

NOUVELLES IDENTITÉS DE DAVENPORT

BRUNO MARTIN

Pour Jean-Marc Deshouillers,
en témoignage d'admiration

Abstract: We address a problem initiated by Davenport in 1937 ([5] et [6]). Let $z \in \mathbb{C}$. We study the conditions on real ϑ , and its continued fraction expansion, for the validity of the formal identity

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau_{z+1}(m)}{\pi m} \sin(2\pi m\vartheta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_z(n)}{\pi n} B(n\vartheta) = 0$$

where B denotes the first Bernoulli function and τ_z , the Piltz function of order z . We use methods developed by Fouvry, La Bretèche and Tenenbaum ([8] et [2]), based on summation over friable integers.

Keywords: friable integers, P-summation, Bernoulli first function, Piltz functions, diophantine approximation.

1. Introduction

Considérons la fonction B définie par :

$$B(\vartheta) = \begin{cases} \langle \vartheta \rangle - \frac{1}{2} & \text{si } \vartheta \notin \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{si } \vartheta \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Son développement en série de Fourier s'écrit :

$$B(\vartheta) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi k\vartheta)}{\pi k}. \quad (1.1)$$

Soit à présent une fonction arithmétique g . En effectuant une interversion formelle de sommations, on obtient l'identité

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \frac{g(n)}{n} B(n\vartheta) &= - \sum_{n, k \geq 1} \frac{g(n)}{\pi n k} \sin(2\pi k n \vartheta) \\ &= - \sum_{m \geq 1} \frac{(\mathbf{1} * g)(m)}{\pi m} \sin(2\pi m \vartheta), \end{aligned} \quad (1.2)$$

où $*$ désigne l'opérateur de convolution de Dirichlet et $\mathbf{1}$ dénote la fonction arithmétique constante : $\mathbf{1}(n) = 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Le problème de décider si ce calcul formel est ou non licite a été posé par Davenport dans [5] et [6]. En notant $f = \mathbf{1} * g$, l'identité (1.2) s'écrit,

$$U(f; \vartheta) + V(g; \vartheta) = 0, \quad (D_\vartheta)$$

avec

$$U(f; \vartheta) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(m)}{\pi m} \sin(2\pi m\vartheta), \quad V(g; \vartheta) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n} B(n\vartheta).$$

Étant donné un couple de fonctions arithmétiques (f, g) vérifiant

$$f = \mathbf{1} * g, \quad (1.3)$$

nous écrivons $(f, g) \in D_\vartheta$ pour signifier que les séries $U(f; \vartheta)$ et $V(g; \vartheta)$ convergent et que la relation (D_ϑ) est satisfaite, soit

$$\Delta_f(\vartheta; y) := \sum_{m \leq y} \frac{f(m)}{\pi m} \sin(2\pi m\vartheta) + \sum_{n \leq y} \frac{g(n)}{n} B(n\vartheta) = o(1) \quad (y \rightarrow \infty). \quad (1.4)$$

Conformément à l'usage, nous désignons la fonction de Möbius par la lettre μ . Dans [6], Davenport établit que $(\delta, \mu) \in D_\vartheta$ pour tout $\vartheta \in \mathbb{R}$. Le point de départ de sa méthode consiste à écrire

$$(\vartheta_2 - \vartheta_1)\Delta_f(\vartheta_1, y) = I + J$$

avec

$$I = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \Delta_f(\vartheta, y) d\vartheta \quad \text{et} \quad J = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \{\Delta_f(\vartheta_1, y) - \Delta_f(\vartheta, y)\} d\vartheta.$$

L'intégrale I relève d'une version du problème initial où la série double figurant dans (1.2) est sommable, et pour lequel l'interversion des sommations est donc licite. Estimer J consiste essentiellement à contrôler les discontinuités de

$$\vartheta \mapsto \sum_{n \leq y} \frac{g(n)}{n} B(n\vartheta),$$

ce que Davenport parvient à réaliser lorsque $g = \mu$ grâce à une forme forte du théorème des nombres premiers. Cependant cette méthode échoue dans le cas de fonctions arithmétiques de référence tels que (\log, Λ) , $(\Lambda, \mu \log)$ et $(\tau, \mathbf{1})$, où Λ désigne la fonction de von Mangoldt et τ la fonction qui dénombre les diviseurs d'un entier. L'une des causes de difficulté réside dans le fait qu'un bon contrôle des discontinuités de $\Delta_f(\vartheta; y)$ n'est plus disponible, voire même envisageable, pour ces fonctions. Pour plus de détails sur les mécanismes et les limites de la

méthode de Davenport, nous renvoyons à [10]. Dans ce même travail, nous fournissons également les détails permettant de confirmer l’assertion de Davenport dans [5] selon laquelle la relation $(\delta, \mu) \in D_\vartheta$ pour $\vartheta \in \mathbb{Q}$ peut-être aisément établie grâce à des propriétés classiques des fonctions L de Dirichlet.

Dans [2], La Bretèche et Tenenbaum ont employé une nouvelle méthode, reposant sur l’utilisation des entiers friables, pour aborder la question. Ils ont pu ainsi établir de nombreux résultats de validité pour la relation (D_ϑ) , parmi lesquels plusieurs critères généraux. En particulier le cas des trois couples de fonctions suscités, pour lesquels l’approche de Davenport est inefficace, a pu ainsi être complètement élucidé.

Décrivons succinctement, à présent, les fondements de cette approche nouvelle. Désignons par $P(n)$ le plus grand facteur premier d’un entier $n \geq 2$ et convenons que $P(1) = 1$. La méthode de [2] repose sur la *sommation friable*, qui consiste à sommer non plus sur les entiers $n \leq y$ mais sur les entiers n tels que $P(n) \leq y$. Ce procédé, initialement introduit par Fouvry et Tenenbaum dans [8] sous le nom de P -sommation, est plus régulier que la sommation usuelle, dans la mesure où il permet d’éviter le phénomène de Gibbs — cf. le Théorème 5.1 de [2].

La méthode de La Bretèche et Tenenbaum consiste à établir en premier lieu l’analogie friable de (1.4), soit

$$\nabla_f(\vartheta; y) := \sum_{P(m) \leq y} \frac{f(m)}{\pi m} \sin(2\pi m\vartheta) + \sum_{P(n) \leq y} \frac{g(n)}{n} B(n\vartheta) = o(1) \quad (y \rightarrow \infty). \tag{1.5}$$

Ils désignent ensuite comme ϑ -adapté un couple (f, g) de fonctions arithmétiques liées par (1.3) et vérifiant (1.5).

Introduisant, comme dans [2], les «défauts de régularité friable» des sommes friables correspondant aux séries $U(f; \vartheta)$ et $V(g; \vartheta)$, soit

$$U_f(\vartheta; y) := \sum_{\substack{P(m) \leq y \\ m > y}} \frac{f(m)}{\pi m} \sin(2\pi m\vartheta), \quad V_g(\vartheta; y) := \sum_{\substack{P(n) \leq y \\ n > y}} \frac{g(n)}{n} B(n\vartheta),$$

nous obtenons alors l’identité

$$\Delta_f(\vartheta; y) = \nabla_f(\vartheta; y) - U_f(\vartheta; y) - V_g(\vartheta; y) \quad (y \geq 2). \tag{1.6}$$

La Bretèche et Tenenbaum déduisent de cette formule plusieurs conditions suffisantes usuelles de validité de (D_ϑ) pour un couple ϑ -adapté, dont celle qui suit.

Proposition 1.1. *Soit (f, g) un couple ϑ -adapté. Si les deux séries $U(f; \vartheta)$ et $V(g; \vartheta)$ sont convergentes et si l’on a*

$$\liminf_{y \rightarrow \infty} |V_g(\vartheta; y)| + |U_f(\vartheta; y)| = 0, \tag{1.7}$$

alors $(f, g) \in D_\vartheta$.

Décrivons plus avant la technique employée dans [2] pour établir la ϑ -adaptation d’un couple (f, g) de fonctions liées par (1.3). Elle trouve son origine dans la

formule des convolutions complètes : étant données quatre fonctions arithmétiques A , f , g et h telles que $f = g * h$, nous avons, sous réserve de convergence absolue des séries impliquées, l'identité

$$\sum_{P(n) \leq y} f(n)A(n) = \sum_{P(n) \leq y} g(n) \sum_{P(m) \leq y} h(n)A(mn) \quad (y \geq 1). \quad (1.8)$$

Posons maintenant

$$B(\vartheta; y) := - \sum_{P(n) \leq y} \frac{\sin(2\pi n\vartheta)}{\pi n}. \quad (1.9)$$

En appliquant la formule (1.8) avec $h = \mathbf{1}$ et $A : n \mapsto \sin(2\pi n\vartheta)/\pi n$, nous obtenons pour tout couple (f, g) lié par (1.3) (toujours sous réserve de convergence absolue),

$$\sum_{P(m) \leq y} \frac{f(m)}{\pi m} \sin(2\pi m\vartheta) + \sum_{P(n) \leq y} \frac{g(n)}{n} B(n\vartheta; y) = 0 \quad (y \geq 2). \quad (1.10)$$

Nous déduisons donc des relations

$$\begin{aligned} B(\vartheta; y) &= B(\vartheta) - \nabla_{\mathbf{1}}(\vartheta; y), \\ \nabla_{\delta}(\vartheta; y) &= \frac{\sin(2\pi\vartheta)}{\pi} + \sum_{P(n) \leq y} \frac{\mu(n)}{n} B(n\vartheta), \end{aligned}$$

les identités

$$\nabla_f(\vartheta; y) = \sum_{P(n) \leq y} \frac{g(n)}{n} \nabla_{\mathbf{1}}(n\vartheta; y) = \sum_{P(m) \leq y} \frac{f(m)}{m} \nabla_{\delta}(m\vartheta; y). \quad (1.11)$$

Établir la ϑ -adaptation d'un couple (f, g) , lié par (1.3), consiste donc à montrer une forme en moyenne d'une des relations $\nabla_{\mathbf{1}}(\vartheta; y) = o(1)$, $\nabla_{\delta}(\vartheta; y) = o(1)$ que, d'après respectivement le Théorème 11 de [8] et le Théorème 2.2 de [2], l'on sait être valable pour tout $\vartheta \in \mathbb{R}$ lorsque $y \rightarrow \infty$.

Dans cette étude, nous employons la méthode de La Bretèche et Tenenbaum afin d'étudier les identités de Davenport vérifiées par les couples (τ_{z+1}, τ_z) , où τ_z désigne la puissance de convolution d'ordre z de la fonction $\mathbf{1}$. Notre objectif consiste donc à trouver des conditions de validité relatives à ϑ et z pour l'identité

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau_{z+1}(m)}{\pi m} \sin(2\pi m\vartheta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_z(n)}{\pi n} B(n\vartheta) = 0. \quad (1.12)$$

Le cas $z = 0$ correspond au développement en série de Fourier de la fonction B . Le cas $z = 1$ correspond au couple (δ, μ) , traité par Davenport : la relation D_{ϑ} est alors vérifiée pour tout $\vartheta \in \mathbb{R}$. Enfin, La Bretèche et Tenenbaum caractérisent les

nombres réels ϑ pour lesquels le couple $(\tau, \mathbf{1})$ appartient à D_ϑ , éucidant ainsi le cas $z = 1$ (Théorème 4.4 de [2]). Ils démontrent également que le couple (τ_{z+1}, τ_z) appartient à (D_ϑ) pour tout nombre réel ϑ dès que $|z + 1| \leq 1$ (Théorème 4.8 de [2]).

Ce travail est dédié au professeur Jean-Marc Deshouillers qui a beaucoup oeuvré pour le développement de la théorie analytique et probabiliste des nombres en France.

2. Rappels, notations, et préliminaires techniques

2.1. Les fonctions de Piltz. Nous commençons par rappeler quelques propriétés des fonctions de Piltz, $n \mapsto \tau_z(n)$, lorsque $z \in \mathbb{C}$.

Par définition, $\tau_z(n)$ est le coefficient générique de la série de Dirichlet de $\zeta(s)^z$, initialement définie pour $s \in]1, \infty[$, soit :

$$\zeta(s)^z = \sum_{n \geq 1} \frac{\tau_z(n)}{n^s}.$$

En effectuant le développement en produit eulérien de $\zeta(s)^z$, on voit que τ_z est multiplicative et l'on obtient

$$\tau_z(p^\nu) = \binom{z + \nu - 1}{\nu} \quad (p \text{ premier, } \nu \in \mathbb{N}^*). \tag{2.1}$$

Pour plus de détails, nous renvoyons au chapitre II.5 de [14].

Dans [11], Selberg a évalué le comportement en moyenne de τ_z : pour tout $A > 0$, on a, uniformément lorsque $|z| \leq A$, $x \geq 2$,

$$\sum_{n \leq x} \tau_z(n) = \frac{x}{\Gamma(z)} (\log x)^{z-1} + O(x(\log x)^{z-2}). \tag{2.2}$$

Notons

$$S(x, y) := \{n \leq x : P(n) \leq y\}$$

l'ensemble des entiers y -friables n'excédant pas x . Nos calculs nécessitent une estimation, fournie par le Théorème 1 de [13], du comportement en moyenne de τ_κ sur les entiers friables lorsque κ est un nombre réel positif. Nous posons

$$H_\varepsilon := \left\{ (x, y) : x \geq 2, 1 \leq \frac{\log x}{\log y} \leq \exp \left((\log y)^{3/5-\varepsilon} \right) \right\}.$$

Nous avons alors, uniformément pour $(x, y) \in H_\varepsilon$,

$$\sum_{n \in S(x, y)} \tau_\kappa(n) \ll x \rho_\kappa \left(\frac{\log x}{\log y} \right) (\log y)^{\kappa-1}, \tag{2.3}$$

où ρ_κ désigne la puissance de convolution d'ordre κ de la fonction ρ de Dickman. Signalons que cette estimation résulte également du corollaire 2.3 de [17].

Nous aurons aussi recours à l'inégalité

$$|\tau_z(m)| \leq \tau_\lambda(m) \quad (|z| \leq \lambda, m \geq 1). \tag{2.4}$$

Enfin lorsque κ est un nombre réel positif, nous disposons de la majoration

$$\tau_\kappa(n) \ll (\kappa + \varepsilon)^{\log n / \log 2^n}, \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0. \tag{2.5}$$

En particulier,

$$\tau_\kappa(n) \ll n^\varepsilon, \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0. \tag{2.6}$$

2.2. La fonction f_z . Nos résultats font intervenir une fonction arithmétique qui apparaîtra naturellement à plusieurs reprises lors de calculs ultérieurs. Lorsque z est un nombre complexe, nous posons pour $q \in \mathbb{N}^*$,

$$f_z(q) := \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^z \prod_{p^\nu \parallel q} \left(\sum_{j \geq 0} \frac{\tau_z(p^{j+\nu})}{p^j}\right). \tag{2.7}$$

La fonction f_z est multiplicative. Mentionnons que l'identité

$$f_z(p^\nu) = \tau_z(p^\nu) \left\{ \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{z-1} - (z-1)p^{1-z} \int_0^1 u^\nu (p-u)^{z-2} du \right\}, \tag{2.8}$$

établie dans [10], permet de constater immédiatement que $f_1 \equiv \mathbf{1}$.

Il sera utile de disposer d'une estimation basique pour $f_z(q)$, valable pour chaque $z \in \mathbb{C}$ fixé et uniformément pour $q \geq 1$. Soit $\kappa \geq 1$ tel que $|z| \leq \kappa$. Nous avons

$$f_z(q) = \tau_z(q) \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^z \prod_{p^\nu \parallel q} \left(1 + \frac{\tau_z(p^{\nu+1})}{\tau_z(p^\nu)p} + \sum_{\ell \geq 2} \frac{\tau_z(p^{\nu+\ell})}{\tau_z(p^\nu)p^\ell}\right).$$

En utilisant (2.1), nous remarquons que, pour tout nombre premier p ,

$$\left| \frac{\tau_z(p^{\nu+\ell})}{\tau_z(p^\nu)} \right| \leq \frac{\tau_\kappa(p^{\nu+\ell})}{\tau_\kappa(p^\nu)}.$$

Comme de plus, la fonction $n \mapsto \tau_\kappa(n)$ est sous-multiplicative lorsque $\kappa \geq 1$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} f_z(q) &= \tau_z(q) \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^z \prod_{p^\nu \parallel q} \left(1 + \frac{z+\nu}{(\nu+1)p} + O\left(\sum_{\ell \geq 2} \frac{\tau_\kappa(p^\ell)}{p^\ell}\right)\right) \\ &= \tau_z(q) \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^z \prod_{p^\nu \parallel q} \left(1 + \frac{z+\nu}{(\nu+1)p} + O_\kappa\left(\frac{1}{p^2}\right)\right). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Nous en déduisons la majoration suivante,

$$f_z(q) \ll \tau_\kappa(q) \left(\frac{\varphi(q)}{q} \right)^{(2\sigma - \kappa - 1)/2},$$

où nous avons employé la notation $\sigma := \Re e(z)$. En particulier, pour tous $\varepsilon > 0$ et $z \in \mathbb{C}$ fixés,

$$f_z(q) \ll q^\varepsilon. \tag{2.10}$$

Par ailleurs, nous pouvons déduire de (2.9) la minoration suivante, valable pour chaque z fixé et uniformément pour $q \geq 1$.

$$f_z(q) \gg \tau_\sigma(q) \left(\frac{\varphi(q)}{q} \right)^{(2\sigma + \kappa + 1)/2}. \tag{2.11}$$

2.3. Approximations rationnelles des nombres réels. Nos résultats sont exprimés en fonction des bonnes approximations rationnelles d'un nombre réel ϑ . Pour chaque nombre entier $Q \geq 2$, il existe, selon le théorème de Dirichlet, au moins un couple d'entiers (a, q) tel que

$$(a, q) = 1, \quad 1 \leq q \leq Q \quad \text{et} \quad \left| \vartheta - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{qQ}.$$

Nous notons $q(\vartheta; Q)$ le plus petit dénominateur de ces approximations rationnelles et nous prolongeons cette définition en posant $q(\vartheta; t) := q(\vartheta; [t])$ lorsque $t \in [2; +\infty[$. Les nombres entiers $q(\vartheta; Q)$ décrivent les éléments de l'ensemble $\mathcal{D}(\vartheta) := \{q \geq 1, \|\vartheta q\| < \min_{1 \leq r < q} \|\vartheta r\|\}$ où, conformément à l'usage, on a posé $\|\vartheta\| := \min_{n \in \mathbb{Z}} |\vartheta - n|$. Nous avons alors $\mathcal{D}(\vartheta) = \{q_m\}_{m=1}^\infty = \{q_m(\vartheta)\}_{m=1}^\infty$, où q_m désigne le dénominateur de la réduite d'ordre m dans le développement en fraction continue de ϑ .

La croissance de la suite $\{q_m\}_{m=0}^\infty$ est au moins exponentielle. Nous disposons par exemple de l'inégalité

$$q_m \geq \frac{\varphi^{m-1}}{\sqrt{5}} \quad (m \geq 1), \tag{2.12}$$

où nous avons posé $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$.

Désignant par a_m/q_m la m -ième réduite de $\vartheta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, nous rappelons les inégalités classiques

$$\frac{1}{q_m(q_{m+1} + q_m)} < \left| \vartheta - \frac{a_m}{q_m} \right| < \frac{1}{q_m q_{m+1}} \quad (m \geq 1). \tag{2.13}$$

Pour plus de détails concernant ces notions, nous renvoyons à [9].

3. Énoncé des résultats

Lorsque ϑ est un nombre rationnel, l'argument employé par La Bretèche et Tenenbaum pour traiter le cas $|z - 1| \leq 1$ est en fait valable pour tout $z \in \mathbb{C}$. Ainsi $(\tau_{z+1}, \tau_z) \in D_\vartheta$ pour tous $\vartheta \in \mathbb{Q}$ et $z \in \mathbb{C}$. Nous nous proposons d'établir ce résultat par une méthode différente, reposant également sur la ϑ -adaptation et qui fournit un renseignement qualitatif supplémentaire.

Théorème 3.1. *Soient $z \in \mathbb{C}$ et $\vartheta \in \mathbb{Q}$. Le couple (τ_{z+1}, τ_z) appartient à D_ϑ et de plus pour tout $A > 0$, on a uniformément pour $y \geq 2$,*

$$\sum_{m \leq y} \frac{\tau_{z+1}(m)}{\pi m} \sin(2\pi m\vartheta) + \sum_{n \leq y} \frac{\tau_z(n)}{n} B(n\vartheta) \ll \frac{1}{(\log y)^A}. \tag{3.1}$$

Le cas $\vartheta \in \mathbb{Q}$ est relativement aisé dans la mesure où un résultat spécifique de ϑ -adaptation pour les rationnels s'applique ici, à savoir le Théorème 3.4 de [2]. En revanche, lorsque ϑ est irrationnel, les résultats généraux énoncés dans la troisième partie de [2] ne s'appliquent que lorsque $|z - 1| \leq 1$ (Théorème 3.2 de [2]). Nous prouvons cependant que l'identité (1.12) est valide pour une large classe de nombres réels ϑ .

Rappelant la définition de $f_z(q)$ en (2.7), nous introduisons l'ensemble $\Xi(z)$ des nombres irrationnels ϑ tels que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(\log q_{m+1})^{|z|}}{q_m} f_{|z|}(q_m) = 0. \tag{3.2}$$

Nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 3.2. *Soient $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+^*$ et ϑ un nombre irrationnel. Si $\vartheta \in \Xi(z)$ alors le couple (τ_{z+1}, τ_z) appartient à (D_ϑ) .*

Lorsque z est fixé, l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \Xi(z)$ est de mesure de Lebesgue nulle, d'après l'estimation (2.10) de $f_{|z|}$ et le Théorème 31 de [9]. En fait la démonstration de [9] fournit un résultat plus fort : la dimension de Hausdorff de $\mathbb{R} \setminus \Xi(z)$ est nulle.

Nous pouvons également envisager la nature de $\Xi(z)$ en termes de mesure d'irrationalité. On dit qu'un nombre réel ϑ admet le nombre positif μ pour mesure d'irrationalité si, pour tous $\varepsilon > 0$, $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$, on a $|x - p/q| \geq q^{-\mu-\varepsilon}$ pour q assez grand. D'après le théorème de Dirichlet, toute mesure d'irrationalité μ vérifie $\mu \geq 2$. Nous pouvons alors affirmer que tout nombre réel ϑ possédant une mesure d'irrationalité finie appartient à $\Xi(z)$. En effet, si μ est une mesure d'irrationalité pour ϑ , alors, d'après (2.13), nous avons pour m assez grand,

$$\frac{1}{q_m^{\mu+\varepsilon}} \leq \left| \vartheta - \frac{a_m}{q_m} \right| \leq \frac{1}{q_m q_{m+1}},$$

ce qui entraîne

$$q_{m+1} \leq q_m^{\mu-1+\varepsilon},$$

et donc $\vartheta \in \Xi(z)$.

Cependant l'ensemble $\Xi(z)$ est inclus strictement dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Nous pouvons en effet construire une infinité de nombres réels ϑ pour lesquels la condition (3.2) n'est pas satisfaite, en déterminant leurs réduites par récurrence.

Lorsque $|z - 1| \leq 1$, le Théorème 4.8 de [2] affirme que $(\tau_{z+1}, \tau_z) \in (D_\vartheta)$ pour tout $\vartheta \in \mathbb{R}$. La condition (3.2) n'est donc pas nécessaire dans ce cas.

Étant donné $z \in \mathbb{R}_+^*$, nous construisons au paragraphe 7 un nombre réel ϑ , qui vérifie (3.2), mais pas (D_ϑ) . Le Théorème 3.2 est donc optimal dans la mesure où l'on ne peut pas y affaiblir la condition sur z .

Le théorème suivant permet d'élucider complètement le cas $z \in \mathbb{R}_+^*$, exclu du Théorème 3.2 : nous caractérisons les nombres réels ϑ pour lesquels $(\tau_{z+1}, \tau_z) \in (D_\vartheta)$ et généralisons ainsi le Théorème 4.4 de [2].

Théorème 3.3. *Soient $\kappa > 0$ et ϑ un nombre irrationnel. Le couple $(\tau_{\kappa+1}, \tau_\kappa)$ appartient à (D_ϑ) si, et seulement si, la série*

$$\sum_{m \geq 1} (-1)^m \frac{(\log q_{m+1})^\kappa}{q_m} f_\kappa(q_m) \tag{3.3}$$

converge.

Lorsque $z \in \mathbb{C}$, nous montrons (cf Proposition 6.1 *infra*) que la série

$$\sum_{m \geq 1} (-1)^m \frac{(\log q_{m+1})^z}{q_m} f_z(q_m) \tag{3.4}$$

converge si, et seulement si, les séries $U(\tau_{z+1}; \vartheta)$ et $V(\tau_z; \vartheta)$ convergent. De fait, nous démontrons dans la preuve du Théorème 3.2 que la condition (3.2) entraîne la convergence de la série (3.4), dès que $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+^*$. En revanche, lorsque $z \in \mathbb{R}_+^*$, la condition (3.2) n'est plus suffisante mais nécessaire à la convergence de la série (3.4). Cela explique pourquoi l'énoncé du Théorème 3.2 n'inclut pas le cas $z \in \mathbb{R}_+^*$. Nous remarquons enfin que l'ensemble des réels ϑ satisfaisant à l'identité (3.3) pour $z \in \mathbb{R}_+^*$ constitue un ensemble possédant les mêmes caractéristiques que $\Xi(z)$ en terme de mesure de Lebesgue et de mesure d'irrationalité.

D'après le Théorème 3.3, lorsque $\kappa > 0$, il suffit que la série

$$\sum_{m \geq 1} \frac{(\log q_{m+1})^\kappa}{q_m} f_\kappa(q_m)$$

converge pour que $(\tau_{\kappa+1}, \tau_\kappa) \in (D_\vartheta)$. Cette condition n'est cependant pas nécessaire. En effet, nous pouvons construire un nombre réel ϑ tel que la série

$$\sum_{m \geq 1} (-1)^m \frac{(\log q_{m+1})^\kappa}{q_m} f_\kappa(q_m) \tag{3.5}$$

converge, tandis que la série

$$\sum_{m \geq 1} \frac{(\log q_{m+1})^\kappa}{q_m} f_\kappa(q_m) \tag{3.6}$$

diverge. Le détail de cette construction, qui fournit également le contre-exemple annoncé après le Théorème 3.2, fait l'objet du paragraphe 7.

4. Le cas ϑ rationnel : preuve du Théorème 3.1

La preuve du Théorème 3.1 nécessite quelques estimations préliminaires. Le premier de ces résultats auxiliaires concerne le comportement en moyenne de la fonction τ_z sur les entiers friables. Nous obtenons une estimation moins précise que (2.3), mais valable sur un domaine plus vaste.

Proposition 4.1. *Soit $\kappa > 0$. Il existe une constante $b = b(\kappa)$ telle que l'on ait uniformément, pour $x, y \geq 2$, $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq \kappa$,*

$$\sum_{n \in S(x,y)} \tau_z(n) \ll x(\log x)^{\kappa-1} e^{-b \log x / \log y}. \tag{4.1}$$

Démonstration. Lorsque $2 \leq x \leq y$, la majoration annoncée découle de l'estimation (2.2) de Selberg. Nous pouvons donc supposer désormais que $2 \leq y \leq x$. D'après l'inégalité (2.4), nous avons

$$\sum_{n \in S(x,y)} \tau_z(n) \ll \sum_{n \in S(x,y)} \tau_\kappa(n).$$

D'après (2.2), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \sum_{n \in S(x,y)} \tau_\kappa(n) &= \sum_{n \in S(\sqrt{x},y)} \tau_\kappa(n) + \sum_{\substack{\sqrt{x} \leq n \leq x \\ P(n) \leq y}} \tau_\kappa(n) \\ &\ll \sqrt{x}(\log x)^{\kappa-1} + \sum_{\substack{\sqrt{x} \leq n \leq x \\ P(n) \leq y}} \tau_\kappa(n). \end{aligned}$$

Notons n_y le plus grand diviseur d d'un nombre entier n tel que $P(d) \leq y$. Lorsque $P(n) \leq y$, nous avons $n_y = n$. Ainsi,

$$\sum_{\substack{\sqrt{x} < n \leq x \\ P(n) \leq y}} \tau_\kappa(n) \ll \sum_{\substack{n \leq x \\ n_y \geq \sqrt{x}}} \tau_\kappa(n).$$

Nous pouvons alors appliquer le lemme 2 de [15] avec $f = \tau_\kappa$, $\zeta = \sqrt{x}$, $\xi = y$: il existe une constante $b = b(\kappa)$ telle que

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n_y \geq \sqrt{x}}} \tau_\kappa(n) \ll x(\log x)^{\kappa-1} e^{-b \log x / \log y}.$$

Nous obtenons ainsi la conclusion souhaitée. ■

Donnons à présent, lorsque χ est un caractère non principal de Dirichlet, une estimation du comportement en moyenne sur les entiers friables de la fonction $n \mapsto \tau_z(n)\chi(n)$.

Proposition 4.2. Soit $A > 0$ et $\kappa \geq 1$. Il existe une constante $d = d(\kappa, A)$ telle que l'on ait uniformément pour $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq \kappa$, $2 \leq y \leq x$, $1 \leq q \leq (\log x)^A$, χ caractère non principal de module q ,

$$\sum_{n \in S(x,y)} \chi(n)\tau_z(n) \ll x \exp \left\{ -d \left(\frac{\log x}{\log y} + (\log x)^{1/3} \right) \right\}. \tag{4.2}$$

L'uniformité en q n'est pas indispensable pour établir le Théorème 3.1 mais nous la mentionnons à fins de référence ultérieure.

Démonstration. Nous pouvons supposer que $y > \exp \{ (\log x)^{2/3} \}$ car l'estimation annoncée résulte de (4.1) dans le cas contraire.

Posons $X := e^{\sqrt{\log x}}$ dans un souci de lisibilité.

Nous utilisons une technique développée par Tenenbaum dans [15]. Remarquons tout d'abord, en vertu de la Proposition 4.1, que

$$\sum_{n \in S(x,y)} \chi(n)\tau_z(n) = \sum_{\substack{n \leq x \\ X < P(n) \leq y}} \chi(n)\tau_z(n) + O(xe^{-(b/2)\sqrt{\log x}}). \tag{4.3}$$

Maintenant, nous effectuons la décomposition

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq x \\ X < P(n) \leq y}} \chi(n)\tau_z(n) &= \sum_{X < p \leq y} \chi(p) \sum_{\substack{m \leq x/p \\ P(m) \leq p}} \chi(m)\tau_z(mp) \\ &= S_1 + S_2, \end{aligned} \tag{4.4}$$

où,

$$S_1 := z \sum_{X < p \leq y} \chi(p) \sum_{\substack{m \leq x/p \\ P(m) \leq p}} \chi(m)\tau_z(m),$$

et

$$S_2 := \sum_{X < p \leq y} \chi(p) \sum_{\substack{m \leq x/p \\ P(m) \leq p \\ p|m}} \chi(m)\tau_z(mp) - z \sum_{X < p \leq y} \chi(p) \sum_{\substack{m \leq x/p \\ P(m) \leq p \\ p|m}} \chi(m)\tau_z(m).$$

Comme $\kappa \geq 1$, la fonction τ_κ est sous-multiplicative. Il suit

$$\begin{aligned} S_2 &\ll \sum_{X < p \leq y} \sum_{\nu \geq 1} \tau_\kappa(p^\nu) \sum_{h \leq x/p^{\nu+1}} \tau_\kappa(h) \\ &\ll x(\log x)^{\kappa-1} \sum_{X < p \leq y} \frac{1}{p} \sum_{\nu \geq 1} \frac{\tau_\kappa(p^\nu)}{p^\nu} \ll x(\log x)^{\kappa-1} \sum_{X < p \leq y} \frac{1}{p^2}, \end{aligned}$$

et donc

$$S_2 \ll x(\log x)^{\kappa-1} e^{-\sqrt{\log x}}. \quad (4.5)$$

Pour estimer S_1 , nous remarquons tout d'abord que

$$\begin{aligned} S_1 &= z \sum_{\substack{mP(m) \leq x \\ P(m) \leq y}} \chi(m) \tau_z(m) \sum_{\substack{P(m) \leq p \leq x/m \\ X < p \leq y}} \chi(p) \\ &= z \sum_{\substack{P(m) \leq y \\ m \leq x/y}} \chi(m) \tau_z(m) \sum_{\substack{P(m) \leq p \leq y \\ p > X}} \chi(p) \\ &\quad + z \sum_{\substack{mP(m) \leq y \\ P(m) \leq x \\ m > x/y}} \chi(m) \tau_z(m) \sum_{\substack{P(m) \leq p \leq x/m \\ p > X}} \chi(p) \end{aligned}$$

D'après le théorème des nombres premiers en progressions arithmétiques, pour tout $B > 0$, il existe une constante $c(B)$, telle que l'estimation

$$\sum_{p \leq t} \chi(p) \ll t e^{-c(B) \sqrt{\log t}}$$

ait lieu uniformément pour $t \geq 2$, $1 \leq q \leq (\log t)^B$ et tout caractère χ non principal de module q . Nous en déduisons, en posant $c_1 := c(2A)$, que l'on a

$$S_1 \ll T_1 + T_2$$

avec

$$T_1 := y e^{-c_1 \sqrt{\log y}} \sum_{\substack{P(m) \leq y \\ m \leq x/y}} \tau_z(m), \quad T_2 := x \sum_{\substack{mP(m) \leq x \\ P(m) \leq y}} \frac{\tau_\kappa(m)}{m} e^{-c_1 \sqrt{\log(x/m)}}.$$

La somme T_1 relève de la majoration (4.1) : nous avons

$$T_1 \ll x(\log x)^{\kappa-1} e^{-c_1 \sqrt{\log y} - b \log x / \log y} \ll x e^{-d_1 (\log x)^{1/3}}$$

avec $d_1 := \min(b, c_1)$, en vertu de l'estimation $a/b + \sqrt{b} \geq \frac{3}{2} a^{1/3}$, valable pour $a > 0$, $b > 0$. Pour estimer T_2 , nous posons $M_j := x/e^j$ ($0 \leq j \leq \log x$). D'où

$$\begin{aligned} T_2 &\ll x \sum_{0 \leq j \leq \log x} \frac{e^{-c_1 \sqrt{j}}}{M_j} \sum_{\substack{M_{j+1} < m \leq M_j \\ P(m) \leq e^{j+1}}} \tau_\kappa(m) \\ &\ll x(\log x)^{\kappa-1} \sum_{0 \leq j \leq \log x} e^{-c_1 \sqrt{j+1} - b(\log x)/(j+1)} \ll e^{-d_1 (\log x)^{1/3}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$S_1 \ll x e^{-d_1(\log x)^{1/3}}. \tag{4.6}$$

La majoration annoncée résulte de (4.3), (4.4), (4.5) et (4.6). ■

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le Théorème 3.1. Soit $\vartheta := a/q$ un nombre rationnel où $(a, q) = 1$ et $z \in \mathbb{C}$. Étant donné $A > 0$, nous établissons l'estimation (3.1) en appliquant (1.6) à $f = \tau_{z+1}$.

Le Théorème 3.4 de [2] permet d'établir directement que le couple (τ_{z+1}, τ_z) est ϑ -adapté. En fait la démonstration de ce théorème fournit une estimation effective de $\nabla_{\tau_{z+1}}(\vartheta; y)$. Nous reproduisons les détails pour la commodité du lecteur.

D'après la définition de la fonction τ_z , nous disposons, pour tout $z \in \mathbb{C}$, de la majoration

$$\sum_{P(n) \leq y} \frac{|\tau_z(n)|}{n} \leq \sum_{P(n) \leq y} \frac{\tau_{|z|}(n)}{n} \prod_{p \leq y} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-|z|} \ll (\log y)^{|z|}. \tag{4.7}$$

Cette estimation garantissant la convergence absolue des séries impliquées, nous pouvons donc appliquer (1.11). Nous obtenons ainsi

$$\nabla_{\tau_{z+1}}(\vartheta; y) = \sum_{P(m) \leq y} \frac{\tau_{z+1}(m)}{m} \nabla_{\delta}(m\vartheta; y). \tag{4.8}$$

Or, d'après le Théorème 2.2 de [2], nous avons, uniformément pour $y \geq 2$, $a \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq y/(\log y)^{5(A+|z|+1)+20}$,

$$\nabla_{\delta}(\vartheta; y) \ll \frac{1}{(\log y)^{A+|z|+1}}.$$

Nous en déduisons l'estimation

$$\nabla_{\tau_{z+1}}(\vartheta; y) \ll \frac{1}{(\log y)^A} \quad (y \geq 2). \tag{4.9}$$

Estimons à présent le défaut de régularité friable $U_{\tau_{z+1}}(\vartheta; y)$. La famille des caractères de Dirichlet impairs de module divisant q constitue une base de l'espace vectoriel des fonctions impaires, q -périodiques, définies sur \mathbb{N} et à valeurs complexes. Or la fonction $m \mapsto \sin(2\pi am/q)$ est une fonction impaire et q -périodique. Nous avons donc, d'après la Proposition 4.2, uniformément pour $2 \leq y \leq x$,

$$Z_{\tau_{z+1}}(x, y; a/q) := \sum_{\substack{m \leq x \\ P(m) \leq y}} \tau_{z+1}(m) \sin\left(\frac{2\pi am}{q}\right) \ll x e^{-c(\log x)^{1/3}}.$$

Procédons alors à une sommation d'Abel. Pour $y \geq 2$, nous avons

$$\begin{aligned} U_{\tau_{z+1}}(a/q; y) &= \sum_{\substack{m > y \\ P(m) \leq y}} \frac{\tau_{z+1}(m)}{m} \sin\left(\frac{2\pi am}{q}\right) \\ &= \frac{Z_{\tau_{z+1}}(y, y; a/q)}{y} + \int_y^\infty \frac{Z_{\tau_{z+1}}(t, y; a/q)}{t^2} dt. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc l'estimation

$$U_{\tau_{z+1}}(a/q; y) \ll \frac{1}{(\log y)^A} \quad (y \geq 2). \tag{4.10}$$

Comme la fonction $n \mapsto B(an/q)$ est également q -périodique et impaire, un argument identique fournit la majoration

$$V_{\tau_z}(a/q; y) \ll \frac{1}{(\log y)^A} \quad (y \geq 2). \tag{4.11}$$

En reportant les estimations (4.9), (4.10) et (4.11) dans la formule (1.6), nous obtenons bien (3.1).

Pour montrer que $(\tau_{z+1}, \tau_z) \in D_\vartheta$, il nous suffit de prouver que la série $U(\tau_{z+1}; a/q)$ est convergente. En effectuant une sommation d'Abel, il vient

$$\sum_{n \leq x} \frac{\tau_{z+1}(n)}{n} \sin\left(\frac{2\pi an}{q}\right) = \frac{Z_{\tau_{z+1}}(x, x; a/q)}{x} + \int_1^x Z_{\tau_{z+1}}\left(t, t; \frac{a}{q}\right) \frac{dt}{t^2}. \tag{4.12}$$

En appliquant (4.2), nous constatons que le premier terme du membre de droite tend vers 0 et que l'intégrale est convergente. La série $U(\tau_{z+1}, \vartheta)$ est donc convergente.

5. La ϑ -adaptation du couple (τ_{z+1}, τ_z) lorsque $\vartheta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Nous énonçons avant tout deux lemmes permettant d'alléger la preuve des résultats clefs de cette section.

Lemme 5.1. *Soit $\kappa > 0$. On a uniformément pour $y \geq 2$, $q \in \mathbb{N}^*$, $q \leq y$,*

$$\sum_{P(n) \leq y} \frac{\tau_\kappa(nq)}{n} \ll (\log y)^\kappa f_\kappa(q).$$

Démonstration. Soit q un entier fixé. La fonction arithmétique $n \mapsto \tau_\kappa(nq)/\tau_\kappa(q)$ est multiplicative. On obtient donc pour $q \leq y$, en effectuant un développement eulérien :

$$\begin{aligned} \sum_{P(n) \leq y} \frac{\tau_\kappa(nq)}{n} &= \tau_\kappa(q) \prod_{p \leq y} \sum_{j \geq 0} \frac{\tau_\kappa(p^j q)}{p^j \tau_\kappa(q)} \\ &= \tau_\kappa(q) \prod_{\substack{p \leq y \\ p \nmid q}} \sum_{j \geq 0} \frac{\tau_\kappa(p^j)}{p^j} \prod_{\substack{p \leq y \\ p^v \parallel q}} \sum_{j \geq 0} \frac{\tau_\kappa(p^{j+\nu})}{p^j \tau_\kappa(p^\nu)} \\ &= \prod_{p \leq y} (1 - 1/p)^{-\kappa} \prod_{p|q} (1 - 1/p)^\kappa \prod_{p^\nu \parallel q} \sum_{j \geq 0} \frac{\tau_\kappa(p^{j+\nu})}{p^j}, \end{aligned}$$

ce qui fournit le résultat annoncé. ■

Lemme 5.2. Soient $\kappa > 0$ et $c > 0$. On a

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \sum_{\substack{n > Y \\ P(n) \leq y}} \frac{\tau_\kappa(n)}{n} = 0$$

où l'on a posé $Y := y^{c \log_2 y}$.

Démonstration. Définissons $Z := Z(y) \in \mathbb{R}$ par

$$\frac{\log Z}{\log y} = \exp\{(\log y)^{1/2}\}.$$

Nous pouvons alors écrire

$$\sum_{\substack{n > Y \\ P(n) \leq y}} \frac{\tau_\kappa(n)}{n} = \sum_{\substack{Y < n \leq Z \\ P(n) \leq y}} \frac{\tau_\kappa(n)}{n} + \sum_{\substack{n > Z \\ P(n) \leq y}} \frac{\tau_\kappa(n)}{n}.$$

D'après (2.3), l'estimation

$$\sum_{n \in S(x,y)} \tau_\kappa(n) \ll x \rho_\kappa(u) (\log y)^{\kappa-1} \tag{5.1}$$

est valable pour tous x, y tels que $2 \leq y \leq x \leq Z$ (nous rappelons la notation $u := \log x / \log y$). De plus, il résulte du Théorème 1 de [12] que, pour tout $B > 0$,

$$\rho_\kappa(v) \ll_B e^{-Bv} \quad (v \geq 1). \tag{5.2}$$

En effectuant une sommation d'Abel, puis en utilisant les estimations (5.1) et (5.2), nous obtenons, pour tout nombre réel $B > 0$ fixé,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{Y < n \leq Z \\ P(n) \leq y}} \frac{\tau_\kappa(n)}{n} &\ll \left(e^{-B \log Y / \log y} + e^{-B \log Z / \log y} \right) (\log y)^\kappa \\ &\ll e^{-B \log Y / \log y} (\log y)^\kappa = (\log y)^{\kappa - Bc}. \end{aligned}$$

D'après l'estimation (4.1), il existe une constante $b = b(\kappa)$ telle que

$$\sum_{n \in S(x,y)} \tau_\kappa(n) \ll x e^{-bu} (\log x)^{\kappa-1} \ll x e^{-bu/2} \quad (x > Z).$$

En effectuant une sommation d'Abel, nous obtenons

$$\sum_{\substack{n > Z \\ P(n) \leq y}} \frac{\tau_\kappa(n)}{n} \ll e^{-b \log Z / (2 \log y)} \log y = (\log y)^{-b/2}.$$

La conclusion annoncée découle de ces estimations en choisissant $B > \kappa/c$. ■

Lorsque $0 < |z| \leq 1$, la fonction τ_z est bornée et appartient donc à l'ensemble \mathcal{L}^2 des fonctions arithmétiques h telles que

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} |h(n)|^2 < \infty.$$

D'après le Lemme 9.5 de [2], il s'ensuit que le couple (τ_{z+1}, τ_z) est ϑ -adapté si, et seulement si,

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \sum_{P(n) \leq y} \tau_z(n) \{1 - \rho(u_{n\vartheta, y}^*)\} \frac{B(n\vartheta)}{n} = 0,$$

où nous avons employé la notation $u_{\vartheta, y}^* := \log(1/|\vartheta|)/\log y$. La proposition suivante permet, lorsque $|z| > 1$, d'étendre ce résultat à une large classe de nombres réels ϑ , comprenant notamment l'ensemble $\Xi(z)$.

Proposition 5.3. *Soient z un nombre complexe, ϑ un nombre réel et $\{q_m\}_{m=1}^\infty$ la suite des réduites de ϑ . Si l'on a*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(\log q_{m+1})^{|z|-1+\varepsilon}}{q_m} = 0$$

pour un nombre $\varepsilon > 0$ convenable, alors une condition nécessaire et suffisante pour que le couple (τ_{z+1}, τ_z) soit ϑ -adapté est

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \sum_{P(n) \leq y} \tau_z(n) \{1 - \rho(u_{n\vartheta, y}^*)\} \frac{B(n\vartheta)}{n} = 0.$$

Démonstration. Pour alléger les notations, nous posons systématiquement $\kappa := |z|$ dans toute la suite de cette démonstration. D'après la remarque précédant l'énoncé, nous pouvons supposer $\kappa > 1$. Soit A un nombre réel tel que $A > \kappa$. Posons $Q_y := y/(\log y)^{4A+20}$ et $q := q(\vartheta, Q_y)$. En appliquant la formule (1.10) avec $f = \tau_{z+1}$ et $g = \tau_z$, nous pouvons écrire

$$\sum_{P(m) \leq y} \frac{\tau_{z+1}(m)}{\pi m} \sin(2\pi m\vartheta) + \sum_{P(n) \leq y} \frac{\tau_z(n)}{n} B(n\vartheta; y) = 0 \quad (y \geq 2).$$

Cette identité est licite car, d'après l'estimation (4.7), les séries impliquées sont absolument convergentes. Nous obtenons donc, en vertu de (1.11),

$$\nabla_{\tau_{z+1}}(\vartheta; y) = \sum_{P(n) \leq y} \frac{\tau_z(n)}{n} \nabla_{\mathbf{1}}(n\vartheta; y).$$

En appliquant le Théorème 2.2 de [2] et en posant $q_n := q(n\vartheta; Q_y)$, il vient

$$\nabla_{\tau_{z+1}}(\vartheta; y) = \sum_{P(n) \leq y} \tau_z(n) \{1 - \rho(u_{n\vartheta, y}^*)\} \frac{B(n\vartheta)}{n} + R_1(y) + R_2(y), \quad (5.3)$$

où

$$R_1(y) \ll \frac{1}{\log y} \sum_{P(n) \leq y} \frac{2^{\omega(q_n)} (\log q_n)^2 \rho(u_{n\vartheta, y}^*) \log(u_{\vartheta, y}^* + 2) \tau_\kappa(n)}{\varphi(q_n) n}$$

et

$$R_2(y) \ll \frac{1}{(\log y)^A} \sum_{P(n) \leq y} \frac{\tau_\kappa(n)}{n}.$$

On a $R_2(y) \ll (\log y)^{\kappa-A}$ donc $R_2(y) = o(1)$ lorsque $y \rightarrow \infty$ puisque nous avons supposé $A > \kappa$. Il suffit donc de prouver que

$$R_1(y) = o(1) \quad (y \rightarrow \infty) \tag{5.4}$$

pour établir la conclusion annoncée.

La fonction ρ de Dickman satisfait l'inégalité (cf Théorème 5 chapitre III.5 de [14]),

$$\rho(v) \leq \frac{1}{\Gamma(v+1)} \quad (v \geq 0),$$

où Γ désigne la fonction Gamma d'Euler. La fonction $v \mapsto \rho(v) \log(v+2)$ est donc bornée sur \mathbb{R}_+ . De plus, d'après des estimations classiques (cf chapitre I.5 de [14]), nous avons, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé,

$$\frac{2^{\omega(q)} (\log q)^2}{\varphi(q)} \ll \frac{1}{q^{1-\varepsilon}} \quad (q \geq 1).$$

Nous obtenons ainsi que

$$R_1(y) \ll \frac{1}{\log y} \sum_{P(n) \leq y} \frac{\tau_\kappa(n)}{nq_n^{1-\varepsilon}}.$$

Conservons la notation $Y := y^{c \log_2 y}$ introduite au Lemme 5.2. Nous fixerons plus loin la valeur de constante c . D'après le Lemme 5.2, nous avons

$$R_1(y) \ll \frac{1}{\log y} \sum_{\substack{n \leq Y \\ P(n) \leq y}} \frac{\tau_\kappa(n)}{nq_n^{1-\varepsilon}} + o(1) \quad (y \rightarrow \infty).$$

Comme on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log y} \sum_{\substack{n \leq Y \\ q_n \geq (\log y)^{2\kappa}}} \frac{\tau_\kappa(n)}{nq_n^{1-\varepsilon}} &\ll \frac{(\log Y)^\kappa}{(\log y)^{1+2\kappa(1-\varepsilon)}} \\ &\ll \frac{(\log_2 y)^\kappa}{(\log y)^{1+\kappa(1-2\varepsilon)}} = o(1) \quad (y \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

il nous reste seulement à montrer que

$$S(y) := \frac{1}{\log y} \sum_{\substack{n \leq Y \\ q_n \leq (\log y)^{2\kappa}}} \frac{\tau_\kappa(n)}{nq_n^{1-\varepsilon}} = o(1) \quad (y \rightarrow \infty).$$

Nous utilisons la majoration

$$S(y) \ll \frac{1}{(\log y)^{1-4\kappa\varepsilon}} \sum_{\substack{n \leq Y \\ q_n \leq (\log y)^{2\kappa}}} \frac{\tau_\kappa(n)}{nq_n^{1+\varepsilon}}.$$

Soit $n \leq Y$ tel que $q_n \leq (\log y)^{2\kappa}$. Nous pouvons alors écrire $n = m/d$ avec $d := q_n$ et $m := nq_n \leq Y(\log y)^{2\kappa}$. De plus, par définition de $q_n = q(n\vartheta, y)$, nous avons

$$\|m\vartheta\| = \|q_n(n\vartheta)\| \leq \frac{1}{Q_y}.$$

Comme de plus $Y(\log y)^{2\kappa} \leq Y^2$ pour y assez grand, cela implique la majoration

$$\begin{aligned} S(y) &\ll \frac{1}{(\log y)^{1-4\kappa\varepsilon}} \sum_{\substack{m \leq Y^2 \\ \|m\vartheta\| \leq 1/Q_y}} \frac{1}{m} \sum_{d|m} \frac{\tau_\kappa(m/d)}{d^\varepsilon} \\ &= \frac{1}{(\log y)^{1-4\kappa\varepsilon}} \sum_{\substack{m \leq Y^2 \\ \|m\vartheta\| \leq 1/Q_y}} \frac{\tau_\kappa(m)}{m} F_\kappa(m), \end{aligned}$$

où F_κ est la fonction multiplicative définie, pour tout nombre premier p et tout entier $\nu \geq 1$, par

$$F_\kappa(p^\nu) = \sum_{0 \leq j \leq \nu} \frac{\tau_\kappa(p^{\nu-j})}{\tau_\kappa(p^\nu) p^{j\varepsilon}}.$$

Comme $\kappa > 1$, la fonction $\nu \mapsto \tau_\kappa(p^\nu)$ est croissante, ce qui implique que l'on ait, uniformément pour tout nombre premier p et tout entier $\nu \geq 1$,

$$F_\kappa(p^\nu) = 1 + O_\varepsilon(1/p^\varepsilon). \quad (5.5)$$

Soient α et β deux exposants conjugués ; d'après l'inégalité de Hölder, nous avons

$$S(y) \ll \frac{1}{(\log y)^{1-4\kappa\varepsilon}} S_1(y)^{1/\alpha} S_2(y)^{1/\beta}, \quad (5.6)$$

avec

$$S_1(y) := \sum_{\substack{n \leq Y^2 \\ \|n\vartheta\| \leq 1/Q_y}} \frac{\tau_\kappa(n)^\alpha}{n}, \quad S_2(y) := \sum_{n \leq Y^2} \frac{F_\kappa(n)^\beta}{n}.$$

D'après (5.5), nous obtenons immédiatement que

$$S_2(y) \ll \prod_{p \leq Y^2} \left(1 + \frac{1}{p} + O\left(\frac{1}{p^{1+\varepsilon}}\right) \right) \ll \log Y. \tag{5.7}$$

Pour majorer S_1 , nous considérons l'unique entier $m = m(y)$ tel que

$$q_m \leq Q_y/2 < q_{m+1}.$$

Le nombre réel ϑ peut alors s'écrire sous la forme

$$\vartheta = \frac{a}{q_m} + \frac{\gamma}{q_m q_{m+1}}, \quad |\gamma| \leq 1.$$

Si $n \leq \frac{1}{2}q_{m+1}$ et $n \not\equiv 0 \pmod{q_m}$, alors

$$\|n\vartheta\| = \left\| \frac{na}{q_m} + \frac{n\gamma}{q_m q_{m+1}} \right\| \geq \frac{1}{2q_m} > \frac{1}{Q_y}.$$

Ainsi,

$$S_1(y) \ll G(y) + H(y) \tag{5.8}$$

avec

$$G(y) := \sum_{\substack{n \leq Y^2 \\ n \equiv 0 \pmod{q_m}}} \frac{\tau_\kappa(n)^\alpha}{n}, \quad H(y) := \sum_{\substack{q_{m+1}/2 < n \leq Y^2 \\ \|n\vartheta\| \leq 1/Q_y}} \frac{\tau_\kappa(n)^\alpha}{n}.$$

Pour étudier la quantité $G(y)$, nous observons que l'on peut écrire, pour tout nombre entier m ,

$$\tau_\kappa(m)^\alpha = \tau_{\kappa^\alpha} * g(m)$$

où g est une fonction multiplicative telle, que pour tout nombre premier p

$$g(p) = 0, \quad g(p^\nu) \ll p^{\delta\nu} \quad (\nu \geq 2),$$

où δ est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0; 1/2[$. En utilisant le Lemme 5.1 et l'estimation (2.10), nous obtenons alors

$$\begin{aligned} G(y) &\ll \sum_{\substack{P(n) \leq Y^2 \\ n \equiv 0 \pmod{q_m}}} \frac{\tau_\kappa(n)^\alpha}{n} \ll \frac{1}{q_m} \sum_{P(n) \leq Y^2} \frac{\tau_{\kappa^\alpha}(nq_m)}{n} \sum_{P(k) \leq Y^2} \frac{g(k)}{k} \\ &\ll \frac{(\log Y)^{\kappa^\alpha} f_{\kappa^\alpha}(q_m)}{q_m}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$G(y) \ll_\varepsilon \frac{(\log y)^{\kappa^\alpha + \varepsilon}}{q_m}. \tag{5.9}$$

Étudions enfin la quantité $H(y)$. En utilisant la majoration (2.5), nous obtenons tout d'abord que

$$H(y) \ll (\kappa + 1)^{2\alpha \log Y / \log_2 Y} \sum_{\substack{q_{m+1}/2 < n \leq Y^2 \\ \|n\vartheta\| \leq 1/Q_y}} \frac{1}{n}.$$

À présent, nous observons que la condition $\|n\vartheta\| \leq 1/Q_y$ implique que $\|n\vartheta\|$ appartient à au plus q_{m+1}/Q_y intervalles de longueur $1/q_{m+1}$. Soit I l'un de ces intervalles et n un entier tel que $\|n\vartheta\| \in I$. D'après le lemme 6.3 de [2], n peut prendre au plus 6 valeurs dans un sous-ensemble de \mathbb{N} du type $[kq_{m+1}; (k+1)q_{m+1}[$ ($k \in \mathbb{N}$). Nous désignons par a_k la plus petite des valeurs modulo q_{m+1} que peut prendre l'entier n dans un tel sous-ensemble. Nous remarquons que $a_0 > q_{m+1}/2$ d'après les conditions posées sur n dans la somme étudiée. Ainsi

$$\begin{aligned} H(y) &\ll \frac{q_{m+1}}{Q_y} (\kappa + 1)^{2\alpha c \log y} \sum_{0 \leq k \leq Y^2} \frac{1}{a_k + kq_{m+1}} \\ &\ll \frac{(\kappa + 1)^{2\alpha c \log y}}{Q_y} \log Y \\ &\ll \frac{(\log y)^{4A+22}}{y^{1-2\alpha c \log(\kappa+1)}}. \end{aligned}$$

En choisissant la constante $c = 1/4\alpha \log(\kappa + 1)$, nous obtenons alors qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$H(y) \ll \frac{1}{y^C}. \tag{5.10}$$

Finalement, d'après (5.6), (5.7), (5.8), (5.9) et (5.10),

$$\begin{aligned} S(y) &\ll \left(\frac{(\log y)^{\kappa\alpha + \varepsilon'}}{q_m} + \frac{1}{y^C} \right)^{1/\alpha} (\log y)^{-1+1/\beta+4\kappa\varepsilon} \\ &\ll \left(\frac{(\log q_{m+1})^{\kappa\alpha - 1 + \varepsilon' + 4\alpha\kappa\varepsilon}}{q_m} + \frac{(\log y)^{4\kappa\varepsilon - 1/\alpha}}{y^C} \right)^{1/\alpha}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Ainsi, en choisissant α , ε et ε' suffisamment petit, nous obtenons (5.4), d'après la condition posée sur ϑ . ■

Nous sommes à présent en mesure d'énoncer et de démontrer le résultat principal de cette section.

Proposition 5.4. *Soit un nombre complexe z quelconque. Si $\vartheta \in \Xi(z)$, alors le couple (τ_{z+1}, τ_z) est ϑ -adapté.*

Démonstration. Nous conservons la notations $\kappa := |z|$. D'après la définition de $\Xi(z)$ et la majoration (2.10), la condition de la Proposition 5.3 est vérifiée. Une condition suffisante de ϑ -adaptation est donc :

$$\sum_{\substack{\|n\vartheta\| \leq 1/y \\ P(n) \leq y}} \frac{\tau_\kappa(n)}{n} = o(1) \quad (y \rightarrow \infty).$$

Posons $Y = y^{c \log_2 y}$, avec $c = 1/2 \log(\kappa + 1)$. D'après le Lemme 5.2, nous avons

$$\sum_{\substack{n > Y \\ \|n\vartheta\| \leq 1/y \\ P(n) \leq y}} \frac{\tau_\kappa(n)}{n} \leq \sum_{\substack{n > Y \\ P(n) \leq y}} \frac{\tau_\kappa(n)}{n} = o(1) \quad (y \rightarrow \infty).$$

Évaluons à présent la contribution

$$\sum_{\substack{n \leq Y \\ \|n\vartheta\| \leq 1/y \\ P(n) \leq y}} \frac{\tau_\kappa(n)}{n}.$$

Étant donné $y \geq 2$, nous considérons l'unique entier $m = m(y)$ tel que

$$q_m \leq y/2 < q_{m+1}.$$

Il suffit alors d'appliquer *mutatis mutandis* la méthode employée pour estimer $S_1(y)$ dans la démonstration de la Proposition 5.3. Nous obtenons finalement la majoration

$$\sum_{\substack{\|n\vartheta\| \leq 1/y \\ P(n) \leq y}} \frac{\tau_\kappa(n)}{n} \ll \frac{(\log q_{m+1})^\kappa}{q_m} f_\kappa(q_m) + o(1) \quad (y \rightarrow \infty). \quad (5.12)$$

D'après (3.2), cette quantité tend bien vers 0 lorsque y tend vers l'infini. ■

6. Preuve des Théorèmes 3.2 et 3.3

6.1. Réduction du problème. Nous démontrons tout d'abord que les preuves des Théorèmes 3.2 et 3.3 peuvent être déduites de la proposition suivante, qui généralise la proposition 11.1 de [2].

Proposition 6.1. Soient $z \in \mathbb{C}$, $\vartheta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $\{q_m\}_{m \geq 1}$ la suite des dénominateurs des réduites de ϑ . Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) la série $U(\tau_{z+1}; \vartheta)$ converge ;
- (ii) la série $V(\tau_z; \vartheta)$ converge ;
- (iii) la série

$$\sum_{m \geq 1} (-1)^m \frac{(\log q_{m+1})^z}{q_m} f_z(q_m) \quad (6.1)$$

converge.

Déduction du Théorème 3.2 à partir de la Proposition 6.1.

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+^*$ et $\vartheta \in \Xi(z)$. Nous utilisons la Proposition 1.1. D'après la Proposition 5.4, le couple (τ_{z+1}, τ_z) est ϑ -adapté. Montrons à présent que la condition (3.2) implique la convergence absolue de la série (6.1) et, par conséquent, la convergence des séries $U(\tau_{z+1}; \vartheta)$ et $V(\tau_z; \vartheta)$. Lorsque $\Re(z) \leq 0$, cette série numérique est toujours absolument convergente en vertu de (2.12). Supposons désormais que $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+^*$ et $\Re(z) > 0$ et posons

$$a_m = \frac{(\log q_{m+1})^{\Re(z)}}{q_m} |f_z(q_m)|.$$

Comme $\vartheta \in \Xi(z)$, il existe $A > 0$ tel que

$$\frac{(\log q_{m+1})^{|z|}}{q_m} f_{|z|}(q_m) \leq A. \quad (6.2)$$

Nous déduisons de (6.2) et de l'estimation (2.10) que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $m_0(\varepsilon)$ tel que

$$a_m \leq A (\log q_{m+1})^{\Re(z) - |z|} q_m^\varepsilon \quad (m \geq m_0(\varepsilon)). \quad (6.3)$$

Donc pour tous $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$, et $m \geq m_0(\varepsilon)$,

$$\begin{aligned} a_m &\leq \left(\frac{(\log q_{m+1})^{\Re(z)}}{q_m} q_m^\varepsilon \right)^\alpha \left(A (\log q_{m+1})^{\Re(z) - |z|} q_m^\varepsilon \right)^\beta \\ &\leq A \frac{(\log q_{m+1})^{\Re(z) - \beta|z|}}{q_m^{\alpha - \varepsilon}}. \end{aligned}$$

Fixons β tel que $\beta > \Re(z)/|z|$ puis ε tel que $\varepsilon < \alpha$. Nous obtenons ainsi qu'il existe $\eta > 0$, tel que, pour m assez grand,

$$a_m \leq A/q_m^\eta.$$

D'après (2.12), la série $\sum_{m \geq 1} a_m$ est donc convergente et il s'ensuit que la série (6.1) est bien absolument convergente.

Maintenant, nous déduisons du lemme 6.9 de [2] que $U_{\tau_{z+1}}(\vartheta; y) = o(1)$ lorsque $y \rightarrow \infty$ sous la condition $q(\vartheta; y/(\log y)^{4(\kappa^2+1)+21}) \geq (\log y)^{4(\kappa^2+1)+21}$. Par ailleurs, d'après le lemme 13.4 de [2], $V_{\tau_z}(\vartheta; y)$ tend vers 0 lorsque $y \rightarrow \infty$ sous la condition $q(\vartheta; y/(\log y)^{5\kappa^2+26}) \geq (\log y)^{5\kappa^2+26}$. Comme $q(\vartheta; q_m) = q_m$, la condition (1.7) est bien vérifiée. ■

Déduction du Théorème 3.3 à partir de la Proposition 6.1.

Soient $\kappa > 0$ et $\vartheta \in \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses du Théorème 3.3. Le critère du Théorème 3.3 coïncide avec la condition (iii) de la Proposition 6.1. Cette condition est donc bien nécessaire à la validité de (D_ϑ) pour le couple $(\tau_{\kappa+1}, \tau_\kappa)$. Pour montrer qu'elle est suffisante nous utilisons la Proposition 1.1. Comme le terme général de la série (3.3) tend vers 0, $\vartheta \in \Xi(\kappa)$ et la Proposition 5.4 assure que le couple $(\tau_{\kappa+1}, \tau_\kappa)$ est ϑ -adapté. L'argument utilisé ci-dessus pour traiter les défauts de régularité friable reste valide et ainsi la condition (1.7) est vérifiée. ■

Les deux paragraphes suivants ont pour objectif de démontrer la Proposition 6.1. Lorsque $\Re(z) \leq 0$, la série (6.1) est convergente en vertu de la croissance exponentielle de la suite $\{q_m\}_{m=1}^\infty$ et de la majoration (2.10). Par ailleurs, La Bretèche et Tenenbaum ont établi aux paragraphes 13.3.2 et 13.3.3 de [2] la convergence inconditionnelle de $U(\tau_{z+1}; \vartheta)$ et $V(\tau_z; \vartheta)$ lorsque $\Re(z) \leq 0$. Nous pouvons donc supposer que $\Re(z) > 0$.

6.2. Convergence de $U(\tau_{z+1}; \vartheta)$. Dans toute cette partie, z désigne un nombre complexe tel que $\sigma := \Re(z) > 0$. Nous notons encore $|z| := \kappa$.

Nous énonçons tout d'abord un lemme technique permettant d'alléger la preuve de la Proposition 6.1.

Lemme 6.2. *Soit ϑ un nombre réel, $\{q_m\}_{m \geq 1}$ la suite de ses réduites et g une fonction arithmétique. S'il existe $b \in]0; 1/(\sigma + 1)[$ tel que l'on ait*

$$g(q) \ll q^b \quad (q \in \mathbb{N}^*), \tag{6.4}$$

alors les séries

$$\sum_{m \geq 1} (-1)^m \frac{(\log q_{m+1})^z}{q_m} f_z(q_m) \tag{6.5}$$

et

$$\sum_{m \geq 1} (-1)^m \frac{(\log q_{m+1})^z}{q_m} f_z(q_m) \left(1 + \frac{g(q_m)}{\log q_{m+1}} \right) \tag{6.6}$$

sont simultanément convergentes ou divergentes.

Démonstration. Posons

$$a_m = (-1)^m \frac{(\log q_{m+1})^z}{q_m} f_z(q_m)$$

et

$$b_m = a_m \left(1 + \frac{g(q_m)}{\log q_{m+1}} \right).$$

Supposons que la série (6.6) converge et montrons que cela implique la convergence de la série (6.5). Pour cela nous introduisons les ensembles

$$M_1 := \{m \in \mathbb{N}^*, \log q_{m+1} > q_m^c\} \quad \text{et} \quad M_2 := \mathbb{N}^* \setminus M_1,$$

où c est un nombre réel tel que $b < c < (1 - b)/\sigma$ (un tel choix est possible au vu de la condition imposée sur b). Nous pouvons remarquer tout de suite qu'en vertu de (6.4), (2.10) et de la croissance exponentielle des q_m , les séries $\sum_{m \in M_2} a_m$ et $\sum_{m \in M_2} b_m$ sont absolument convergentes. On peut donc supposer que l'ensemble M_1 est infini. Cela implique également que la série $\sum_{m \in M_1} b_m$ est convergente. En particulier $b_m = o(1)$ pour $m \in M_1$. Par ailleurs, lorsque $m \in M_1$,

$$\frac{g(q_m)}{\log q_{m+1}} \ll \frac{1}{q_m^{c-b}}.$$

Nous en déduisons que $a_m = o(1)$ pour $m \in M_1$. Par conséquent la série $\sum_{m \in M_1} a_m g(q_m)/\log q_{m+1}$ est absolument convergente ce qui entraîne la convergence de la série $\sum_{m \in M_1} a_m$. Comme la série $\sum_{m \in M_2} a_m$ est absolument convergente, nous pouvons conclure que la série $\sum_{m \geq 1} a_m$ est convergente.

La démonstration de la réciproque étant similaire, nous omettons les détails. ■

En vue d'intégrations par parties ultérieures, rappelons l'évaluation de

$$Z_{\tau_z}(x, x; \vartheta) := \sum_{n \leq x} \tau_z(n) \sin(2\pi n \vartheta)$$

établie au Lemme 6.11 de [2].

Lemme 6.3. *Soit $A > 0$, $\varepsilon > 0$, et $B = 4A + 4(\kappa + 1)^2 + 12$. On a uniformément pour $x \geq 2$, $Q_x := x/(\log x)^B$, $\vartheta \in \mathbb{R}$, $q = q(\vartheta; Q_x)$, $a \in \mathbb{Z}$, $(a, q) = 1$, $|q\vartheta - a| \leq 1/Q_x$, $\vartheta_q = \vartheta - a/q$,*

$$\begin{aligned} Z_{\tau_z}(x, x; \vartheta) &= \frac{x(\log x)^z}{q} \left\{ \frac{f_z(q) \sin^2(\pi \vartheta_q x)}{\Gamma(z) \pi \vartheta_q x} + O\left(\frac{q^\varepsilon \log(1 + \vartheta_q^2 x^2)}{|\vartheta_q| x \log x}\right) \right\} \\ &\quad + O\left(\frac{x}{(\log x)^A}\right). \end{aligned} \tag{6.7}$$

En fait, le lemme 6.11 de [2] est énoncé avec

$$g_z(q) = \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^{z+1} \prod_{p^\nu \parallel q} \left(\sum_{\ell \geq 0} \frac{\tau_{z+1}(p^{\ell+\nu})}{p^\ell} - \frac{\tau_{z+1}(p^{\nu-1})}{1 - 1/p} \right)$$

à la place que $f_z(n)$, mais le calcul qui suit montre que les deux fonctions multiplicatives f_z et g_z sont identiques.

Soient, en effet, p un nombre premier et $\nu \in \mathbb{N}^*$. En utilisant l'identité de convolution $\tau_{z+1} = \mathbf{1} * \tau_z$, il suit

$$\begin{aligned} \sum_{\ell \geq 0} \frac{\tau_{z+1}(p^{\ell+\nu})}{p^\ell} - \frac{\tau_{z+1}(p^{\nu-1})}{1-1/p} &= \sum_{\ell \geq 0} \frac{1}{p^\ell} \sum_{j \leq \ell+\nu} \tau_z(p^j) - \frac{\tau_{z+1}(p^{\nu-1})}{1-1/p} \\ &= \sum_{j \geq 0} \tau_z(p^j) \sum_{\substack{\ell \geq 0 \\ \ell \geq j-\nu}} \frac{1}{p^\ell} - \frac{\tau_{z+1}(p^{\nu-1})}{1-1/p} \\ &= \frac{1}{1-1/p} \sum_{0 \leq j \leq \nu} \tau_z(p^j) + \sum_{j \geq \nu+1} \frac{\tau_z(p^j)}{p^{j-\nu}(1-1/p)} - \frac{\tau_{z+1}(p^{\nu-1})}{1-1/p} \\ &= \frac{1}{1-1/p} \tau_z(p^\nu) + \sum_{j \geq \nu+1} \frac{\tau_z(p^j)}{p^{j-\nu}(1-1/p)}. \end{aligned}$$

Comme $1 - 1/p = \varphi(p)/p$, ce calcul implique que $g_z(p^\nu) = f_z(p^\nu)$. La conclusion annoncée en résultat par multiplicativité.

Nous sommes maintenant en mesure d'étudier la convergence de $U(\tau_{z+1}; \vartheta)$. Désignant par a_m/q_m la m -ième réduite d'un nombre réel ϑ , nous posons $\varepsilon_m := \vartheta - a_m/q_m$, de sorte que les inégalités (2.13) impliquent la relation

$$|\varepsilon_m| \asymp \frac{1}{q_m q_{m+1}} \quad (m \geq 1). \tag{6.8}$$

Par ailleurs, nous reprenons une notation employée dans [2] : soient $B > 0$ et $Q_x := x/(\log x)^B$ ($x \geq 2$), l'ensemble des nombres réels x tels que $q(\vartheta, Q_x) = q_m$ est l'intervalle défini par les conditions $q_m \leq Q_x < q_{m+1}$; nous le notons $[\xi_m, \xi_{m+1}[$. Nous employons les relations suivantes,

$$\xi_m \asymp q_m (\log q_m)^B, \quad |\varepsilon_m| \xi_m \asymp \frac{(\log q_m)^B}{q_{m+1}}, \quad |\varepsilon_m| \xi_{m+1} \asymp \frac{(\log q_{m+1})^B}{q_m}. \tag{6.9}$$

Nous appliquons le Lemme 6.3 avec $\varepsilon = 1/2B$ pour évaluer l'intégrale

$$\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} Z_{\tau_{z+1}}(t, t; \vartheta) \frac{dt}{t^2}.$$

Lors de ce calcul, nous ferons un usage fréquent des relations (6.8) et (6.9).

Avec le changement de variables $t = u|\varepsilon_m|$, il vient :

$$\begin{aligned} &\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} Z_{\tau_{z+1}}(t, t; \vartheta) \frac{dt}{t^2} = \\ &= \frac{\text{sgn}(\varepsilon_m)}{\Gamma(z)q_m} f_z(q_m) \int_{|\varepsilon_m|\xi_m}^{|\varepsilon_m|\xi_{m+1}} (\log u - \log |\varepsilon_m|)^z \frac{\sin^2(\pi u)}{\pi u^2} du \\ &+ O\left(\frac{1}{q_m^{1-1/2B}} \int_{|\varepsilon_m|\xi_m}^{|\varepsilon_m|\xi_{m+1}} \frac{\log(1+u^2)}{u^2} \log\left(\frac{u}{|\varepsilon_m|}\right)^{\sigma-1} du + \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} \frac{dt}{t(\log t)^A}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\operatorname{sgn}(\varepsilon_m)}{\Gamma(z)q_m} f_z(q_m) \int_{|\varepsilon_m|\xi_m}^{|\varepsilon_m|\xi_{m+1}} (\log u + \log q_m + \log q_{m+1})^z \frac{\sin^2(\pi u)}{\pi u^2} du \\
&\quad + O\left(\frac{(\log \xi_{m+1})^{\sigma-1}}{q_m^{1-1/2B}} \int_{|\varepsilon_m|\xi_m}^{|\varepsilon_m|\xi_{m+1}} \frac{\log(1+u^2)}{u^2} du + \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} \frac{dt}{t(\log t)^A}\right) \\
&= \frac{\operatorname{sgn}(\varepsilon_m)}{\Gamma(z)q_m} f_z(q_m) \int_{|\varepsilon_m|\xi_m}^{|\varepsilon_m|\xi_{m+1}} (\log u + \log q_m + \log q_{m+1})^z \frac{\sin^2(\pi u)}{\pi u^2} du \\
&\quad + O\left(\frac{(\log q_{m+1})^{\sigma-1}}{q_m^{1-1/2B}} + \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} \frac{dt}{t(\log t)^A}\right),
\end{aligned}$$

la dernière évaluation provenant de l'intégrabilité sur \mathbb{R}_+ de $u \mapsto \log(1+u^2)/u^2$.
Lorsque $b \ll a$, on dispose de la majoration $(a+b)^z - a^z \ll ba^{\sigma-1}$. Dès lors,

$$\begin{aligned}
&\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} Z_{\tau_{z+1}}(t, t; \vartheta) \frac{dt}{t^2} \\
&= \frac{\operatorname{sgn}(\varepsilon_m)}{\Gamma(z)q_m} f_z(q_m) (\log q_{m+1})^z \int_{\xi_m|\varepsilon_m}^{\xi_{m+1}|\varepsilon_m} \frac{\sin^2 \pi u}{\pi u} du \\
&\quad + O\left(\frac{f_z(q_m)}{q_m} (\log q_{m+1})^{\sigma-1} \int_{\xi_m|\varepsilon_m}^{\xi_{m+1}|\varepsilon_m} \frac{\sin^2 \pi u}{u^2} \log u du\right) \\
&\quad + O\left(\frac{f_z(q_m) \log q_m}{q_m} (\log q_{m+1})^{\sigma-1} \int_{\xi_m|\varepsilon_m}^{\xi_{m+1}|\varepsilon_m} \frac{\sin^2 \pi u}{u^2} du\right) \\
&\quad + O\left(\frac{(\log q_{m+1})^{\sigma-1}}{q_m^{1-1/2B}} + \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} \frac{dt}{t(\log t)^A}\right),
\end{aligned}$$

soit, en utilisant l'intégrabilité de $u \mapsto \sin^2(\pi u) \log u / \pi u^2$ et $u \mapsto \sin^2 \pi u / \pi u^2$ sur \mathbb{R}_+ ,

$$\begin{aligned}
\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} Z_{\tau_{z+1}}(t, t; \vartheta) \frac{dt}{t^2} &= \frac{\operatorname{sgn}(\varepsilon_m)}{\Gamma(z)q_m} f_z(q_m) (\log q_{m+1})^z \int_{\xi_m|\varepsilon_m}^{\xi_{m+1}|\varepsilon_m} \frac{\sin^2 \pi u}{\pi u} du \\
&\quad + O\left(\frac{(\log q_{m+1})^{\sigma-1}}{q_m^{1-1/2B}} + \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} \frac{dt}{t(\log t)^A}\right).
\end{aligned}$$

Compte tenu du développement asymptotique effectué dans le paragraphe 11.2 de [2]

$$\int_{|\varepsilon_m|\xi_m}^{|\varepsilon_m|\xi_{m+1}} \frac{\sin^2 \pi u}{\pi u^2} du = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{q_m^{1/B}}{\log q_{m+1}} + \frac{(\log q_m)^B}{q_{m+1}}\right),$$

nous en déduisons l'estimation

$$\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} Z_{\tau_{z+1}}(t, t; \vartheta) \frac{dt}{t^2} = \frac{\pi \operatorname{sgn}(\varepsilon_m)}{2 \Gamma(z) q_m} f_z(q_m) (\log q_{m+1})^z \left(1 + \frac{q_m^{1/B}}{\log q_{m+1}} \right) + O \left(\frac{(\log q_{m+1})^{\sigma-1}}{q_m^{1-1/2B}} + \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} \frac{dt}{t(\log t)^A} \right). \tag{6.10}$$

Choisissons $A > 1$. Le deuxième terme d'erreur du membre de droite de (6.10) est alors le terme général d'une série absolument convergente. Si $\sigma < 1$, il en va de même du premier. Si $\sigma \geq 1$, nous avons $\tau_\sigma(q) \geq 1$, donc, d'après (2.11),

$$f_z(q_m) \gg \left(\frac{\varphi(q_m)}{q_m} \right)^{(2\sigma+\kappa+1)/2} \gg q_m^{-1/2B}. \tag{6.11}$$

Ainsi, il existe une fonction arithmétique h_z et une série $\sum_{m \geq 1} v_m$ absolument convergente telles que

$$\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} Z_{\tau_{z+1}}(t, t; \vartheta) \frac{dt}{t^2} = \frac{\pi \operatorname{sgn}(\varepsilon_m)}{2 \Gamma(z) q_m} f_z(q_m) (\log q_{m+1})^z \left(1 + \frac{h_z(q_m)}{\log q_{m+1}} \right) + v_m \tag{6.12}$$

et

$$h_z(q_m) \ll q_m^{1/B}.$$

Par ailleurs, le même calcul fournit, pour $\xi_m < x \leq \xi_{m+1}$,

$$\int_{\xi_m}^x Z_{\tau_{z+1}}(t, t; \vartheta) \frac{dt}{t^2} \ll \frac{(\log q_{m+1})^\sigma}{q_m} f_z(q_m) \left(1 + \frac{q_m^{1/B}}{\log q_{m+1}} \right) + v_m. \tag{6.13}$$

Comme $\operatorname{sgn} \varepsilon_m = (-1)^m \operatorname{sgn} \varepsilon_1$, nous obtenons avec (6.12) que la convergence de la série

$$\sum_{m \geq 1} \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} Z_{\tau_{z+1}}(t, t; \vartheta) \frac{dt}{t^2} \tag{6.14}$$

équivalent à celle de la série

$$\sum_{m \geq 1} (-1)^m \frac{(\log q_{m+1})^z}{q_m} f_z(q_m) \left(1 + \frac{h_z(q_m)}{\log q_{m+1}} \right).$$

Nous pouvons appliquer le Lemme 6.2 avec $g \equiv h_z$ et $b = 1/B$. En effet, la condition $B > \sigma + 1$ est bien satisfaite pour $B = 4A + 4(\kappa + 1)^2 + 12$. Nous pouvons donc d'affirmer que la convergence de la série (6.14) équivaut à celle de la série (6.1).

Nous sommes à présent en mesure d'établir l'équivalence des assertions (i) et (iii) de la Proposition 6.1. Considérons un nombre réel $x \geq 2$ et désignons par $M = M_x$ l'unique entier tel que $\xi_M \leq x < \xi_{M+1}$. On a, par (6.13) et (6.11)

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{\tau_{z+1}(n)}{n} \sin(2\pi n\vartheta) &= \frac{Z_{\tau_{z+1}}(x, x; \vartheta)}{x} + \int_1^x Z_{\tau_{z+1}}(t, t; \vartheta) \frac{dt}{t^2} \\ &= \sum_{1 \leq m \leq M} \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} Z_{\tau_{z+1}}(t, t; \vartheta) \frac{dt}{t^2} + E(M) + o(1), \end{aligned} \tag{6.15}$$

où E est une fonction arithmétique satisfaisant la majoration uniforme pour $m \geq 1$,

$$E(m) \ll \frac{(\log q_{m+1})^z}{q_m} f_z(q_m) \left(1 + \frac{q_m^{1/B}}{\log q_{m+1}} \right). \tag{6.16}$$

Lorsque la série (6.1) converge, on a

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E(m) = 0. \tag{6.17}$$

En effet, c'est une conséquence directe du Lemme 6.2, appliqué avec $g(q) := q^{1/B}$. Nous déduisons donc de ce qui précède l'implication (iii) \Rightarrow (i).

Établissons la réciproque. Au vu de (6.15), il suffit de prouver que la convergence de $U(\tau_{z+1}, \vartheta)$ implique (6.17). Or, on a

$$\sum_{\xi_m < n \leq \xi_{m+1}} \frac{\tau_{z+1}(n)}{n} \sin(2\pi n\vartheta) = \left[\frac{Z_{\tau_{z+1}}(x, x; \vartheta)}{x} \right]_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} + \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} Z_{\tau_{z+1}}(t, t; \vartheta) \frac{dt}{t^2}. \tag{6.18}$$

La formule (6.7) et les relations (6.9) permettent de montrer que le premier terme du membre de droite tend vers 0 lorsque $m \rightarrow \infty$. En effet,

$$\begin{aligned} \left[\frac{Z_{\tau_{z+1}}(x, x; \vartheta)}{x} \right]_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} &\ll (\log \xi_{m+1})^\sigma |f_z(q_{m+1})| \frac{(\varepsilon_{m+1} \xi_{m+1})^2}{q_{m+1}} \\ &\quad + (\log \xi_m)^\sigma |f_z(q_m)| \frac{(\varepsilon_m \xi_m)^2}{q_m} \\ &\ll \frac{|f_z(q_m)|}{\sqrt{q_{m+1}}}. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Sous l'hypothèse (i), le membre de gauche de (6.18) tend vers 0 puisque c'est le terme général d'une série convergente. Donc le terme principal du membre de droite de (6.12) tend vers 0 lorsque m tend vers l'infini. Cela permet d'affirmer que $f_z(q_m)(\log q_{m+1})^z/q_m = o(1)$, lorsque $m \rightarrow \infty$ sous la condition $\log q_{m+1} > q_m^D$, avec $1/B < D < (1 - 1/B)/\sigma$ (un tel choix est possible puisque $B > \sigma + 1$), ce qui implique (6.17) sous la même condition. La relation (6.17) est encore vérifiée sous la condition $\log q_{m+1} \leq q_m^D$ d'après (6.16). Cela achève la preuve de l'équivalence.

6.3. Convergence de $V(\tau_z; \vartheta)$. Nous commençons par estimer $W_{\tau_z}(x, x; \vartheta) := \sum_{n \leq x} \tau_z(n)B(n\vartheta)$, en vue d'intégration par parties ultérieures. Nous conservons les notations $\kappa := |z|$ et $\sigma := \Re(z)$.

Lemme 6.4. Soit $A > 0$ et $B = 5(A + \kappa^2 + \kappa + 4)$, on a uniformément pour $x \geq 2$, $Q_x = x/(\log x)^B$, $\vartheta \in \mathbb{R}$, $q := q(\vartheta; Q_x)$, $a \in \mathbb{Z}$, $(a, q) = 1$, $|q\vartheta - a| \leq 1/Q_x$, $\vartheta_q := \vartheta - a/q$,

$$W_{\tau_z}(x, x; \vartheta) \ll x (\log x)^{\sigma-1} \left\{ \frac{\tau_{\kappa+2}(q) \log q}{q} + \frac{1}{(\log x)^A} \right\} \quad (x \| q\vartheta > 1), \quad (6.20)$$

et

$$W_{\tau_z}(x, x; \vartheta) = -\operatorname{sgn}(\vartheta_q) \frac{f_z(q)}{2\Gamma(z)q} x (\log x)^{z-1} + R(x, q) \quad (x \| q\vartheta \leq 1), \quad (6.21)$$

où

$$R(x, q) \ll x (\log x)^{\sigma-1} \left(\frac{\tau_{\kappa}(q) (\log q)^2}{q \log x} + \frac{x \| q\vartheta \|}{q} \right) + \frac{x}{(\log x)^A}.$$

Démonstration. L'évaluation (6.20) coïncide avec celle du Lemme 13.6 de [2]. Le Lemme 7.2 de [2] fournit l'estimation (6.21) lorsque $q > (\log x)^B$. Pour établir (6.21) lorsque $q \leq (\log x)^B$, nous commençons par remarquer que les deux membres sont des fonctions impaires de ϑ : nous pouvons donc supposer dans la suite que $\vartheta_q > 0$.

Nous utilisons ici la méthode générale développée par La Bretèche et Tenenbaum pour évaluer $W_f(x, x; \vartheta)$ lorsque f est une fonction arithmétique de type Siegel-Walfisz fort, autrement dit vérifiant une identité analogue à (6.22) *infra* — cf. le paragraphe 7.1 de [2].

Comme nous supposons $x \| q\vartheta \leq 1$, nous avons $0 \leq n\vartheta_q < 1/q$ ($n \leq x$). Nous pouvons donc écrire la décomposition

$$B(n\vartheta) = B\left(\frac{na}{q} + n\vartheta_q\right) = B\left(\frac{na}{q}\right) + n\vartheta_q - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\mathbb{Z}}\left(\frac{an}{q}\right).$$

En reprenant les notations employées dans [2], il suit

$$W_{\tau_z}(x, x; \vartheta) = T_0^{(1)} + T_0^{(2)} - \frac{1}{2} T_0^{(3)},$$

avec

$$\begin{aligned} T_0^{(1)} &= T_0^{(1)}(x; \vartheta) := \sum_{n \leq x} \tau_z(n) B\left(\frac{an}{q}\right), \\ T_0^{(2)} &= T_0^{(2)}(x; \vartheta) := \sum_{n \leq x} \tau_z(n) n\vartheta_q, \\ T_0^{(3)} &= T_0^{(3)}(x; \vartheta) := \sum_{\substack{n \leq x \\ an \equiv 0 \pmod{q}}} \tau_z(n). \end{aligned}$$

D'après le lemme 13.6 de [2], la fonction τ_z est de type Siegel-Walfisz fort : pour tout $A > 0$, on a uniformément pour $q \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{q}}} \tau_z(n) = \frac{1}{\phi(m)} \sum_{\substack{n \leq mx/q \\ (n,m)=1}} \tau_z(qn/m) + O\left(\frac{x}{(\log x)^A}\right), \tag{6.22}$$

où l'on a posé $m := q/(q, a)$. Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} T_0^{(1)} &= \sum_{n \leq x} \tau_z(n) B\left(\frac{an}{q}\right) = \sum_{m|q} \sum_{\substack{1 \leq c \leq m \\ (c,m)=1}} B\left(\frac{ac}{q}\right) \sum_{\substack{m \leq x \\ n \equiv cq/m \pmod{q}}} \tau_z(n) \\ &= \sum_{m|q} \left(\sum_{\substack{1 \leq c \leq m \\ (c,m)=1}} B\left(\frac{ac}{q}\right) \right) \left\{ \frac{1}{\phi(m)} \sum_{\substack{n \leq x \\ (n,q)=1}} \tau_z(n) + O\left(\frac{x}{(\log x)^{A+B}}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Or, nous avons

$$\sum_{\substack{1 \leq c \leq m \\ (c,m)=1}} B\left(\frac{ac}{q}\right) = 0,$$

en vertu de la symétrie des entiers premiers à m par rapport à $m/2$. Il suit

$$T_0^{(1)} \ll \frac{x}{(\log x)^{A+B}} \sum_{m|q} \phi(m) \ll \frac{qx}{(\log x)^{A+B}} \ll \frac{x}{(\log x)^A}. \tag{6.23}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} T_0^{(2)} &= \sum_{n \leq x} \tau_z(n) n \vartheta_q = \vartheta_q \sum_{n \leq x} \tau_z(n) n \\ &\ll \vartheta_q x^2 (\log x)^{\sigma-1} = \frac{\|q\vartheta\|}{q} x^2 (\log x)^{\sigma-1}. \end{aligned} \tag{6.24}$$

Enfin, nous évaluons

$$T_0^{(3)} = \sum_{\ell \leq x/q} \tau_z(q\ell)$$

par la méthode de Selberg-Delange. Posons

$$H_{z,q}(x) := \sum_{\ell \leq x} \tau_z(q\ell).$$

Par un calcul similaire à celui réalisé dans la preuve du Lemme 5.1, la série de Dirichlet associée à $H_{z,q}$ s'écrit, pour $s \in \mathbb{C}$, $\Re(s) > 1$,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\tau_z(nq)}{n^s} = \zeta(s)^z G_z(s, q),$$

où l'on a posé

$$G_z(s, q) := \prod_{p|q} (1 - p^{-s})^z \prod_{p^j | q, j \geq 0} \sum_{\nu \geq 0} \frac{\tau_z(p^{\nu+j})}{p^{\nu s}}.$$

La majoration

$$G_z(s, q) \ll \tau_\kappa(q) \log(2q) \quad (|s - 1| \ll 1/\log(2q))$$

fournit alors, grâce au Théorème II.5.3 de [14],

$$\sum_{\ell \leq x/q} \tau_z(\ell q) = \frac{f_z(q)}{\Gamma(z)q} x (\log x)^{z-1} + O\left(\frac{(\log q)^2}{q} x (\log x)^{\sigma-2} + \frac{x}{(\log x)^A}\right). \quad (6.25)$$

Les estimations (6.23), (6.24) et (6.25) impliquent l'évaluation (6.21) ce qui achève la preuve du lemme. ■

Nous sommes maintenant en mesure d'évaluer l'intégrale

$$\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} W_{\tau_z}(t, t; \vartheta) \frac{dt}{t^2}.$$

Nous omettons les détails qui sont similaires à ceux du paragraphe précédent. Nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_{\xi_m}^{1/\|q_m \vartheta\|} W_{\tau_z}(t, t; \vartheta) \frac{dt}{t^2} \\ &= -\text{sgn}(\varepsilon_m) \frac{(\log q_{m+1})^z}{2\Gamma(z)q_m} f_z(q_m) \left(1 + O\left(\frac{\tau_\kappa(q_m)(\log q_m)^2}{f_z(q_m) \log q_{m+1}}\right)\right) \\ &+ O\left(\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} \frac{dt}{t(\log t)^A}\right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{1/\|q_m \vartheta\|}^{\xi_{m+1}} W_{\tau_z}(t, t; \vartheta) \frac{dt}{t^2} \ll \tau_{\kappa+2}(q_m) \log_2(q_m) \frac{(\log q_{m+1})^{\sigma-1}}{q_m} \\ &+ O\left(\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} \frac{dt}{t(\log t)^A}\right). \end{aligned}$$

Nous en déduisons les estimations

$$\begin{aligned} & \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} W_{\tau_z}(t, t; \vartheta) \frac{dt}{t^2} \\ &= -\text{sgn}(\varepsilon_m) \frac{(\log q_{m+1})^z}{2\Gamma(z)q_m} f_z(q_m) \left(1 + O\left(\frac{q_m^{1/B}}{\log q_{m+1}}\right)\right) \\ &+ O\left(\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} \frac{dt}{t(\log t)^A}\right), \end{aligned} \quad (6.26)$$

et

$$\int_{\xi_m}^x W_{\tau_z}(t, t; \vartheta) \frac{dt}{t^2} \ll \frac{(\log q_{m+1})^\sigma}{q_m} f_z(q_m) \left(1 + \frac{q_m^{1/B}}{\log q_{m+1}} \right) + \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} \frac{dt}{t(\log t)^A} \quad (\xi_m < x \leq \xi_{m+1}). \tag{6.27}$$

Nous pouvons maintenant établir l'équivalence (ii) \Leftrightarrow (iii). La preuve étant similaire à celle de l'équivalence (i) \Leftrightarrow (iii) effectuée dans le paragraphe précédent, nous n'en donnons que les étapes essentielles.

Nous déduisons de la formule (6.26), et des estimations (2.6) et (6.11), qu'il existe une fonction arithmétique \tilde{h}_z telle que

$$\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} W_{\tau_z}(t, t; \vartheta) \frac{dt}{t^2} = -\operatorname{sgn}(\varepsilon_m) \frac{(\log q_{m+1})^z}{2\Gamma(z)q_m} f_z(q_m) \left(1 + \frac{\tilde{h}_z(q_m)}{\log q_{m+1}} \right) + \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} \frac{dt}{t(\log t)^A} \tag{6.28}$$

et

$$\tilde{h}_z(q_m) \ll q_m^{1/B}.$$

Cela permet d'établir, en appliquant le Lemme 6.2 avec $g = \tilde{h}_z$ et $b = 1/B$, que la convergence de la série

$$\sum_{m \leq 1} \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} W_{\tau_z}(t, t; \vartheta) \frac{dt}{t^2}$$

équivalent à celle de la série (6.1). Pour $x \geq 2$, nous désignons par $M = M_x$ l'unique entier tel que $\xi_M \leq x < \xi_{M+1}$. Une sommation d'Abel fournit alors l'identité

$$\sum_{n \leq x} \frac{\tau_z(n)}{n} B(n\vartheta) = \sum_{1 \leq m \leq M} \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} W_{\tau_z}(t, t; \vartheta) \frac{dt}{t^2} + F(M) + o(1), \tag{6.29}$$

où F est une fonction arithmétique satisfaisant à la majoration, uniforme pour $m \geq 1$,

$$F(m) \ll \frac{(\log q_{m+1})^z}{q_m} f_z(q_m) \left(1 + \frac{q_m^{1/B}}{\log q_{m+1}} \right).$$

Supposons que la série (6.1) converge. Le Lemme 6.2 appliqué avec $g(q) := q^{1/B}$ prouve que $F(m) = o(1)$ lorsque $m \rightarrow \infty$. Cela fournit l'implication (iii) \Rightarrow (ii).

Supposons réciproquement que la série $V(\tau_z; \vartheta)$ converge. De l'identité

$$\sum_{\xi_m < n \leq \xi_{m+1}} \frac{\tau_z(n)}{n} B(n\vartheta) = \left[\frac{W_{\tau_z}(x, x; \vartheta)}{x} \right]_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} + \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} W_{\tau_z}(t, t; \vartheta) \frac{dt}{t^2}$$

nous déduisons que

$$\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} W_{\tau_z}(t, t; \vartheta) \frac{dt}{t^2} = o(1) \quad (m \rightarrow \infty).$$

La relation (6.28) permet alors d'établir que $F(m) = o(1)$ lorsque $m \rightarrow \infty$ sous la condition $\log q_{m+1} > q_m^D$ avec $1/B < D < (1 - 1/B)/\sigma$. Comme $F(m)$ tend également vers 0 lorsque $m \rightarrow \infty$ sous la condition $\log q_{m+1} \leq q_m^D$, nous pouvons finalement écrire que

$$F(m) = o(1) \quad (m \rightarrow \infty).$$

Cela fournit l'implication (ii) \Rightarrow (iii), au vu de (6.29).

7. Construction d'un contre-exemple

Nous fournissons ici le contre-exemple annoncé dans la troisième partie concernant le Théorème 3.3. Pour cela nous construisons les réduites de ϑ par récurrence suivant la relation

$$q_{m+1} = a_{m+1}q_m + q_{m-1}.$$

Supposant les m premières réduites construites pour m assez grand, montrons que l'on peut trouver q_{m+1} tel que

$$q_{m+1} \text{ soit premier} \quad \text{et} \quad \left(\frac{q_m}{m}\right)^{1/\kappa} \leq \log q_{m+1} \leq \left(\frac{q_m}{m}\right)^{1/\kappa} \left\{1 + \frac{1}{m}\right\}.$$

Nous employons la notation habituelle,

$$\pi(x, a, q) := \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{q}}} 1 \quad (x \geq 1, q \in \mathbb{N}, 1 \leq a \leq q).$$

Le théorème de Siegel-Walfisz stipule qu'étant donné $A > 0$, il existe une constante $c > 0$ ne dépendant que de A telle que l'on ait uniformément, pour $x \geq 2$, $1 \leq q \leq (\log x)^A$, $a \in \mathbb{N}$, $(a, q) = 1$,

$$\pi(x, a, q) = \frac{x}{\varphi(q) \log x} + O(xe^{-c\sqrt{\log x}}).$$

Nous en déduisons, sous les mêmes hypothèses, que si $0 < h \leq x$, alors

$$\pi(x + h, a, q) - \pi(x, a, q) = \frac{h}{\varphi(q) \log x} + O(xe^{-c\sqrt{\log x}}).$$

Afin d'alléger la présentation des calculs, nous employons la notation

$$\lambda_m := (q_m/m)^{1/\kappa}.$$

Comme $(q_{m-1}, q_m) = 1$ et $q_m \leq \lambda_m^A$ dès que $A > \kappa$, nous pouvons employer le théorème de Siegel-Walfisz pour évaluer

$$\pi(x+h, q_{m-1}, q_m) - \pi(x, q_{m-1}, q_m),$$

avec $x = e^{\lambda_m}$ et $x+h = e^{\lambda_m(1+1/m)}$. Ainsi, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\pi(x+h, q_{m-1}, q_m) - \pi(x, q_{m-1}, q_m) = \frac{e^{\lambda_m}(e^{\lambda_m/m} - 1)}{\varphi(q_m) \lambda_m} + O(e^{\lambda_m - c\sqrt{\lambda_m}}).$$

Comme $\varphi(q_m) \leq q_m$ et que $q_m = m\lambda_m^\kappa$, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \pi(x+h, q_{m-1}, q_m) - \pi(x, q_{m-1}, q_m) \\ & \geq \frac{e^{\lambda_m}(e^{\lambda_m/m} - 1)}{m \lambda_m^{\kappa+1}} \left\{ 1 + O\left(\frac{m \lambda_m^{\kappa+1} e^{-c\sqrt{\lambda_m}}}{e^{\lambda_m} - 1}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Pour m assez grand, en vertu de la croissance exponentielle des q_m et donc de λ_m , nous constatons que cette dernière quantité est strictement positive, ce qui permet d'achever la construction de q_{m+1} . Remarquons que l'emploi du théorème de Dirichlet dans les progressions arithmétiques aurait été insuffisant pour conclure, dans la mesure où l'uniformité en q_m et m est indispensable.

Lorsque m est assez grand, q_m est premier ce qui fournit l'estimation

$$f_\kappa(q_m) = \kappa + O_\kappa\left(\frac{1}{q_m}\right).$$

Nous savons d'autre part que

$$(\log q_{m+1})^\kappa = \frac{q_m}{m} \left\{ 1 + O_\kappa\left(\frac{1}{m}\right) \right\}.$$

Cela nous permet d'énoncer que la série (6.5) est de même nature que la série

$$\sum_{m \geq 1} \frac{(-1)^m}{m},$$

qui est convergente, tandis que la série (6.6) est de même nature que la série

$$\sum_{m \geq 1} \frac{1}{m},$$

qui est divergente.

References

- [1] A. Blanchard, *Initiation à la théorie analytique des nombres premiers*, Dunod, Paris, 1969.
- [2] R. de la Bretèche & G. Tenenbaum, Séries trigonométriques à coefficients arithmétiques, *J. Anal. Math.*, **92** (2004), 1–79.
- [3] R. de la Bretèche et G. Tenenbaum, Propriétés statistiques des entiers friables, *Ramanujan J.* **9** (2005), 139–202.
- [4] N.G. de Bruijn and Y.H. van Lint, Incomplete sums of multiplicative function, I, II, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* **67** (1966), 339–347 ; 348–359.
- [5] H. Davenport, On some infinite series involving arithmetical functions, *Quart. J. Math. Oxford* **8** (1937), 8–13.
- [6] H. Davenport, On some infinite series involving arithmetical functions (II), *Quart. J. Math. Oxford*, **8** (1937), 313–320.
- [7] H. Davenport, *Multiplicative number theory*, deuxième édition, Graduate Texts in Mathematics 74, Springer, Berlin, 1980.
- [8] E. Fouvry & G. Tenenbaum, Entiers sans grand facteur premier en progressions arithmétiques, *Proc. London Math. Soc.* (3) **63** (1991), 449–494.
- [9] A. Khintchine, *Continued fractions*, Noordhoff, Groningen, 1963.
- [10] B. Martin, *Contribution à la théorie des entiers friables*, Thèse d’université, Université Henri Poincaré de Nancy, 2005.
- [11] A. Selberg, Note on a paper by L.G. Sathe, *J.Indian Math.Soc* (N.S.)**18** (1954), 83–87.
- [12] H. Smida, Sur les puissance de convolution de la fonction de Dickman, *Acta Arith.* **59** (1991), 124–143.
- [13] H. Smida, Valeur moyenne des fonctions de Piltz sur les entiers sans grand facteur premier, *Acta Arith.* **63**, 1 (1993), 21–50.
- [14] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, 2^e édition, Cours Spécialisés, n° 1, Société Mathématique de France, 1995.
- [15] G. Tenenbaum, Uniform distribution on divisors and Behrend sequences, *L’Enseignement Mathématique*, **42** (1996), 153–197.
- [16] G. Tenenbaum, en collaboration avec Jie Wu, *Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours spécialisés, n° 2, Société Mathématique de France, 1996.
- [17] G. Tenenbaum et J. Wu, Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables, *J. reine angew. Math.*, **564** (2004), 119–166.

Address: Institut Elie Cartan, Universit Henri Poincar-Nancy 1, BP 239, 54506 Vandoeuvre Cedex, France

E-mail: Bruno.Martin@iecn.u-nancy.fr

Received: 8 January 2007; **revised:** 20 March 2007