquad \text{für alle } a \in P'.$$

Gibt es $x \in C$, $x \neq 0$, so folgt nach 3.6.1: $C = P'$. Die Existenz eines solchen $x$ ergibt sich in 4.4.

4.3. *Sei $R$ ein kompakter separabler metrischer Raum und* $\dim R > 0$ *im Punkte $p$. Dann gibt es in $R$ ein $p$ enthaltendes Kontinuum*[9].

*Beweis.* Sei $K(p, \varepsilon)$ die Menge der Punkte von $R$, die durch eine Kette von($<\varepsilon$)-Sprüngen mit $p$ verbindbar sind; $K(p, \varepsilon)$ ist offen und abgeschlossen. Wäre $K_p = \bigcap_{\varepsilon>0} K(p, \varepsilon) = (p)$, so gälte für jede Umgebung $U$ von $p: \bigcap_{\varepsilon>0} (K(p, \varepsilon)\backslash U)$ leer, also $K(p, \varepsilon)\backslash U$ leer für gewisses $\varepsilon > 0$. Dann wäre $K(p, \varepsilon)$ eine (beliebig kleine) Umgebung von $p$ mit leerem Rand, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Also ist $K_p \neq (p)$. Wäre $K_p = L \cup M$ mit $\rho(L, M) = \delta > 0$, so hätte man für die $\frac{1}{3}\delta$-Umgebungen $L'$, $M'$ von $L$, $M$: $\rho(L', M') \geqq \frac{1}{3}\delta$.

$$\bigcap_{\varepsilon>0} (K(p, \varepsilon)\backslash(L' \cup M')) \text{ leer,}$$

also für gewisses $\varepsilon < \frac{1}{3}\delta$:

$$K(p, \varepsilon) \subset L' \cup M'.$$

Ist $p \in L \subset L'$, so würde hieraus folgen, dass $M'$ leer ist. $K_p$ ist also zusammenhängend. $K_p$ ist das gewünschte Kontinuum.

4.4. Nach 1.5 gibt es auch eine positiv-dimensionale echte abgeschlossene Teilmenge von $E$; diese enthält nach 4.3 ein Kontinuum $F$. Sei $p \notin F$. Entweder liegt $F$ auf einer Geraden $Q$, oder es gibt zwei Punkte $a$, $b \in F$, so dass $p \notin \overline{ab}$ ist; man setze dann $\overline{ab} = Q$ und projiziere $F$ von $p$ aus auf $Q$. Jedenfalls erhält man so ein Kontinuum auf $Q$, da der Zusammenhang bei stetigen

[9] Eine wohlbekannte Tatsache.

Abbildungen erhalten bleibt. Also dim $Q > 0$ und (nach 3.1) dim $P > 0$; wegen der Transitivität von $\Pi$ gilt das in jedem Punkt von $P$, also auch in 0. Somit ist auch dim $P \backslash U_n > 0$ in 0 für geeignetes $n$. Es gibt nach 4.3 ein 0 enthaltendes Kontinuum in $P \backslash U_n$. Also hat $C_n$ mehr als einen Punkt. (Siehe 4.2.)

4.5. $P$, also auch $P' = C$ ist von zweiter Kategorie. Also ist ein gewisses $C_n$ irgendwo dicht (rel. $P$). $C_n$ ist abgeschlossen in $P \backslash U_n$, also auch in $P$. Daher besitzt $C_n$ einen inneren Punkt (rel. $P$). Wegen der Transitivität von $\Pi$ darf man annehmen, dass dies der Punkt 0 ist. 0 ist innerer Punkt eines Kontinuums $D \subset P$. Sei lim $c_n = 0$. Dann ist 0 innerer Punkt des (beliebig kleinen) Kontinuums $c_n D$. Also ist $P$ im Kleinen zusammenhängend in 0, also überall.

$P' = \bigcup C_n$ ist wegen $0 \in C_n$ zusammenhängend, also gilt das auch von $P$. $P$ ist somit eine Peano-Kurve $\chi(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$.

## 5. Schluss des Beweises

Man darf annehmen, dass $\chi(0) \neq 0$ ist (siehe 4.5). $\alpha$ sei das kleinste $t$ mit $\chi(t) = 0$. Man setze

$$f_t(x) = \chi(\alpha t)x \qquad (x \in P,\ 0 \leqq t < 1).$$

Für $t$ in der Nähe von 1 liegt $\chi(\alpha t)$ in der Nähe von 0, also (nach 4.1) $\chi(\alpha t)A$ in der Nähe von 0, wenn $A$ eine abgeschlossene Teilmenge von $P$ ist, die $\infty$ nicht enthält. Damit ist die Behauptung des Satzes hinsichtlich der (ganz willkürlichen) Punkte 0 und $\infty$ bewiesen.

UTRECHT, NETHERLANDS