Ark. Mat., **44** (2006), 149–165
DOI: 10.1007/s11512-005-0003-4

Courants résidus et formule de King

Michel Méo

0. Introduction

Soit Z un sous-ensemble analytique de codimension q dans une variété complexe X de dimension pure. Lorsque Z est le lieu des zéros d'une section holomorphe s d'un fibré vectoriel holomorphe hermitien E au-dessus de X, la formule de King

$$\sum_j m_j[Z_j] = (dd^c \log|s|)^q - \mathbf{1}_{X\setminus Z}(dd^c \log|s|)^q$$

exprime le courant d'intégration sur le cycle $\sum_j m_j Z_j$ de X de codimension q associé à s, comme résidu de la forme différentielle $T = d^c(\log|s|(dd^c \log|s|)^{q-1})$. Ce résultat est énoncé dans [15] sous l'hypothèse que Z est de dimension pure et dans [12] sous l'hypothèse que le fibré et la métrique sont triviaux.

On étend ici cette formule au cas où Z est quelconque, en remplaçant $\log|s|$ par une fonction $\frac{1}{2}\log\rho$ quasi-plurisousharmonique dans X, de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $X\setminus Z$, ayant Z pour ensemble de pôles et construite à l'aide d'une partition $\mathcal{C}^\infty$ de l'unité et de générateurs locaux du faisceau d'idéaux définissant Z. On donne deux démonstrations, l'une utilisant la théorie des opérateurs de Monge–Ampère, l'autre un éclatement par rapport à Z.

On en déduit les formules d'approximation reprenant celles de [18]

$$\sum_j m_j[Z_j] = \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{\lambda}{q}\rho^{\lambda-q}\left(\frac{1}{2}dd^c\rho\right)^q = \lim_{\lambda\to 0^+} \lambda\rho^{\lambda-q-1}\frac{1}{2}d\rho\wedge d^c\rho\wedge\left(\frac{1}{2}dd^c\rho\right)^{q-1}.$$

La distribution ρ^λ dépend méromorphiquement de $\lambda\in\mathbf{C}$ et on obtient l'existence de distributions δ et γ définies dans X à support dans Z telles que

$$\sum_j m_j[Z_j] = \gamma\left(\frac{i}{2}\partial\bar\partial\rho\right)^q/q! = \delta\frac{i}{2}\partial\rho\wedge\bar\partial\rho\wedge\left(\frac{i}{2}\partial\bar\partial\rho\right)^{q-1}/(q-1)!\,.$$

On donne deux démonstrations, l'une partant de la relation $\log\rho=(\partial(\rho^\lambda)/\partial\lambda)|_{\lambda=0}$, l'autre consistant à démontrer d'abord les formules

$$\begin{aligned}\sum_j m_j[Z_j] &= \lim_{\varepsilon\to0^+}(2\varepsilon^2)^{-q}\mathbf{1}_{\{\rho<\varepsilon^2\}}(dd^c\rho)^q\\ &= \lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{q+1}{2^q\varepsilon^{2q+2}}\mathbf{1}_{\{\rho<\varepsilon^2\}}\,d\rho\wedge d^c\rho\wedge(dd^c\rho)^{q-1}.\end{aligned}$$

Revenant au cas où Z est le lieu des zéros de la section s, on explicite une forme différentielle ψ à coefficients de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $X\setminus Z$, L^1_{loc} dans X telle que dans X au sens des courants, on ait

$$\sum_j m_j[Z_j]=c_q(\Theta_E)-c_q(\Theta_{E/\mathbf{C}s})+dd^c\psi,$$

en désignant par $c_q(\Theta_E)$ la $q^{\text{ème}}$ forme de Chern de la forme de courbure Θ_E de E. Cette généralisation de la formule de Poincaré–Lelong figure dans le cas où E est de rang q et s transverse à la section nulle de E dans [5] et avec de plus l'opérateur d au lieu de dd^c dans [14]. On raisonne ici à partir de la formule de King, en appliquant les calculs de Bott–Chern de formes de transgression pour les classes de Chern intervenant dans la suite exacte $0\to\mathbf{C}s\to E\to E/\mathbf{C}s\to0$ dans $X\setminus Z$.

1. Formule de King généralisée

On commence par rappeler la définition du résidu.

Soit X une variété complexe de dimension pure n, $Z\subset X$ un sous-ensemble analytique de dimension $p=n-q$. Pour T une forme différentielle de degré $2q-1$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $X\setminus Z$ avec T et dT à coefficients L^1_{loc} dans X, on note $R=d\widetilde{T}-\widetilde{dT}$ où on désigne par $\widetilde{\ }$ le courant dans X associé à chaque forme différentielle à coefficients L^1_{loc} dans X. Le courant R est localement plat au sens de Federer de dimension $2p$ à support dans Z, donc égal lorsqu'il est fermé à $\sum_j m_j[Z_j]$ où les Z_j sont les composantes analytiques irréductibles de Z de dimension exactement p et les m_j des nombres complexes.

Soit $\mathcal{I}\subset\mathcal{O}_X$ un sous-faisceau cohérent d'idéaux tel que $\operatorname{supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})=Z$.

On construit maintenant en suivant [11] une fonction $\rho: X\to\mathbf{R}^+$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\rho^{-1}(0)=Z$ et $\log\rho$ est quasi-plurisousharmonique dans X.

Soit $(U_\alpha)_\alpha$ un recouvrement ouvert localement fini de X et pour tout α, f_α: $U_\alpha\to\mathbf{C}^{N_\alpha}$ une application holomorphe vérifiant la propriété: pour tout $x\in U_\alpha$, les germes en x des composantes de f_α engendrent l'idéal $\mathcal{I}_x$ et donc $f_\alpha^{-1}(0)=Z\cap U_\alpha$.

Soit $H_\alpha(x)$ une matrice $N_\alpha\times N_\alpha$ hermitienne définie positive dépendant de façon $\mathcal{C}^\infty$ de $x\in U_\alpha$. On note $\psi_\alpha={}^tf_\alpha H_\alpha\bar f_\alpha$ qui est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ dans U_α toujours ≥ 0 avec $\psi_\alpha^{-1}(0)=Z\cap U_\alpha$.

Avec $D_\alpha f_\alpha=\partial f_\alpha+\overline{H}_\alpha^{-1}\partial\overline{H}_\alpha f_\alpha$ et $\Theta_\alpha=\overline{H}_\alpha^{-1}\bar\partial\partial\overline{H}_\alpha-\overline{H}_\alpha^{-1}\bar\partial\overline{H}_\alpha\wedge\overline{H}_\alpha^{-1}\partial\overline{H}_\alpha$ qui vérifie ${}^t\Theta_\alpha H_\alpha=-H_\alpha\overline{\Theta}_\alpha$, on a dans $U_\alpha\backslash Z$ l'égalité

$$\psi_\alpha i\partial\bar\partial\log\psi_\alpha+i^t(\Theta_\alpha f_\alpha)H_\alpha\bar f_\alpha= i^t(D_\alpha f_\alpha)\wedge H_\alpha\overline{D_\alpha f_\alpha}\\ -\psi_\alpha^{-1}i^t(D_\alpha f_\alpha)H_\alpha\bar f_\alpha\wedge{}^tf_\alpha H_\alpha\overline{D_\alpha f_\alpha}.$$

Pour $x\in U_\alpha\backslash Z$, la forme hermitienne sur T_xX associée à cette $(1,1)$-forme réelle vaut

$${}^t(D_\alpha f_\alpha(\xi))H_\alpha\overline{D_\alpha f_\alpha(\xi)}-\psi_\alpha^{-1}|{}^t(D_\alpha f_\alpha(\xi))H_\alpha\bar f_\alpha|^2$$

en $\xi\in T_xX$ et est positive par l'inégalité de Cauchy–Schwarz. Ainsi $\psi_\alpha i\partial\bar\partial\log\psi_\alpha+i^t(\Theta_\alpha f_\alpha)H_\alpha\bar f_\alpha\geq 0$ dans $U_\alpha\backslash Z$.

Ecrivons $H_\alpha={}^tP_\alpha\overline{P}_\alpha$ avec P_α une matrice inversible $\mathcal{C}^\infty$ dans U_α. Alors $i^t(\Theta_\alpha f_\alpha)H_\alpha\bar f_\alpha=i^tg_\alpha{}^t\widetilde\Theta_\alpha\bar g_\alpha$ avec $g_\alpha=P_\alpha f_\alpha$ et $\widetilde\Theta_\alpha=P_\alpha\Theta_\alpha P_\alpha^{-1}$ qui vérifie ${}^t\widetilde\Theta_\alpha=-\overline{\widetilde\Theta}_\alpha$.

Soit $(z_1,...,z_n)$ des coordonnées holomorphes dans un voisinage ouvert de $x\in U_\alpha$. Ecrivons le coefficient en position (i,j) de la matrice $\widetilde\Theta_\alpha$ sous la forme $\widetilde\Theta_{\alpha,ij}=\sum_{k,l}c_{\alpha,ijkl}dz_k\wedge d\bar z_l$ avec donc $c_{\alpha,jikl}=\bar c_{\alpha,ijlk}$. La forme hermitienne sur T_xX associée à $i^t(\Theta_\alpha f_\alpha)H_\alpha\bar f_\alpha$ est $\sum_{(i,l),(j,k)}c_{\alpha,jikl}g_{\alpha,i}\bar\xi_l\overline{g_{\alpha,j}\bar\xi_k}$ qui est dominée au voisinage de x par $|g_\alpha|^2\sum_k|\xi_k|^2$ où on écrit $\xi=\sum_k\xi_k\partial/\partial z_k$. Il existe donc une constante C telle que $i^t(\Theta_\alpha f_\alpha)H_\alpha\bar f_\alpha\leq C|f_\alpha|^2 i\sum_k dz_k\wedge d\bar z_k$ au voisinage de x.

Soit $(\lambda_\alpha)_\alpha$ une partition $\mathcal{C}^\infty$ de l'unité subordonnée à $(U_\alpha)_\alpha$. On pose $\rho=\sum_\alpha\lambda_\alpha^2\psi_\alpha$ qui est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ dans X toujours ≥ 0 avec $\rho^{-1}(0)=Z$. Pour $x\in U_\alpha\cap U_\beta$, on a $|f_\alpha|=O(|f_\beta|)$ au voisinage de x et donc $\psi_\alpha=O(\rho)$ au voisinage de x. Pour $\varepsilon>0$ fixé, on a dans $X\backslash Z$

$$\begin{aligned} i\partial\bar\partial\log(\rho+\varepsilon)&=\frac{i\partial\bar\partial\rho}{\rho+\varepsilon}-\frac{i\partial\rho\wedge\bar\partial\rho}{(\rho+\varepsilon)^2}\\ &=\frac{\rho}{\rho+\varepsilon}\bigg(\sum_\alpha\frac{\psi_\alpha}{\rho}(i\partial\bar\partial(\lambda_\alpha^2)-4i\partial\lambda_\alpha\wedge\bar\partial\lambda_\alpha)+\sum_\alpha\lambda_\alpha\frac{\psi_\alpha}{\rho}i\partial\bar\partial\log\psi_\alpha\bigg)\\ &\quad+\frac{1}{(\rho+\varepsilon)^2}\bigg((\rho+\varepsilon)\sum_\alpha\psi_\alpha^{-1}i\theta_\alpha\wedge\bar\theta_\alpha-i\Big(\sum_\alpha\lambda_\alpha\theta_\alpha\Big)\wedge\overline{\Big(\sum_\alpha\lambda_\alpha\theta_\alpha\Big)}\bigg)\end{aligned}$$

avec $\theta_\alpha=2(\partial\lambda_\alpha)\psi_\alpha+\lambda_\alpha\partial\psi_\alpha$. La forme hermitienne associée à $i(\sum_\alpha\lambda_\alpha\theta_\alpha)\wedge\overline{(\sum_\alpha\lambda_\alpha\theta_\alpha)}$ est $|\sum_\alpha\lambda_\alpha\theta_\alpha(\xi)|^2\leq\rho\sum_\alpha\psi_\alpha^{-1}|\theta_\alpha(\xi)|^2$ par l'inégalité de Cauchy–Schwarz et donc le $3^{\text{ème}}$ terme est ≥ 0. Dans $X\backslash Z$, on a ainsi

$$i\partial\bar\partial\log(\rho+\varepsilon)\geq\frac{\rho}{\rho+\varepsilon}\sum_\alpha\frac{\psi_\alpha}{\rho}(i\partial\bar\partial(\lambda_\alpha^2)-4i\partial\lambda_\alpha\wedge\bar\partial\lambda_\alpha-i\lambda_\alpha\psi_\alpha^{-1t}(\Theta_\alpha f_\alpha)H_\alpha\bar f_\alpha).$$

Donc pour tout $x\in X$, il existe une constante C et un voisinage ouvert de x dans X dans lequel pour tout $\varepsilon>0$, on a $i\partial\bar\partial\log(\rho+\varepsilon)\geq -C(\rho/(\rho+\varepsilon))i\sum_k dz_k\wedge d\bar z_k$. Cela entraîne que $i\partial\bar\partial\log\rho\geq -Ci\sum_k dz_k\wedge d\bar z_k$ dans ce voisinage ouvert puis à l'aide d'une partition $\mathcal{C}^\infty$ de l'unité que $i\partial\bar\partial\log\rho$ est quasi-plurisousharmonique dans X.

On a alors la généralisation suivante de la formule de King.

Proposition 1.1. *La forme différentielle* $S=2^{-q}(\log\rho)(dd^c\log\rho)^{q-1}$ *qui est* $\mathcal{C}^\infty$ *dans* $X\setminus Z$ *est à coefficients localement intégrables dans* X *et si* $T=d^cS=d^c\rho\wedge(dd^c\rho)^{q-1}/(2\rho)^q$*, alors* dT *est à coefficients localement intégrables dans* X*,* $\widetilde{dT}$ *est fermé dans* X *et le courant résidu* $dd^c\widetilde{S}-\widetilde{dT}=\big(\frac{1}{2}dd^c\log\rho\big)^q-\mathbf{1}_{X\setminus Z}\big(\frac{1}{2}dd^c\log\rho\big)^q$ *est égal à* $\sum_j m_j[Z_j]$ *où* $(Z_j)_j$ *désigne la famille des composantes analytiques irréductibles de* Z *de dimension exactement* p *et* $m_j\in\mathbf{N}^*$ *la multiplicité générique de* $\mathcal{I}$ *le long de* Z_j*.*

Démonstration. On utilise la théorie de l'intersection des opérateurs de Monge–Ampère dans le cas de fonctions plurisousharmoniques non bornées de Demailly, Fornæss–Sibony (cf. [12], [13]), précisément le cas particulier suivant.

Soit Q un courant positif fermé de bidimension (k,k) dans un ouvert U de $\mathbf{C}^n$, u une fonction plurisousharmonique dans U, de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $U\setminus A$ où A est un sous-ensemble analytique de U avec $\dim A<k$. Alors la mesure $uQ\wedge\beta^k$ est de masse finie dans $U\setminus A$ et $dd^c(\widetilde{uQ})$ est un courant positif fermé dans U.

Pour tout point $x\in X$, il existe un voisinage ouvert U dans X de x et une constante $C>0$ tels que $u=\frac{1}{2}\log\rho+C|z|^2$ est plurisousharmonique dans U. Alors $S=(u-C|z|^2)(dd^cu-Cdd^c|z|^2)^{q-1}$ et $dT=(dd^cu-Cdd^c|z|^2)^q$ sont à coefficients L^1_{loc} dans U. Ensuite $dd^c\widetilde{S}-\widetilde{dT}$ coïncide dans U avec $dd^c((u(dd^cu)^{q-1})\tilde{})-((dd^cu)^q)\tilde{}$ puisque pour $0\leq k\leq q-1$, $((dd^cu)^k)\tilde{}$ est fermé dans U et pour $0\leq k\leq q-2$, $dd^c((u(dd^cu)^k)\tilde{})=((dd^cu)^{k+1})\tilde{}$ car $\mathbf{1}_Z dd^c((u(dd^cu)^k)\tilde{})=0$ d'après le théorème de Skoda–El Mir.

Reconnaissons maintenant

$$\mathbf{1}_Z dd^c((u(dd^cu)^{q-1})\tilde{})=dd^c((u(dd^cu)^{q-1})\tilde{})-((dd^cu)^q)\tilde{}.$$

Avec $(\mathfrak{C}_i)_i$ les composantes analytiques irréductibles de Z, on utilise que

$$\mathbf{1}_Z=\lim_{j\to+\infty}\mathbf{1}_{\mathfrak{C}_1\cup\ldots\cup\mathfrak{C}_j}=\lim_{j\to+\infty}\sum_{1\leq k\leq j}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq j}\mathbf{1}_{\mathfrak{C}_{i_1}\cap\ldots\cap\mathfrak{C}_{i_k}}.$$

Le théorème de Skoda–El Mir montre que le courant $\mathbf{1}_{\mathfrak{C}_i}dd^c((u(dd^cu)^{q-1})\tilde{})$ est fermé d'ordre 0 à support dans $\mathfrak{C}_i$ et il est donc nul si $\dim\mathfrak{C}_i<p$, égal à $m_i[\mathfrak{C}_i]$ si $\dim\mathfrak{C}_i=p$ avec $m_i=\inf\{\nu(dd^c((u(dd^cu)^{q-1})\tilde{}),z):z\in\mathfrak{C}_i\}\geq 1$. Par ailleurs pour $k\geq 2$,

$\dim(\mathfrak{C}_{i_1}\cap\ldots\cap\mathfrak{C}_{i_k})<p$ donc $\mathbf{1}_{\mathfrak{C}_{i_1}\cap\ldots\cap\mathfrak{C}_{i_k}}dd^c((u(dd^cu)^{q-1})\tilde{\ })=0$ et ensuite

$$\mathbf{1}_Z dd^c((u(dd^cu)^{q-1})\tilde{\ }) = \sum_j m_j[Z_j].$$

Précisons l'interprétation de m_j comme multiplicité. Pour $x\in Z_j\cap U_\alpha$ générique, m_j est le nombre de Lelong $\nu((dd^c\log|f_\alpha|)^q,x)$ qui dans le cas $N_\alpha=q$ n'est autre que la multiplicité de Stoll $\mu_q(f_\alpha,x)$. Supposant $U_\alpha\subset\mathbf{C}^n$ et $x=0$, on peut aussi considérer la trace sur un sous-espace vectoriel de dimension q. Quitte à choisir ce sous-espace, disons $\mathbf{C}^q$, en dehors d'un sous-ensemble négligeable de la Grassmannienne $\mathbf{G}_{q-1,n-1}$ on a $m_j=\nu((dd^c\log|f_\alpha|_{U_\alpha\cap\mathbf{C}^q}|)^q,0)$. Le nombre m_j apparaît comme la multiplicité de l'idéal de $\mathcal{O}_q$ engendré par les germes des $f_{\alpha,l}|_{U_\alpha\cap\mathbf{C}^q}$ en 0. $\square$

Pour voir que T est à coefficients L^1_{loc} dans X, on utilise l'éclatement $\pi\colon M\to X$ de X par rapport à $\mathcal{I}$. On a M qui est muni naturellement d'un fibré en droites L. Au-dessus de $\pi^{-1}(U_\alpha)$, $f_\alpha\circ\pi$ est une section holomorphe de $L|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}\subset\pi^{-1}(U_\alpha)\times\mathbf{C}^{N_\alpha}$, de norme au carré égale à $\psi_\alpha\circ\pi$ pour la métrique hermitienne induite par H_α. Comme sur $\pi^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)$, $f_\alpha\circ\pi$ et $f_\beta\circ\pi$ définissent le diviseur $H=\pi^{-1}(Z)$, il existe une fonction holomorphe $h_{0,\alpha\beta}$ partout non nulle dans $\pi^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)$ telle que $f_\beta\circ\pi=(f_\alpha\circ\pi)h_{0,\alpha\beta}$ en tout point de $\pi^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)$. On en déduit que $\psi_\beta\circ\pi=(\psi_\alpha\circ\pi)h_{\alpha\beta}$ en tout point de $\pi^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)$ avec $h_{\alpha\beta}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ strictement positive en tout point de $\pi^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)$. Pour tout point $x\in X$ et α tel que $U_\alpha\ni x$, il existe donc un voisinage ouvert V de x dans U_α tel que

$$(\rho\circ\pi)|_{\pi^{-1}(V)} = (\psi_\alpha\circ\pi)|_{\pi^{-1}(V)}h$$

avec h une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ strictement positive en tout point de $\pi^{-1}(V)$. On a ensuite

$$\begin{aligned}T|_V &= 2^{-q}d^c\log\rho\wedge(dd^c\log\rho)^{q-1}|_V\\ &= (\pi|_{\pi^{-1}(V)})_*\left(d^c\left(\log|f_\alpha\circ\pi|\,|_{\pi^{-1}(V)}+\frac{1}{2}\log h\right)\wedge\left(\frac{1}{2}dd^c\log h-\xi_\alpha|_{\pi^{-1}(V)}\right)^{q-1}\right)\end{aligned}$$

avec ξ_α la 1$^{\text{ère}}$ forme de Chern de $L|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}$ pour la métrique hermitienne induite par H_α, de sorte que $T|_V$ est l'image directe par l'éclatement $\pi|_{\pi^{-1}(V)}$ d'une forme différentielle à coefficients L^1_{loc} dans $\pi^{-1}(V)$ et donc est à coefficients L^1_{loc} dans V.

Remarquons que la démonstration précédente permet aussi de voir que $T_1=2^{-q}d^c\log\rho_1\wedge(dd^c\log\rho_1)^{q-1}$ avec $\rho_1=\sum_\alpha\lambda_\alpha\psi_\alpha$ qui est à coefficients L^1_{loc} dans X, de même que dT_1 et que $\widetilde{dT_1}$ est fermé dans X, de sorte que le courant résidu de T_1 est $d\widetilde{T}_1-\widetilde{dT_1}=\sum_j m_j[Z_j]$.

2. Cas du lieu des zéros d'une section d'un fibré vectoriel

Considérons le cas particulier où $E\to X$ est un fibré vectoriel holomorphe de rang N, $s\in H^0(X,E)$ une section holomorphe non nulle et $\mathcal{I}$ l'image du morphisme $\mathcal{O}(E^*)\to\mathcal{O}_X$ de faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules induit par s.

Munissons E d'une métrique hermitienne $\mathcal{C}^\infty$ et supposons que pour chaque α, H_α en est la matrice dans un repère holomorphe $(e_{\alpha,l})_l$ de E au-dessus de U_α. Ecrivant $s|_{U_\alpha}=\sum_l f_{\alpha,l}e_{\alpha,l}$ on a alors $|s|^2|_{U_\alpha}=\psi_\alpha$ de sorte que $\rho=|s|^2\sum_\alpha\lambda_\alpha^2$, ce qui redonne le fait que $\log|s|$ est une fonction quasi-plurisousharmonique dans X et on a en fait $i\partial\bar\partial\log|s|^2+\{i\Theta_E(s),s\}/|s|^2\geq 0$ avec $\{i\Theta_E(s),s\}=\{s,i\Theta_E(s)\}$ où $\Theta_E\in\mathcal{C}^\infty_{1,1}(X,E\otimes E^*)$ est la forme de courbure de la connexion de Chern sur E pour cette métrique et $\{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}$ est le crochet déduit de cette métrique.

On va donner une démonstration géométrique de la Proposition 1.1 à l'aide d'un éclatement. King dans [15] utilise aussi un éclatement pour obtenir les intégrabilités locales, mais conclut à l'aide du théorème de structure de Federer, sous l'hypothèse que Z est de dimension pure.

On se ramène à la formule de Poincaré–Lelong en éclatant donc X le long de $Z=s^{-1}(0)$. Soit $\pi_0\colon P(E)\to X$ le fibré des droites de E, $M_0=\big\{a\in P(E)\colon a\ni s(\pi_0(a))\big\}$. On considère M la fermeture schématique de $M_0\setminus\pi_0^{-1}(Z)$ dans M_0 et $\pi=\pi_0|_M$. L'image réciproque H de Z dans M y est une hypersurface en dehors de laquelle π est un biholomorphisme à valeurs dans $X\setminus Z$. Soit L_E le fibré en droites tautologique sur $P(E)$ muni de la métrique hermitienne induite par celle de E, L sa restriction à M et ξ la première forme de Chern de L.

Soit $(H_i)_i$ les composantes analytiques irréductibles de H. Pour chaque i, $\pi(H_i)$ est un sous-ensemble analytique irréductible de Z et $(\pi|_{H_i})_*((-\xi)|_{H_i}^{q-1})$ est un courant fermé d'ordre 0 de bidimension (p,p) dans $\pi(H_i)$. Si $\dim\pi(H_i)<p$, il est nul et si $\dim\pi(H_i)=p$, $\pi(H_i)$ est une composante analytique irréductible Z_{j_i} de Z et on a $(\pi|_{H_i})_*((-\xi)|_{H_i}^{q-1})=n_i[Z_{j_i}]$ pour un certain n_i et alors

$$n_i[Z_{j_i}]=\pi_*([H_i]\wedge(-\xi)^{q-1}).$$

H est l'ensemble des zéros de la section π^*s de L induite par s. Pour appliquer la formule de Poincaré–Lelong, il faut raisonner dans M_{reg}, mais il est possible qu'une H_i soit contenue dans M_{sing}. On considère donc $\nu\colon\widetilde{M}\to M$ une normalisation de M et $\widetilde{H}$ l'hypersurface $\nu^{-1}H$ qui est l'ensemble des zéros de la section $\nu^*\pi^*s$ de ν^*L. Soit $(K_l)_l$ les composantes analytiques irréductibles de $\widetilde{H}$. L'application de la formule de Poincaré–Lelong donne

$$\sum_l m'_l[K_l]=dd^c\log|\nu^*\pi^*s|+\nu^*\xi$$

pour certaines multiplicités m'_l. Par ailleurs $\nu(K_l)$ est une composante analytique irréductible H_{i_l} et $\nu_*[K_l]=m''_l[H_{i_l}]$ avec m''_l le degré de $\nu\colon K_l\to H_{i_l}$. On obtient $\sum_l m'_l m''_l[H_{i_l}]=dd^c\log|\pi^*s|+\xi$ puis

$$\sum_l m'_l m''_l n_{i_l}[Z_{j_{i_l}}]=dd^c\pi_*(\log|\pi^*s|(-\xi)^{q-1})-\pi_*((-\xi)^q).$$

Or l'image directe par π de $\log|\pi^*s|(-\xi)^{q-1}$ (respectivement de $(-\xi)^q$) est une forme différentielle à coefficients localement intégrables dans X, de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $X\setminus Z$ où elle est égale à $\log|s|(dd^c\log|s|)^{q-1}$ (respectivement à $(dd^c\log|s|)^q$).

On peut éviter d'utiliser M qui est éventuellement singulière. En effet on peut raisonner localement et comme $M\setminus H\simeq X\setminus Z$ est lisse et que H ne contient aucune composante analytique irréductible de M, il existe par le théorème d'Hironaka une application holomorphe propre $\lambda\colon \widetilde{X}\to M$ vérifiant: $\widetilde{X}$ est lisse et $\lambda|_{\widetilde{X}\setminus\lambda^{-1}(H)}\colon \widetilde{X}\setminus\lambda^{-1}(H)\to M\setminus H$ est un biholomorphisme. On utilise alors $\mu=\pi\circ\lambda$ et $\mathcal{L}=\lambda^*L$ au lieu de π et L.

Exprimons maintenant le terme $-(dd^c\log|s|)^q|_{X\setminus Z}$ en suivant la méthode classique de Bott–Chern (cf. [7], [8]) qu'on va rappeler.

Soit $0\to L\to E\to Q\to 0$ une suite exacte de fibrés vectoriels holomorphes sur X avec $\mathrm{rg}L=1, \mathrm{rg}E=N$. Une métrique hermitienne $\mathcal{C}^\infty$ sur E induit des métriques sur L et Q. On note Θ_E,Θ_L et Θ_Q les $(1,1)$-formes de courbure des connexions de Chern respectivement sur E, L et Q.

En désignant par $c(\Theta_E)=\sum_k c_k(\Theta_E)$ la forme de Chern totale associée à Θ_E, il s'agit d'expliciter une solution φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans X de l'équation $c(\Theta_E)-c(\Theta_L)c(\Theta_Q)=-dd^c\varphi$ où on n'a pas fait figurer ici le signe $\wedge$. Pour définir φ on utilise les notations suivantes: $\mathrm{Hom}(E,E)=E\otimes E^*$ s'injecte dans l'algèbre extérieure $\bigwedge(E\oplus E^*)$ et la forme de Chern totale de Θ_E s'écrit alors $c(\Theta_E)=(I+(i/2\pi)\Theta_E)^N$ en identifiant $\bigwedge^N E\otimes\bigwedge^N E^*$ avec $\mathbf{C}$ à l'aide de I_E^N de sorte que $c_k(\Theta_E)=\binom{N}{k}I_E^{N-k}((i/2\pi)\Theta_E)^k$.

Avec v un repère holomorphe local de L, $v^*\in E^*$ l'adjoint, on note $\sigma=vv^*/|v|^2$ et $\alpha=DvDv^*/|v|^2$ où D désigne la connexion de Chern sur E. On peut alors prendre

$$\varphi=\frac{N}{2}\sum_{1\le j\le N-1}\frac{1}{j}\sigma\Big(\Big(I_E+\frac{i}{2\pi}\Theta_E\Big)^j-I_E^j\Big)\Big(I_E+\frac{i}{2\pi}\Theta_E+\frac{i}{2\pi}\alpha\Big)^{N-j-1}. \tag{2.1}$$

On a aussi $c(\Theta_Q)=c(\Theta_L)^{-1}c(\Theta_E)+dd^c(c(\Theta_L)^{-1}\varphi)$ et comme $c(\Theta_L)=1+c_1(\Theta_L)$, on a

$$-(-c_1(\Theta_L))^q=c_q(\Theta_E)-c_q(\Theta_Q)+\sum_{1\le k\le q-1}(-c_1(\Theta_L))^k\wedge c_{q-k}(\Theta_E)+dd^c\psi_0$$

où on note $\psi_0=\sum_{0\leq k\leq q-1}(-c_1(\Theta_L))^k\wedge\varphi_{q-k-1}$ avec φ_{q-k-1} la composante de bidegré $(q-k-1,\, q-k-1)$ de φ.

Appliquons ceci à la suite exacte $0\to L\to\pi^*E\to\pi^*E/L\to 0$ au-dessus de M et prenons les images directes par π. Comme $c_1(\Theta_L)=-dd^c\log|\pi^*s|$ dans $M\setminus H$, on a

$$\begin{aligned}(2.2)\qquad -(dd^c\log|s|)^q|_{X\setminus Z} &= c_q(\Theta_E)-c_q(\Theta_{E/\mathbf{C}s})\\ &\quad+\sum_{1\leq k\leq q-1}(dd^c\log|s|)^k\wedge c_{q-k}(\Theta_E)+dd^c\psi\end{aligned}$$

où $\psi=\sum_{0\leq k\leq q-1}(dd^c\log|s|)^k\wedge\varphi_{q-k-1}$ et φ est donnée par (2.1) avec $\sigma=ss^*/|s|^2$ et $\alpha=DsDs^*/|s|^2$. Etant l'image directe par l'éclatement π d'une forme différentielle $\mathcal{C}^\infty$ dans M, ψ de même que $c_q(\Theta_{E/\mathbf{C}s})$ est à coefficients L^1_{loc} dans X.

Ensuite, comme dans $X\setminus Z$

$$(dd^c\log|s|)^k=dd^c\left(-\frac{1}{2(k-1)}\left(\frac{dd^c|s|^2}{2|s|^2}\right)^{k-1}\right)=dd^c(\log|s|(dd^c\log|s|)^{k-1})$$

pour $k\geq 2$, on a

$$-(dd^c\log|s|)^q|_{X\setminus Z}=c_q(\Theta_E)-c_q(\Theta_{E/\mathbf{C}s})+dd^c\psi'$$

avec

$$\psi'=\sum_{1\leq k\leq q-1}\log|s|(dd^c\log|s|)^{k-1}\wedge c_{q-k}(\Theta_E)+\psi.$$

Le résultat suivant généralise alors la formule de Poincaré–Lelong.

Proposition 2.3. *Les formes différentielles $c_q(\Theta_{E/\mathbf{C}s})$ et ψ' qui sont $\mathcal{C}^\infty$ dans $X\setminus Z$ sont à coefficients L^1_{loc} dans X et on a dans X l'égalité entre courants*

$$\sum_j m_j[Z_j]=c_q(\Theta_E)-c_q(\Theta_{E/\mathbf{C}s})+dd^c\psi'+(dd^c\log|s|)^q.$$

En particulier la classe de cohomologie de $\sum_j m_jZ_j$ dans X est $c_q(E)-\{c_q(\Theta_{E/\mathbf{C}s})\}$ où $\{c_q(\Theta_{E/\mathbf{C}s})\}$ désigne la classe de cohomologie dans X du courant $(c_q(\Theta_{E/\mathbf{C}s}))\tilde{}$.

Le cas d'une variété projective X donne un exemple où cette Proposition s'applique. Supposons alors X munie d'un fibré en droites L ample. Pour Z sous-ensemble analytique de X, il existe $k\in\mathbf{N}$ et des sections $s_1,\dots,s_N\in H^0(X,L^{\otimes k})$ tels que $Z=s_1^{-1}(0)\cap\dots\cap s_N^{-1}(0)$. On prend alors $E=(L^{\otimes k})^{\oplus N}$ et $s=(s_1,\dots,s_N)$.

3. Approximations faibles du courant d'intégration

On exprime d'abord le courant d'intégration $\sum_j m_j[Z_j]$ à l'aide d'intégrales résiduelles. Soit ψ une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ de bidegré (p,p) à support compact dans X.

Proposition 3.1. (i) *En prenant pour* $\varepsilon>0$ *des valeurs régulières de* $\rho^{1/2}$, *on a*

$$\Big\langle \sum_j m_j[Z_j],\psi\Big\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}(2\varepsilon^2)^{-q}\int_{\rho=\varepsilon^2} d^c\rho\wedge(dd^c\rho)^{q-1}\wedge\psi.$$

(ii) *On a les égalités suivantes*

$$\begin{aligned}\Big\langle \sum_j m_j[Z_j],\psi\Big\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{q+1}{2^q\varepsilon^{2q+2}}\int_{\rho<\varepsilon^2} d\rho\wedge d^c\rho\wedge(dd^c\rho)^{q-1}\wedge\psi\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}(2\varepsilon^2)^{-q}\int_{\rho<\varepsilon^2}(dd^c\rho)^q\wedge\psi.\end{aligned}$$

Démonstration. (i) La Proposition 1.1 permet d'écrire, avec S et T qui y sont définies,

$$\Big\langle \sum_j m_j[Z_j],\psi\Big\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\rho>\varepsilon^2}(S\wedge dd^c\psi - dd^cS\wedge\psi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\rho=\varepsilon^2}(T\wedge\psi - S\wedge d^c\psi)$$

en utilisant la formule $S\wedge dd^c\psi - dd^cS\wedge\psi = d(S\wedge d^c\psi - d^cS\wedge\psi)$ puisque $p+q=n$ et la formule de Stokes.

Comme dS est à coefficients L^1_{loc} dans X, $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\rho=\varepsilon^2} S\wedge d^c\psi = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\rho>\varepsilon^2} d(S\wedge d^c\psi) = \langle d\widetilde{S} - \widetilde{dS}, d^c\psi\rangle = 0$ car $d\widetilde{S}-\widetilde{dS}=0$ puisque c'est un courant de dimension $2p+1$ localement plat dans X à support dans Z.

(ii) Appelant

$$L(\varepsilon) = \int_{\rho<\varepsilon^2} d\rho\wedge d^c\rho\wedge(dd^c\rho)^{q-1}\wedge\psi = \int_0^\varepsilon (\rho^{1/2})_*(d^c\rho\wedge(dd^c\rho)^{q-1}\wedge\psi)d(t^2)$$

on obtient l'égalité $\lim_{\varepsilon\to 0} 2^{-q-1}\varepsilon^{-2q-1}L'(\varepsilon) = \langle\sum_j m_j[Z_j],\psi\rangle$ d'après (i), qui entraîne $\langle\sum_j m_j[Z_j],\psi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}(q+1)L(\varepsilon)/(2^q\varepsilon^{2q+2})$.

Pour la dernière égalité, en appliquant la formule de Stokes, la quantité

$$\begin{aligned}\Phi(\varepsilon) &= \int_{\rho=\varepsilon^2} d^c\rho\wedge(dd^c\rho)^{q-1}\wedge\psi - \int_{\rho<\varepsilon^2}(dd^c\rho)^q\wedge\psi = -\int_{\rho<\varepsilon^2} d^c\rho\wedge(dd^c\rho)^{q-1}\wedge d\psi\\ &= \int_{\rho<\varepsilon^2} d\rho\wedge(dd^c\rho)^{q-1}\wedge d^c\psi = \int_0^\varepsilon\Big(\int_{\rho=t^2}(dd^c\rho)^{q-1}\wedge d^c\psi\Big)d(t^2)\end{aligned}$$

vérifie si $q\geq 2$:

$$\frac{\Phi'(\varepsilon)}{2\varepsilon}=\int_{\rho<\varepsilon^2}(dd^c\rho)^{q-1}\wedge dd^c\psi=\int_{\rho=\varepsilon^2}d^c\rho\wedge(dd^c\rho)^{q-2}\wedge dd^c\psi$$
$$=\varepsilon^{2q-2}\int_{\rho=\varepsilon^2}d^c\log\rho\wedge(dd^c\log\rho)^{q-2}\wedge dd^c\psi$$
$$=-\varepsilon^{2q-2}\int_{\rho>\varepsilon^2}(dd^c\log\rho)^{q-1}\wedge dd^c\psi.$$

La forme différentielle $(dd^c\log\rho)^{q-1}$ est à coefficients L^1_{loc} dans X et $((dd^c\log\rho)^{q-1})\tilde{}$ est fermé dans X. Donc $\int_{X\setminus Z}(dd^c\log\rho)^{q-1}\wedge dd^c\psi=0$ et $\Phi'(\varepsilon)=\mathrm{o}(\varepsilon^{2q-1})$ puis $\Phi(\varepsilon)=\mathrm{o}(\varepsilon^{2q})$, d'où la formule annoncée en utilisant (*i*). $\square$

Le résultat suivant fournit des régularisations de $\sum_j m_j[Z_j]$.

Proposition 3.2. *On a les égalités suivantes*

(i) $$\sum_j m_j[Z_j]=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon(q+1)d\rho\wedge d^c\rho\wedge(dd^c\rho)^{q-1}}{2^q(\rho+\varepsilon)^{q+2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon(dd^c\rho)^q}{2^q(\rho+\varepsilon)^{q+1}}$$

(ii) $$\sum_j m_j[Z_j]=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon(q+1)(dd^c\log(\rho+\varepsilon))^q}{2^q(\rho+\varepsilon)}.$$

Démonstration. (i) Soit η tel que $\operatorname{supp}\psi\subset\{x\in X:\rho(x)<\eta^2\}$ et $M(\varepsilon)=(2\varepsilon^2)^{-q}\int_{\rho=\varepsilon^2}d^c\rho\wedge(dd^c\rho)^{q-1}\wedge\psi$. On a

$$\varepsilon\int_X\frac{d\rho\wedge d^c\rho\wedge(dd^c\rho)^{q-1}\wedge\psi}{(\rho+\varepsilon)^{q+2}}=\varepsilon\int_{]0,\eta[}(\rho^{1/2})_*\left(\frac{d\rho\wedge d^c\rho\wedge(dd^c\rho)^{q-1}\wedge\psi}{(\rho+\varepsilon)^{q+2}}\right)$$
$$=\varepsilon\int_0^\eta\frac{d(t^2)}{(t^2+\varepsilon)^{q+2}}\int_{\rho=t^2}d^c\rho\wedge(dd^c\rho)^{q-1}\wedge\psi$$
$$=\varepsilon 2^{q+1}\int_0^\eta\frac{t^{2q+1}}{(t^2+\varepsilon)^{q+2}}M(t)dt.$$

Appelons $M(0)=\lim_{\varepsilon\to 0}M(\varepsilon)=\langle\sum_j m_j[Z_j],\psi\rangle$ d'après la Proposition 3.1. Pour $\delta>0$, il existe η' tel que pour $0<\varepsilon<\eta'$, on ait $|M(\varepsilon)-M(0)|\leq\delta$. On a donc

$$\left|\varepsilon\int_0^{\eta'}\frac{t^{2q+1}}{(t^2+\varepsilon)^{q+2}}M(t)dt-\varepsilon M(0)\int_0^{\eta'}\frac{t^{2q+1}}{(t^2+\varepsilon)^{q+2}}dt\right|\leq\varepsilon\delta\int_0^{\eta'}\frac{t^{2q+1}}{(t^2+\varepsilon)^{q+2}}dt.$$

Mais

$$\varepsilon\int_0^{\eta'}\frac{t^{2q+1}}{(t^2+\varepsilon)^{q+2}}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\eta'^2/\varepsilon}\frac{u^q}{(u+1)^{q+2}}du$$

tend vers

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{u^q}{(u+1)^{q+2}}du=\frac{1}{2(q+1)}.$$

Par ailleurs

$$\varepsilon\int_{\eta'}^{\eta}\frac{t^{2q+1}}{(t^2+\varepsilon)^{q+2}}M(t)dt\le\varepsilon\int_{\eta'}^{\eta}t^{-3}M(t)dt$$

tend vers 0. On a donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\varepsilon\int_0^{\eta}\frac{t^{2q+1}}{(t^2+\varepsilon)^{q+2}}M(t)dt\right)=\frac{M(0)}{2(q+1)},$$

ce qui démontre la $1^{\text{ère}}$ égalité.

Pour la $2^{\text{ème}}$ on écrit

$$\begin{aligned}\varepsilon\int_X\frac{(dd^c\rho)^q\wedge\psi}{2^q(\rho+\varepsilon)^{q+1}}&=\varepsilon\int_{]0,\eta[}\frac{(\rho^{1/2})_*((dd^c\rho)^q\wedge\psi)}{2^q(t^2+\varepsilon)^{q+1}}=\varepsilon\int_0^{\eta}\frac{d\big(\int_{\rho<t^2}(dd^c\rho)^q\wedge\psi\big)}{2^q(t^2+\varepsilon)^{q+1}}\\&=2(q+1)\varepsilon\int_0^{\eta}\frac{t^{2q+1}}{(t^2+\varepsilon)^{q+2}}\left((2t^2)^{-q}\int_{\rho<t^2}(dd^c\rho)^q\wedge\psi\right)dt\end{aligned}$$

qui tend vers $\langle\sum_j m_j[Z_j],\psi\rangle$ d'après la Proposition 3.1.

(ii) Cela résulte alors de la formule

$$(dd^c\log(\rho+\varepsilon))^q=\left(\frac{dd^c\rho}{\rho+\varepsilon}\right)^q-q(\rho+\varepsilon)^{-q-1}d\rho\wedge d^c\rho\wedge(dd^c\rho)^{q-1}.\quad\square\tag{3.3}$$

Proposition 3.4. *On a les égalités suivantes*

$$\sum_j m_j[Z_j]=\lim_{\lambda\to 0^+}\lambda\rho^{\lambda-q-1}\frac{1}{2}d\rho\wedge d^c\rho\wedge\left(\frac{1}{2}dd^c\rho\right)^{q-1}=\lim_{\lambda\to 0^+}\frac{\lambda}{q}\rho^{\lambda-q}\left(\frac{1}{2}dd^c\rho\right)^q.$$

Démonstration. Soit $I(\varepsilon)=\int_{\rho<\varepsilon^2}\alpha$ pour α une $2n$-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans X. On considère la transformée de Mellin $J(\lambda)=2\lambda\int_0^{\eta}I(\varepsilon)\varepsilon^{2\lambda-1}d\varepsilon$ où η vérifie $\operatorname{supp}\alpha\subset\{x\in X:\rho(x)<\eta^2\}$.

On suppose $\lim_{\varepsilon\to 0}I(\varepsilon)/\varepsilon^{2r}=C$, alors $J(\lambda)$ existe pour $\lambda>-r$ et

$$\lim_{\lambda\to -r^+}(\lambda+r)J(\lambda)=-rC.$$

En effet, pour $\delta>0$, il existe η' tel que $|I(\varepsilon)-C\varepsilon^{2r}|<\delta\varepsilon^{2r}$ pour $0<\varepsilon<\eta'$. Alors

$$\left|(\lambda+r)\int_0^{\eta'}I(\varepsilon)\varepsilon^{2\lambda-1}d\varepsilon-\frac{C}{2}\eta'^{2r+2\lambda}\right|<\frac{\delta}{2}\eta'^{2r+2\lambda}$$

donc pour λ proche de $-r$, $\left|(\lambda+r)\int_0^{\eta'} I(\varepsilon)\varepsilon^{2\lambda-1}d\varepsilon - C/2\right| < (\delta/2)(2+\delta)$. D'autre part, $I(\varepsilon)$ étant bornée, $\lim_{\lambda\to -r^+}(\lambda+r)\int_{\eta'}^{\eta} I(\varepsilon)\varepsilon^{2\lambda-1}d\varepsilon = 0$.

Par ailleurs, on a $I(\varepsilon)\varepsilon^{2\lambda-1} = \varepsilon^{2\lambda-1}\int_{]0,\varepsilon[}(\rho^{1/2})_*\alpha$ puis par une intégration par parties pour $\lambda > -r$, $-J(\lambda)+\eta^{2\lambda}\int_X \alpha = \int_{]0,\eta[}\varepsilon^{2\lambda}(\rho^{1/2})_*\alpha = \int_X \rho^\lambda\alpha$. On peut donc écrire $\lim_{\lambda\to 0^+}\lambda\int_X \rho^{\lambda-r}\alpha = rC$ et on applique cette formule à

$$\alpha = d\rho\wedge d^c\rho\wedge(dd^c\rho)^{q-1}\wedge\psi$$

(respectivement $(dd^c\rho)^q\wedge\psi$) où r et C sont donnés par la Proposition 3.1.

Voici une autre démonstration de la Proposition 3.4 déduite directement de la Proposition 1.1 à l'aide de la formule $\log\rho(x) = \frac{\partial}{\partial\lambda}(\rho(x)^\lambda)|_{\lambda=0}$ pour $x\in X\setminus Z$ et avec $\lambda\geq 0$.

La convexité par rapport à $\lambda\in\mathbf{R}$ de $\rho(x)^\lambda$ entraîne que $(\rho(x)^\lambda - 1)/\lambda$ est croissante par rapport à $\lambda>0$. Par le théorème de convergence dominée, on a donc

$$\int_X \log\rho(dd^c\log\rho)^{q-1}\wedge dd^c\psi = \lim_{\lambda\to 0^+}\int_X \frac{\rho^\lambda - 1}{\lambda}(dd^c\log\rho)^{q-1}\wedge dd^c\psi.$$

Ainsi $\left\langle\left(\frac{1}{2}dd^c\log\rho\right)^q,\psi\right\rangle$ est la dérivée à droite en 0 de $K(\lambda) = 2^{-q}\int_X \rho^\lambda(dd^c\log\rho)^{q-1}\wedge dd^c\psi$. Signalons que l'opérateur de Monge–Ampère $(dd^c\log\rho)^{q-1}$ est une forme différentielle à coefficients localement intégrables dans X puisque par le théorème de Skoda–El Mir le courant $\mathbf{1}_Z(dd^c\log\rho)^{q-1}$ est fermé d'ordre 0 à support dans Z donc nul. Toujours pour $\lambda>0$, on a encore d'après le théorème de convergence dominée

$$\int_X \rho^\lambda(dd^c\log\rho)^{q-1}\wedge dd^c\psi = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_X (\rho+\varepsilon)^\lambda(dd^c\log\rho)^{q-1}\wedge dd^c\psi$$

où $\varepsilon>0$, donc $K(\lambda) = \lim_{\varepsilon\to 0} 2^{-q}\int_X dd^c((\rho+\varepsilon)^\lambda)\wedge(dd^c\log\rho)^{q-1}\wedge\psi$. On a dans $X\setminus Z$ l'égalité

$$\frac{1}{\lambda}dd^c((\rho+\varepsilon)^\lambda) = \rho(\rho+\varepsilon)^{\lambda-1}dd^c\log\rho + (\rho+\varepsilon)^{\lambda-2}\left(\lambda+\frac{\varepsilon}{\rho}\right)\frac{i}{\pi}\partial\rho\wedge\bar\partial\rho.$$

Remarquons que $\rho^{\lambda-2}i\partial\rho\wedge\bar\partial\rho\wedge(dd^c\log\rho)^{q-1}\wedge\psi$ est à coefficients L^1_{loc} dans X. En effet soit $v = -(-\log\rho)^{1/2}$ qui est une fonction quasi-plurisousharmonique au voisinage de Z. D'après la théorie des opérateurs de Monge–Ampère,

$$-v^{-3}\frac{i}{4\pi}\partial\log\rho\wedge\bar\partial\log\rho\wedge(dd^c\log\rho)^{q-1} = dd^c v\wedge(dd^c\log\rho)^{q-1} + \frac{1}{2}v^{-1}(dd^c\log\rho)^q$$

est à coefficients L^1_{loc} dans X et on utilise $\rho^\lambda = o(v^{-3})$.

Comme $(\rho+\varepsilon)^{\lambda-2}\varepsilon=(\varepsilon/(\rho+\varepsilon))(\rho+\varepsilon)^{\lambda-1}\leq\rho^{\lambda-1}$ si de plus $\lambda<1$, on a par le théorème de convergence dominée

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{X\setminus Z}(\rho+\varepsilon)^{\lambda-2}\frac{\varepsilon}{\rho}\frac{i}{\pi}\partial\rho\wedge\bar{\partial}\rho\wedge(dd^c\log\rho)^{q-1}\wedge\psi=0$$

et en appliquant le théorème de convergence dominée à l'autre terme,

$$\frac{K(\lambda)}{\lambda}=2^{-q}\int_{X\setminus Z}\Big(\rho^{\lambda}dd^c\log\rho+\lambda\rho^{\lambda-2}\frac{i}{\pi}\partial\rho\wedge\bar{\partial}\rho\Big)\wedge(dd^c\log\rho)^{q-1}\wedge\psi.$$

Appliquant dans $X\setminus Z$ la formule (3.3) avec $\varepsilon=0$ et l'exposant $q-1$ au lieu de q, on a

$$\begin{aligned}\frac{K(\lambda)}{\lambda}&=2^{-q}\int_{X\setminus Z}\rho^{\lambda}(dd^c\log\rho)^{q}\wedge\psi+\lambda\rho^{\lambda-q-1}\frac{i}{\pi}\partial\rho\wedge\bar{\partial}\rho\wedge(dd^c\rho)^{q-1}\wedge\psi\\&=2^{-q}\int_{X\setminus Z}\left(1-\frac{\lambda}{q}\right)\rho^{\lambda}(dd^c\log\rho)^{q}\wedge\psi+\frac{\lambda}{q}\rho^{\lambda-q}(dd^c\rho)^{q}\wedge\psi\end{aligned}$$

en utilisant la formule (3.3) avec $\varepsilon=0$. Puis

$$\begin{aligned}K'(0^+)&=\int_X\left(\frac{1}{2}dd^c\log\rho\right)^{q}\Big|_{X\setminus Z}\wedge\psi+\lim_{\lambda\to 0^+}\int_X\lambda\rho^{\lambda-q-1}\frac{1}{2}d\rho\wedge d^c\rho\wedge\left(\frac{1}{2}dd^c\rho\right)^{q-1}\wedge\psi\\&=\int_X\left(\frac{1}{2}dd^c\log\rho\right)^{q}\Big|_{X\setminus Z}\wedge\psi+\lim_{\lambda\to 0^+}\int_X\frac{\lambda}{q}\rho^{\lambda-q}\left(\frac{1}{2}dd^c\rho\right)^{q}\wedge\psi.\quad\square\end{aligned}$$

Supposons que X est un ouvert U de $\mathbf{C}^n$ et que Z est défini par les équations $f_1=...=f_N=0$ où les $f_l\in\mathcal{O}(U)$. Considérant $\rho=|f|^2$, on va adopter le point de vue de Gelfand (cf. [3], [10], [19]) du prolongement méromorphe de $|f|^{2\lambda}$. Le théorème d'Atiyah affirme que l'application associant à λ la distribution $|f|^{2\lambda}$, qui est holomorphe pour Re $\lambda>0$, a un prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$ à pôles dans $\mathbf{Q}_-^*$.

Rappelons le principe de la démonstration de l'existence de ce prolongement. On considère la fonction holomorphe F dans $U\times U$ définie par $F(z,w)=\sum_{1\leq j\leq N}f_j(z)\overline{f_j(\overline{w})}$ et un point $z_0\in Z$. L'existence du polynôme de Bernstein donne un polynôme $\mathcal{B}(\lambda)$ de coefficient dominant 1 et un opérateur différentiel $P(\lambda,z,w,\partial/\partial z,\partial/\partial w)$ polynômial en λ, à coefficients holomorphes en (z,w) au voisinage de $(z_0,\bar{z}_0)$ tel que $P(\lambda,z,w,\partial/\partial z,\partial/\partial w)F^{\lambda+1}=\mathcal{B}(\lambda)F^{\lambda}$. Substituant $w=\bar{z}$, on obtient l'égalité $P(\lambda,z,\bar{z},\partial/\partial z,\partial/\partial\bar{z})|f|^{2(\lambda+1)}=\mathcal{B}(\lambda)|f|^{2\lambda}$ qui permet par récurrence de prolonger $|f|^{2\lambda}$ à $\mathbf{C}$.

Pour une démonstration du fait que les pôles sont dans $\mathbf{Q}_-^*$, on pourra consulter [19].

Remarquons maintenant que la distribution égale à ρ^λ dans la variété complexe X dépend aussi méromorphiquement de $\lambda\in\mathbf{C}$. En effet avec les notations figurant à la fin de la Section 1, on a $\rho^\lambda|_V=(\pi|_{\pi^{-1}(V)})_*(|f_\alpha\circ\pi|^{2\lambda}|_{\pi^{-1}(V)}h^\lambda)$ avec $|f_\alpha\circ\pi|=|\sigma_\alpha|e^{-\varphi_\alpha}$ pour σ_α une fonction holomorphe et φ_α une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $\pi^{-1}(U_\alpha)$.

Proposition 3.5. *Avec δ (respectivement γ) la distribution dans la variété complexe X définie comme étant le résidu au pôle $-q-1$ (respectivement $-q$) de $(q-1)!\rho^\lambda/\pi^q$, on a*

$$\sum_j m_j[Z_j]=\delta\frac{i}{2}\partial\rho\wedge\bar\partial\rho\wedge\Big(\frac{i}{2}\partial\bar\partial\rho\Big)^{q-1}/(q-1)!=\gamma\Big(\frac{i}{2}\partial\bar\partial\rho\Big)^q/q!.$$

Démonstration. Ecrivons

$$\rho^{\lambda-q}=h(\lambda)+\frac{\rho_1}{\lambda}+...+\frac{\rho_d}{\lambda^d}$$

avec $h(\lambda)$ holomorphe au voisinage de 0 et $\rho_1,...,\rho_d$ des distributions. Comme $\lim_{\lambda\to0^+}\lambda\rho^{\lambda-q}(dd^c\rho)^q$ existe d'après la Proposition 3.4, on a $\rho_i(dd^c\rho)^q=0$ pour $i=2,...,d$ et

$$\lim_{\substack{\lambda\to0\\ \lambda\in\mathbf{C}}}\frac{\lambda}{q}\rho^{\lambda-q}\Big(\frac{1}{2}dd^c\rho\Big)^q=\frac{\rho_1}{q}\Big(\frac{1}{2}dd^c\rho\Big)^q. \quad\square$$

Supposant à nouveau que X est un ouvert de $\mathbf{C}^n$ et que $\rho=|f|^2$, la Proposition 3.5 donne l'écriture

$$\sum_j m_j[Z_j]=\sum_{1\le i_1<...<i_q\le N}\partial f_{i_1}\wedge...\wedge\partial f_{i_q}\wedge R_{i_1...i_q}$$

où $R_{i_1...i_q}=(i^{q^2}/2^q)\gamma\overline{\partial f_{i_1}\wedge...\wedge\partial f_{i_q}}$ est un $(0,q)$-courant dans U à support dans Z.

Lorsque $N=q$ et f est une submersion, $\gamma=f^*\delta_0=\lim_{\varepsilon\to0}\mathbf{1}_{\{|f|<\varepsilon\}}/(\pi^q\varepsilon^{2q}/q!)$.

Cela suggère d'étudier lorsque α est une $2n$-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans U, le comportement pour $\varepsilon\to0$ de

$$I(\varepsilon)=\int_{|f|<\varepsilon}\alpha. \tag{3.6}$$

On aura besoin de la décroissance rapide à l'infini de $\int_U|f|^{2\lambda}\alpha$ sur la droite Re $\lambda=c$, uniforme par rapport à c dans un intervalle borné. Rappelons la justification de ce résultat. Il existe un entier $j\ge1$ et des opérateurs différentiels $a_k(z,w,\partial/\partial z,\partial/\partial w)$ à coefficients holomorphes en (z,w) au voisinage de $(z_0,\bar z_0)$ tels que $\lambda^jF^\lambda=\sum_{0\le k<j}\lambda^ka_k(z,w,\partial/\partial z,\partial/\partial w)F^\lambda$. Substituant $w=\bar z$, on obtient l'égalité $\lambda^j|f|^{2\lambda}=\sum_{0\le k<j}\lambda^ka_k(z,\bar z,\partial/\partial z,\partial/\partial\bar z)|f|^{2\lambda}$ puis par récurrence sur $l\ge1$

l'existence de $a_{l,k}(z,\bar{z},\partial/\partial z,\partial/\partial\bar{z})$ tels que

$$\begin{aligned}|f|^{2\lambda} &= \sum_{-jl\leq k\leq -l} \lambda^k a_{l,k}(z,\bar{z},\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial \bar{z}})|f|^{2\lambda}\\ &= \sum_{-jl\leq k\leq -l} \lambda^k(\mathcal{B}(\lambda)...\mathcal{B}(\lambda+m-1))^{-1}a_{l,k}P_\lambda...P_{\lambda+m-1}(|f|^{2(\lambda+m)})\end{aligned}$$

pour tout $m\geq 1$, après avoir itéré l'équation de Bernstein. Pour χ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans un voisinage ouvert de z_0, on a alors

$$\int_U |f|^{2\lambda}\chi\alpha = \sum_{-jl\leq k\leq -l}\lambda^k(\mathcal{B}(\lambda)...\mathcal{B}(\lambda+m-1))^{-1}\int_U |f|^{2(\lambda+m)}P^*_{\lambda+m-1}...P^*_\lambda a^*_{l,k}(\chi\alpha)$$

qui supposant $a'\leq \mathrm{Re}\,\lambda\leq a$ et choisissant m assez grand, apparaît comme $\mathrm{O}(|\lambda|^{m(\deg P-\deg\mathcal{B})-l})$.

On peut maintenant établir le développement asymptotique suivant.

Proposition 3.7. *Pour $a'<0$ qui n'est pas un pôle de $|f|^{2\lambda}$, soit $\lambda_0<...<\lambda_k<0$ les pôles de $|f|^{2\lambda}$ supérieurs à a'. Il existe $j\in\mathbf{N}^*$ et des coefficients $D_{j',k'}$ tels que la fonction I de la formule* (3.6) *vérifie quand $t\to-\infty$,*

$$I(e^{t/2}) = \sum_{\substack{0\leq j'\leq j-1\\ 0\leq k'\leq k}} D_{j',k'}t^{j'}e^{-t\lambda_{k'}} + \mathrm{O}(e^{-ta'}).$$

Démonstration. On considère comme [2] une transformée de Mellin $J(\lambda) = 2\lambda\int_0^\eta I(\varepsilon)\varepsilon^{2\lambda-1}d\varepsilon$ où η vérifie supp $\alpha\subset\{x\in U : |f(x)|<\eta\}$. On a $I(\varepsilon)\varepsilon^{2\lambda-1} = \varepsilon^{2\lambda-1}\int_{]0,\varepsilon[}|f|_*\alpha$ puis pour $\mathrm{Re}\,\lambda>0$ par une intégration par parties $-J(\lambda)+\eta^{2\lambda}\int_U\alpha = \int_{]0,\eta[}\varepsilon^{2\lambda}|f|_*\alpha = \int_U |f|^{2\lambda}\alpha$, ce qui donne un prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$ pour $J(\lambda)$. Comme pour $a>0$ fixé et b réel, $J(a+ib)/(a+ib)$ est la transformée de Fourier inverse de la fonction $\mathbf{1}_{]-\infty,2\log\eta[}(t)I(e^{t/2})e^{at}$ qui est à variation bornée pour $t\in\mathbf{R}$, on a par la formule de Dirichlet–Jordan, pour tout $t<2\log\eta$, l'égalité $I(e^{t/2}) = \lim_{B\to+\infty}(1/(2\pi i))\int_{a-iB}^{a+iB}G_t(\lambda)d\lambda$ avec $G_t(\lambda) = (J(\lambda)/\lambda)e^{-t\lambda}$. La formule des résidus donne pour $B>0$

$$\begin{aligned}\int_{a-iB}^{a+iB} G_t(\lambda)\,d\lambda = 2\pi i\sum_{0\leq k'\leq k}\mathrm{Res}_{\lambda_{k'}}G_t(\lambda) + \int_{a'-iB}^{a'+iB}G_t(\lambda)\,d\lambda\\ +\int_{a'+iB}^{a+iB}G_t(\lambda)\,d\lambda - \int_{a'-iB}^{a-iB}G_t(\lambda)\,d\lambda.\end{aligned}$$

On a l'inégalité

$$\left|\frac{J(x+iB)}{x+iB}\right| \leq \frac{C}{|B|}\left(\eta^{2x}+\left|\int_U |f|^{2(x+iB)}\alpha\right|\right)$$

pour x et B réels, $B\neq 0$. La fonction $\int_U |f|^{2(x+iB)}\alpha$ est bornée sur $|B|\geq 1$ uniformément pour $a'\leq x\leq a$ donc $\lim_{B\to\pm\infty}\int_{a'+iB}^{a+iB} G_t(\lambda)\,d\lambda=0$. Ensuite $|\lim_{B\to+\infty}\int_{a'-iB}^{a'+iB} G_t(\lambda)\,d\lambda|$ qui est

$$\leq C'e^{-ta'}\left(\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\eta^{2iy}e^{-tiy}}{a'+iy}\,dy\right|+\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\int_U |f|^{2(a'+iy)}\alpha\right|dy\right)$$

est $\mathrm{O}(e^{-ta'})$. Avec j un entier $\geq$ à l'ordre de chacun de ces pôles et $\chi(t)=e^{-t}/t$, on obtient

$$I(e^{t/2})=\sum_{\substack{1\leq j'\leq j\\ 0\leq k'\leq k}}\frac{1}{(j-j')!}\frac{d^{j-j'}}{d\lambda^{j-j'}}(J(\lambda)(\lambda-\lambda_{k'})^j)\bigg|_{\lambda=\lambda_{k'}}\frac{t^{j'}}{(j'-1)!}\chi^{(j'-1)}(t\lambda_{k'})+\mathrm{O}(e^{-ta'}).$$

□

Pour avoir un analogue de la Proposition 3.7 dans le cas d'une variété complexe X, on peut considérer

$$I(\varepsilon)=\sum_\beta\int_{|f_\beta|<\varepsilon}\lambda_\beta\alpha \tag{3.8}$$

pour α une $2n$-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans X et avec les notations de la Section 1, $|f_\beta|$ désignant ici la norme hermitienne standard de f_β.

Bibliographie

1. Andersson, M., Residues of holomorphic sections and Lelong currents, *Ark. Mat.* **43** (2005), 201–219.
2. Barlet, D. et Maire, H.-M., Développements asymptotiques, transformation de Mellin complexe et intégration sur les fibres, dans *Séminaire d'analyse P. Lelong, P. Dolbeault et H. Skoda, Années 1985–1986*, Lect. Notes in Math. **1295**, pp. 11–23, Springer, Berlin–Heidelberg, 1987.
3. Berenstein, C. A. et Yger, A., Analytic residue theory in the non-complete intersection case, *J. Reine Angew. Math.* **527** (2000), 203–235.
4. Berndtsson, B., Cauchy–Leray forms and vector bundles, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **24** (1991), 319–337.
5. Bismut, J.-M., Gillet, H. et Soulé, C., Complex immersions and Arakelov geometry, dans *The Grothendieck Festschrift, Vol. I*, Prog. Math. **86**, pp. 249–331, Birkhäuser, Basel–Boston, 1990.
6. Bost, J.-B., Gillet, H. et Soulé, C., Heights of projective varieties and positive Green forms, *J. Amer. Math. Soc.* **7** (1994), 903–1027.
7. Bott, R. et Chern, S.-S., Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeroes of their holomorphic sections, *Acta Math.* **114** (1965), 71–112.

8. Bott, R. et Chern, S.-S., Some formulas related to complex transgression, dans *Essays on Topology and Related Topics*, pp. 48–57, Springer, Berlin–New York, 1970.
9. Coleff, N., Herrera, M. et Lieberman, D., Algebraic cycles as residues of meromorphic forms, *Math. Ann.* **254** (1980), 73–87.
10. Dan, N., Prolongement méromorphe des courants de Green, *Math. Ann.* **323** (2002), 175–199.
11. Demailly, J.-P., Estimations L^2 pour l'opérateur $\bar{\partial}$ d'un fibré vectoriel holomorphe semi-positif au-dessus d'une variété kählerienne complète, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **15** (1982), 457–511.
12. Demailly, J.-P., Monge–Ampère operators, Lelong numbers and intersection theory, dans *Complex Analysis and Geometry*, pp. 115–193, Plenum Press, New York, 1993.
13. Fornæss, J. E. et Sibony, N., Oka's inequality for currents and applications, *Math. Ann.* **301** (1995), 399–419.
14. Harvey, F. R. et Lawson Jr., H. B., A theory of characteristic currents associated with a singular connection, *Bull. Amer. Math. Soc.* **31** (1994), 54–63.
15. King, J. R., A residue formula for complex subvarieties, dans: *Proceedings of the Carolina Conference on Holomorphic Mappings and Minimal Surfaces* (*Chapel Hill, NC, 1970*), pp. 43–56, Dept. of Math., Univ. of North Carolina, Chapel Hill, NC, 1970.
16. King, J. R., Global residues and intersections on a complex manifold, *Trans. Amer. Math. Soc.* **192** (1974), 163–199.
17. King, J. R., Refined residues, Chern forms and intersections, dans *Value-distribution Theory,* Part A, pp. 169–190, Marcel Dekker, New York, 1974.
18. Méo, M., Résidus dans le cas non nécessairement intersection complète, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **333** (2001), 33–38.
19. Passare, M., Tsikh, A. et Yger, A., Residue currents of the Bochner–Martinelli type, *Publ. Mat.* **44** (2000), 85–117.
20. Raisonnier, J., Formes de Chern et résidus raffinés de J. R. King, *Bull. Sci. Math.* **102** (1978), 145–154.
21. Rossi, H., Picard variety of an isolated singular point, *Rice Univ. Stud.* **54** (1968), 63–73.

Michel Méo
I.E.C.N.
Université de Nancy I
bd des Aiguillettes, BP 239
FR-54506 Vandoeuvre-lès-Nancy
France
Michel.Meo@iecn.u-nancy.fr

Reçu le 21 janvier 2003
révisé le 3 octobre 2005
published online August 3, 2006