Comportement asymptotique des solutions d'un système conservatif associé à une équation non linéaire singulière de Schrödinger

Mohammed Aassila

Abstract

We study the asymptotic behaviour as $t \to \infty$ of solutions of the following type of equations $u'' + \Delta u \pm \lambda u - h(u) = 0$, where λ is a nonnegative real and h is a nondecreasing function.

1 Introduction

L'origine de notre travail est l'étude du comportement local des solutions u de l'équation n-dimensionnelle, stationnaire, nonlinéaire de Schrödinger

$$\Delta u \pm V(x)u - g(u) = 0 \tag{1.1}$$

au voisinage d'une singularité isolée du potentiel V, g étant une fonction croissante à valeurs réelles.

Dans plusieurs situations physiques, $V(x)$ est un potentiel coulombien:

$$V(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{z_i}{|x - a_i|} \tag{1.2}$$

comme dans la théorie de Thomas- Fermi- Von Weizsäcker ([2, 3]).

Received by the editors November 1996 – In revised form May 1997.
Communicated by J. Mawhin.
1991 *Mathematics Subject Classification* : 35B, 35J.
Key words and phrases : asymptotic behaviour, elliptic equations, semigroups.

Cependant, mathématiquement, il est plus intéressant d' étudier le cas où $V(x)$ est de la forme $\dfrac{1}{|x-a|^2}$ au voisinage de la singularité isolée a. Dans ce cas l'intéraction entre le laplacien, le potentiel et la nonlinéarité est très forte.

L'equation modèle qui nous intéresse (dite équation d' Emden-Fowler) est

$$\Delta u \pm \frac{c}{|x|^2} u - u^q = 0 \quad \text{où} \quad q > 1, \;\; c > 0, \;\; x \in \mathbb{R}^n - \{0\}. \tag{1.3}$$

Pour étudier les propriétés limites de la solution u de (1.3), on fait le changement classique en coordonnées polaires

$$u(r,\alpha) = r^{\frac{-2}{q-1}} v(t,\alpha), \quad t = -ln\, r, \;\; \alpha \in \mathbb{S}^{n-1},$$

on obtient alors

$$v'' + \Delta_{\mathbb{S}} v - \Big(n - 2\frac{q+1}{q-1}\Big) v' + \Big(\frac{2}{q-1}(\frac{2q}{q-1} - n) \pm c\Big) v - v^q = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}\times\mathbb{S}^{n-1}, \tag{1.4}$$

où $\Delta_{\mathbb{S}}$ est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur $\mathbb{S}^{n-1}$.

Il suffit alors d'étudier le comportement asymptotique quand $t \to \infty$ de la solution v de (1.4).

Quand $q \neq \frac{n+2}{n-2}$, ce problème a été intensivement étudié, on pourra consulter Guerch-Véron [7] pour un survol des résultats disponibles. Pour la valeur particulière $q = \frac{n+2}{n-2}$, l'équation (1.4) devient

$$v'' + \Delta_{\mathbb{S}} v + \left(-\Big(\frac{n-2}{2}\Big)^2 \pm c \right) v - v^{\frac{n+2}{n-2}} = 0. \tag{1.5}$$

Pour $c = 0$, Caffarelli-Gidas-Spruck [5] ont obtenu les asymptotiques des solutions de (1.5) en utilisant une technique de symétrie en mesure. Lorsque $c \neq 0$, d'aprés nos connaissances, le seul résultat existant est celui de Licois [8] dont on parlera au paragraphe 3.

Dans ce travail, et dans un souci de génèralité, on considérera les deux problèmes suivants

$$(P1) \qquad \begin{cases} u'' + \Delta u - \lambda u = h(u) \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \text{condition au bord du type Dirichlet ou Neumann,} \end{cases}$$

et

$$(P2) \qquad \begin{cases} u'' + \Delta u + \lambda u = h(u) \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \text{condition au bord du type Dirichlet ou Neumann,} \end{cases}$$

où , dans toute la suite λ est un réel positif et Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ.

Dans la section 2, on étudiera les asymptotiques des solutions de (P1) avec respectivement des conditions au bord du type Neumann puis Dirichlet. La section 3, contiendra une étude similaire pour les solutions de (P2).

Les résultats que nous exposons dans ce travail font suite à ceux obtenus par Véron [11], Baras-Véron [1] et Gmira-Véron [6].

2 Comportement asymptotique des solutions de (P1)

2.1 Condition au bord du type Neumann

Considérons le problème

$$(P1)_N \qquad \begin{cases} u'' + \Delta u - \lambda u = h(u) \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}_+, \\ u(0) = u_0 \in L^1(\Omega), \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, λ un réel positif strictement, et h une fonction à valeurs réelles continue croissante et telle que $h(0) = 0$.

Véron a démontré l'existence et l'unicité d'une fonction u solution de $(P1)_N$ lorsque $u_0(x) \in L^1(\Omega)$, plus précisément il a montré qu'il existe une unique fonction

$$u \in C(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, L^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}_+^*, L^1(\Omega))$$

vérifiant $(P1)_N$ et telle que:

$$\bullet \text{pour tout } 0 \leq s \leq \frac{1}{p} \leq 1, \quad \Delta u \ \text{ et } u'' \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+^*, L^1(\Omega)),$$

$$\bullet \text{pour tout } \ t > 0 \quad u(t,.) \ \text{ et } u'(t,.) \in L^\infty(\Omega).$$

Posons $\bar{u} = \dfrac{1}{|\Omega|} \displaystyle\int_\Omega u(t,x)\, dx$, la moyenne de u sur Ω, le résultat principal de ce sous-paragraphe est

Théorème 2.1

Si u désigne la solution de $(P1)_N$ et $\bar{u}$ sa moyenne sur Ω, alors il existe $k > 0$ tel que

$$\|u(t,.) - \bar{u}(t)\|_{C^2(\bar{\Omega})} \leq k e^{-\sqrt{2\lambda} t}.$$

Démonstration

la fonction $\bar{u}$ vérifie l'équation

$$\bar{u}'' - \lambda \bar{u} = \overline{h(u)}$$

par suite on a

$$(u - \bar{u})'' + \Delta(u - \bar{u}) - \lambda(u - \bar{u}) = h(u) - \overline{h(u)}.$$

En multipliant par $(u - \bar{u})$ et en intégrant sur Ω on obtient

$$\int_\Omega (u - \bar{u})''(u - \bar{u}) - \int_\Omega |\nabla(u - \bar{u})|^2 - \lambda \int_\Omega (u - \bar{u})^2 = \int_\Omega (h(u) - \overline{h(u)})(u - \bar{u})\, dx.$$

or

$$\int_\Omega (h(u) - \overline{h(u)})(u - \bar{u}) = \int_\Omega h(u)(u - \bar{u}) = \int_\Omega (h(u) - h(\bar{u}))(u - \bar{u}) \ \geq 0$$

car h est croissante, d'où

$$\int_\Omega (u-\bar u)''(u-\bar u) - \int_\Omega |\nabla(u-\bar u)|^2 - \lambda \int_\Omega (u-\bar u)^2 \geq 0.$$

En posant $f(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega (u-\bar u)^2\,dx$ on a alors

$$f''(t) - \int_\Omega (u'-\bar u')^2(t) - \int_\Omega |\nabla(u-\bar u)|^2(t) - 2\lambda f(t) \geq 0,$$

d'où

$$f''(t) - 2\lambda f(t) \geq 0,$$

c'est à dire

$$f(t) \leq e^{-\sqrt{2\lambda}t} f(0).$$

Considérons les cylindres $\Omega\times(t,t+1)$ et $\Omega\times(t-1,t+2)$ alors d'après [10] on a :

$$\|u-\bar u\|_{W^{2,2}(\Omega\times(t,t+1))} \leq c_1\|u-\bar u\|_{L^2(\Omega\times(t-1,t+2))} + c_2\|h(u)-h(\bar u)+\lambda(u-\bar u)\|_{L^2(\Omega\times(t-1,t+2))}$$

donc $\|u-\bar u\|_{W^{2,2}(\Omega\times(t,t+1))}$ décroît exponentiellement lorsque $t\to\infty$.

Or $W^{2,2}(\Omega\times(t,t+1)) \subset L^q(\Omega\times(t,t+1))$ pour $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$, on peut donc, si besoin est, itérer le procédé et montrer que :

pour tout $q>2$, $\|u\|_{W^{2,q}(\Omega\times(t,t+1))}$ décroît exponentiellement vers 0. Par les injections de Sobolev et la théorie de Schauder, on arrive au résultat du théorème.

2.2 Condition au bord du type Dirichlet

On considère maintenant le problème (P1) avec condition de Dirichlet au bord, à savoir

$$(P1)_D \qquad \begin{cases} u'' + \Delta u - \lambda u = h(u) \quad \text{dans} \quad \Omega\times\mathbb{R}_+, \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma\times\mathbb{R}_+, \\ u(0) = u_0(x) \quad \text{dans} \quad \Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$ et h continue monotone vérifiant $h(0)=0$.

D'après [10], on a $\forall u_0 \in L^p(\Omega)$, $p\geq 1$, la solution u de $(P1)_D$ est dans $L^\infty(\Omega)$, de plus si $u_0\in L^2(\Omega)$, alors on a

$$(2.1) \qquad \begin{cases} \|u(t,.)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{c}{t^{n/2}}\|u_0\|_{L^2(\Omega)}, \\ \|u'(t,.)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{c}{t^{1+n/2}}\|u_0\|_{L^2(\Omega)}, \end{cases}$$

c constante positive ne dépendant pas de la donnée initiale.

Commençons par démontrer le

Lemme 2.1

Si $(S_\lambda)_{t\geq 0}$ désigne le semi-groupe engendré par $(-\Delta+\lambda Id)^{1/2}$ dans $L^2(\Omega)$, alors:
– pour $u_0\in L^2(\Omega)$ on a:

$$(2.2) \qquad \|S_\lambda(t)u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_1\Big(1+\frac{c_2}{t^{n/2}}\Big)\, e^{-\sqrt{\lambda_1+\lambda}t}\,\|u_0\|_{L^2(\Omega)},$$

– *pour* $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ *on a :*

$$\|S_\lambda(t)u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq ce^{-\sqrt{\lambda_1+\lambda}t}\,\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{2.3}$$

Démonstration

On désigne par $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$, la suite infinie de valeurs propres strictements positives de l'opérateur $-\Delta$ de domaine $D(-\Delta) = \Big\{\psi \in H^2(\Omega),\ \psi = 0 \ \text{ sur }\ \Gamma\Big\}$

Si $u_0 = u_1 + u_2$, avec $u_1 \in Ker(-\Delta - (\lambda_1 + \lambda)I)$ et $u_2 \in \bigoplus_{i\geq 2} Ker(-\Delta - (\lambda_i + \lambda)I)$ alors:

$$u(t,x) = e^{-\sqrt{\lambda_1+\lambda}\,t}\,u_1(x) + \tilde S_\lambda(t)\,u_2(x)$$

où $\tilde S_\lambda(t)$ est la restriction de $(S(t))_{t\geq 0}$ à $\bigoplus_{i\geq 2} Ker(-\Delta - (\lambda_i + \lambda)I)$.

L'opérateur $-\Delta-(\lambda_2+\lambda)Id$ étant monotone dans $\bigoplus_{i\geq 2} Ker(-\Delta-(\lambda_i+\lambda)I)$, alors, par le théorème 5 de [5] on a $(-\Delta)^{\frac12} - \sqrt{\lambda_2+\lambda}Id$ l'est aussi dans $\bigoplus_{i\geq 2} Ker(-\Delta - (\lambda_i + \lambda)I)$ et donc

$$\|\tilde S_\lambda(t)\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\sqrt{\lambda_2+\lambda}\,t}\,\|\phi\|_{L^2(\Omega)},$$

pour tout $\phi \in \bigoplus_{i\geq 2} Ker(-\Delta - (\lambda_i + \lambda)I)$ et pour tout $t \geq 0$.

Par (2.1) il s'ensuit qu'il existe c telle que

$$\|\tilde S_\lambda(t)u_2\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{c}{t^{n/2}}\,e^{-\sqrt{\lambda_1+\lambda}\,t}\,\|u_0\|_{L^2(\Omega)},$$

or

$$\|e^{-\sqrt{\lambda_1+\lambda}\,t}\,u_1\|_{L^\infty(\Omega)} = \frac{1}{\|h_0\|_{L^2(\Omega)}}\,e^{-\sqrt{\lambda_1+\lambda}\,t}\,\|u_1\|_{L^2(\Omega)}$$

où h_0 est le génèrateur de $Ker(-\Delta-(\lambda_1+\lambda)I)$ qui est de dimension 1, d'où il existe deux constantes c_1 et c_2 telles que

$$\|S_\lambda(t)u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_1\big(1 + \frac{c_2}{t^{n/2}}\big)\,e^{-\sqrt{\lambda_1+\lambda}\,t}\,\|u_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

Si $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, et si $t \geq 1$, on a donc en particulier

$$\|S_\lambda(t)u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_1(1 + c_2)\,e^{-\sqrt{\lambda_1+\lambda}\,t}\,\sqrt{|\Omega|}\,\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)},$$

d'où

$$\|S_\lambda(t)u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \max\big(e^{\sqrt{\lambda_1+\lambda}}, c_1(1+c_2)\sqrt{|\Omega|}\,\big)\,e^{-\sqrt{\lambda_1+\lambda}\,t}\,\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Le résultat principal de ce sous-paragraphe est

Théorème 2.2

Si u *et* v *sont deux solutions de* $(P1)_D$ *avec respectivement les données initiales* u_0 *et* v_0*, alors on a*

– *pour* $u_0, v_0 \in L^2(\Omega)$

$$\|u(t,.) - v(t,.)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_1 (1 + \frac{c_2}{t^{n/2}})\, e^{-\sqrt{\lambda_1+\lambda}\, t}\, \|u_0 - v_0\|_{L^2(\Omega)},$$

– *pour* $u_0, v_0 \in L^\infty(\Omega)$

$$\|u(t,.) - v(t,.)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c\, e^{-\sqrt{\lambda_1+\lambda}\, t}\, \|u_0 - v_0\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Démonstration

Si u et v sont deux solutions de $(P1)_D$ et en posant $g = u - v$, on a

$$\begin{cases} g'' + \Delta g - \lambda g = h(u) - h(v) \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ g(t,x) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}_+, \\ g(0,x) = u_0(x) - v_0(x) \quad \text{dans} \quad \Omega. \end{cases}$$

Si $w(t,x) = S_\lambda(t)\, w_0(x)$ avec $w_0(t) = (u_0(x) - v_0(x))^+$, par le principe du maximum on sait que $w > 0$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \Omega$. Posant $p = g - w$, on a ainsi

$$\begin{cases} p'' + \Delta p - \lambda p - (h(u) - h(v)) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ p(t,x) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

En multipliant par p^+ et en utilisant la formule de Green, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |p^+|^2\, dx \geq 0,$$

donc $t \to \int_\Omega |p^+|^2\, dx$ est convexe, comme elle est bornée, elle est donc décroissante.

Sachant que $p^+(0) = 0$, on a donc $u(t,x) - v(t,x) \leq w(t,x)$ pp sur Ω, $\forall t \geq 0$.

De la même manière, pour $\tilde{w}(t,x) = S_\lambda(t)\tilde{w}_0$ avec $\tilde{w}_0(x) = -(u_0(x) - v_0(x))^-$, on obtient

$$-\tilde{w}(t,x) \leq u(t,x) - v(t,x) \quad \text{pp sur} \quad \Omega,\ \forall t \geq 0.$$

Par ces résultats et les estimations (2.2) et (2.3) on a le résultat demandé.

3 Comportement asymptotique des solutions de (P2)

Dans cette section, on se propose d'étudier le comportement asymptotique des solutions de

$$(P2) \qquad \begin{cases} u'' + \Delta u = h(u) - \lambda u \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \text{condition au bord du type Neumann ou Dirichlet.} \end{cases}$$

Ce problème a été étudié par Licois [8] dans le cas où $\lambda > \lambda_1$ où λ_1 est la première valeur propre de $-\Delta$ avec les conditions au bord correspondantes. Il a montré que dans ce cas toute solution positive de (P2) converge dans $C^2(\Omega)$ lorsque $t \to \infty$ vers l'unique fonction strictement positive ϕ solution de $\Delta\phi = h(\phi) - \lambda\phi$.

Dans ce travail, on donnera les estimations précises sur le taux de décroissance vers 0 des solutions de (P2) lorsque $t \to \infty$, dans le cas $\lambda \leq \lambda_1$.

3.1 Condition au bord du type Neumann

On s'interesse dans cette partie au problème

$$(P2)_N \qquad \begin{cases} u'' + \Delta u + \lambda u = h(u) \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}_+, \\ u(0) = u_0(x) \quad \text{dans} \quad \Omega, \end{cases}$$

Ω étant ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, h fonction continue croissante telle que $h(0) = 0$ et $\lim_{x\to 0} \dfrac{h(x)}{x} = 0$, on sait que dans ce cas on a $\lambda_1 = 0$ et donc que $\lambda = 0$.

L'existence et l'unicité d'une solution au problème $(P2)_N$ a été faite par Véron [11], il a démontré que pour tout $u_0 \in L^1(\Omega)$, il existe une unique fonction

$$u \in C(\mathbb{R}_+, L^1(\Omega)) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, L^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}_+^*, L^1(\Omega))$$

vérifiant $(P2)_N$ et telle que

$$\text{pour tout } \ 0 \le s \le \frac{1}{p} \le 1 \quad \Delta u \ \text{ et } \ u' \in W^{s,p}_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+^*, L^1(\Omega)),$$

$$\text{pour tout } \ t > 0 \quad u(t,.) \,\text{et}\, u'(t,.) \,\text{sont dans}\, L^\infty(\Omega),$$

et il existe une constante c ne dependant pas de Ω telle que, pour tout $t > 0$ on a

$$\|u(t,.)\|_{L^\infty(\Omega)} \le c(1 + \frac{1}{t^2})^{n/2} \, \|u_0\|_{L^1(\Omega)},$$

$$\|u'(t,.)\|_{L^\infty(\Omega)} \le \frac{c}{t}(1 + \frac{1}{t^2})^{n/2} \, \|u_0\|_{L^1(\Omega)}.$$

Lemme 3.1

Soit l' équation différentielle ordinaire

$$(3.1) \qquad \begin{cases} \psi'' = h(\psi) \quad \textit{dans} \quad \mathbb{R}_+, \\ \psi(0) = a \quad a > 0, \\ \psi \textit{ bornée à l'infini}, \end{cases}$$

et posons $H(r) = \int_0^r h(x)\,dx$, *alors (3.1) admet une unique solution définie sur tout* $\mathbb{R}_+$ *et* $\lim_{t\to\infty} \psi_a(t) = 0$, *de plus pour* a *et* $b > 0$ *on a*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\psi_a(t)}{\psi_b(t)} = 1.$$

Démonstration

Il est facile de voir que (3.1) admet une unique solution $t \to \psi_a(t)\,, \psi_a(0) = a$, décroissante et vérifiant

$$t = -\int_{\psi(0)}^{\psi_a(t)} \frac{1}{\sqrt{2H(x)}}\,dx \quad \text{pour tout} \quad t \ge 0,$$

comme $\lim_{x\to 0}\dfrac{h(x)}{x}=0$, on a donc $\lim_{x\to 0}\dfrac{H(x)}{x^2}=0$, et donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{\sqrt{2H(x)}}\,dx$ ne peut être finie, par suite $t\to\psi_a(t)$ est définie sur tout $\mathbb{R}_+$ et $\lim_{t\to\infty}\psi_a(t)=0$. Comme la fonction $t\to\psi_b(t)$ est continue et tend vers zéro à l'infini, il existe alors un t_0 tel que $a=\psi_b(t_0)$, c'est à dire $\psi_a(t)=\psi_b(t+t_0)$.

On a

$$\frac{\psi_b'(x)}{\psi_b(x)}=-\sqrt{\frac{2H(\psi_b(x))}{\psi_b^2(x)}},$$

en intégrant entre t et $t+t_0$, on obtient:

$$\ln\frac{\psi_b(t+t_0)}{\psi_b(t)}=-\int_t^{t+t_0}\sqrt{\frac{2H(\psi_b(x))}{\psi_b^2(x)}}\,dx.$$

Comme $\lim_{x\to\infty}\frac{2H(\psi_b(x))}{\psi_b^2(x)}=0$, on en déduit que

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi_b(t+t_0)}{\psi_b(t)}=1,\ \text{c'est à dire}\quad \lim_{t\to\infty}\frac{\psi_a(t)}{\psi_b(t)}=1.$$

Lemme 3.2

Soit u une solution de $(P2)_N$ avec donnée initiale $u_0\in L^\infty(\Omega)$, alors si $a\le u_0\le b$ pp sur Ω on a

$$\forall t>0,\ \ \forall x\in\bar\Omega,\quad \psi_a(t)\le u(t,x)\le\psi_b(t).$$

Démonstration

Posons $y(t,x)=u(t,x)-\psi_b(t)$, alors on a

$$\text{(3.2)}\qquad\begin{cases} y''+\Delta y-(h(u)-h(\psi_b(t)))=0 & \text{dans}\quad \Omega\times\mathbb{R}_+,\\ \frac{\partial y}{\partial\nu}=0\quad \text{sur}\quad \Gamma\times\mathbb{R}_+,\\ y(0,x)=u_0(x)-b<0,\end{cases}$$

en multipliant la première équation de (3.2) par $y^+(t,x)=\sup(y(t,x),0)$, et en utilisant la formule de Green ($y^+\in H^1$), on obtient

$$\int_\Omega y''(t,x)y^+(t,x)\,dx\ge 0\quad \text{c'est à dire}\quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_\Omega |y^+(t,x)|^2\,dx\ge 0,$$

d'où la fonction $t\to\int_\Omega |y^+(t,x)|^2\,dx$ est convexe, comme elle est bornée, elle décroît et donc

$$\int_\Omega |y^+(t,x)|^2\,dx\le\int_\Omega |y^+(0,x)|^2\,dx=0,$$

c'est à dire $u(t,x)\le\psi_b(t)$ pp dans Ω.

Comme pour tout $t>0, u(t,.)$ et $u'(t,.)$ sont dans $L^\infty(\Omega)$, ils s'injectent dans $C^0(\bar\Omega)$ et par suite

$$u(t,x)\le\psi_b(t)\quad \forall(t,x)\in(0,+\infty)\times\bar\Omega,$$

de la même façon, on démontre que pour tout $t>0$, $x\in\bar\Omega$: $\psi_a(t)\le u(t,x)$.

Théorème 3.1

Soit u la solution de $(P2)_N$ avec la donnée initiale $u_0 \in L^1(\Omega)$, alors sous la condition que $\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x} = 0$, *on a pour tout $a > 0$:*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{u(t,.)}{\psi_a(t)} = l \quad \textit{uniformément sur} \quad \bar{\Omega}, \textit{ avec } l \in \Big\{0, -1, 1\Big\}.$$

où ψ_a est la solution de (3.1).

Démonstration

Par les résultats de [11], on peut supposer que $u_0 \in L^\infty(\Omega)$.

Si $a = \|u_0\|_{L^\infty}$, donc $-a \le u_0(x) \le a$ pp sur Ω et le lemme 3.2 montre que

$$|u(t,x)| \le \psi(t) = \psi_a(t) \quad \text{pour tout} \quad (t,x) \in (0,+\infty)\times\bar{\Omega}.$$

La fonction $y(t,x) = \dfrac{u(t,x)}{\psi_a(t)}$ est bornée par 1 sur $(0,+\infty)\times\bar{\Omega}$ et vérifie

$$\text{(3.3)} \qquad \begin{cases} y'' + \Delta y + (\frac{h(\psi)}{\psi} - \frac{h(y\psi)}{y\psi})y + 2\frac{\psi'}{\psi}y' = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega\times\mathbb{R}_+, \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma\times\mathbb{R}_+. \end{cases}$$

D'après [10] on a l'estimation

$$\|u\|_{W^{2,p}((t-1,t+1)\times\Omega)} \le c(\|u\|_{L^p((t-2,t+2)\times\Omega)} + \|h(u)\|_{L^p((t-2,t+2)\times\Omega)}),$$

et ceci pour tout $p \in (1,+\infty)$.

Or, pour $p > n$, $W^{1,p}((t-1,t+1)\times\Omega) \subset L^\infty((t-2,t+2)\times\Omega)$ et donc

$$\|u'\|_{L^\infty((t-1,t+1)\times\Omega)} \le c_1(\|u\|_{L^p((t-2,t+2)\times\Omega)} + \|h(u)\|_{L^p((t-2,t+2)\times\Omega)}).$$

Comme $\dfrac{u}{\psi}$ est majorée par 1 et vue la décroissance de $t \to \psi(t)$ on a ainsi

$$\|u\|_{L^p((t-2,t+2)\times\Omega)} \le \left(\int_{t-2}^{t+2}\int_\Omega |\psi(s)|^p\,ds\,dx\right)^{1/p} \le c_2\psi(t-2),$$

$$\|h(u)\|_{L^p((t-2,t+2)\times\Omega)} \le c_2 h(\psi(t-2)),$$

celà conduit à

$$\|u'(t,.)\|_{L^\infty(\Omega)} \le c_3\Bigg(\psi(t-2) + h(\psi(t-2))\Bigg),$$

d'où

$$\left|\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}y'(t,x)\right| \le \left|\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}\right|\left(c_4\frac{\psi(t-2)}{\psi(t)}\left[1 + \frac{h(\psi(t-2))}{\psi(t-2)}\right] + \left|\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}\right|\right),$$

or

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi(t-2)}{\psi(t)} = 1, \quad \lim_{t\to\infty}\frac{h(\psi(t-2))}{\psi(t-2)} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to\infty}\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = 0,$$

d'où

$$\lim_{t\to\infty}\left|\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}\,y'(t,x)\right| = 0 \quad \text{uniformément sur} \quad \bar\Omega.$$

D'autre part en intégrant (3.3) sur Ω, on obtient

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_\Omega y(t,x)\,dx + \int_\Omega\left((\frac{h(\psi)}{\psi} - \frac{h(\psi y)}{\psi y})y + 2\frac{\psi'}{\psi}y'\right)dx = 0,$$

c'est à dire que $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\displaystyle\int_\Omega y(t,x)\,dx = 0$.

On conclut que $\lim\limits_{t\to\infty} y(t,x) - \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega y(t,x)\,dx = 0$ uniformément sur $\bar\Omega$.

Dans la dernière étape on a utilisé le résultat classique suivant:

Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^\infty(\Omega))$ telle que $\lim \mathrm{ess}_{t\to\infty} f(t,.) = 0$ uniformément sur $\bar\Omega$ et soit y une fonction bornée vérifiant

$$\begin{cases} y'' + \Delta y = f(t,x) \quad \text{dans} \quad \Omega\times\mathbb{R}_+,\\ \frac{\partial y}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma\times\mathbb{R}_+,\\ \int_\Omega y(t,x)\,dx = \int_\Omega f(t,x)\,dx = 0 \quad \text{pour tout} \quad t\ge 0,\end{cases}$$

alors $\lim\limits_{t\to\infty} y(t,x) = 0$ uniformément sur $\bar\Omega$.

Comme $\left|\bar y = \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega y(t,x)\,dx\right| \le 1$, il existe donc une suite $(t_n)_n$ tendant vers l'infini lorsque $n\to\infty$, et un nombre l tels que

$$\lim_{n\to\infty}|\bar y(t_n)| = l.$$

On se propose de montrer que $\lim_{t\to\infty}\dfrac{u(t,.)}{\psi_a(t)}$ ne peut prendre que les trois valeurs $0, 1$ et -1.

Supposons que $l < 0$:

on sait que $\lim_{t\to\infty} y - \bar y = 0$ uniformément sur $\bar\Omega$ donc il existe t_0 tel que $u(t_0,x) \le \frac{l}{2}\psi(t_0) \quad \forall x\in\bar\Omega$, par le lemme 3.2 on a donc $u(t,x) \le -\psi(t-t_0, |\frac{l}{2}|\psi(t_0))$ pour tout $t\ge t_0$ et donc:

$$-\frac{\psi(t-t_0,|\frac{l}{2}|\psi(t_0))}{\psi(t-t_0,\psi_a(t_0))} \ge \frac{u(t,x)}{\psi_a(t)} \ge -1,$$

d'où

$$\lim_{t\to\infty}\frac{u(t,.)}{\psi_a(t)} = -1$$

par le lemme 3.1, et ceci uniformément sur $\bar\Omega$.

De la même manière si on suppose que $l > 0$, on montre que cette limite est 1.

Supposons que $l = 0$,

si $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{u(t,.)}{\psi(t)} \neq 0$, donc pour un $\varepsilon > 0$ et pour tout $T > 0$, il existe $t > T$ tel que

$$\left|\frac{u(t,.)}{\psi(t)}\right| \ge 2\varepsilon,$$

or $\lim_{t\to\infty} y-\bar{y}=0$, donc il existe t_n avec $\lim_{n\to\infty} t_n=\infty$ telle que $|\bar{y}(t_n)|\geq\varepsilon$, et par suite il existe une sous suite α_n telle que $\lim\limits_{n\to\infty}|\bar{y}(\alpha_n)|=l_1\neq 0$, d'où $\lim_{t\to\infty}\dfrac{u(t,.)}{\psi(t)}=\pm 1$, donc c'est le cas aussi pour $\bar{y}(t)$, lorsque $n\to\infty$, et ainsi $l\neq 0$. Contradiction.

3.2 Condition au bord du type Dirichlet

Soit le problème

$$(P2)_D \qquad \begin{cases} u''+\Delta u+\lambda u=h(u) \quad \text{dans} \quad \Omega\times\mathbb{R}_+, \\ u=0 \quad \text{sur} \quad \Gamma\times\mathbb{R}_+, \\ u(0)=u_0(x) \quad \text{dans} \quad \Omega, \end{cases}$$

où $\lambda\leq\lambda_1, h$ fonction continue, monotone vérifiant $h(0)=0$,

Il est facile de voir que lorsque $\lambda=\lambda_1$, alors la solution u de $(P2)_D$ tend vers zéro, il suffit de multiplier la première équation de $(P2)_D$ par u et de l'intégrer sur $\Omega\times(0,T)$.

On s'interesse alors au cas où $\lambda<\lambda_1$, le résultat principal de ce sous paragraphe est

Théorème 3.2

Si u et v sont deux solutions de $(P2)_D$ avec données initiales u_0 et v_0 respectivement, alors

– *Si $u_0, v_0\in L^2(\Omega)$, on a:*

$$\|u(t,.)-v(t,.)\|_{L^\infty(\Omega)}\leq c_1(1+\frac{c_2}{t^{n/2}})\,e^{-\sqrt{\lambda_1-\lambda}\,t}\,\|u_0-v_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

– *Si $u_0,\ v_0\in L^\infty(\Omega)$, on a:*

$$\|u(t,.)-v(t,.)\|_{L^\infty(\Omega)}\leq c\,e^{-\sqrt{\lambda_1-\lambda}\,t}\,\|u_0-v_0\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Démonstration

C'est les mêmes idées que celles utilisées pour le théorème 2.2, il suffit de remplacer $\lambda_1+\lambda$ par $\lambda_1-\lambda$.

References

[1] P. Baras et L. Véron, Comportement asymptotique de la solution d'une équation d' évolution semi-linéaire de la chaleur, *Comm. PDE.*, **4(7)** (1979), 795-807.

[2] R. Benguria, H. Brezis and E. H. Lieb, The Thomas-Fermi-Von Weizsäcker theory of atoms and moleculs, *Comm. Math. Phys.*, **79** (1980), 167-180.

[3] R. Benguria and L. Jeanneret, Existence and uniqueness of positive solutions of semilinear elliptic equations with Coulomb potentials on $\mathbb{R}^3$, *Comm. Math. Phys.*, **104** (1986), 291-306.

[4] H. Brezis, Equations d' évolution du second degré associées à des opérateurs monotones, *Israel J. Math.*, **12** (1972), 51-60.

[5] L. A. Caffarelli, B. Gidas and J. Spruck, Behavior of semilinear elliptic equations with critical Sobolev growth, *Comm. Pure Appl. Math.*, **42** (1989), 271-297.

[6] A. Gmira and L. Véron, Asymptotic behaviour of the solution of a semilinear parabolic equation, *Monatsh. Math.*, **94** (1982), 299-311.

[7] B. Guerch and L. Véron, Local properties of stationary solutions of some nonlinear singular Schrödinger equations, *Revista Mathematica Iberoamericana*, **7** (1991), 65-114.

[8] J. R. Licois, Asymptotiques d'un système dynamique conservatif associé à une équation elliptique non linéaire, *J. Analyse Mathématique*, **66** (1995), 1-36.

[9] E. Stein, *Topics in Harmonic analysis*, Annals of Mathematics Studies, vol. 63, Princeton University Press, 1970.

[10] L. Véron, Coercivité et propriété régularisante de semi- groupes non linéaires dans des espaces de Banach, Publication Mathématique de l'Université de Besançon, 3, (1976-1977).

[11] L. Véron, Equations d'évolution semi -linéaires du second ordre dans L^1, *Rev. Roumaine Math. Pures et Appl.*, **28** (1982), 95-123.

Institut de recherche mathématique avancée,
7, rue René Descartes,
67084 Strasbourg, France.
e-mail: aassila@math.u-strasbg.fr