Commun. math. Phys. 33, 119—128 (1973)

Mesures d'équilibre sur un reseau

F. Ledrappier*

Laboratoire de Probabilités, Paris, France

Received March 15, 1973

Abstract. Some one-dimensional lattice systems with infinite range interactions define a Bernoulli shift.

1. Introduction et résultats

Soit Φ une fonction réelle sur les parties finies de Z^ν vérifiant les propriétés suivantes:

a) $\Phi(\emptyset)=0$,

b) $\Phi(X+a)=\Phi(X)$,

c) $\sum_{x\supset 0} |\Phi(X)| < +\infty$.

Une telle fonction est appelée une interaction et peut représenter un système de mécanique statistique (cf. [4]). L'ensemble de ces interactions forme un Banach pour la norme $\|\Phi\|$ définie par c). On pose $U(X)=\sum_{Y\subset X} \Phi(X)$, pour X partie finie de Z^ν. On a $U(X)\leqq N(X)\,\|\Phi\|$, où $N(X)$ désigne le cardinal de X. Soit K l'espace produit $\{0,1\}^{Z^\nu}$ muni de la σ-algèbre $\mathscr{A}$ engendrée par les applications coordonnées. Pour toute partie Δ de Z^ν, on notera P_Δ la σ-algèbre engendrée par les applications coordonnées qui sont dans Δ. Soit G le groupe d'applications bimesurables de K sur lui-même définies par les translations des coordonnées.

Pour tout cylindre fini ou infini A, $A=\{x, x=x_i, i\in Z^\nu, x\in K, x_i=0\ i\in\Delta_0, x_i=1\ i\in\Delta_1\}$ on note $\hat{A}$ la partie Δ_1 de Z^ν.

Une probabilité μ sur K est dite une mesure d'équilibre pour l'interaction Φ si on a la relation suivante: pour toute partie finie Δ de Z^ν, pour tout atome α de P_Δ, $E_\mu^{P_{\Delta^c}}(1_\alpha)(y)=f(\alpha,y)\,E_\mu^{P_{\Delta^c}}(1_{\alpha_0})(y)$ pour μ-presque tout $\tilde{y}$ appartenant à (K,P_{Δ^c}), où $\alpha_0=\{\omega;\omega\in K,\omega_j=0\ \forall j\in\Delta\}$, $f(\alpha,y)=\exp(-U(\hat{\alpha})-W(\hat{\alpha},\hat{y}))$ avec pour X_1, X_2 dans Z, $W(X_1,X_2)=\sum_{\substack{Y\subset X_1\cup X_2\\ Y\cap X_i\neq\emptyset}}\Phi(Y)$.

Nous allons d'abord donner les propriétés qui résultent de cette définition, en particulier dans le cas où il n'existe qu'une seule mesure d'équilibre.

* Equipe de Recherche n° 1 «Processus stochastiques et applications» dépendant de la Section n° 1 «Mathématiques, Informatique» associée au C.N.R.S.

Nous étudierons ensuite dans le cas où $v=1$ un espace particulier d'interactions B_1 pour lequel on peut montrer:

Théorème 1. *Si Φ appartient à B_1, alors il n'existe qu'une mesure d'équilibre et le système (K, μ, G) est un schéma de Bernoulli.*

Les résultats et les démonstrations s'étendent sans difficultés au cas des mesures sur $\{0, 1, \ldots, N-1\}^{Z^v}$.

2. Existence de mesures d'équilibre et propriétés

On va noter

$$\Delta_n = \{a, a \in Z^v, a = (a_1, a_2, \ldots, a_v)\, |a_i| \leqq n\ \forall i\},$$

$$y_n(x) = \{\omega, \omega \in K\ \ \omega_i = x_i\ \ \forall i \notin \Delta_n\},$$

$$Z_n(x) \quad \text{la fonction} \quad \Big(\sum_{\alpha \in P_{\Delta_n}} f(\alpha, y_n(x))\Big)^{-1}.$$

On désigne par ϕ_n l'application de $\mathscr{L}(K)$ dans $\mathscr{L}(K)$, ensemble des fonctions $\mathscr{A}$-mesurables sur K, définie par:

$$\phi_n h(x) = Z_n(x) \sum_{\alpha \in P_{\Delta_n}} f(\alpha, y_n(x))\, h(\alpha \cap y_n(x)).$$

Les ϕ_n sont des opérateurs positifs de $\mathscr{L}(K)$ dans $\mathscr{L}(K)$ et $\phi_n 1 = 1$.

Si K est muni de la topologie produit des topologies discrètes sur $\{0, 1\}$, alors K est compact et les ϕ_n sont des opérateurs positifs continus de $C(K)$ dans $C(K)$, espace des fonctions réelles continues muni de la norme uniforme.

On note ϕ_n^* l'opérateur transposé de ϕ_n, de $M(K)$ dans $M(K)$, ensemble des mesures de Radon sur K; ϕ_n^* est un opérateur positif et conserve l'ensemble des probabilités de Radon sur K, qui est faiblement compact. On a:

Proposition 1. *Soit v une probabilité de Radon sur K, μ un point d'adhérence faible de $\{\phi_n^* v, n > 0\}$. Alors μ est une mesure d'équilibre.*

Démonstration. Soit Δ un ensemble fini de Z^v et α un atome de P_Δ. Soit n assez grand pour que Δ_n contienne Δ et β un atome de P_{Δ_n}. On va calculer $\phi_m 1_{\alpha \cap \beta}$ pour m plus grand que n.

$$\phi_m 1_{\alpha \cap \beta} = Z_m(x) \sum_{\gamma \in P_{\Delta_m \setminus \Delta_n}} f(\alpha \cap \beta \cap \gamma, y_m(x)) \quad \text{ou en décomposant}$$

$$f(\alpha \cap \beta \cap \gamma, y_m(x)):$$

$$= Z_m(x) \sum_{\gamma \in P_{\Delta_m \setminus \Delta_n}} \exp - (U(\alpha) + U(\beta) + U(\gamma) + W(\alpha, \beta \cap \gamma) + W(\beta, \gamma)$$

$$+ W(\alpha \cap \beta \cap \gamma, y_m(x)).$$

En choisissant n assez grand, pour tout ε on peut assurer que:

$$|W(\alpha,\beta\cap\gamma)-W(\alpha,\beta)|<\varepsilon/2 \qquad |W(\alpha\cap\beta\cap\gamma,y_m(x))-W(\beta\cap\gamma,y_m(x))|<\varepsilon/2$$

uniformément en $\alpha\in\Delta$, $\beta\in P_{\Delta_n\backslash\Delta}$, $\gamma\in P_{\Delta_m\backslash\Delta_n}$ et x.

On a alors, où $A_m(\beta,x)$ ne dépend pas de α:

$$\begin{aligned}&\exp-(U(\alpha)+W(\alpha,\beta)+\varepsilon)\,A_m(\beta,x)\\ &\leqq \phi_m 1_{\alpha\cap\beta}\leqq \exp-(U(\alpha)+W(\alpha,\beta)-\varepsilon)\,A_m(\beta,x)\end{aligned}$$

en sommant en α on obtient la même estimation pour $\phi_m 1_\beta$. En intégrant en ν, on obtient:

$$\frac{e^{-\varepsilon}f(\alpha,\beta)}{\sum\limits_{\alpha\in P_\Delta} e^{\varepsilon}f(\alpha,\beta)}\leqq \phi_m^*\nu(\alpha/\beta)\leqq \frac{e^{\varepsilon}f(\alpha,\beta)}{\sum\limits_{\alpha\in P_\Delta} e^{-\varepsilon}f(\alpha,\beta)}\,.$$

Soit μ un point d'adhérence faible de la suite $\phi_m^*\nu$, comme $1_{\alpha\cap\beta}$ et 1_β sont continues, on a $\mu(\alpha/\beta)$ compris entre les mêmes bornes. Ceci étant vrai pour tout β de $P_{\Delta_n\backslash\Delta}$, on a également $E_\mu^{\Delta_n\backslash\Delta}1_\alpha(\beta)$ compris entre les mêmes bornes.

Quand n tend vers l'infini, $E_\mu^{P_{\Delta_n\backslash\Delta}}1_\alpha$ converge μ-presque sûrement vers $E_\mu^{P_{\Delta^c}}1_\alpha$, alors que les bornes convergent simplement toutes deux vers $\dfrac{f(\alpha,x)}{\sum\limits_{\alpha\in P\Delta} f(\alpha,x)}$, qui est bien une fonction P_{Δ^c} mesurable. On a bien la relation d'équilibre en remarquant que $f(\alpha_0,x)=1$.

Remarque. La démonstration habituelle de l'existence est faite avec $\nu=\delta_\varrho$, où $\varrho=\{\varrho_i\, i\in Z^\nu, \varrho_i=0 \text{ pour tout } i\}$.

Proposition 2. *Il n'existe qu'une seule mesure d'équilibre pour Φ si et seulement si pour tout f de $C(K)$, $\phi_n f$ converge uniformément vers une constante $\tilde{f}$.*

Démonstration. Supposons d'abord que pour toute fonction continue $\phi_n f$ converge uniformément vers une constante $\tilde{f}$. Soit μ une mesure d'équilibre, α un cylindre fini. Comme dès que α est P_{Δ_n} mesurable, $\phi_n 1_\alpha=E_\mu^{P_{\Delta_n^c}}1_\alpha$ μ-presque sûrement, dire que $\phi_n f$ converge uniformément vers une constante permet de dire que les $E_\mu^{P_{\Delta_n^c}}1_\alpha$ convergent en norme $\|\ \|_\infty$ vers cette constante $\tilde{1}_\alpha$. On a donc: $\tilde{1}_\alpha=E_\mu^{\bigwedge_n P_{\Delta_n^c}}1_\alpha$. En intégrant en μ, $\mu(\alpha)=\tilde{1}_\alpha$.

D'autre part, s'il existe une fonction f telle que les $\phi_n f$ ne convergent pas uniformément vers une constante, on peut écrire:

$$\exists\varepsilon>0,\ \exists n_k,\ \exists x_k, y_k \text{ de } K, \quad \text{tels que} \quad |\phi_{n_k}f(x_k)-\phi_{n_k}f(y_k)|>\varepsilon\,.$$

Si n_{k_i} est une sous-suite de la suite n_k telle que $\phi_{n_{k_i}} \delta_{x_{k_i}}$ et $\phi_{n_{k_i}} \delta_{y_{k_i}}$ convergent faiblement vers des mesures μ_1 et μ_2, une démonstration analogue à celle de la proposition 1 montre que μ_1 et μ_2 sont des mesures d'équilibre, elles sont différentes car $|\mu_1(f) - \mu_2(f)| > \varepsilon$.

Proposition 3. *Si une interaction n'admet qu'une seule mesure d'équilibre, le système $(K, \mu; G)$ est d'entropie complètement positive.*

Démonstration. D'abord μ est G-invariante, car d'après l'équation d'équilibre $g\mu$ est également une mesure d'équilibre pour Φ.

Montrons ensuite que $\bigwedge_n P_{\Delta_n^c}$ est triviale. Si en effet la σ-algèbre $\bigwedge_n P_{\Delta_n^c}$ n'est pas triviale, on peut trouver une fonction f positive, d'intégrale un, non constante et $\bigwedge_n P_{\Delta_n^c}$ mesurable. Alors il est clair que $f\mu$ satisfait aussi l'équation d'équilibre; $f\mu$ est alors une autre mesure d'équilibre pour Φ. Si $\bigwedge_n P_{\Delta_n^c}$ est triviale, alors le plus grand facteur d'entropie nulle $\Pi(P)$ est trivial (cf. [1]); on dit alors que le système est d'entropie complètement positive.

3. Démonstration du théorème 1

Dans le cas où $v = 1$, on va considérer les Φ appartenant à B_1, c'est à dire tels que:

$$\|\Phi\|_1 = \sum_{\substack{X \ni 0 \\ X \subset N}} 1(X)\, \Phi(X) < +\infty\,, \quad \text{où} \quad 1(X) \quad \text{désigne le diamètre de } X\,.$$

On va utiliser la construction précédente, mais avec de nouveaux opérateurs ϕ'_n qui se comportent de la même manière que les ϕ_n.

On dira qu'un point x' est n-antérieur à x (x' appartient à $n(x)$) si:

$$x'_i = x_{i+n} \quad \text{pour} \quad i \leqq -n\,, \qquad x'_i = x_{i-n} \quad \text{pour} \quad i > n\,.$$

On note $Z'_n(x) = \Big(\sum_{x' \in n(x)} f(\alpha_n(x'), y_n(x')) \Big)^{-1}$ où maintenant

$$\alpha_n(x) = \{\omega\,;\, \omega \in K, \omega_i = x_i - n < i \leqq n\}\,.$$
$$y_n(x) = \{\omega\,;\, \omega \in K, \omega_i = x_i \;\; i \notin\,]-n, n]\}\,.$$

On définit alors $\phi'_n h(x) = Z'_n(x) \sum_{x' \in n(x)} f(\alpha_n(x'), y_n(x'))\, h(x')$.

Les ϕ'_n ont les mêmes propriétés que les ϕ_n. En particulier, les $\phi_n 1_\alpha$ convergent uniformément si et seulement si les $\phi_n 1_\alpha$ convergent uniformément pour α cylindre fini. Mais les ϕ'_n ont maintenant une propriété de composition:

Proposition 4. *Soient $m \geqq n$ deux entiers. Il existe des fonctions continues $\varrho_{n,m}(x)$ telles que, pour tout h de $C(K)$:*

$$\phi'_m h(x) = \frac{\sum_{x' \in m-n(x)} \varrho_{n,m}(x')\, \phi'_n h(x')}{\sum_{x' \in m-n(x)} \varrho_{n,m}(x')}.$$

Démonstration. Il suffit de le montrer pour $n = m - 1$. On a d'abord la formule:

$$U(X_1, X_2) + W(X_1 X_2, X_3) = U(X_1) + U(X_2) + W(X_2, X_3) + W(X_1, X_2 X_3)$$

qui est facile à vérifier d'après la définition de U et de W.

Soit alors x appartenant à K, h à $C(K)$

$$\phi_n h(x) = \frac{\sum_{\hat{x} \in n(x)} f(\alpha_n(\hat{x}), y_n(\hat{x}))\, h(\hat{x})}{\sum_{\hat{x} \in n(x)} f(\alpha_n(\hat{x}), y_n(\hat{x}))}.$$

Si on écrit $\hat{x}$ comme un point $(n-1)$ antérieur à x', où x' est lui-même 1-antérieur à x, en notant β la réunion des points de $\{-n+1\} \cup \{n\}$ où $\hat{x}_i = 1$, on obtient

$$f(\alpha_n(\hat{x}), y_n(\hat{x})) = \exp - \left(U(\beta) + W(\beta, \widehat{y_n(\hat{x})})\right) f(\alpha_{n-1}(\hat{x}), y_{n-1(\hat{x})}).$$

Donc si on regroupe tous les $\hat{x}$ qui ont le même β (c'est à'dire $(n-1)$ antérieurs au même x'), $\phi'_n h(x)$ s'écrit:

$$\phi_n h(x) = \frac{\sum_{\beta} \exp - \left(U(\beta) + W(\beta, \widehat{y_n(\hat{x})})\right) \sum_{\hat{x}} f(\alpha_{n-1}(\hat{x}), y_{n-1}(\hat{x}))\, h(\hat{x})}{\sum_{\beta} \exp - \left(U(\beta) + W(\beta, \widehat{y_n(\hat{x})})\right) \sum_{\hat{x}} f(\alpha_{n-1}(\hat{x}), y_{n-1}(\hat{x}))}.$$

Mais

$$\sum_{\hat{x} \in n-1(x')} f(\alpha_{n-1}(\hat{x}), y_{n-1}(\hat{x}))\, h(\hat{x}) \quad \text{est} \quad \phi'_{n-1} h(x') \times Z'_{n-1}(x')^{-1}.$$

En posant $\varrho_{n-1,n}(x') = \exp - \left(U(\beta) + W(\beta, \widehat{y_n(\hat{x})})\right) Z'_{n-1}(x')^{-1}$, on a la formule annoncée.

Corollaire. $\inf\limits_x \phi'_n h(x)$ *croit en n vers $m(h)$,* $\sup\limits_x \phi'_n h(x)$ *décroit vers $M(h)$.*

Pour $\Phi \in B_1$, on utilisera le fait qu'on peut définir alors

$$W(x_0, x_1) = \sum_{X \subset \hat{x}_0 \cup \hat{x}_1,\, X \cap \hat{x}_1 \neq \emptyset} \Phi(X),$$

où x_0 (respectivement x_1) est un cylindre infini atomique pour $P_{(-\infty,0]}$ ($P_{[1,+\infty)}$). On a même $|W(x_0^m, x_1^m) - W(x_0, x_1)| \leqq k_m$ qui décroit uniformément en x_0 et x_1 vers 0, si x_0^m (respectivement x_1^m) est le cylindre dont les coordonnées sont les m premières de x_0 (respectivement x_1).

La proposition suivante remontre des résultats de [5]:

Proposition 5. *Si $\Phi \in B_1$ il n'existe qu'une mesure d'équilibre.*

Démonstration (cf. [3]). Soit α un cylindre fini, on va montrer que $m(1_\alpha) = M(1_\alpha)$ cela suffit bien pour entraîner que les $\phi'_n 1_\alpha$ convergent uniformément vers une constante

i) Montrons que les $\phi'_n 1_\alpha$ sont équi-continues: si x et x' sont deux points de K dont les coordonnées entre $-m$ et m coïncident et si α_n est un atome de $P_{]-n,n]}$, on a:

$$e^{-2k_m} \leqq \frac{f(\alpha_n, y_n(\hat{x}))}{f(\alpha_n, y_n(\hat{x}'))} \leqq e^{2k_m}, \text{ où } \hat{x} \text{ est un point quelconque } n\text{-antérieur}$$

à x, alors dès que n est assez grand pour que α soit $P_{]-n,n]}$ mesurable, on a:

$$|\phi'_n 1_\alpha(x) - \phi'_n 1_\alpha(x')| \leqq (e^{2k_m} - 1) \sup_n \sup_x \phi'_n 1_\alpha(x). \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

ii) Soit ε positif et soit p un entier assez grand pour que si les coordonnées de x et x' coïncident entre $-p$ et p, $|\phi'_n 1_\alpha(x) - \phi'_n 1_\alpha(x')|$ est plus petit que ε. Soit: encore n_k une sous-suite de N telle que les suites $\phi'_{n_k} 1_\alpha$ et $\phi'_{n_k - p} 1_\alpha$ convergent uniformément quand k tend vers l'infini vers respectivement h_1 et h_2. On a $\inf_x h_1 = \lim_k \inf_x \phi'_{n_k} 1_\alpha = m(1_\alpha)$, $\inf_x h_2 = m(1_\alpha)$ et $\sup_x h_2 = M(1_\alpha)$. Soit enfin x un point où h_1 atteint son minimum – On a:

$$\phi'_{n_k} 1_\alpha(x) = \frac{\sum\limits_{x' \in p(x)} \varrho_{n_k; n_k - p}(x!)\, \phi'_{n_k - p} 1_\alpha(x')}{\sum\limits_{x' \in p(x)} \varrho_{n_k, n_k - p}(x')}.$$

iii) On peut voir de plus que les coefficients

$$\frac{\varrho_{n_k, n_k - p}(x')}{\sum\limits_{x' \in p(x)} \varrho_{n_k, n_k - p}(x')} \quad \text{sont minorés uniformément par un nombre } a_p.$$

En effet, d'après la proposition 4 les $\varrho_{n_k, n_k - p}(x')$ sont de la forme:

$$\exp - \left(U(\beta) + W(\beta, \widehat{y_{n_k}(\hat{x})})\right) \sum_{\hat{x} \in (n_k - p)(x')} f(\alpha_{n_k - p}(\hat{x}), y_{n_k - p}(\hat{x})).$$

L'exponentielle est comprise entre $e^{-2p\|\Phi\|}$ et $e^{2p\|\Phi\|}$ pour tout x' de $p(x)$; les termes de la somme, pour deux x' différents sont un à un dans un rapport compris entre $e^{-\|\Phi\|_1}$ et $e^{\|\Phi\|_1}$. D'où on peut calculer a_p.

iv) Alors quand n_k tend vers l'infini, l'équation ii) montre que $h_1(x)$ est un point du segment des valeurs prises par $\sum\limits_{x' \in p(x)} a_{x'} h_2(x')$, avec

$a_{x'} \geqq a_p > 0$ et $\Sigma a_{x'} = 1$. Comme $h_1(x) \leqq h_2(x')$ pour tout x', ce n'est possible que si $h_2(x') = h_1(x) = m(1_\alpha)$, pour tout x' dans $p(x)$.

v) Mais pour tout point y de K, il existe un $x'(y)$ dans $p(x)$ dont les coordonnées entre $-p$ et p coïncident avec celles de y. On a donc:

$$M(1_\alpha) - m(1_\alpha) = \sup_y h_2(y) - m(1_\alpha) = \sup_y h_2(y) - h_2(x(y)),$$

ce qui est plus petit que ε d'après le choix de p. $M(1_\alpha) - m(1_\alpha)$ est inférieur à ε, pour tout ε. C.Q.F.D.

D'après le paragraphe 2, si $\Phi \in B_1$, le système $(K, \mu; T)$ est un K-système; on va voir que c'est en fait un schéma de Bernoulli.

On va encore utiliser la construction de la mesure μ pour montrer:

Proposition 6. *Soit μ la mesure d'équilibre pour $\Phi \in B_1$, et soit v la mesure définie par $v(A \times B) = \mu(A)\,\mu(B)$, si $A \in P_{-\infty,0]}$ sur les pavés de $P_{(-\infty,0]} \otimes P_{[1,+\infty)}$ et prolongée ensuite à $\mathscr{A}$. μ et v sont équivalentes.*

Démonstration. On applique à v les opérateurs $\phi_n'^*$; la propriété résulte de deux lemmes:

Lemma 1. *$\phi_n'^* v$ est équivalente à v et $\dfrac{d\phi_n^* v}{dv}$ est donné par:*

$$\frac{d\phi_n'^* v}{dv}(x) = \frac{f(\alpha_n(x), y_n(x))}{\sum\limits_{\alpha_n \in P_{]-n,n]}} f(\alpha_n, y_n(x)) \times E_v^{P_{(\infty,-n]\cup]n,+\infty)}} 1_{\alpha_n(x)}(y_{n(x)})}\, v \quad \text{p.s.}$$

Il suffit de le vérifier pour ϕ_1', les autres vérifications sont tout à fait analogues:

Soit Qv le mesure définie par (cf. [3]):

$$\begin{aligned} &Qv(\{x; x_{-m} \in \alpha_{-m}, \ldots, x_0 \in \alpha_0; x_1 \in \beta_1, \ldots, x_m \in \beta_m\}) \\ &= v(\{x; x_{-m+1} \in \alpha_{-m}, \ldots, x_0 \in \alpha_{-1}; x_1 \in \beta_2, \ldots, x_{m-1} \in \beta_m\}). \end{aligned}$$

On a $\displaystyle \phi_1'^* v = \frac{f(\alpha_1(x), y_1(x))}{\sum\limits_{\alpha \in P_{[0,1]}} f(\alpha, y_1(x))}\, Qv$.

De même vérifier que

$$\frac{dv}{dQv} = g(x) = E^{P_{(-\infty,1]\cup]1,+\infty)}} 1_{\alpha_1}(x)\,(y_1(x))$$

revient à vérifier que

$$\phi_g^* v = v, \quad \text{où} \quad \phi_g h(x) = \sum_{x' \in 1(x)} g(x')\, h(x').$$

Or

$$\begin{aligned} \int \phi_g h\, dv &= \int \sum_{x' \in 1(x)} E_v^{P_{[0,1]^c}} 1_{\alpha_1(x')}(y_1(x'))\,(h(x'))\, dv(x) \\ &= \int E_v^{P_{[0,1]^c}} h(y_1(x'))\, dv(x). \end{aligned}$$

Mais $\alpha y_1(x')$ est un point tel que $S(\alpha y_1(x'))=x$, si S désigne la transformation

$$S(\dots x_{-n}, \dots, x_0; x_1 \dots x_n \dots) = (\dots x_{-n-1}, \dots, x_{-1}; x_2, \dots, x_{n+1} \dots).$$

On a donc

$$\int \phi_g h\, d\nu = \int E_\nu^{P_{[0,1]^c}} h(S^{-1}x)\, d\nu(x).$$

Comme ν est invariante par S, on a finalement:

$$\int \phi_g h\, d\nu = \int E_\nu^{P_{[0,1]^c}} h\, d\nu = \int h\, d\nu.$$

En écrivant le rapport $\frac{d\phi_1'^* \nu}{d\nu} = \frac{d\phi_1'^* \nu}{dQ\nu} \times \frac{dQ\nu}{d\nu}$, on obtient la formule annoncée.

Soit ω un point de K; dans le suite on écrira $\alpha(\beta)$ pour les premières coordonnées négatives (positives), $x(y)$ pour les suivantes. Par example, pour la fonction g:

$$g(\omega) = E_\mu^{P_{(-\infty,0[}} 1_{\alpha_0}(x) \times E_\mu^{P_{]1,+\infty)}} 1_{\beta_1}(y).$$

Lemme 2. *Les fonctions* $\frac{d\phi_n'^* \nu}{d\nu}$, $n \in N$, *sont bornées inférieurement et supérieurement.*

Démonstration. Il suffit de calculer $\frac{d\phi_n'^* \nu}{d\nu}$ en se permettant des approximations uniformes pour $W(x,y)$:

$$\frac{\exp - (U(\alpha\beta) + W(\alpha\beta, xy))}{\sum_{\alpha',\beta'} \exp - (U(\alpha'\beta') + W(\alpha'\beta', xy))}$$

vaut, à e^{6k_n} près:

$$\frac{\exp - (U(\alpha) + U(\beta) + W(\alpha,\beta) + W(\alpha,x) + W(\beta,y))}{\sum_{\alpha',\beta'} \exp - (U(\alpha') + U(\beta') + W(\alpha',\beta') + W(\alpha',x) + W(\beta',y))}$$

on le majore par:

$$e^{2\|\Phi\|_1} \frac{\exp - (U(\alpha) + W(\alpha,x)) \times \exp - (U(\beta) + W(\beta,y))}{\sum_{\alpha',\beta'} \exp - (U(\alpha') + W(\alpha',x) + U(\beta') + W(\beta',y))}.$$

On va estimer de même

$$E^{P_{-\infty,-n]}} 1_\alpha(x) = E^{P_{(-\infty,-n]}} (E^{P_{(-\infty,-n]\cup[1,+\infty)}} 1\alpha(xy''))(x)$$

$$E^{P_{(-\infty,-n]\cup[1,+\infty)}} 1_\alpha(xy'') = \frac{\exp - (U(\alpha) + W(\alpha, xy''))}{\sum_{\alpha'} \exp - (U(\alpha') + W(\alpha', xy''))}$$

ce qui vaut, à e^{4k_n} près,

$$\frac{\exp-(U(\alpha)+W(\alpha,x)+W(\alpha,y''))}{\sum_{\alpha'}\exp-(U(\alpha')+W(\alpha',x)+W(\alpha',y''))}$$

que l'on peut minorer par:

$$e^{-2\|\Phi\|_1}\frac{\exp-(U(\alpha)+W(\alpha,x))}{\sum_{\alpha'}\exp-(U(\alpha')+W(\alpha',x))};$$

qui est une fonction $P_{(-\mathrm{p},-n]}$ mesurable. En regroupant dans la formule du lemme 1, tout se simplifie et il reste, à e^{14k_n} près: $\frac{d\phi_n'^*\nu}{d\nu}\leqq e^{6\|\Phi\|_1}$. On aurait de même $\frac{d\phi_n'\nu}{\nu}\geqq e^{-6\|\Phi\|_1}$.

On peut maintenant achever la démonstration de la proposition 6; en effet les lemmes 1 et 2 assurent que les fonctions $\frac{d\phi_n^{*\prime}\nu}{d\nu}$ forment une famille relativement compacte pour la topologie $\sigma(L^1(\nu), L^\infty)$, et que si f est un point d'adhérence de cette famille, f est strictement positive ν presque-sûrement. Mais alors $f\nu$ est un point d'adhérence faible de la famille de mesures $\phi_n'^*\nu$; c'est donc la mesure d'équilibre μ (propositions 1 et 5). μ est bien équivalente à ν. On peut maintenant montrer:

Théorème. *Si $\Phi\in B_1$, le système $(K,\mu;T)$, où μ est la mesure d'équilibre pour Φ est un schéma de Bernoulli.*

Démonstration. La partition P_0 a en effet une propriété de Bernoulli faible qui est suffisante pour engendrer un schéma de Bernoulli (W. B. cf. [2]):

— Pour tout ε, il existe n tel que $P_{[-l,0]}$ soit ε-indépendante de $P_{[n,m]}$, pour tous les entiers l et m. —, l' ε-indépendance de deux σ-algèbres atomiques étant définie par:

$\sum_{pq}|\mu(pq)-\mu(p),\mu(q)|<\varepsilon$, où p et q décrivent les atomes des deux algèbres.

Avec les notations de la proposition précédente, la propriété est équivalente à $[\mu-\nu]_{P_{(-\infty,-n]\cup[n,+\infty)}}$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini, où $[m]_{\mathscr{A}}$ désigne la variation totale de la mesure m restreinte à l'algèbre $\mathscr{A}$. C'est encore équivalent à «$\mu=\nu$ sur $\bigwedge_n P_{[-n,n]^c}$» par continuité. C'est enfin vrai pour P_0, car μ est triviale sur $\bigwedge_n P_{[-n,n]^c}$ (propositions 3 et 5), et ν, qui lui est équivalente ne peut que coïncider avec μ sur $\bigwedge_n P_{[-n,n]^c}$.

Bibliographie

1. Conze, J. P.: Entropie d'un groupe abélien de transformations. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **25**, 11 (1972)
2. Friedman, N., Ornstein, D. S.: An isomorphism of weak Bernoulli transformations. Advances in Math. **1970**, 5
3. Keane, M.: Strongly mixing g-measures. Inventiones math. **16**, 309 (1972)
4. Ruelle, D.: Statistical mechanics. Rigorous results. New York: Benjamin 1969
5. Ruelle, D.: Statistical mechanics of a one-dimensional lattice gas. Commun. math. Phys. **9** (1968)

J'ai appris, en rédigeant ce travail que le théorème est montré dans

6. Gallavotti, G.: Commun. math. Phys. **32**, 183—190 (1973)

F. Ledrappier
Laboratoire de Probabilités T 56
9 Quai Saint-Bernard
Paris 5, France