ARKIV FÖR MATEMATIK Band 4 nr 1

Mitgeteilt am 3. Dezember 1958 durch T. NAGELL und LENNART CARLESON

Über ein Problem in der Theorie der Primzahlen

Von P. KUHN

Einleitung

Das Problem, das wir hier betrachten werden, geht auf eine Vermutung von Lehmer aus dem Jahre 1900 zurück [1] und wurde von Landau 1909 [2] gelöst. Es gehört zu den Primzahlproblemen, welche Landau im fünften Buche seines Standardwerkes über Primzahlen [3] behandelte und zu denen er in der historischen Einleitung bemerkte: „Die weiteren Primzahlprobleme, um welche es sich in diesem Buche handelt, sind keineswegs so beschaffen, dass ihre Lösung sich durch unmittelbare Anwendung der Ergebnisse und Methoden der ersten vier Bücher ergibt. Vielmehr muss dazu eine Reihe weiterer Überlegungen allgemeiner Natur hinzutreten, insbesondere in Bezug auf die bisher nur gelegentlich vorgekommene Benutzung Dirichletscher Reihen, welche bei freier Bahn mehrdeutige Funktionen definieren." [4]

Wir beschränken uns hier auf ein typisches Problem dieser Art, indem wir das folgende Theorem beweisen.

Theorem. *Es seien λ verschiedene zu k teilerfremde Restklassen $ky+l_1, \ldots, ky+l_\lambda$ gegeben. Es sei $\Theta(1)=1$ und für $n>1$*

$$\Theta(n)=1 \quad \textit{oder} \quad 0,$$

je nach dem alle Primzahlen von n einer jener λ Klassen angehören oder nicht. Es werde für die Eulersche Funktion $\varphi(k)=k\prod_{p|k}(1-p^{-1})=h$ gesetzt. Dann existiert

$$\lim_{x=\infty} \sum_{n\leqslant x} \Theta(n)\cdot x^{-1}\log^{1-\lambda h^{-1}} x \tag{1}$$

und ist >0.

Da der Beweis des Primzahlsatzes für die arithmetischen Progressionen (PAP) bereits im zweiten Buche des Landauschen Werkes enthalten ist, kann man sich mit Rücksicht auf die oben zitierte Bemerkung Landaus die Frage stellen, ob der Beweis von (1) mit elementaren Mitteln, d. h. ohne Anwendung der Funktionstheorie komplexer Variabler, geführt werden kann, wenn man den PAP als bewiesen voraussetzt. Diese Frage werden wir im Folgenden bejahen. Da der PAP inzwischen elementar bewiesen wurde [5], gelangen wir zu einem vollständig elementaren Beweis von (1).

Der Beweis wird in zwei Abschnitte zerfallen. Im ersten Abschnitt werden wir bloss die Eigenschaften der L-Funktionen für *reelles* $s \geqslant 1$ benötigen. Wir werden hier mit Dirichletschen Reihen reeller Variabler arbeiten, die in den ersten zwei Büchern des Landauschen Werkes behandelt und auch bereits von Mertens [6] beim Beweis seiner bekannten Abschätzungen für die Summen $\sum p^{-1} \log p$ über alle Primzahlen $p \equiv l_i \pmod{k}$, $(l_i, k) = 1$, $p \leqslant x$ benützt wurden. Es wird also im ersten Abschnitt weder von der Funktionstheorie komplexer Variabler noch vom PAP Gebrauch gemacht werden. Wir werden die (1) analoge, aber weniger scharfe Aussage beweisen:

Es ist
$$\lim_{x=\infty} \sum_{n \leqslant x} \Theta(n)\, n^{-1} \cdot \log^{-\lambda h^{-1}} x = B_0, \tag{2}$$

wo B_0 *einen konstanten Wert* > 0 *hat.*

Im zweiten Abschnitt werden wir dann den PAP voraussetzen und von (2) ausgehend rasch zum Beweis von (1) gelangen.

In meinem Vortrag beim XIII. Skandinavischen Mathematikerkongress, Helsinki, 1957, der den Titel: „Ein Beitrag zur Viggo Brunschen Methode" hatte, skizzierte ich im Zusammenhang mit anderen Problemen auch einen Beweis von (1). Nun erkannte ich später, dass (1) auch ohne Benützung der Viggo Brunschen Methode bewiesen werden kann, während dies bei den anderen in meinem Vortrag berührten Primzahlproblemen nicht der Fall zu sein scheint. Ich behandle daher den Beweis von (1) getrennt von den übrigen Problemen meines Vortrags und hoffe auf diese in einer späteren Arbeit zurückkommen zu können.

Erster Abschnitt

Im Folgenden bezeichnen wir mit p immer Primzahlen. Ferner sollen alle Kongruenzen mod k verstanden werden, wobei k immer ein und denselben festen Wert hat. Es gilt dann

Lemma 1. *Die Funktion* $\Lambda_\lambda(n)$ *sei folgendermassen definiert: Es sei* m *eine ganze Zahl* $\geqslant 1$, *dann ist*

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_\lambda(n) &= \log p, && \textit{wenn } n = p^m \textit{ ist und } p \textit{ einer der Kongruenzen} \\ & && p \equiv l_v \ (v \leqslant \lambda) \textit{ Genüge leistet,} \\ \Lambda_\lambda(n) &= 0 && \textit{in allen übrigen Fällen.} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Setzen wir dann
$$\tau_\lambda(x) = \sum_{n \leqslant x} n^{-1} \Lambda_\lambda(n),$$

so gilt bei beliebiger Wahl der l_v *und der Zahl* λ
$$|\tau_\lambda(x) - \lambda h^{-1} \log x| \leqslant C, \tag{4}$$

wo C *eine Konstante ist.*

Es ist

$$\sum_{n\leqslant x} n^{-1}\Lambda_\lambda(n)=\sum_{v\leqslant\lambda}\Big\{\sum_{\substack{p\equiv l_v\\ p\leqslant x}} p^{-1}\log p+\sum_{m=2}\sum_{\substack{p\equiv l_v\\ p^m\leqslant x}} p^{-m}\log p\Big\}$$

und die dreifache Summe links muss kleiner sein als die Summe der konvergenten Reihe

$$\sum_{v\leqslant\lambda}\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{p\equiv l_v}^{\infty} p^{-m}\log p.$$

Hieraus und aus den in der Einleitung erwähnten Mertenschen Abschätzungen

$$\sum_{\substack{p\equiv l_v\\ p\leqslant x}} p^{-1}\log p=h^{-1}\log x+O(1) \tag{5}$$

ergibt sich (4).

Im Folgenden benützen wir die Abkürzungen

$$\lambda h^{-1}=\eta,\qquad \sigma_\eta(x)=\sum_{n\leqslant x}\Theta(n)\,n^{-1}.$$

Ferner sollen mit C_1, C_2, ... immer positive Konstante bezeichnet werden.

Wir beweisen nun

Lemma 2. *Für alle $x\geqslant 16>e^e$ gelten die Ungleichheiten*

$$C_1\log^\eta x<\sigma_\eta(x)<C_2\log^\eta x. \tag{6}$$

Aus (5) erhält man mittels partieller Summation die für beliebiges $\lambda\leqslant h$ und beliebige l_v, $(l_v, k)=1$, giltige Ungleichheit

$$\Big|\sum_{v\leqslant\lambda}\sum_{\substack{p\equiv l_v\\ p\leqslant x}} p^{-1}-\eta\log\log x\Big|<C_3.$$

Es sei nun mit

$$\sigma_\eta^*(x)=\sum_{n\leqslant x}{}^{*}\,\Theta(n)\,n^{-1}$$

die Summe bezeichnet, in der n nur quadratfreie Zahlen durchläuft. Es ist dann

$$\sigma_\eta^*(x)\leqslant\sigma_\eta(x)<\sigma_\eta^*(x)\sum_{m=1}^{\infty} m^{-2}=\sigma_\eta^*(x)\,C_4.$$

Seien weiter p_{l_m}, $m=1, 2, \dots, t$, Primzahlen, die einer der Kongruenzen $p_{l_m}\equiv l_v$ $(v\leqslant\lambda)$ Genüge leisten, und betrachten wir die Summen

$$S_t=\sum p_{l_1}^{-1}\dots p_{l_t}^{-1},\quad p_{l_1}\dots p_{l_t}\leqslant x,\quad p_{l_1}<\dots<p_{l_t},$$

so erhalten wir leicht die Ungleichheiten

$$S_t \leqslant \frac{1}{t!} \Big(\sum_{v \leqslant \lambda} \sum_{\substack{p \equiv l_v \\ p \leqslant x}} p^{-1} \Big)^t < \frac{1}{t!} (\eta \log \log x + C_3)^t.$$

Aus ihnen folgt

$$\sigma_\eta^* (x) < 1 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t!} (\eta \log \log x + C_3)^t = e^{C_3} e^{\eta \log \log x},$$

also

$$\sigma_\eta (x) < e^{C_3} C_4 \log^\eta x. \tag{7}$$

Setzen wir $C_2 = e^{C_3} C_4$, so ergibt sich die zweite Ungleichheit in (6).

Um auch die erste Ungleichheit in (6) zu beweisen, betrachten wir die Funktion $\sigma_{\eta'} (x) = \sum_{n \leqslant x} \Theta' (n)\, n^{-1}$, in welcher $\Theta' (n)$ folgendermassen definiert ist. Es ist $\Theta' (1) = 1$ und für $n > 1$, $\Theta' (n) = 1$ oder 0, je nach dem alle Primfaktoren von n einer der $h - \lambda$ teilerfremden Klassen $k y + l_{\lambda+1}, \dots, k y + l_h$ angehören oder nicht. In unserer Bezeichnungsweise muss also $\eta' = 1 + \eta$ sein und es muss für $\sigma_{\eta'} (x)$ die Abschätzung (7) in der Form

$$\sigma_{\eta'} (x) < C_2 \log^{1-\eta} x \tag{8}$$

gelten. Es lässt sich nun jede natürliche Zahl n auf eine und nur eine Weise in zwei Teiler m_1, m_2 zerlegen, so dass m_1 der grösste Teiler von n ist, für den $\Theta (m_1) = 1$ gilt, während für $m_2 = n\, m_1^{-1}$ offenbar $\Theta' (m_2) = 1$ sein muss. Daraus folgt

$$\sigma_\eta (x)\, \sigma_{\eta'} (x) \geqslant \sum_{n \leqslant x} n^{-1},$$

$$\sigma_\eta (x) > \sigma_{\eta'}^{-1} (x) \log x > C_2^{-1} \log^\eta x.$$

Setzen wir $C_1 = C_2^{-1}$, so erhalten wir die andere Ungleichheit in (6).

Aus der Definition von $\Theta (n)$ folgt die für $s > 1$ giltige Identität

$$f (s) = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta (n)\, n^{-s} = \prod_{v \leqslant \lambda} \prod_{p \equiv l_v}^{\infty} (1 - p^{-s})^{-1}. \tag{9}$$

Im Folgenden halten wir die Restklassen $k y + l_1, \dots, k y + l_\lambda$, also auch η fest, schreiben einfach $\sigma (x)$ statt $\sigma_\eta (x)$ und setzen

$$\sigma_1 (x) = \sum_{n \leqslant x} \Theta (n)\, n^{-1} \log n.$$

Wir beweisen nun die Identität

$$\sigma_1 (x) = \sum_{n \leqslant x} \Theta (n)\, n^{-1} \tau_\lambda (x\, n^{-1}). \tag{10}$$

Aus

$$\frac{d}{d s} f (s) = f (s) \frac{d}{d s} \log f (s)$$

ergibt sich für $s > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Theta(n)\, n^{-s} \log n = \sum_{m w = 1}^{\infty} \Theta(m)\, m^{-s}\, \Lambda_\lambda(w)\, w^{-s}. \tag{11}$$

Auf Grund des Eindeutigkeitssatzes für Dirichletsche Reihen folgt aus (11)

$$\sigma_1(x) = \sum_{m w \leqslant x} \Theta(m)\, m^{-1}\, \Lambda_\lambda(w)\, w^{-1},$$

also (10). Wir können (10) auch direkt beweisen. Ist w ein Teiler von n, so ist $\Theta(n) = \Theta(w) \cdot \Theta(n w^{-1})$. Es sei nun $\Theta(n) = 1$. Dann ist in der üblichen Bezeichnungsweise

$$\log n = \sum_{w \mid n} \Lambda(w) = \sum_{w \mid n} \Theta(w)\, \Lambda(w),$$

$$n^{-1} = \Theta(m)\, m^{-1}\, w^{-1},$$

$$\Theta(n)\, n^{-1} \log n = \sum_{m w = n} \Theta(m)\, m^{-1}\, \Theta(w)\, \Lambda(w)\, w^{-1}. \tag{12}$$

Setzen wir hier $\Theta(w)\, \Lambda(w) = \Lambda_\lambda(w)$ und summieren (12) über n, so erhalten wir (10).

Auf der Identität (10) beruht der Beweis von

Lemma 3. *Es sei N_0 eine positive, hinreichend gross gewählte Zahl und $N \geqslant N_0$. Setzen wir dann*

$$\varepsilon = \log^{-\frac{1}{2}} N, \quad \log M_r = e^{\varepsilon r} \log N, \quad r = 0, 1, 2, \ldots,$$

worin e die Basis der natürlichen Logarithmen ist, so gelten die Ungleichheiten

$$\sigma(N)\, e^{\eta r \varepsilon}\, e^{-C_5 r \varepsilon^2} < \sigma(M_r) < \sigma(N)\, e^{\eta r \varepsilon}\, e^{C_5 r \varepsilon^2}. \tag{13}$$

Wir erhalten für die Differenz $\sigma_1(M_{r+1}) - \sigma_1(M_r)$

$$\sum_{M_r < n \leqslant M_{r+1}} \Theta(n)\, n^{-1} \log n$$
$$= \sum_{m \leqslant M_r} \Theta(m)\, m^{-1} \{\tau_\lambda(M_{r+1} m^{-1}) - \tau_\lambda(M_r m^{-1})\} +$$
$$+ \sum_{M_r < m \leqslant M_{r+1}} \Theta(m)\, m^{-1}\, \tau_\lambda(M_{r+1} m^{-1}). \tag{14}$$

Für $M_r < n \leqslant M_{r+1}$ ist $\log n = (1 + O(\varepsilon)) \log M_r$ und aus (4) folgen die beiden Abschätzungen

$$\tau_\lambda(M_{r+1} m^{-1}) - \tau_\lambda(M_r m^{-1}) = (\eta\, \varepsilon + O(\varepsilon^2)) \log M_r,$$

$$\tau_\lambda(M_{r+1} m^{-1}) = O(\varepsilon) \log M_r \quad \text{für} \quad M_r < m \leqslant M_{r+1}.$$

Es ergibt sich daher aus (14)

$$(1+O(\varepsilon)) \sum_{M_r<n\leqslant M_{r+1}} \Theta(n)\, n^{-1} \cdot$$
$$= (\eta\,\varepsilon + O(\varepsilon^2)) \sum_{n\leqslant M_r} \Theta(n)\, n^{-1} + O(\varepsilon) \sum_{M_r<n\leqslant M_{r+1}} \Theta(n)\, n^{-1}$$

oder

$$\sum_{M_r<n\leqslant M_{r+1}} \Theta(n)\, n^{-1} = (\eta\,\varepsilon + O(\varepsilon^2)) \sum_{n\leqslant M_r} \Theta(n)\, n^{-1}. \tag{15}$$

Addieren wir hier auf beiden Seiten $\sum_{n\leqslant M_r} \Theta(n)\, n^{-1}$ und beachten, dass

$$1+\eta\,\varepsilon+O(\varepsilon^2) = \exp\{\eta\,\varepsilon+O(\varepsilon^2)\}$$

ist, so folgt

$$\sigma(M_{r+1}) = \exp\{\eta\,\varepsilon+O(\varepsilon^2)\}\,\sigma(M_r)$$

oder mit passend gewähltem C_5

$$e^{\eta\varepsilon} \exp\{-C_5\,\varepsilon^2\} < \sigma(M_{r+1})\,(\sigma(M_r))^{-1} < e^{\eta\varepsilon} \exp\{C_5\,\varepsilon^2\}. \tag{16}$$

Durch wiederholte Anwendung von (16) erhalten wir einen Beweis von (13).

Es sei nun x eine Zahl, für die

$$M_{r-1} \leqslant x \leqslant M_r$$

gilt. Es muss dann auch $\sigma(M_{r-1}) \leqslant \sigma(x) \leqslant \sigma(M_r)$ sein, so dass aus der Definition von M_r

$$\sigma(x) = \sigma(M_r)\,(1+O(\varepsilon)) \tag{17}$$

folgt.

Lemma 4. *Falls es eine unendliche Folge von natürlichen Zahlen*

$$N_1 < N_2 < \cdots < N_i < \cdots$$

gibt, für welche sowohl die Abschätzungen

$$\sigma(N_i) = B_0 \log^\eta N_i + o(\log^\eta N_i), \quad i=1,2,\ldots, \tag{18}$$

als auch die Ungleichheiten

$$\log N_{i+1} \leqslant \log^{\varkappa+1} N_i, \quad 0<\varkappa<1, \quad i=1,2,\ldots, \tag{19}$$

gelten, ist Relation (2) ***richtig.***

Um Lemma 4 zu beweisen, benützen wir Lemma 3 für N_i statt N. Wir setzen

$$\varepsilon_i = \log^{-\frac{1}{4}} N_i, \quad \log M_{r_i} = \exp\{\varepsilon_i\, r_i\} \log N_i, \quad r_i = 1, 2, \ldots, \beta_i,$$

$$\log M_{\beta_i - 1} \leqslant \log^{\varkappa+1} N_i < \log M_{\beta_i},$$

also
$$\beta_i = [\varkappa \log\log N_i \cdot \log^{\frac{1}{4}} N_i] + 1.$$

Da $C_5\, r_i\, \varepsilon_i^2 = O(\beta_i\, \varepsilon_i^2) = o(1)$ ist, erhalten wir aus (13)

$$\sigma(M_{r_i}) = \sigma(N_i) \exp\{\eta\, r_i\, \varepsilon_i\}\,(1 + o(1))$$

oder wegen (18)

$$\sigma(M_{r_i}) = B_0 \log^\eta M_{r_i} + o(\log^\eta M_{r_i}), \quad r_i = 1, 2, \ldots, \beta_i.$$

Auf Grund von (17) gilt ferner auch für alle x, die den Ungleichheiten

$$M_{r_i - 1} \leqslant x \leqslant M_{r_i}$$

genügen, die Abschätzung

$$\sigma(x) = B_0 \log^\eta x + o(\log^\eta x). \tag{20}$$

Relation (20) ergibt sich also für alle $x \geqslant N_i$ und $\leqslant N_{i+1}$, für alle $x \geqslant N_{i+1}$ und $\leqslant N_{i+2}$, usw., also für alle x überhaupt.

Wir stellen nun einige bekannte, elementar bewiesene Relationen zusammen, in denen die L-Funktionen auftreten (vgl. [3], Zweites Buch, Fünfter Teil).

Es sei $\chi_1(n)$ der Hauptcharakter, $\chi_2(n), \ldots, \chi_h(n)$ seien die übrigen Charaktere mod k und $L_\varrho(s)$, $\varrho = 1, 2, \ldots, h$, seien die entsprechenden L-Funktionen, die wir uns in der Form Dirichletscher Reihen denken. Es ist, wenn $\zeta(s) = \sum n^{-s}$ gesetzt wird, bekanntlich für $s \geqslant 1$

$$L_1(s) = \zeta(s) \prod_{p|k} (1 - p^{-s}). \tag{21}$$

Für $\varrho = 2, \ldots, h$ und $s > 0$ sind $L_\varrho(s)$ konvergente, stetige und gliedweis differenzierbare Dirichletsche Reihen, die für $s \geqslant 1$ von Null verschieden sind.

Wenn eine Aussage über Funktionen von s im Intervall $1 < s < 2$ gilt und auch für den $\lim\limits_{s=1}$ richtig bleibt, falls s von rechts an 1 heranrückt, wollen wir im Folgenden sagen, dass die Aussage für $s \to 1$ gilt. In diesem Sinne gelten die in (22)–(26) und in (28) enthaltenen Relationen für $s \to 1$.

Es ist bekanntlich

$$\left.\begin{aligned} \zeta(s) - (s-1)^{-1} &= O(1), \\ \log \zeta(s) - \log((s-1)^{-1}) &= O(s-1), \\ \log \prod_{p|k} (1 - p^{-s}) &= \sum_{p|k} \log(1 - p^{-1}) + O(s-1). \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Ferner ist hier $\log \zeta(s) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \sum\limits_{p} m^{-1} p^{-ms}$. In (22) folgt die zweite Relation aus der ersten, während die dritte Relation trivial ist. Es ist für $\varrho = 2, \ldots, h$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p} \chi_{\varrho}(p)\, m^{-1} p^{-ms} \log p = O(1), \\ &\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p} \chi_{\varrho}(p)\, m^{-1} p^{-ms} = \sum_{m=1} \sum_{p^m \leqslant x} \chi_{\varrho}(p)\, m^{-1} p^{-ms} + O(\log^{-1} x). \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Die zweite Relation in (23) gibt eine Abschätzung für die links stehende für $s \geqslant 1$ konvergente Reihe. Diese Abschätzung folgt leicht aus der ersten Relation in (23) mittels partieller Summation. Weiter ist

$$\left.\begin{aligned} \log L_{\varrho}(s) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p} \chi_{\varrho}(p)\, m^{-1} p^{-ms}, \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p^m \equiv l_v} m^{-1} p^{-ms} &= h^{-1} \sum_{\varrho \leqslant h} \chi_{\varrho}^{-1}(l_v) \log L_{\varrho}(s). \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Aus (23), der Ungleichheit $L_{\varrho}(1) \neq 0$ und aus der ersten Relation in (24) schliesst man, dass

$$\log L_{\varrho}(1) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p} \chi_{\varrho}(p)\, m^{-1} p^{-m}$$

ist und dass die Entwicklung

$$\log L_{\varrho}(s) = \log L_{\varrho}(1) + (s-1) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p} \chi_{\varrho}(p)\, m^{-1} p^{-m(1+\vartheta(s-1))} \log p, \quad 0 < \vartheta < 1,$$

gilt. Hieraus und aus der zweiten Relation in (24) folgt

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p^m \equiv l_v} m^{-1} p^{-ms} \\ &= h^{-1} \{\log((s-1)^{-1}) + \sum_{p \mid k} \log(1-p^{-1}) + \sum_{2 \leqslant \varrho \leqslant h} \chi_{\varrho}^{-1}(l_v) \log L_{\varrho}(1)\} + O(s-1). \end{aligned} \tag{25}$$

Schliesslich ist offenbar

$$\sum_{m=2}^{\infty} m^{-1} \{ \sum_{p \equiv l_v} p^{-ms} - \sum_{p^m \equiv l_v} p^{-ms} \} = \sum_{m=2}^{\infty} m^{-1} \{ \sum_{p \equiv l_v} p^{-m} - \sum_{p^m \equiv l_v} p^{-m} \} + O(s-1). \tag{26}$$

Es ist also, wenn wir wieder $\lambda h^{-1} = \eta$ setzen, $\log f(s)$ durch

$$\sum_{v \leqslant \lambda} \sum_{p \equiv l_v}^{\infty} \log(1-p^{-s}) = -\eta \log(s-1) + \sum_{2 \leqslant \varrho \leqslant h} e_{\varrho} \log L_{\varrho}(1) + d(1) + O(s-1)$$

gegeben, wobei

$$\left.\begin{aligned} e_\varrho &= h^{-1} \sum_{v \leqslant \lambda} \chi_\varrho^{-1}(l_v) \\ d(1) &= \eta \sum_{p|k} \log(1-p^{-1}) + \sum_{v \leqslant \lambda} \sum_{m=2}^{\infty} m^{-1} \{ \sum_{p \equiv l_v} p^{-m} - \sum_{p^m \equiv l_v} p^{-m} \} \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

gesetzt wurde. Es ergibt sich daher

Lemma 5. *Für die in* (9) *definierte Dirichletsche Reihe gilt die Abschätzung*

$$\left.\begin{aligned} f(s) &= A_0 (s-1)^{-\eta} + O((s-1)^{1-\eta}), \\ A_0 &= e^K, \quad K = \sum_{2 \leqslant \varrho \leqslant h} e_\varrho \log L_\varrho(1) + d(1). \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Wir werden nun beweisen, dass es eine unendliche Folge von natürlichen Zahlen $T_1 < T_2 < \cdots < T_i < \cdots$ gibt, für die (18) gilt. Später werden wir aus dieser Folge eine weitere Folge natürlicher Zahlen $N_1 < N_2 < \cdots$ herleiten, für die sowohl (18) als auch (19) gelten.

Lemma 6. *Bezeichnet* $\Gamma(y)$ *den Wert der Gammafunktion für das Argument* η *und setzen wir*

$$b_n = \Theta(n) - A_0 (\Gamma(\eta))^{-1} \log^{\eta-1} n, \quad S(x) = \sum_{2 \leqslant n \leqslant x} b_n n^{-1}, \tag{29}$$

so gibt es für jedes beliebig gewählte positive $\nu < \eta$ *eine unendliche Folge natürlicher Zahlen* $T_1 < T_2 < \cdots$, *die den Ungleichheiten*

$$|S(T_i)| < \log^\nu T_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{30}$$

Genüge leisten.

Wegen $\sum_{2 \leqslant n \leqslant T_i} n^{-1} \log^{\eta-1} n = \eta^{-1} \log^\eta T_i + O(1)$ folgt aus (30) Relation (18) mit $B_0 = A_0 (\Gamma(\eta))^{-1} \eta^{-1}$ und einem Restglied der Ordnung $O(\log^\nu T_i)$.

Die Reihe
$$g(s) = \sum_{n=2}^{\infty} b_n n^{-s} \tag{31}$$

ist für $s > 1$ konvergent. Ferner ist für $s \to 1$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{-s} \log^{\eta-1} n - \int_e^{\infty} v^{-s} \log^{\eta-1} v \, dv = O(1).$$

Es ergibt sich weiter

$$\int_e^{\infty} v^{-s} \log^{\eta-1} v \, dv = \int_1^{\infty} e^{-z(s-1)} z^{\eta-1} \, dz = (s-1)^{-\eta} \int_{s-1}^{\infty} e^{-w} w^{\eta-1} \, dw,$$

wobei

$$(s-1)^{-\eta}\int_{s-1}^{\infty} e^{-w}\,w^{\eta-1}\,dw=(s-1)^{-\eta}\left\{\Gamma(\eta)-\int_{0}^{s-1}(w^{\eta-1}-w^{\eta}+\cdots)\,dw\right\}$$

$$=(s-1)^{-\eta}\,\Gamma(\eta)+O(1)$$

ist. Wir erhalten also

$$A_0\,(\Gamma(\eta))^{-1}\sum_{n=2}^{\infty} n^{-s}\log^{\eta-1}n=A_0\,(s-1)^{-\eta}+O(1). \tag{32}$$

Aus (28) und (32) ergibt sich $g(s)=O(1)$, also

$$|g(s)|\leqslant C_6 \quad \text{für} \quad s\to 1. \tag{33}$$

Wir werden nun zeigen, dass es keine Zahl Z_0 geben kann, so dass für alle natürlichen Zahlen $z>Z_0$

entweder nur $\qquad S(z)\leqslant -\log^{\nu} z \quad$ oder nur $\quad S(z)\geqslant \log^{\nu} z \qquad$ (34)

gilt. Damit wird Lemma 6 bewiesen sein.

Aus (6) und aus $\sum_{2\leqslant n\leqslant x} n^{-1}\log^{\eta-1} n=O(\log^{\eta} x)$ folgt $S(x)=O(\log^{\eta} x)$. Also ist für $s>1$, $\lim_{x=\infty} x^{-s+1}S(x)=0$ und wir erhalten daher für $s>1$

$$g(s)=\sum_{2\leqslant n\leqslant R} b_n\,n^{-s}+\sum_{n=R}^{\infty}\{S(n+1)-S(n)\}\,(n+1)^{-s+1},$$

$$=O(\log^{\eta} R)+\sum_{n=R+1}^{\infty} S(n)\,(n^{-s+1}-(n+1)^{-s+1}).$$

Nun ist weiter

$$|n^{-s+1}-(n+1)^{-s+1}-(s-1)\,n^{-s}|<(s-1)\,s\,n^{-2},$$

also gilt, wegen $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}S(n)=O(1)$,

$$g(s)=O(\log^{\eta} R)+(s-1)\sum_{n=R+1}^{\infty} n^{-s}\,S(n).$$

Nehmen wir nun an, dass für alle $z>Z_0$ die erste Ungleichheit in (34) gelte und dass R eine feste Zahl $\geqslant Z_0$ sei. Es wäre dann

$$g(s)\leqslant O(\log^{\eta} R)-(s-1)\sum_{n=R+1}^{\infty} n^{-s}\log^{\nu} n$$

oder, da

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{-s} \log^{\nu} n = \int_{e}^{\infty} v^{-s} \log^{\nu} v \, dv + O(1) = (s-1)^{-\nu-1} \Gamma(\nu+1) + O(1) \tag{35}$$

ist,

$$g(s) \leqslant -(s-1)^{-\nu} \Gamma(\nu+1) + O(\log^{\eta} R) + (s-1) \sum_{n \leqslant R} n^{-s} \log^{\nu} n. \tag{36}$$

Wir können in (36) $s\ (>1)$ so nahe an 1 wählen, dass $|g(s)|$ grösser als die Konstante C_6 in (33) wird. Zu demselben Widerspruch führt die Annahme, dass alle $z > Z_0$ der zweiten Ungleichheit in (34) genügen.

Lemma 7. *Es gibt eine Folge natürlicher Zahlen* $N_1 < N_2 < \cdots < N_i < \cdots$, *so dass für* $0 < \nu < \eta$ *die Abschätzungen*

$$\sigma(N_i) = B_0 \log^{\eta} N_i + O(\log^{\nu} N_i), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{37}$$

gelten, wobei die Zahlen N_i *überdies den Ungleichheiten* (19) *für* $0 < \varkappa < (\eta - \nu)\eta^{-1}$ *genügen. Hieraus ergibt sich*

$$\sigma(x) = B_0 \log^{\eta} x + O(\log^{\nu + \eta\varkappa} x) + O(\log^{\eta - \frac{1}{2} + \omega} x), \tag{38}$$

worin $0 < \omega < \frac{1}{2}$ *ist. Innerhalb der für die Zahlen* ν, $\varkappa$ *und* ω *oben angeführten Schranken dürfen diese drei Zahlen beliebig gewählt werden.*

Der Beweis von (38) wird auf ähnliche Weise geführt wie der Beweis von Lemma 4. Mit denselben Bezeichnungen wie dort ist

$$C_5 r_i \varepsilon_i^2 \leqslant C_5 \beta_i \varepsilon_i^2 = O(\log^{-\frac{1}{2}+\omega} N_i)$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}\sigma(M_{r_i}) &= \sigma(N_i) \exp\{\eta r_i \varepsilon_i\} (1 + O(\log^{-\frac{1}{2}+\omega} N_i)) \\ &= B_0 \log^{\eta} M_{r_i} + O(\log^{\nu+\eta\varkappa} M_{r_i}) + O(\log^{\eta - \frac{1}{2} + \omega} M_{r_i}).\end{aligned}$$

Ist $M_{r_i - 1} \leqslant x \leqslant M_{r_i}$, so folgt aus (17) und der letzten Abschätzung Relation (38).

Um den ersten Teil des Lemmas zu beweisen, wählen wir die erste Zahl N_1 unserer Folge als eine so grosse Zahl der Folge T_i, dass auch der Bedingung, die wir im Anschluss an (44) angeben werden, Genüge geleistet wird. Auf Grund von (30) ist (37) für $i = 1$ erfüllt.

Weiter setzen wir

$$\log V_1 \leqslant \log^{1+\varkappa} N_1 < \log(V_1 + 1), \quad (s-1) = \log^{-1-\frac{1}{2}\varkappa} N_1, \tag{39}$$

wo $\varkappa$ die Zahl aus Lemma 7 ist. Es ist zunächst

$$g(s) = \sum_{2 \leqslant n \leqslant N_1} b_n n^{-s} - (N_1 + 1)^{-s+1} S(N_1) + (s-1) \sum_{n = N_1 + 1}^{\infty} n^{-s} S(n) + O(s-1).$$

Aus $f'(s) = f(s)\,(\log f(s))'$, den höheren Ableitungen $f''(s)$, ... und (4) folgt

$$\sum_{n \leqslant N_1} \Theta(n)\, n^{-1} \log^t n = \eta\,(\eta + t)^{-1} \log^t N_1 \cdot \sum_{n \leqslant N_1} \Theta(n)\, n^{-1} + O\,(\log^{\eta+t-1} N_1),$$

$$\sum_{2 \leqslant n \leqslant N_1} b_n\, n^{-1} \log^t n = \eta\,(\eta+t)^{-1} \log^t N_1 \cdot S(N_1) + O\,(\log^{\eta+t-1} N_1),$$

$$(t = 1, \ldots;\ T = [2\varkappa^{-1}] + 1).$$

Es ergibt sich daher unter Benützung der Reihenentwicklung rechts in

$$n^{-s} = n^{-1}\left\{\sum_{0 \leqslant t \leqslant T} \frac{1}{t!}\,(-\log n \cdot \log^{-1-\frac{1}{2}\varkappa} N_1)^t + O\,((\log n \cdot \log^{-1-\frac{1}{2}\varkappa} N_1)^{T-1})\right\},$$

$$\sum_{2 \leqslant n \leqslant N_1} b_n\, n^{-s} = S(N_1)\,\{1 + O\,(\log^{-\frac{1}{2}\varkappa} N_1)\} + O\,(\log^{\eta-1-\frac{1}{2}\varkappa} N_1),$$

$$\sum_{2 \leqslant n \leqslant N_1} b_n\, n^{-s} - (N_1+1)^{-s+1} S(N_1) = O\,(\log^{\nu-\frac{1}{2}\varkappa} N_1). \tag{40}$$

Für $n \geqslant V_1 + 1$ erhalten wir

$$\log^{-1-\frac{1}{2}\varkappa} N_1 > \log^{-1+\varkappa/2(\varkappa+1)} n,$$

$$-s \log n = -\log n - \log^{-1-\frac{1}{2}\varkappa} N_1 \cdot \log n \leqslant -\log n - \log^{\varkappa/2(\varkappa+1)} n,$$

$$\sum_{n=V_1+1}^{\infty} n^{-s} S(n) = O\,(\sum_{n=V_1+1}^{\infty} \exp\{-\log^{\varkappa/2(\varkappa+1)} n\}\, n^{-1} S(n)) = O\,(1).$$

$$\sum_{n=N_1+1}^{\infty} n^{-s} S(n) = \sum_{N_1 < n \leqslant V_1} n^{-s} S(n) + O\,(1). \tag{41}$$

Aus (40) und (41) ergibt sich

$$g(s) = O\,(\log^{\nu-\frac{1}{2}\varkappa} N_1) + (s-1) \sum_{N_1 < n \leqslant V_1} n^{-s} S(n) + O\,(s-1). \tag{42}$$

Wir nehmen nun an, dass für alle Zahlen z, die im Intervall

$$N_1 < z \leqslant V_1$$

liegen, die erste Ungleichheit aus (34) gelte. Es würde dann

$$g(s) \leqslant O\,(\log^{\nu-\frac{1}{2}\varkappa} N_1) - (s-1) \sum_{N_1 < n \leqslant V_1} n^{-s} \log^{\nu} n + O\,(s-1) \tag{43}$$

sein. Wir haben also noch die Summe in (43) abzuschätzen. Es ist

$$(s-1) \sum_{2 \leqslant n \leqslant N_1} n^{-s} \log^{\nu} n = \log^{-1-\frac{1}{2}\varkappa} N_1\,(1 + O\,(\log^{-\frac{1}{2}\varkappa} N_1)) \sum_{2 \leqslant n \leqslant N_1} n^{-1} \log^{\nu} n$$
$$= O\,(\log^{\nu-\frac{1}{2}\varkappa} N_1),$$

$$(s-1) \sum_{n=V_1+1}^{\infty} n^{-s} \log^{\nu} n = \log^{-1-\frac{1}{2}\varkappa} N_1 \cdot O\,(\sum_{n=V_1+1}^{\infty} \exp\{-\log^{\varkappa/2(\varkappa+1)} n\}\, n^{-1} \log^{\nu} n)$$
$$= O\,(\log^{-1-\frac{1}{2}\varkappa} N_1).$$

Es folgt also aus (35)

$$(s-1)\sum_{N_1<n\leqslant V_1} n^{-s}\log^\nu n = \log^{\nu(1+\frac{1}{2}\varkappa)} N_1\cdot\Gamma(\nu+1)+O\,(\log^{\nu-\frac{1}{2}\varkappa} N_1)$$

$$g\,(s)\leqslant O\,(\log^{\nu-\frac{1}{2}\varkappa} N_1)-\log^{\nu(1+\frac{1}{2}\varkappa)} N_1\cdot\Gamma(\nu+1). \tag{44}$$

Für genügend grosses N_1 wird $|g\,(s)|$ *grösser als* C_6 sein, was im Widerspruch zu (33) steht. Ebenso ist die Annahme, dass die zweite Ungleichheit aus (34) für alle z im Intervall $N_1<z\leqslant V_1$ gilt, im Widerspruch zu (33).

Es gibt also mindestens eine Zahl $z=N_1$, so dass

$$|S\,(N_2)|<\log^\nu N_2,$$

$$\log N_1<\log N_2\leqslant\log^{1+\varkappa} N_1,$$

also (18) und (19) gelten. Nun lassen wir N_2, N_3, ... dieselbe Rolle wie früher N_1 spielen. Das führt zu weiteren Zahlen N_3, N_4, ... , die (18) und (19) Genüge leisten. Damit ist Lemma 7 und a fortiori Relation (2) bewiesen.

Zweiter Abschnitt

Lemma 8. *Bezeichnet* $\Lambda_\lambda(n)$ *die in* (3) *definierte Funktion und setzen wir*

$$\psi_\lambda(x)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda_\lambda(n),$$

so ist

$$\psi_\lambda(x)=\eta\,x+o\,(x). \tag{45}$$

Der PAP ist äquivalent zu

$$\sum_{\substack{p\equiv l_v\\ p\leqslant x}}\log p=h^{-1}x+o\,(x).$$

Da

$$\sum_{m=2}\sum_{\substack{p\equiv l_v\\ p^m\leqslant x}}\log p=O\,(x^{\frac{1}{2}}),$$

folgt (45) aus dem PAP.

Aus (11) ergibt sich mittels des Eindeutigkeitssatzes für Dirichletsche Reihen

$$\sum_{n\leqslant z}\Theta\,(n)\log n=\sum_{n\leqslant z}\Theta\,(n)\,\psi_\lambda(z\,n^{-1}). \tag{46}$$

(46) lässt sich analog zu (10) auch durch direkte Überlegung ohne Dirichletsche Reihen beweisen.

Es sei nun δ eine positive, beliebig klein vorgeschriebene Zahl, dann ist gemäss (45)

$$|\psi_\lambda(y)-\eta\,y|\leqslant\delta\,y\quad\text{für}\quad y\geqslant K. \tag{47}$$

Für $y<K$ wollen wir nur die triviale Relation

$$\psi_\lambda(y)\leqslant 2\,y \tag{48}$$

verwenden. Weiter ist nach (2)

$$|\sigma(x) - B_0 \log^\eta x| \leqslant \delta \log^\eta x \quad \text{für} \quad x \geqslant L. \tag{49}$$

Wir wählen nun z so gross, dass

$$z \geqslant KL \tag{50}$$

ist und erhalten aus (46) und (48)

$$\Big|\sum_{n \leqslant z} \Theta(n) \log n - \sum_{Kn \leqslant z} \Theta(n) \psi_\lambda(z n^{-1})\Big| \leqslant 2 \sum_{z < Kn \leqslant Kz} \Theta(n) z n^{-1},$$

$$\Big|\sum_{n \leqslant z} \Theta(n) \log n - \sum_{Kn \leqslant z} \Theta(n) \psi_\lambda(z n^{-1})\Big| \leqslant 2 z \log K.$$

Weiter ist nach (47) bzw. (49)

$$\Big|\sum_{Kn \leqslant z} \Theta(n) \psi_\lambda(z n^{-1}) - \eta z \sum_{Kn \leqslant z} \Theta(n) n^{-1}\Big| \leqslant \delta z \sum_{Kn \leqslant z} \Theta(n) n^{-1},$$

$$\Big|\sum_{Kn \leqslant z} \Theta(n) n^{-1} - B_0 \log^\eta (z K^{-1})\Big| \leqslant \delta \log^\eta (z K^{-1}).$$

Hieraus folgt

$$\sum_{n \leqslant z} \Theta(n) \log n = B_0 \eta z \log^\eta z \{1 + o(1)\}$$

und weiter mittels partieller Summation

$$\sum_{n \leqslant z} \Theta(n) = B_0 \eta z \log^{\eta - 1} z \{1 + o(1)\}, \tag{51}$$

d. i. (1), wobei der lim in (1) dem Werte $C_0 = A_0 (\Gamma(y))^{-1}$ zustrebt.

Es sei erwähnt, dass sich auch die übrigen im achtzehnten Teil des Landauschen Werkes behandelten Probleme auf analoge Weise lösen lassen.

LITERATUR

1. D. N. Lehmer, Asymptotic Evaluation of certain totient sums. *a*) Amer. J. Math. *22*, 293–335 (1900); *b*) Dissertation, 45 S., Chicago (1900).
2. E. Landau, Lösung des Lehmerschen Problems. Amer. J. Math. *31*, 86–102 (1909).
3. E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. II, Leipzig und Berlin, 1909, S. 641–669.
4. E. Landau, ibidem, S. 641 und 643.
5. A. Selberg, An elementary proof of the prime number theorem for arithmetic progressions. Canadian J. Math. *2*, 66–78 (1950).
   H. N. Shapiro, On primes in arithmetic progressions II, Ann. of Math. (2), *52*, 231–243 (1950).
6. F. Mertens, Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie. J. Reine Angew. Math. *78*, 46–63 (1874).

Tryckt den 2 april 1959

Uppsala 1959. Almqvist & Wiksells Boktryckeri AB