Hokkaido Mathematical Journal Vol. 18 (1989), p. 363-384

Quelques remarques sur un théorème de K. Kataoka

Michel ROULEUX
(Received December 1, 1987, Revised April 17, 1989)

0-Introduction

Soit M une variété analytique réelle à bord, de dimension n et P un opérateur différentiel du second ordre à coefficients analytiques sur M de symbole principal réel p. Soit $\omega=\xi.\ dx$ la 1-forme canonique sur $T^{*}M$. On suppose :

(0-1) dp, ω sont linéairement indépendants.
(0-2) ∂M est non caractéristique pour P, et $\omega|_{\partial T^{*}M\backslash 0}$, $dp|_{\partial T^{*}M\backslash 0}$ sont linéairement indépendants sur $p^{-1}(0)\cap\partial T^{*}M\backslash 0$.

Alors près d'un point $x_{0}\in\partial M$, on peut choisir des coordonnées locales $x=(x_{1}, \ldots, x_{n})=(x', x_{n})$ telles que M soit donnée par $x_{n}\geq 0$, et P s'écrive (modulo un facteur elliptique) :

$$P(x, D_{x})=D_{x_{n}}^{2}+R(x, D_{x'})$$

où R est de type principal réel, avec symbole principal $r(x, \xi')$. On pose :

$$r_{0}(x', \xi')=r(x', 0, \xi'),\quad r_{1}(x', \xi')=\partial_{x_{n}}r(x', 0, \xi').$$

Suivant [Me-Sj] on désigne par :

$$\mathscr{E},\ (\text{resp. } \mathscr{H}),\ (\text{resp. } \mathscr{G})\subset T^{*}\partial M\backslash 0$$

les régions elliptique (resp. hyperbolique), (resp. glancing) définies par $r_{0}(x', \xi')>0$ (resp. $r_{0}(x', \xi')<0$), (resp. $r_{0}(x', \xi')=0$), et on pose :

$$\Sigma_{b}=\mathscr{H}\cup\mathscr{G}\cup(p^{-1}(T^{*}\mathring{M}\backslash 0)$$

Soit aussi bM l'espace topologique homogène obtenu de $(T^{*}M\backslash 0)\backslash T_{\partial M}^{*}$ en identiffant les points au-dessus de M qui ont même projection sur $T^{*}\partial M\backslash 0$, et

$$b:\ (T^{*}M\backslash 0)\backslash T_{\partial M}^{*}\longrightarrow bM$$

la projection naturelle. On renvoie à [Me-Sj] et [Sj]-1 pour la définition des rayons C^{∞} et des rayons analytiques. Rappelons seulement que par chaque point de Σ_b, il passe un unique rayon C^∞, mais il peut passer une infinité de rayons analytiques. Soit $u\in\mathscr{D}'(M)$ une distribution prolongeable vérifiant :

(0-3) $\quad Pu\in G^s(M)$

(0-4) $\quad u|_{\partial M}\in G^s(\partial M)$

où G^s désigne la classe de Gevrey d'ordre $s\geq 1$. Si u vérifie (0-3), désignant par $\bar{u}$ le prolongement par 0 de u près de x_0 sur $x_n\leq 0$, on définit suivant G. Lebeau [Le] le spectre Gevrey d'indice s de u par :

$$SS_b^s u=b(SS^s\bar{u}\cap(T^*M\backslash 0)\backslash T_{\partial M}^*)$$

où $SS^s v$ est le spectre Gevrey défini pour $v\in\mathscr{D}'(\boldsymbol{R}^n)$. Le résultat principal de [Le]-2 s'énonce en disant que pour tout $s\geq 1$, $SS_b^s u$ est réunion de rayons analytiques maximaux, alors que pour tout $s\geq 3$, $SS_b^s u$ est réunion de rayons C^∞ maximaux. En particulier, soit $\alpha_0=(x_0', \xi_0')\in\mathscr{G}$ et $\gamma: [-\delta, \delta]\longrightarrow\Sigma_b(\delta>0)$ l'unique rayon C^∞ tel que $\gamma(0)=\alpha_0$. Alors si $s\geq 3$, sous les hypothèses (0-3) & (0-4), il est facile de voir que :

$$\gamma([-\delta, 0[)\cap SS_b^s u=\phi\Longrightarrow\alpha_0\notin SS_b^s u$$

tandis que ce résultat est faux en général pour $s\in[1, 3[$. Pour $s=1$ (classe des fonctions analytiques), K. Kataoka a obtenu toutefois le résultat suivant. Soit

$$\mathscr{E}_+=\{(x', \xi')\in\mathscr{G} : r_1(x', \xi')<0\}$$

l'ensemble des points strictement diffractifs. On a :

THÉORÈME 0-1 $[K]$: *Supposons* $Pu\in G^1(M)$ *et* $\alpha_0\in\mathscr{G}_+$. *Alors* :

$$(\gamma([-\delta, 0[)\cup\gamma(]0, \delta]))\cap SS_b^1 u=\phi\Longrightarrow\alpha_0\notin SS_b^1 u.$$

Ce théorème a été généralisé par G. Lebeau [Le]-3 par des techniques 2-microlocales quand γ présente un contact d'ordre quelconque avec ∂M en α_0.

Le fait remarquable est que u n'a pas besoin de vérifier de conditions aux limites. Indépendammment, J. Sjöstrand [Sj]-2 a obtenu, par des méthodes tout-à-fait différentes, la conclusion du Théorème 0-1 sous l'hypothèse supplémentaire $u|_{\partial M}\in G^1(\partial M)$.

On obtient les résultats suivants :

THÉORÈME 0-2 : *Soit* $\alpha_0\in\mathscr{G}_+$. *Alors sous les hypothèses* (0-3) *et* (0-4) *on a* (*pout tout* $s\geq 1$) :

$$(\gamma([-\delta, 0[) \cup \gamma(]0, \delta])) \cap SS_b^s u = \phi \Longrightarrow \alpha_0 \notin SS_b^s u.$$

Par contre :

THÉORÈME 0-3 : *Pour tout $s>1$, la conclusion du Théorème* 0-2 *est fausse sous la seule hypothèse* (0-3).

On démontre le Théorème 0-2 en s'inspirant des techniques de [Sj]-2, convenablement adaptées aux classes de Gevrey suivant [Le]-1, 2. Le Théorème 0-3 s'obtient en construisant dans la région elliptique (zone d'ombre) une solution de $Pu \in G^s(M)$ singulière sur le bord mais de classe G^s à l'intérieur. On utilisera un calcul de paramétrix du à J. Sjöstrand [Sj]-4, développé plus tard par P. Laubin [La] jusque dans sa forme 2-microlocale.

Pour illustrer le Théorème 0-3, on peut par exemple considérer $P(x, D_x) = D_{x_n}^2 - x_n D_{x_2}^2 - D_{x_1} D_{x_2}$ au point $(0 ; dx_2)$ avec $n \geq 3$. Dans ces conditions, on vérifie aisément que la fonction :

$$u(x) = \int_0^{+\infty} Ai(e^{-i\pi/3} \lambda^{2/3} (x_n - (\lambda+1)^{-\delta})) \times \exp(-\frac{2}{3} \lambda (\lambda+1)^{-3\delta/2} + i\lambda (x_2 - (\lambda+1)^{-\delta} x_1)) d\lambda$$

où $\delta = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{s}\right) > 0$, est de classe G^s dans $x_n > 0$, vérifie $P(x, D_x)u = 0$ mais que $(0 ; dx_2) \in SS_b^s u$. Notons toutefois qu'en abscence de la propriété d'équivalence des hypersurfaces glancing par transformation de contact dans le cadre analytique (contre-exemple d'Oshima [O]), il n'est pas possible de réduire le cas général à un tel exemple.

On remarquera enfin que la démonstration du Théorème 0-2 donne une variante un peu plus simple de celle de [Sj]-2 dans le cas $s=1$. Dans un prochain travail, on étudiera un autre cas de propagation considéré dans [Sj]-3 lorsque $s=1$.

L'auteur remercie G. Lebeau et J. Sjöstrand pour de fructueuses conversations qu'il a eues avec eux sur ce sujet, ainsi que le referee pour avoir éliminé plusieurs erreurs de la première version du manuscrit, et proposé le contre-exemple ci-dessus comme illustration au Théorème 0-3.

1-Opérateurs intégraux de Fourier et spectres Gevrey.

Nous ferons dans ce paragraphe quelques rappels nécessaires à la preuve du Théorème 0-2, en suivant essentiellement [Le]-2 et [Sj]-2. Pour alléger les notations, on remplacera $x = (x', x_n)$ par (t, x) avec $t \in \boldsymbol{R}$ et

$x \in \boldsymbol{R}^{n-1}$.

Pour $\alpha=(\alpha_x, \alpha_\xi) \in T^*\boldsymbol{R}^{n-1}$, $a \in]-1, 1[$ et $\Theta>0$, on pose :

$$\varphi(x, y, \alpha)=(x-y)\alpha_\xi+i\Theta((x-\alpha_x)^2+2a(x-\alpha_x)(y-\alpha_x)+(y-\alpha_x)^2)$$

et :

$$\pi_a(x, y, \lambda)=\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{3(n-1)/2}(4\Theta(a+1))^{n-1/2}e^{i\lambda\varphi}(\lambda \geq 1)$$

si bien que, identifiant un opérateur avec son noyau, on a formellement :

$$\int \pi_a d\alpha=I$$

Si $\tilde{\pi}_a=\tilde{\pi}_a(\tilde{a}, \tilde{\Theta})$, alors

$$\int \tilde{\pi}_a(x, z, \lambda)\tilde{\pi}_a(z, y, \lambda)dz=C\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{n-1}\pi_a(x, y, \lambda)$$

où C est une constante et $\pi_a=\pi_a(a, \Theta)$ avec $a=\dfrac{\tilde{a}^2}{\tilde{a}^2-2}$ et $\Theta=\tilde{\Theta}\left(1-\dfrac{\tilde{a}^2}{2}\right)$. Les π_a sont autoadjoints pour le produit $L^2(\boldsymbol{R}^{n-1})$; Lorsque $a \neq 0$, la phase $\varphi(x, y, \alpha)$ définit une transformation canonique κ_a dans $T^*\boldsymbol{C}^{n-1}$ telle que $\kappa_a\left(y, -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=\left(x, \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)$ et π_a est l'opérateur intégral de Fourier associé. Si $\mu \in]0, \mu_0]$, on pose $\lambda'=\lambda\mu$. Un symbole analytique formel en λ' est une expression :

$$\sigma(x, y, \alpha, \mu, \lambda')=\sum \sigma_k(x, y, \alpha, \mu)\lambda'^{-k}$$

où $\alpha \in W$ ouvert de $\boldsymbol{C}^{2(n-1)}$, les σ_k sont holomorphes sur

$$U_r=\{(x, y, \alpha) \in \boldsymbol{C}^{4(n-1)} : |x-\alpha_x|<r,\ |y-\alpha_x|<r,\ \alpha \in W\}\ (r>0).$$

et vérifient les inégalités :

$$\forall (x, y, \alpha) \in U_r : |\sigma_k(x, y, \alpha, \mu)| \leq C^{k+1}k^k$$

où $C>0$ est indépendant de $\mu \in]0, \mu_0]$. On appelle réalisation du symbole formel $\sum \sigma_k\lambda'^{-k}$ toute fonction holomorphe $\tilde{\sigma}(x, y, \alpha, \mu, \lambda')$ définie sur U_r telle que :

$$|\tilde{\sigma}-\sum_{k=0}^{N}\sigma_k(x, y, \alpha, \mu)\lambda'^{-k}| \leq \tilde{C}^{N+1}(N+1)^{N+1}\lambda'^{-(N+1)}\ (\tilde{C}>0)$$

uniformément pour $(x, y, \alpha) \in U_r$, $\mu \in]0, \mu_0]$. En particulier :

$$\tilde{\sigma}(x, y, \alpha, \mu, \lambda')=\sum_{0 \leq k \leq \lambda'/eC}\sigma_k(x, y, \alpha, \mu)\lambda'^{-k}$$

est une réalisation de σ.

On dira qu'un symbole (formel) σ est elliptique si $\sigma_0 \neq 0$ pour tous x, y, α dans U_r, uniformément pour $\mu \in]0, \mu_0]$. On a un résultat de réduction analogue à la Proposition (1-1) de [Sj]-2 :

Soit $\phi(x, y, \alpha)$ une fonction holomorphe définie sur U_r (dépendant éventuellement d'autres paramètres) satisfaisant les hypothèses usuelles de non-dégénerescence :

$d\left(\frac{\partial\phi}{\partial\alpha_1}\right), \ldots\ldots, d\left(\frac{\partial\phi}{\partial\alpha_{2n-2}}\right)$ sont linéairement indépendantes sur $C_\phi = \{(x, y, \alpha) \in U_r : d_\alpha\phi = 0\}$.

(Ici on a noté $\alpha = (\alpha_x, \alpha_\xi) = (\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_{2n-2})$). On suppose de plus que C_ϕ est de la forme :

$$(x, y) = H(\alpha), \quad \alpha \in W' \subset \boldsymbol{C}^{2n-2}, \quad W' \subset W.$$

où $H : W' \to \boldsymbol{C}^{2n-2}$ (dépendant éventuellement aussi d'autres paramètres) est une fonction holomorphe.

Diminuant si nécesaire $U = U_r$, on peut supposer que $(z, \alpha) = (\phi'_\alpha, \alpha)$ sont des coordonnées sur U et que U est de la forme ;

$$\alpha \in W', \quad |z_j| < r(\alpha), \quad j = 1, \ldots, 2n-2.$$

où $r > 0$ est une fonction continue sur W'. Soit $q(x, y, \alpha, \mu, \lambda')$ un symbole analytique formel elliptique en λ' défini sur U.

Proposition 1-1 : *Soit ϕ, U et q comme ci-dessus, et $a(x, y, \alpha, \mu, \lambda')$ un symbole analytique formel en λ' défini sur U. Alors il existe des symboles analytiques en λ', $b(\alpha, \mu, \lambda')$ sur W' et $c_j(x, y, \alpha, \mu, \lambda')$ sur U, $j = 1, \ldots\ldots, 2n-2$, d'ordre 0, tels que* :

$$(1.1) \qquad \begin{aligned} &(a(x, y, \alpha, \mu, \lambda')e^{i\lambda\phi(x,y,\alpha)} - b(\alpha, \mu, \lambda')q(x, y, \alpha, \mu, \lambda')e^{i\lambda\phi(x,y,\alpha)}d\alpha \\ &\quad = d_\alpha\, \lambda^{-1}c(x, y, \alpha, \mu, \lambda')e^{i\lambda\phi(x,y,\alpha)}. \end{aligned}$$

où : $d\alpha = d\alpha_1 \wedge \ldots \wedge d\alpha_{2n-2}$, $c = \sum_{j=1}^{2n-2} c_j a(x, y, \alpha, \mu, \lambda')e^{i\lambda\phi(x,y,\alpha)} d\alpha_1 \wedge \ldots \widehat{d\alpha}_j \wedge \ldots \wedge d\alpha_{2n-2}$.

On définit à présent la réalisation d'une famille d'opérateurs intégraux de Fourier. Soit σ la réalisation d'un symbole analytique classique en λ' défini sur U_r, et $\chi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^{n-1})$ égale à 1 près de 0. De façon un peu abusive, si χ, $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^{n-1})$ sont égales à 1 près de 0, on dira $\tilde{\chi} \subset\subset \chi$ si le support de $\tilde{\chi}$ est contenu dans la région où χ vaut 1. Pour $\alpha \in W_{\boldsymbol{R}} = W \cap \boldsymbol{R}^{2n-2}$ voisinage de α_0, on désigne par $(\chi\pi_\alpha\sigma\chi)$ l'opérateur de noyau :

$$k_\alpha(x, y, \alpha, \mu, \lambda') = \chi(x-\alpha_x)\pi_\alpha(x, y, \lambda)\sigma(x, y, \alpha, \mu, \lambda')\chi(y-\alpha_x).$$

Si σ' est une autre réalisation de σ, le noyau $k'_\alpha = (\chi\pi_\alpha(\sigma-\sigma')\chi)$ est à décroissance exponentielle en λ' dans $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^{2n-2})$ uniformément pour $\alpha \in W$. On notera $k'_\alpha = \mathcal{O}_\infty(e^{-\delta\lambda'})$. De même, le choix de χ modifie seulement $(\chi\pi_\alpha\sigma\chi)$ par un terme $\mathcal{O}_\infty(e^{-\delta\lambda})$ (décroissance exponentielle en λ dans $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^{2n-2})$. *Pour le calcul des opérateurs intégraux de Fourier analytiques, on se réfère à* [Sj], [Le], *et aussi l'auteur dans* [R].

Suivant [Le], *on dira qu'un symbole σ est strictement positif s'il existe* $m>0$ tel que $\mathrm{Re}\,\sigma \geq m$ pour $(x, y, \alpha) \in U_r$, $\mu \in]0, \mu_0]$, et $\lambda' > \lambda'_0$. On a alors la :

PROPOSITION 1-2 [Le]: *Soit σ un symbole analytique en λ' strictement positif sur U_r. Alors il existe un voisinage $\widetilde{W} \subset\subset W$ de α_0, un réel $\tilde{r}$ vérifiant $0 < \tilde{r} < r$ et un symbole analytique strictement positif $\tilde{\sigma}$ défini sur $U_{\tilde{r}}$, tels que pour tout $u \in \mathscr{D}'(\boldsymbol{R}^{n-1})$:*

$$\lambda^{n-1} Re((\chi\sigma\pi_\alpha\chi)u|u) = \|(\tilde{\chi}\tilde{\sigma}\tilde{\pi}_\alpha\tilde{\chi})u\|^2_{L^2(\boldsymbol{R}^{n-1})} + (R_\alpha u|u)$$

où R_α est un opérateur à noyau dans $\mathcal{O}_\infty(e^{-\delta\lambda})$, uniformément pour $\alpha \in \widetilde{W}$, où π_α et $\tilde{\pi}_\alpha$ sont définis comme avant, et $\tilde{\chi} \subset\subset \chi$ sont à supports assez petits. Ici U_r est défini à partir de $\widetilde{W}$ et de $\tilde{r}$ comme U_r à partir de W et de r.

Il est connu-voir [Li]-que le spectre Gevrey est caractérisé par des transformations du type π_α. Soit Ω un ouvert de $\overline{\boldsymbol{R}^n_+} = \{(t, x) : t \geq 0, x \in \boldsymbol{R}^{n-1}\}$ et $\alpha_0 \in T^*\boldsymbol{R}^{n-1} \backslash 0$ tel que $(0, \alpha_{0,x}) \in \Omega$. Soit $W \in \boldsymbol{C}^{n-1}$ un voisinage de α_0 et σ un symbole analytique en λ' défini dans U_r. Si $u(t, x) \in \mathscr{D}'(\Omega)$ comme dans l'introduction est solution de $Pu \in G^s(\Omega)$, on rappelle la :

PROPOSITION 1-3 [Le]: *Si $\alpha_0 \notin SS^s_b u$, alors pour tout $j \in \boldsymbol{N}$, il existe $t_0 > 0$ et un voisinage de α_0 noté encore W tels que :*

$$|(\chi\pi_\alpha\sigma\chi)\partial_t^j u(t, x, \mu, \lambda')| = \mathcal{O}(e^{-\delta\lambda^{1/s}}), \ \delta > 0$$

uniformément pour $\alpha \in W$, $t \in [0, t_0]$, $x \in \boldsymbol{R}^{n-1}$, $\mu \in]0, \mu_0]$ et $\lambda' > \lambda'_0$.

Réciproquement, si σ est un symbole strictement positif et s'il existe W' voisinage réel de α_0, $t_0 > 0$ et $\mu_0 > 0$ tels que :

$$\int_0^{t_0} dt \int_W d\alpha \|(\chi\pi_\alpha\sigma\chi)u\|^2_{L^2(\boldsymbol{R}^{n-1})}(t, \alpha, \mu_0\lambda^{(1-s)/s}, \lambda') = \mathcal{O}(e^{-\delta\lambda^{1/s}})$$

alors $\alpha_0 \notin SS^s_2 u$.

2-Preuve du Théorème 0-2.

On garde les notations du 1°. Comme dans [Sj]-2, en vertu des résultats connus sur la propagation des singularités Gevrey à l'intérieur de Ω, il suffit de montrer le :

THÉORÈME 2-1 : *Soit* $P=D_t^2+R(t, x, D_x)$ *un opérateur différentiel du second ordre à coefficients analytiques sur* Ω *avec symbole principal* $p=\tau^2+r(t, x, \xi)$. *Supposons que* r *soit à valeurs réelles et que* $r=0$, $\partial_t r<0$ *au point* $(0, x_0, \xi_0)=\alpha_0\in \boldsymbol{R}^n\times \dot{\boldsymbol{R}}^{n-1}$. *Pour* $\varepsilon>0$, *soit* $M=\{(t, x)\in \boldsymbol{R}^n : 0\le t<\varepsilon, |x-x_0|<\varepsilon\}$ *et supposons que* $u\in \mathscr{D}'(M)$ *satisfait* (0-3) *et* (0-4). *S'il existe un voisinage* $V\subset p^{-1}(0)$ *de* $(0, x_0, 0, \xi_0)$ *tel que* $SS^s(u|_{\mathring{M}})\cap V=\emptyset$, *alors* $\alpha_0 \notin SS_b^s u$.

Pour la preuve, on peut supposer que $M=\overline{\boldsymbol{R}_+^n}$. On choisit des coordonnées locales $(s_1, \dots, S_{2n-2})$ sur $T^*\boldsymbol{R}^{n-1}$ centrées en α_0. Si α a pour coordonnées s, on définit la fonction poids :

$$\psi(\alpha, t)=t-\varepsilon_0 s^2+\varepsilon_0^2.$$

comme dans [Sj]-2. Si V est comme dans le Théorème 2-1, on choisit $\varepsilon_0>0$ assez petit pour que

$$\text{(2-1)}\qquad \{(t, x, \tau, \xi)\in p^{-1}(0) : (x, \xi)\in W, t=\varepsilon_0^2\}\subset V \text{ si } W=\{\alpha : \psi(\alpha, \varepsilon_0^2)\ge -\varepsilon_0^2\}.$$

Comme dans [Sj]-2, on commence par faire les calculs au niveau formel, i. e. en ignorant les restes exponentiellement petits dûs aux réalisations des symboles et les intégrations par parties en α comme dans la Proposition 1-1. On utilisera librement les notations de [Sj]-2.

Soit $a^{(0)}(t, \alpha, \mu, \lambda')$ un symbole analytique en λ' que l'on choisira ultérieurement (d'ordre 0) et :

$$\text{(2-2)}\qquad Q=\int e^{\lambda\mu\psi/2}(a^{(0)}-2\tilde{D}_t)e^{\lambda\mu\psi/2}\pi_\alpha d_\alpha$$

Ici $\tilde{D}_t=\dfrac{1}{\lambda}D_t$. On précisera ultérieurement le domaine d'intégration. Ecrivons $Q=T_1-T_2-T_2^*$ avec :

$$T_1=\int e^{\lambda\mu\psi}a^{(0)}\pi_\alpha d\alpha$$

$$T_2=\int e^{\lambda\mu\psi}\pi_\alpha d\alpha\ \tilde{D}_t$$

et calculons :

(2-3) $$T_3=\frac{1}{i}(P^*Q-QP)=\left[\frac{1}{i}(D_t^2+R),\ Q\right]+\frac{1}{i}(R^*-R)Q$$

On a :

$$\left[\frac{1}{i}R,\ T_2\right]=\lambda^2\mu\int e^{\lambda\mu\phi}a^{(1)}\pi_a d\alpha\ \tilde{D}_t+\lambda\int e^{\lambda\mu\phi}a^{(4)}\pi_a d\alpha$$
$$\left[\frac{1}{i}R,\ T_1\right]=\lambda^2\mu\int e^{\lambda\mu\phi}a^{(2)}\pi_a d\alpha+\lambda\int e^{\lambda\mu\phi}a^{(3)}\pi_a d\alpha$$
$$\frac{1}{i}(R^*-R)T_1=\lambda\int e^{\lambda\mu\phi}a^{(5)}\pi_a d\alpha$$
$$\frac{1}{i}(R^*-R)T_2=\lambda\int e^{\lambda\mu\phi}a^{(6)}\pi_a d\alpha\ \tilde{D}_t$$

où les $a^{(j)}=a^{(j)}(t,\alpha,\mu,\lambda')$ sont des symboles analytiques en λ' de degré 0, avec symbole principal :

(2-4) $$\begin{aligned}
&a_0^{(1)}(t,\alpha,\mu)=-H_r\psi(t,\alpha)+\mathcal{O}(\mu)\\
&a_0^{(2)}(t,\alpha,\mu)=a_0^{(0)}(t,\alpha,\mu)a_0^{(1)}(t,\alpha,\mu)\\
&a_0^{(3)}(t,\alpha,\mu)=-H_r a_0^{(0)}(t,\alpha,\mu)+\mathcal{O}(\mu)\\
&a_0^{(4)}(t,\alpha,\mu)=\partial_t r(t,\alpha)+\mathcal{O}(\mu)\\
&a_0^{(5)}(t,\alpha,\mu)=k(t,\alpha)a_0^{(0)}(t,\alpha,\mu)+\mathcal{O}(\mu)\\
&a_0^{(6)}(t,\alpha,\mu)=k(t,\alpha)+\mathcal{O}(\mu)
\end{aligned}$$

Ici $k(t,\cdot)$ est le symbole principal réel homogène de $\frac{1}{i}(R^*-R)$. On a éliminé les variables x et y au moyen de la Proposition (1.1) appliquée à la phase $\phi=\varphi(x,y,\alpha)-i\mu\psi(t,\alpha)$. Posons :

(2-5) $$A=a^{(0)}-2\tilde{D}_t.$$

Un calcul simple de commutateurs montre que :

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1}{i}D_t^2,\ Q\right]=&-\lambda^2\mu\int e^{\lambda\mu\phi/2}(\tilde{D}_tA+A\tilde{D}_t)e^{\lambda\mu\phi/2}\pi_a d\alpha+\\
&-\lambda\int e^{\lambda\mu\phi/2}(\partial_t a^{(0)}\tilde{D}_t+\tilde{D}_t\partial_t a^{(0)})e^{\lambda\mu\phi/2}\pi_a d\alpha+\\
&-\frac{1}{2i}\lambda^2\mu^2\int e^{\lambda\mu\phi/2}A\ e^{\lambda\mu\phi/2}\pi_a d\alpha.
\end{aligned}$$

Substituant :

$$\tilde{D}_tA+A\tilde{D}_t=|a^{(0)}|^2-\overline{2a^{(0)}}\tilde{D}_t-\tilde{D}_t a^{(0)}+a^{(0)}\tilde{D}_t-A^*A,$$

on obtient finalement :

$$T_3=\lambda^2\mu\int e^{\lambda\mu\phi/2}A^*Ae^{\lambda\mu\phi/2}\pi_a d\alpha+$$

$$
\begin{aligned}
&+\lambda\int e^{\lambda\mu\psi/2}\{[\lambda\mu(\tilde{D}_t(a^{(0)}-\overline{a^{(1)}}))+\lambda\mu(a^{(2)}-|a^{(0)}|^2-\frac{\mu}{2i}a^{(0)})+\\
(2\text{-}6)\qquad &+\lambda\mu^2\ \mathrm{Im}\ a^{(1)}+a^{(3)}+a^{(5)}-2\ \mathrm{Re}\ a^{(4)}+\mu\ \mathrm{Im}\ a^{(6)}-(\tilde{D}_t a^{(6)})-\frac{1}{\lambda i}\partial_t^2 a^{(0)}]+\\
&+[2\lambda\mu(\overline{a^{(0)}}+\frac{\mu}{2i}-\mathrm{Re}\ a^{(1)})-2\ \mathrm{Re}\ a^{(6)}-2\ \partial_t a^{(0)}]\tilde{D}_t\}e^{\lambda\mu\psi/2}a^{(0)}\pi_\alpha d\alpha.
\end{aligned}
$$

(On a noté $\overline{a^{(j)}}$ l'extention holomorphe de $\overline{a^{(j)}}$ à partir du réel). Rappelons [Sj]-2 que $a_0^{(1)}$ est à valeurs réelles pour $\alpha\in W_{\boldsymbol{R}}=W\cap\boldsymbol{R}^{n-1}$. On cherche alors à annuler le coefficient de $\tilde{D}_t$ dans le second menbre de (2-6), ce qui se ramène à résoudre la suite d'équations :

$$
(2\text{-}7)\qquad
\begin{aligned}
&a_0^{(0)}=\mathrm{Re}\ a_0^{(1)}+\frac{\mu}{2i}=a_0^{(1)}+\frac{\mu}{2i}.\\
&a_k^{(0)}=\mathrm{Re}\ a_k^{(1)}+\mathrm{Re}\ a_{k-1}^{(6)}+\partial_t a_{k-1}^{(0)}+\frac{\mu}{2i}\quad(k\geq 1)
\end{aligned}
$$

Il est clair que le symbole $a^{(0)}(t,\alpha,\mu,\lambda')=\sum_{k\geq 0}a_k^{(0)}(t,\alpha,\mu)\lambda'^{-k}$ ainsi déterminé est un symbole analytique en λ' pour $\alpha\in W$, $|t|$ et μ assez petits. La formule (2-6) se réduit alors à :

$$
(2\text{-}8)\qquad T_3=\lambda^2\mu\int e^{\lambda\mu\psi/2}A^*Ae^{\lambda\mu\psi/2}\pi_\alpha d\alpha+\lambda\int e^{\lambda\mu\psi}a^{(7)}\pi_\alpha d\alpha.
$$

où $a^{(7)}$ est un symbole analytique en λ'. Vérifions que $a^{(7)}$ est un symbole strictement positif ; comme $\partial_t r(\alpha_0)<0$ par hypothèse, on voit que -2 Re $a_0^{(4)}(t,\alpha,\mu)>0$ pour $\alpha\in W_{\boldsymbol{R}}$, $t\leq\varepsilon_0^2$ et $\mu\in]0,\mu_0]$ si W, ε_0 et μ_0 sont assez petits. Il suffit alors de montrer que tous les autres termes du symbole principal de $a^{(7)}$ peuvent être rendus arbitairement petits en diminuant s'il le faut W, ε_0 et μ_0. Chacun des termes de la somme :

$$
\lambda\mu(\tilde{D}_t(a_0^{(0)}-\overline{a_0^{(1)}}))+\mu\ \mathrm{Im}\ a_0^{(6)}-(\tilde{D}_t a_0^{(6)})-\frac{1}{\lambda i}\partial_t^2 a_0^{(0)}
$$

ne pose pas de problème, si λ est assez grand. Comme $a_0^{(1)}$ est réel on a $\lambda\mu^2$ Im $a_0^{(1)}=\mathcal{O}(\mu)$. D'après (2-4) et la première des équations (2-7) on a :

$$
a_0^{(3)}(t,\alpha,\mu)=H_r^2\psi(t,\alpha)+\mathcal{O}(\mu)
$$

qui est une quantité négligeable si on choisit W et ε_0 assez petits (on rappelle ici que H_r agit dans les variables (x,ξ) et que ψ est une légère perturbation dans la topologie C^2 de la fonction t). Il en est de même pour :

$$a_0^{(5)}(t, \alpha, \mu) = -k(t, \alpha) H_r\psi + \mathcal{O}(\mu)$$

Reste le terme $\lambda\mu(a^{(2)} - |a^{(0)}|^2 - \frac{\mu}{2i} a^{(0)})$. On a d'après la deuxième des équations (2-7) :

$$a^{(2)} - |a^{(0)}|^2 - \frac{\mu}{2i} a^{(0)} = a_0^{(0)}(a_0^{(1)} - \overline{a_0^{(0)}} - \frac{\mu}{2i}) +$$
$$+ \frac{1}{\lambda'}(a_1^{(2)} - a_0^{(0)}\overline{a_1^{(0)}} - a_1^{(0)}\overline{a_0^{(0)}} - \frac{\mu}{2i} a_1^{(0)}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda'^2}\right).$$

La première équation (2-7) montre que le premier terme au membre de droite est nul. Compte-tenu des remarques ci-dessus, le terme dominant dans l'expression $\lambda'(a^{(2)} - |a^{(0)}|^2 - \frac{\mu}{2i} a^{(0)})$ ne peut être que $a_1^{(2)}$; or il est facile de voir que celui-ci ne fait intervenir essentiellement que $H_r\psi$ et $H_r^2\psi$, et donc peut être rendu négligeable. On a donc montré que $a^{(7)}$ est un symbole strictement positif pour $\alpha \in W_R$, $0 \leq t < \varepsilon_0^2$, $\mu \in]0, \mu_0]$ et $\lambda' \geq \lambda_0'$.

On termine alors la preuve comme dans [Sj]-2 et [Le]-2. Choisissant des représentants de tous les symboles analytiques en λ' (modulo des erreurs $\mathcal{O}_\infty(e^{-\delta\lambda'})$), on définit une réalisation de Q en posant :

$$Q^W = \int_W e^{\lambda\mu\phi/2}(a^{(0)} - 2\tilde{D}_t) e^{\lambda\mu\phi/2} \chi(x - \alpha_x) \chi(y - \alpha_x) \pi_\alpha d\alpha$$

où $\chi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^{n-1})$ vaut 1 près de 0 et W désigne désormais $W \cap \boldsymbol{R}^{n-1}$. On pose à présent :

$$\mu = \mu_0 \lambda^{(1-s)/s}$$

de sorte que $\lambda' = \mu_0 \lambda^{1/s}$. D'après l'hypothèse sur Pu, si $\varepsilon_0 > 0$ est assez petit, on a (Proposition 1-3) :

$$\text{(2-9)} \qquad \frac{1}{i}((Q^W u | Pu) - (Q^W Pu | u)) = \mathcal{O}(e^{-\delta\lambda^{1/s}})$$

Ici $(\cdot|\cdot)$ désigne le produit L^2 sur $\{(t, x) \in \boldsymbol{R}^n :\ 0 \leq t < \varepsilon_0^2\}$. Supposant pour simplifier que $u(0, x) = 0$, on obtient après intégrations par parties :

$$\text{(2-10)} \qquad (\frac{1}{i}([P, Q^W] + (R^* - R) Q^W) u | u) = \frac{1}{i}(Q^W u | Ru) - \frac{1}{i}(Q^W Pu | u) +$$
$$+ (Q^W u | D_t u)_0 - (Q^W u | D_t u)_{\varepsilon_0^2} - (D_t Q^W u | u)_{\varepsilon_0^2}$$

(On a noté $(\cdot|\cdot)_t$ le produit L^2 dans la variable x à t fixé) La relation (2-1) et la Proposition 1-3 montrent que les deux derniers termes de (2-10) sont $\mathcal{O}(e^{-\delta\lambda^{1/s}})$, avec $\delta > 0$. La condition de Dirichlet, les formules

(2-2), (2-9), (2-10) montrent alors que:

$$(2\text{-}11)\qquad \begin{aligned} &2\lambda^{-1}\int_W e^{\lambda\mu\psi(\alpha,0)}(\pi_\alpha\chi D_t u|\chi D_t u)_0 d\alpha \\ &\qquad +(\frac{1}{i}([P, Q^W]+(R^*-R)Q^W)u|u)=\mathcal{O}(e^{-\delta\lambda^{1/s}}). \end{aligned}$$

On veut appliquer (2-8) ; pour rendre cette formule rigoureuse, il faut tenir compte de tous les restes introduits par: (1) la réalisation des symboles analytiques en λ' (erreurs à décroissance exponentielle en λ'), (2) les dérivées des fonctions de troncature $\chi(x-\alpha_x)$ et $\chi(y-\alpha_x)$ dans des régions loin du point critique de φ (erreurs à décroissance exponentielle en λ), (3) les termes au bord dûs aux intégrations en α sur ∂W (Proposition 1-1). Ces erreurs sont aussi $\mathcal{O}(e^{-\delta\lambda^{1/s}})$, car $\psi(\alpha, t)<0$ pour $\alpha\in\partial W$, $0\leq t\leq\varepsilon_0^2$. Substituant alors (2-8) dans (2-11) on a alors:

$$\begin{aligned} &2\lambda^{-1}\int_W e^{\lambda\mu\psi(\alpha,0)}(\pi_\alpha\chi D_t u|\chi D_t u)_0 d\alpha+ \\ &\qquad +\mu\lambda^2\int_W(\pi_\alpha A\chi e^{\lambda\mu\psi/2}u|A\chi e^{\lambda\mu\psi/2}u)\,d\alpha+ \\ &\qquad +\lambda\int_W(e^{\lambda\mu\psi}\pi_\alpha a^{(7)}\chi u|\chi u)\,d\alpha=\mathcal{O}(e^{-\delta\lambda^{1/s}}). \end{aligned}$$

Les deux premiers termes sont positifs, à une erreur à décroissance exponentielle en $\lambda^{1/s}$ près. On obtient donc:

$$(2\text{-}12)\qquad \int_W e^{\lambda\mu\psi}(a^{(7)}\pi_\alpha\chi u|\chi u)\,d\alpha=\mathcal{O}(e^{-\delta\lambda^{1/s}}).$$

Le symbole $a^{(7)}$ étant strictement positif, on peut trouver, d'après la Proposition 1-2, un symbole elliptique $a^{(8)}$ tel que:

$$\lambda^{n-1}\mathrm{Re}(a^{(7)}\pi_\alpha\chi u|\chi u)=\|a^{(8)}\tilde{\pi}_\alpha\tilde{\chi}u\|^2+\mathcal{O}(e^{-\delta\lambda^{1/s}}).$$

Prenant la partie réelle de (2-12) on a donc:

$$\int_0^{\varepsilon_0^2}dt\int_{\tilde{W}}e^{\lambda\mu\psi}\|a^{(8)}\tilde{\pi}_\alpha\tilde{\chi}u\|^2 d\alpha|_{\mu=\mu_0\lambda^{(1-s)/s}}=\mathcal{O}(e^{-\delta\lambda^{1/s}}).$$

avec $\tilde{W}\subset\subset W$. Comme $\psi(\alpha_0, 0)>0$ on conclut, grâce à la Proposition (1-3), que $\alpha_0\notin SS_b^s u$, ce qui achève la preuve du Théorème. □

3-Preuve du Théorème 0-3:

On utilisera librement dans cette section les calculs de [Sj]-4 et [La]-1, 2 en les précisant ou simplifiant parfois. On revient aux notations $x=(x', x_n)$ déffinies dans l'introduction. $R(x, D_{x'})$ étant de type principal, on peut supposer pour se fixer les idées que $\partial_{\xi_1}r_0(x_0', \xi_0')\neq 0$ avec $x'=(x_1, x'')$. Soit $\Theta_0'=(-1, \xi_0'')$. Pour μ dans un voisinage complexe de 0, soit

$\psi_\mu(x', \Theta')$ la solution des équations d'Hamilton-Jacobi :

$$(3\text{-}1)\qquad \begin{cases} r_0(x', \partial_{x'}\psi_\mu)+\mu^2\Theta_1=0 \\ \psi_\mu(0, x'', \Theta')=x''.\ \Theta'' \\ \partial_{x'}\psi_0(x'_0, \Theta'_0)=\xi'_0. \end{cases}$$

(Par une translation, on s'est ramené à $x'_0=(0, x''_0))$. $\psi_\mu(x', \Theta')$ est holomorphe au voisinage de $\mu=0$, $(x', \Theta')=(x'_0, \Theta'_0)$ et ne dépend de μ que par l'intermédiaire de $\mu^2\Theta_1$. Une situation analogue se présente dans [La]-2 pour la construction d'une paramétrix 2-microlocale de $P(x, D_x)$ dans la région glancing ; nous suivrons de près ses notations. On se propose de construire une solution de $Pu\in G^s(M)$ à support microlocal près de $\alpha_0=(x'_0, \xi'_0)$ dans la région elliptique (ou " zone d'ombre ") $\mathscr{E}=\{\mu^2\Theta_1<0\}$ et singulière sur le cône de lumière (pour la distance sur le bord) $\mu^2\Theta_1=0$. Soit d'abord :

$$(3\text{-}2)\qquad p(x, \varphi'_x)=0 \qquad \varphi|_{x_n=0}=\psi_\mu(x', \Theta')$$

l'équation eïkonale pour P. Comme la variété intégrale associée présente une singularité de type pli (qui est simple, étant donné que l'obstacle est strictement convexe au point (x_0, ξ_0)), on ne résout pas (3-2) directement. Soit d'abord $H\mu(x', \xi_n, \Theta', t)$ la solution du problème :

$$(3\text{-}3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial H_\mu}{\partial t}+\xi_n^2+r\left(x', -\dfrac{\partial H_\mu}{\partial \xi_n}, \dfrac{\partial H_\mu}{\partial x'}\right)=0 \\ H_\mu|_{t=0}=\psi_\mu(x', \Theta') \end{cases}$$

définie et holomorphe au voisinage de $t=0$, $\mu=0$, $(x', \Theta')=(x'_0, \Theta'_0)$ et $\xi_n=0$. Comme ψ_μ, H_μ ne dépend de μ que par l'intermédiaire de $\mu^2\Theta_1$. Par un développement de Taylor à l'ordre 5 de H_μ prés de $t=0$ on obtient, en notant, pour $j\geq 0$:

$$r_j=r_j(x', \partial_x, \psi_\mu)=\frac{\partial j_r}{\partial x_n^j}(x, 0, \partial_{x'}\psi_\mu)$$

$$\widetilde{H}_{r_j}=\frac{\partial r_j}{\partial \xi'}(x', \partial_{x'}\psi_\mu)\frac{\partial}{\partial x'}$$

et en remarquant que $r_0=-\mu^2\Theta_1$ d'après (3-1) :

$$\begin{aligned} H_\mu(x', \xi_n, \Theta', t)=\psi_\mu(x', \Theta')-t(\xi_n^2-\mu^2\Theta_1)-t^2 r_1\xi_n+ \\ +\frac{t^3}{3\,!}(-2r_1^2+2(\widetilde{H}_{r_0}r_1)\xi_n-4r_2\xi_n^2)+ \\ (3\text{-}4)\qquad +\frac{t^4}{4\,!}(6r_1(\widetilde{H}_{r_0}r_1)-2(10r_1r_2+(\widetilde{H}^2_{r_0}r_1))\xi_n+ \\ +4(3(\widetilde{H}_{r_1}r_1)+(\widetilde{H}_{r_0}r_2))\xi_n^2-8r_3\xi_n^3)- \end{aligned}$$

$$-\frac{t^5}{5!}(32r_1^2r_2+r_1(\tilde{H}^2_{r_0}r_1)+(\tilde{H}_{r_0}r_1)^2+\mathcal{O}(\xi_n))+\mathcal{O}(t^6).$$

Par le théorème des fonctions implicites, il existe au voisinage de $t=0$ une fonction holomorphe $\tilde{t}(x', \xi_n, \mu^2\Theta_1, \Theta'')$ telle que :

$$\partial_t^2 H(x', \xi_n, \Theta', \tilde{t}(x', \xi_n, \mu^2\Theta_1, \Theta''))=0, \quad \tilde{t}(x', 0, \mu^2\Theta_1, \Theta'')=0.$$

et la théorie d'Hamilton-Jacobi montre facilement ([Sj]-4, [La]-1) :

$$(3\text{-}5) \qquad \partial_t H\mu(x', \xi_n, \Theta', t)|_{t=\tilde{t}}=\mu^2\Theta_1.$$

Le développement (3-4) fournit alors :

$$(3\text{-}6) \qquad \begin{aligned} \tilde{t}(x', \xi_n, \mu^2\Theta_1, \Theta'') &= -r_1^{-1}\xi_n+\frac{1}{2}r_1^{-3}(\tilde{H}_{r_0}r_1)\xi_n^2+ \\ &-(\frac{1}{3}r_1^{-3}r_2+\frac{11}{12}r_1^{-5}(\tilde{H}_{r_0}r_1)^2+\frac{5}{12}r_1^{-4}(\tilde{H}^2_{r_0}r_1))\xi_n^3+\mathcal{O}(\xi_n^4). \end{aligned}$$

au voisinage de $\xi_n=0$. On observe que $\tilde{t}$ est réel quand toutes les autres variables le sont. Le théorème de division de Weierstrass montre qu'il existe au voisinage de $t=0$, $\xi_n=0$, $\mu=0$ et $(x', \Theta')=(x'_0, \Theta'_0)$ deux fonctions holomorphes $t_\pm(x', \xi_n, \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \Theta'')$ telles que $\partial_t \mathrm{H}\,(x', \xi_n, \Theta', t_\pm)=0$ avec :

$$(3\text{-}7) \qquad \begin{aligned} t_\pm &= \tilde{t}(x', \xi_n, \mu^2\Theta_1, \Theta'')\mp\sqrt{\mu^2\Theta_1}\,b(x', \xi_n, \mu^2\Theta_1, \Theta'')+ \\ &+\mu^2\Theta_1 c(x', \xi_n, \mu^2\Theta_1, \Theta'') \end{aligned}$$

et $t_+|_{\xi_n=\sqrt{\mu^2\Theta_1}}=0$. Les fonctions b et c sont holomorphes et $\sqrt{\mu^2\Theta_1}$ désigne l'une des racines carrées de $\mu^2\Theta_1$, que l'on choisira plus tard, mais que l'on fixe une fois pour toutes. On a :

$$(3\text{-}8) \qquad b(x', 0, 0, \Theta'')=-(r_1(x', 0, \partial_{x'}\psi_0))^{-1}.$$

Posons :

$$G_\mu(x', \xi_n, \Theta')=H_\mu(x', \xi_n, \Theta', t_+(x', \xi_n, \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \Theta''))$$

si bien que G_μ vérifie le système :

$$(3\text{-}9) \qquad \begin{cases} \xi_n^2+r(x', -\dfrac{\partial G_\mu}{\partial \xi_n}, \dfrac{\partial G_\mu}{\partial x'})=0 \\ G\mu|_{\xi_n=\sqrt{\mu^2\Theta_1}}=\psi_\mu(x', \Theta'). \end{cases}$$

Là encore, G_μ ne dépend de μ que par l'intermédiaire de $\sqrt{\mu^2\Theta_1}$. Substituant (3-7) dans (3-5) on trouve :

$$(3\text{-}10)\qquad \frac{\partial G_\mu}{\partial\sqrt{\mu^2\Theta_1}}\bigg|_{\sqrt{\mu^2\Theta_1}=0}=0.$$

Substituant (3-7) dans (3-4), compte-tenu du développement (3-6) on obtient après un peu de calcul :

$$(3\text{-}11)\qquad \begin{aligned} G_\mu(x', \xi_n, \Theta') &= \psi_\mu(x', \Theta')+\mu^2\Theta_1\tilde{t}-b(1-\frac{1}{3}r_1^2b^2)(\mu^2\Theta_1)^{3/2}+\mathcal{O}(\mu^4)+\\ &+\xi_n(\frac{2}{3}(\tilde{H}_{r_0}r_1)b^3(\mu^2\Theta_1)^{3/2}+\mathcal{O}(\mu^4))+\\ &-\frac{1}{3}\xi_n^2b^3((8r_2+\frac{1}{3}r_1^{-2}(\tilde{H}_{r_0}r_1)^2+r_1^{-1}(\tilde{H}_{r_0}^2r_1)(\mu^2\Theta_1)^{3/2}+\mathcal{O}(\mu^4))+\\ &+\xi_n^3(\frac{1}{3}r_1^{-1}-\frac{1}{3}b^2r_1^{-1}(8r_2+\frac{1}{4}r_1^{-2}(\tilde{H}_{r_0}r_1)+\\ &+\frac{7}{4}r_1^{-1}(\tilde{H}_{r_0}^2r_1))\mu^2\Theta_1+\mathcal{O}(\mu^3))+\mathcal{O}(\xi_n^4). \end{aligned}$$

Compte-tenu de (3-8) on peut aussi écrire :

$$(3\text{-}12)\qquad 1-\frac{1}{3}r_1^2b^2=\frac{2}{3}+\mathcal{O}(\xi_n)+\mathcal{O}(\mu^2)$$

On déduit de (3-1) et (3-9) que $\partial^2_{\xi_n}G_\mu=0$ sur une hypersurface de la forme $\xi_n=\tilde{\xi}_n(x', \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \Theta'')$ et le développement (3-11) donne :

$$(3\text{-}13)\qquad \tilde{\xi}_n(x', \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \Theta'')=-\frac{1}{2}r_1^{-3}(\tilde{H}_{r_0}r_1)\mu^2\Theta_1+\mathcal{O}(\mu^3).$$

On observe ici aussi que Im $\tilde{\xi}_n(x', \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \Theta'')=\mathcal{O}(\mu^3)$ quand toutes les variables sont réelles. On a :

$$(3\text{-}14)\qquad -\tilde{x}_n=\partial_{\xi_n}G_\mu(x', \tilde{\xi}_n, \Theta')=a(x', \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \Theta'')\mu^2\Theta_1$$

où a est une fonction holomorphe telle que :

$$(3\text{-}15)\qquad a(x', 0, \Theta'')=-(r_1(x', 0, \partial_{x'}\psi_0))^{-1}.$$

Le théorème de division de Weierstrass montre encore qu'il existe dans un voisinage de $\xi_n=0$, $x=(x_0', 0)$, $\Theta'=\Theta_0'$ et $\mu=0$ deux fonctions holomorphes $\xi_n^\pm(x', \sqrt{x_n+a\mu^2\Theta_1}, \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \Theta'')$ telles que $\xi_n^\pm$ soient les points critiques de la fonction :

$$\xi_n\longmapsto x_n\xi_n+G_\mu(x', \xi_n, \Theta').$$

Plus précisément :

$$(3\text{-}16)\qquad x_n+\partial_{\xi_n}G_\mu=A(x', \xi_n, \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \Theta'')(\xi_n-\xi_n^+)(\xi_n-\xi_n^-)$$

avec A holomorphe et :

$$(3\text{-}17)\quad \begin{cases} \xi_n^{\pm} = \tilde{\xi}_n(x', \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \Theta'') \pm \sqrt{x_n + a\mu^2\Theta_1}\sqrt{Y(x', \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \Theta'')} \\ \quad + (x_n + a\mu^2\Theta_1) X(x', \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \Theta'') \\ \xi_n^{+}|_{x_n=0} = \sqrt{\mu^2\Theta_1}. \end{cases}$$

Là aussi $\sqrt{x_n + a\mu^2\Theta_1}$ est l'une des racines carrées de $x_n + a\mu^2\Theta_1$ que l'on choisira ultérieurement, mais dont la détermination, a priori, peut être différente de celle de $\sqrt{\mu^2\Theta_1}$; les fonctions X et Y sont holomorphes au voisinage de $(x'_0, 0, 0, \xi''_0)$. Identifiant les deux premières dérivées de (3-16) en $\xi_n = \tilde{\xi}_n$ on obtient :

$$(3\text{-}18)\quad \begin{aligned} X &= \frac{1}{2} A^{-2} \partial_{\xi_n} A|_{\xi_n=\tilde{\xi}_n} \\ Y &= \frac{1}{4} A^{-4} (\partial_{\xi_n} A)^2 (x_n + a\mu^2\Theta_1) - A^{-1}|_{\xi_n=\tilde{\xi}_n} \end{aligned}$$

Pour calculer A, on évalue les dérivées d'ordre 2 et 3 de (3-16) par rapport à ξ_n pour $\xi_n = \tilde{\xi}_n$ et $x_n = -a\mu^2\Theta_1$. Il vient :

$$\begin{aligned} A|_{\xi_n=\tilde{\xi}_n,\, x_n=-a\mu^2\Theta_1} &= \frac{1}{2!} \partial^2_{\xi_n}(x_n + \partial_{\xi_n} G_\mu)|_{\xi_n=\tilde{\xi}_n,\, x_n=-a\mu^2\Theta_1} \\ &= \frac{1}{2!} \partial^3_{\xi_n} G_\mu|_{\xi_n=\tilde{\xi}_n} \\ \partial_{\xi_n} A|_{\xi_n=\tilde{\xi}_n,\, x_n=-a\mu^2\Theta_1} &= \frac{1}{3!} \partial^3_{\xi_n}(x_n + \partial_{\xi_n} G_\mu)|_{\xi_n=\tilde{\xi}_n,\, x_n=-a\mu^2\Theta_1} \\ &= \frac{1}{3!} \partial^4_{\xi_n} G_\mu|_{\xi_n=\tilde{\xi}_n}. \end{aligned}$$

Les formules (3-10) et (3-13) montrent alors facilement (et c'est là un point crucial de notre argument) :

$$(3\text{-}19)\quad \operatorname{Im} X = \mathcal{O}(\mu^3),\ \operatorname{Im} Y = \mathcal{O}(\mu^3)$$

quand toutes les variables sont réelles (la partie imaginaire provenant de $\sqrt{\mu^2\Theta_1}$). Pour $x_n=0$, $\mu=0$, on a $\tilde{\xi}_n=0$. Les expressions (3-11) et (3-13) donnent alors :

$$(3\text{-}20)\quad Y(x', 0, 0, \Theta'') = -r_1(x', 0, \partial_{x'}\psi_0(x', 0, \Theta'')) > 0$$

ce qui montre que Y est elliptique au voisinage de $(x'_0, 0, 0, \xi'_0)$. Dans (3-17), $\sqrt{Y}$ désigne la racine positive de Y quand Y est réel.

Les valeurs critiques φ de la fonction : $\xi_n \longmapsto x_n\xi_n + G_\mu(x', \xi_n, \Theta')$ satisfont l'équation eikonale (3-2). Posons :

$$\text{(3-21)}\quad \begin{aligned}\varphi_\mu(x,\Theta')&=\varphi(x',\sqrt{x_n+a\mu^2\Theta_1},\sqrt{\mu^2\Theta_1},\Theta'')=\\&=x_n\xi_n^+(x',\sqrt{x_n+a\mu^2\Theta_1},\sqrt{\mu^2\Theta_1},\Theta'')+G_\mu(x',\xi_n^+,\Theta').\end{aligned}$$

Comme dans M. Taylor [T], on décompose φ_μ suivant sa partie paire et impaire relativement à l'involution qui échange deux points du pli de même projection sur la base. L'ensemble des points doubles se projette en une hypersurface d'équation: $x_n+a(x',\sqrt{\mu^2\Theta_1},\Theta''))\mu^2\Theta_1=0$ (la caustique). Soit:

$$\begin{aligned}\varphi_{1,\mu}(x,\Theta')&=\frac{1}{2}[\varphi(x',\sqrt{x_n+a\mu^2\Theta_1},\sqrt{\mu^2\Theta_1},\Theta'')\\&\quad+\varphi(x',-\sqrt{x_n+a\mu^2\Theta_1},\sqrt{\mu^2\Theta_1},\Theta'')]\\\varphi_{2,\mu}(x,\Theta')&=\frac{1}{2}[\varphi(x',\sqrt{x_n+a\mu^2\Theta_1},\sqrt{\mu^2\Theta_1},\Theta'')\\&\quad-\varphi(x',-\sqrt{x_n+a\mu^2\Theta_1},\sqrt{\mu^2\Theta_1},\Theta'')]\end{aligned}$$

Par un développement de Taylor à l'ordre 3 autour de $\xi_n=\tilde{\xi}_n(x',\sqrt{\mu^2\Theta_1},\Theta'')$ et compte-tenu de (3-11), (3-17) on obtient:

$$\text{(3-22)}\quad \begin{aligned}\varphi_{1,\mu}(x,\Theta')&=x_n\tilde{\xi}_n+G_\mu(x',\tilde{\xi}_n,\Theta')\\&\quad+(x_n+a\mu^2\Theta_1)^2f(x',x_n+a\mu^2\Theta_1,\sqrt{\mu^2\Theta_1},\Theta'')\end{aligned}$$

où f est la fonction entière de X, Y et $x_n+a\mu^2\Theta_1$ définie par:

$$f=\sum_{j\geq 3}\frac{1}{j!}\partial_{\xi_n}^jG_\mu(x',\tilde{\xi}_n,\Theta')\sum_{0\leq k\leq[j]/2}(x_n+a\mu^2\Theta_1)^{j-k}\binom{j}{2k}X^{j-2k}Y^k$$

Lorsque toutes les variables sont réelles, (3-10), (3-13) et (3-19) donnent:

$$\operatorname{Im} f(x',\sqrt{\mu^2\Theta_1},\Theta'')=\mathcal{O}(\mu^3).$$

On calcule de même:

$$\text{(3-23)}\quad \varphi_{2,\mu}(x,\Theta')=\frac{2}{3}(x_n+a\mu^2\Theta_1)^{3/2}e(x',x_n+a\mu^2\Theta_1,\sqrt{\mu^2\Theta_1},\Theta'')$$

où $e=e(x,\sqrt{\mu^2\Theta_1},\Theta'')$ est la fonction holomorphe définie dans un voisinage convenable de $(x_0',0,0,\xi_0'')$ par:

$$\begin{aligned}e=\frac{3}{2}\sqrt{Y}\Big(1+\sum_{j\geq 3}\frac{1}{j!}\partial_{\xi_n}^jG_\mu(x',\tilde{\xi}_n,\Theta')\\\sum_{0\leq k\leq\left[\frac{j-1}{2}\right]}(x_n+a\mu^2\Theta_1)^{j-k-1}\binom{j}{2k+1}X^{j-2k-1}Y^k\Big).\end{aligned}$$

Les formules (3-10), (3-13) et (3-19) montrent encore que :

$$\operatorname{Im}\, e(x, \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \Theta'') = \mathcal{O}(\mu^3).$$

quand toutes les variables sont réelles. De plus, (3-20) et (3-11) donnent :

(3-24) $\quad e(x', 0, 0, \Theta'') = (-r_1(x', 0, \partial_{x''}\psi_0))^{1/2}.$

Choisissant la détermination principale de la puissance 2/3 on pose :

(3-25) $\quad \psi_{2,\mu}(x, \Theta') = (x_n + a\mu^2\Theta_1)[e(x, \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \Theta'')]^{2/3}$

Les égalités (3-9) et (3-17) montrent enfin que φ_μ vérifie la condition limite :

(3-26) $\quad \varphi_\mu(x', 0, \Theta') = \psi_\mu(x', \Theta').$

Résumons ces observations dans le :

LEMME 3-1 : *La fonction* :

$$\varphi_\mu(x, \Theta') = \varphi_{1,\mu}(x, \Theta') + \frac{2}{3}(\psi_{2,\mu}(x, \Theta'))^{3/2}$$

où $\varphi_{1,\mu}$ *et* $\psi_{2,\mu}$ *sont donnés par* (3-22), (3-23) *et* (3-25), *holomorphe dans les variables* $(x', x_n, \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \sqrt{x_n + a\mu^2\Theta_1}, \Theta')$ *au voisinage de* $(x_0', 0, 0, 0, \Theta_0')$ *satisfait l'équation eïkonale* (3-2). *Ici* $\sqrt{\mu^2\Theta_1}$ *et* $\sqrt{x_n + a\mu^2\Theta_1}$ *sont des déterminations quelconques de la racine carrée sur la surface de Riemann de* $\boldsymbol{C}\backslash 0$ *au voisinage de 0. De plus, lorsque les variables* $x = (x', x_n)$ *et* $\Theta' = (\Theta_1, \Theta'')$ *sont réelles, pour tout* $t > 0$ *assez petit, on a* :

$$\operatorname{Im}\, \varphi_\mu = x_n\mathcal{O}(\mu^3) + \Big(\frac{2}{3}(r_1(x', 0, \partial_{x'}, \psi_0))^{-1} + o(1)\Big)\, \operatorname{Im}(\mu^2\Theta_1)^{3/2}$$
$$+ (x_n + a\mu^2\Theta_1)^{3/2}\mathcal{O}(\mu^3)$$

uniformément pour $|x' - x_0'|$, $|x_n - t|$, $|\Theta' - \Theta_0'|$ *et* $\mu > 0$ *assez petits.*

D'autre part, d'après le théorème de Levinson (voir par exemple [Hö] Théorème 7-5-13), il existe une fonction analytique $v = v(\xi_n\,;\, x', \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \Theta'')$ telle que :

(3-27) $\quad x_n\xi_n + G_\mu(x', \xi_n, \Theta') = -\frac{1}{3}v^3 + \psi_{2,\mu}v + \varphi_{1,\mu}.$

L'application $\xi_n \longmapsto v$ réalise un difféomorphisme analytique d'un voisinage de $\xi_n = 0$ sur un voisinage de $v = 0$ et :

(3-28) $\quad v(\xi_n\,;\, x, \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \Theta'') = (-r_1 + \mathcal{O}(\mu^2))^{-1/3}\xi_n + \mathcal{O}(\xi_n^2) + \mathcal{O}(x_n + a\mu^2\Theta_1)$

Ayant déterminé les fonctions phase on construit pour $\lambda \geq 1$ au voisinage de $\mu=0$, $\xi_n=0$, $(x', \Theta')=(x_0', \Theta_0')$ un symbole analytique classique $a^{(0)}(x', \xi_n, \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \Theta'', \lambda)$ en λ tel que formellement:

(3-29) $$\begin{cases} e^{-i\lambda G_\mu(x', \xi_n, \Theta')}P(x', -\tilde{D}_{\xi_n}, \tilde{D}_{x'}, \xi_n, \lambda)[e^{i\lambda G_\mu}a^{(0)}]=0 \\ a^{(0)}(x', 0, \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \Theta'', \lambda)=1 \end{cases}$$

Ici $P(x', -\tilde{D}_{\xi_n}, \tilde{D}_{x'}, \xi_n, \lambda)=\lambda^{-2}P(x', -D_{\xi_n}, D_{x'}, \xi_n)$ est considéré comme opérateur pseudo-différentiel à grand paramètre d'ordre 0 au sens de [Sj], et $\tilde{D}_x=\lambda^{-1}D_x$. D'autre part, on peut trouver (voir par exemple [La]) un symbole analytique classique en λ, $a^{(1)}(x', \xi_n, \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \Theta'', \lambda)$ au voisinage de $(x', \Theta')=(x_0', \Theta_0')$, $\xi_n=0$, et $\mu=0$, vérifiant au niveau formel:

$$\begin{aligned} &e^{-i\lambda(x_n\xi_n+G_\mu)}P(x, \tilde{D}_x, \lambda)(e^{i\lambda(x_n\xi_n+G_\mu)}a^{(0)})= \\ &\quad = e^{-i\lambda G_\mu}P(x', -\tilde{D}_{\xi_n}, \tilde{D}_{x'}, \xi_n, \lambda)(e^{i\lambda G_\mu}a^{(0)})+ \\ &\quad + e^{-i\lambda(x_n\xi_n+G_\mu)}\tilde{D}_{\xi_n}(e^{i\lambda(x_n\xi_n+G_\mu)}a^{(1)}). \end{aligned}$$

Choisissant des réalisations des symboles $a^{(0)}$ et $a^{(1)}$, on obtient donc, d'après (3-29):

(3-30) $$\begin{aligned} &e^{-i\lambda(x_n\xi_n+G_\mu)}P(x, \tilde{D}_x, \lambda)(e^{i\lambda(x_n\xi_n+G_\mu)}a^{(0)})= \\ &\quad = e^{-i\lambda(x_n\xi_n+G_\mu)}\tilde{D}_{\xi_n}(e^{i\lambda(x_n\xi_n+G_\mu)}a^{(1)})+\mathcal{O}(e^{-\delta\lambda}) \quad (\delta>0) \end{aligned}$$

uniformément pour μ assez petit et (x', Θ', ξ_n) voisin de $(x_0', 0, \Theta_0', 0)$.

Soit alors Γ le contour composé des segments $[Re^{-i\pi/6}, 0]$ et $[0, Re^{i\pi/2}]$, où $R>0$ est choisi assez petit pour que l'on puisse définir toutes les fonctions de ξ_n ci-dessus dans le disque de centre 0 et de rayon R, mais indépendant de μ, x, et Θ' dans des voisinages convenables de 0, x_0 et Θ_0'. Pour $\lambda \geq 1$, on pose:

(3-31) $$U(x, \Theta', \mu, \lambda)=\frac{\sqrt{\lambda\mu}}{2i\pi}\int_\Gamma e^{-i\lambda(x_n\xi_n+G_\mu)}a^{(0)}(x', \xi_n, \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \Theta'', \lambda)\,d\xi_n.$$

On vérifie facilement que $\operatorname{Im}(x_n\xi_n+G\mu) \geq \delta>0$ pour $\xi_n=Re^{-i\pi/6}$ et $\xi_n=Re^{i\pi/2}$, uniformément par rapport aux autres variables x, μ, Θ' dans des voisinages assez petits de x_0, 0 et Θ_0'. D'après (3-30) on a donc:

(3-32) $\quad P(x, \tilde{D}_x, \lambda)U(x, \Theta', \mu, \lambda)=\mathcal{O}(e^{-\delta\lambda}) \quad (\delta>0)$

uniformément pour x, μ, Θ' comme ci-dessus et $\lambda \geq 1$. Dans l'intégrale (3-31) on fait le changement de variables (3-28); modifiant un peu les limites du contour d'intégration en v, compte-tenu de ce que Arg v reste voisin de Arg ξ_n lorsque $|\xi_n|=R$, on obtient:

$$U(x, \Theta', \mu, \lambda)=\frac{\sqrt{\lambda\mu}}{2i\pi}\int_{\Gamma_1} e^{-i\lambda(-\frac{1}{3}v^3+\psi_{2,\mu}v+\varphi_{1,\mu})}$$
$$a^{(2)}(x, v, \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \Theta'', \lambda)dv+\mathcal{O}(e^{-\delta\lambda}).$$

où Γ_1 est le chemin (orienté) constitué des segments $[R_1e^{-i\pi/6}, 0]$ et $[0, R_1e^{-i\pi/2}]$ $(R_1>0)$ et :

$$a^{(2)}(x, v, \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \Theta'', \lambda)$$
$$=a^{(0)}(x', \xi_n, \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \Theta'', \lambda)\frac{\partial\xi_n}{\partial v}\Big|_{\xi_n=\xi_n(v;\, x, \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \Theta'')}$$

est un symbole analysique classique d'ordre 0. Par le théorème de division pour les symboles analytiques, (voir par exemple [Le]-1, Lemme 3-5), il existe trois symboles analytiques classiques $a^{(3)}(x, \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \Theta'', \lambda)$, $a^{(4)}(x, \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \Theta'', \lambda)$ et $a^{(5)}(x, v, \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \Theta'', \lambda)$ d'ordre 0 tels que formellement :

$$a^{(2)}(x, v, \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \Theta'', \lambda)\ \exp(i\lambda(-\frac{1}{3}v^3+\psi_{2,\mu}v))=$$
$$=[a^{(3)}(x, \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \Theta'', \lambda)+a^{(4)}(x, \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \Theta'', \lambda)v]$$
$$\exp(i\lambda(-\frac{1}{3}v^3+\psi_{2,\mu}v))$$
$$+\tilde{D}_v[a^{(5)}(x, v, \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \Theta'', \lambda)\ \exp(i\lambda(-\frac{1}{3}v^3+\psi_{2,\mu}v))].$$

En outre, $a^{(3)}$ a pour symbole principal (d'après (3-28) et (3-29)) :

(3-33) $$a_0^{(3)}(x, \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \Theta'')=(-r_1+\mathcal{O}(\mu^2))^{-1/3}+\mathcal{O}(x_n+a\mu^2\Theta_1)$$

Par définiton de la fonction d'Airy on a :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{+\infty e^{-i\pi/6}}^{+\infty e^{i\pi/2}} e^{-i\lambda(\alpha z-\frac{1}{3}z^3)}dz=\lambda^{-1/3}e^{i\pi/6}Ai(\alpha\lambda^{2/3}e^{-i\pi/3})$$
$$\frac{1}{2i\pi}\int_{+\infty e^{-i\pi/6}}^{+\infty e^{i\pi/2}} e^{-i\lambda(\alpha z-\frac{1}{3}z^3)}zdz=\lambda^{-2/3}e^{-2i\pi/3}Ai'(\alpha\lambda^{2/3}e^{-i\pi/3})$$

pour tout $\alpha\in \boldsymbol{C}$ et tout $\lambda>0$. Compte-tenu du comportement de Im $(-\frac{1}{3}v^3+\psi_{2,\mu}v)$ le long des rayons $[0, +\infty\ \ e^{-i\pi/6}]$ et $[0, +\infty\ \ e^{i\pi/2}]$ on obtient facilement :

$$e^{-i\lambda\varphi_\mu}U(x, \Theta', \mu, \lambda)=$$
$$=\lambda^{1/6}\mu^{1/2}e^{i\pi/6}a^{(3)}(x, \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \Theta'', \lambda)e^{-\frac{2}{3}i\lambda(\psi_{2,\mu})^{3/2}}Ai(\lambda^{2/3}e^{-i\pi/3}\psi_{2,\mu})$$
$$+\lambda^{-1/6}\mu^{1/2}e^{-2i\pi/3}a^{(4)}(x, \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \Theta'', \lambda)e^{-\frac{2}{3}i\lambda(\psi_{2,\mu})^{3/2}}Ai'(\lambda^{2/3}e^{-i\pi/3}\psi_{2,\mu})$$

$$+e^{-i\lambda\varphi_\mu}\mathcal{O}(e^{-\delta\lambda}) \quad (\delta>0).$$

Rappellons que :

$$Ai(z)=(\exp-\frac{2}{3}z^{3/2})\Phi(z)$$

où $z^{1/2}$ est la détermination principale de la racine carrée, et Φ est une fonction holomorphe dans tout domaine :

$$Z_\varepsilon=\{z\in\boldsymbol{C} : |z|\geq\varepsilon>0, \ -\pi+\varepsilon\leq \operatorname{Arg} z\leq\pi-\varepsilon\}$$

Φ admet le développement asymptotique complet :

$$\Phi(z)\sim\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j z^{-1/4-3j/2} \tag{3-34}$$

uniformément pour $z\in Z_\varepsilon$. La suite des α_j définit un symbole analytique classique, au sens où :

$$|\alpha_j|\leq C^{j+1}j^j \quad (C>0).$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
&e^{-i\lambda\varphi\mu}U(x,\Theta',\mu,\lambda)=\\
&\quad=\lambda^{1/6}\mu^{1/2}e^{i\pi/6}a^{(3)}(x,\sqrt{\mu^2\Theta_1},\Theta'',\lambda)\Phi(\lambda^{2/3}e^{-i\pi/3}\psi_{2,\mu})\\
&\quad+\lambda^{-1/6}\mu^{1/2}e^{-2i\pi/3}a^{(4)}(x,\sqrt{\mu^2\Theta_1},\Theta'',\lambda)\Psi(\lambda^{2/3}e^{-i\pi/3}\psi_{2,\mu})\\
&\quad+e^{-i\lambda\varphi_\mu}\mathcal{O}(e^{-\delta\lambda}) \quad (\delta>0).
\end{aligned} \tag{3-35}$$

où $\Psi(z)=\Phi'(z)-z^{1/2}\Phi(z)$.

Fin de la démonstration du Théorème 0-3 :

Pour $s>1$ on pose à présent :

$$\mu=\mu_0\lambda^{(1-s)/3s} \quad (\lambda\geq1)$$

avec $\mu_0>0$ assez petit, et on choisit pour $\sqrt{\mu^2\Theta_1}$ et $\sqrt{x_n+a\mu^2\Theta_1}$ la détermination principale. En particulier, $\sqrt{\mu^2\Theta_1}=i\mu(-\Theta_1)^{1/2}$ si $\Theta_1<0$. Soit :

$$u(x)=\int_1^\infty\int_\Omega U(x,\Theta',\mu,\lambda)d\Theta'\lambda^{n-1}d\lambda$$

où Ω est un voisinage réel de Θ'_0 assez petit pour que toutes nos constructions soient valables dans $\bar{\Omega}$.

On remarque d'abord que d'après (3-32), $P(x, D_x)u$ est analytique au voisinage de $(x'_0, 0)=x_0$, et donc dans G^s. Soit ensuite $t>0$ assez petit ; le Lemme 3-1 et l'hypothèse que (x_0, ξ_0) est un point strictement diffractif $(r_1(x'_0, \xi'_0)<0)$ montrent alors que l'on peut trouver des constantes $C(t)>0$

et $\lambda(t)\geq 1$ telles que pour $\lambda\geq\lambda(t)$:

$$\mathrm{Im}\ \varphi_{\mu}(x, \Theta')\geq C(t)\lambda^{(1-s)/s}$$

si x est dans un voisinage réel de (x_0', t), uniformément pour $\Theta'\in\Omega$. D'autre part, étant donnée l'expression de $\psi_{2,\mu}$ les développements (3-34) et (3-35) montrent que :

$$e^{-i\lambda\varphi_{\mu}(x,\Theta')}U(x, \Theta', \mu, \lambda)=a^{(6)}(x, \Theta', \mu, \lambda)+\mathcal{O}(e^{-\delta\lambda})$$

où $a^{(6)}$ est un symbole analytique classique (en λ) pour x voisin de (x_0', t) ; il est alors clair que u est de classe G^s près de tout point (y_0', t_0) vérifiant : $|y_0'-x_0'|<\varepsilon$ et $0<t_0<\varepsilon$ si $\varepsilon>0$ est assez petit, c'est-à-dire (localement) à l'intérieur de M.

Considérons enfin la trace de u sur $x_n=0$. D'après (3-26) on a $\varphi_{\mu}(x', 0, \Theta')=\psi_{\mu}(x', \Theta')$. D'autre part,

$$\psi_{2,\mu}(x', 0, \Theta')=a(x', \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \Theta'')\mu^2\Theta_1[e(x', a\mu^2\Theta_1, \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \Theta'')]^{2/3}.$$

(3-35) montre que $a^{(6)}(x', 0, \Theta', \mu, \lambda)$ est un symbole analytique classique en $\lambda'=\lambda\mu^3=\mu_0^3\lambda^{1/s}$ au sens du Chapître 1. On vérifie aussi facilement que :

$$\begin{aligned} a^{(6)}(x', 0, \Theta', \mu, \lambda)=C(-a\Theta_1)^{-1/4}&[e(x', a\mu^2\Theta_1, \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \Theta'')]^{-1/6}\\ &[a_0^{(3)}(x', 0, \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \Theta'')-e^{i\pi/3}a_0^{(4)}(x', 0, \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \Theta'')\\ &\qquad(e(x', a\mu^2\Theta_1, \sqrt{\mu^2\Theta_1}, \Theta''))^{1/3}\sqrt{a\mu^2\Theta_1}+\mathcal{O}(\lambda'^{-1})]\end{aligned}$$

avec $C\neq 0$, ce qui, compte-tenu de (3-33), montre que $a^{(6)}$ est elliptique au voisinage de (x_0', Θ_0') quand $x_n=0$. Les équations (3-1) montrent alors que $(x_0', \xi_0')\in SS^s u|_{x_n=0}$, ce qui achève la preuve du Théorème. □

Références

[Hö] L. HÖRMANDER :
The Analysis of Linear Partial Diffal Operators I, III Springer Verlag (1987).

[K] K. KATAOKA :
Micro-local theory of boundary value problems II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA 28 (1981), p. 31-56.

[La] P. LAUBIN :
1) Hyperbolic boundary value problems with diffraction. Proc. of the NATO ASI on "Advances in Microlocal Analysis". Castelvecchio. D. Reidel, (1985), p. 165-202.
2) Etude 2-microlocale de la diffraction. Dissertation. Université de Liège, (1987).

[Le] G. LEBEAU :
1) Régularité Gevrey 3 pour la diffraction. Comm. in Part. Diff. Equations, 9 (15), (1984), p. 1437-1494.
2) Propagation des singularités Gevrey pour le problème de Dirichlet. Proc. of the NATO ASI on "Advances in Microlocal Analysis". D. Reidel, (1985), p. 203-223.
3) Deuxième microlocalisation sur les sous-variétés isotropes. Ann. de l'Inst. Fourier.

Grenoble 35, 2 (1985), p. 145-216.

[Li] O. LIESS:
The F. B. I. transform for inhomogeneous Gevrey classes. Preprint-Nr 824. Technische Hochschule Darmstadt, (1984).

[MeSj] R. MELROSE J. SJÖSTRAND:
Singularities of boundary value problems I. Comm. in Pure and Appl. Math. 31, (1978), p. 593-617.

[O] T. OSHIMA:
On analytic equivalence of glancing hypersurfaces. Sci. Papers College Gen. Ed. Univ. Tokyo, 28 (1978), p. 51-57.

[R] M. ROULEUX:
Propagation de l'analycité le long d'une bicaractéristique réelle pour un opérateur totalement caractéristique. Ann. di Mat. Pura ed Appli. IV, Vol TIL, 5 (1987), p. 361-391.

[Sj] J. SJÖSTRAND:
1-2-3) Propagation of analytic singularities for second order Dirichlet problems I, II, III. Comm. in Part. Diff. Equations, 5(1), (1980), p. 41-94, 5(2), (1980), p. 187-207, 6(5), (1981) p. 499-567.
4) Analytic singularities of solutions of boundary value problems, Proc. of the NATO ASI on "Singularities in boundary value problems". D. Reidel, (1980), p. 235-269.
5) Singularités analytiques microlocales. Astérisque n°95.

[T] M. TAYLOR:
Diffraction effects in the scattering of waves. Proc. of the NATO ASI on "Singularities in boundary value problems". D. Reidel, (1980), p. 271-316.

Département de Mathématique
Université Paris-Sud