Ark. Mat., **39** (2001), 375–381

Zéros d'applications holomorphes de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^n$

Myriam Ounaies

Abstract. It is known that, unlike the one dimensional case, it is not possible to find an upper bound for the zeros of an entire map from $\mathbf{C}^n$ to $\mathbf{C}^n$, $n\geq 2$, in terms of the growth of the map. However, if we only consider the "non-degenerate" zeros, that is, the zeros where the jacobian is not "too small", it becomes possible. We give a new proof of this fact.

Nous nous intéressons dans ce travail à la recherche d'une borne supérieure pour l'ensemble des zéros d'une application entière. Cette question est liée au problème de Bézout transcendental pour les applications holomorphes. Le théorème classique de Bézout dit que si $A_1, \dots, A_n$ sont des ensembles algébriques, alors

$$\deg \bigcap_{j=1}^{n} A_j \leq \prod_{j=1}^{n} \deg A_j.$$

Pour une fonction f entière dans $\mathbf{C}$ avec $f(0)=1$, on sait que

$$n(r, f^{-1}(0)) \leq C \log M_f(\alpha r, f)$$

pour tout $\alpha>1$.

Par analogie avec le nombre de zéros d'un polynôme, ceci suggère que

$$\log M_f(\alpha r, f)$$

joue le rôle du degrè. La question qui se pose alors naturellement est, dans le cas où F est une application holomorphe de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^n$, pour $\alpha>1$, a-t-on

$$(*) \qquad n(r, F^{-1}(0)) \leq C(\log M_F(\alpha r))^n.$$

Un contre-exemple de Cornalba et Shiffman [2] montre qu'en général, ceci n'est pas vrai, ils ont en effet montré que pour toute fonction positive $S(r)$ telle que $S(r)\uparrow+\infty$, il existe une application $F\colon \mathbf{C}^2\to\mathbf{C}^2$, d'ordre zéro, telle que

$$\frac{n(r, F^{-1}(0))}{S(r)} \to +\infty.$$

Pourtant, si on considère les zéros de F « non-dégénérés », c'est à dire pour lesquels le Jacobien « n'est pas trop petit », il est possible d'obtenir la relation $(*)$ (voir [5]). Nous appliquons ici les techniques que nous avions utilisées dans [6] pour retrouver les résultats de Li et Taylor [5].

0. Notations et définitions

Nous utiliserons les notations suivantes : si $z=(z_1,\dots,z_n)\in\mathbf{C}^n$,

$$\|z\|=\left(\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2\right)^{1/2},\quad \beta=\frac{i}{2}\partial\bar\partial\|z\|^2,\quad \beta_k=\frac{1}{k!}\beta_k.$$

Nous noterons $B(a,r)$ la boule $\{z\in\mathbf{C}^n\,|\,\|z-a\|<r\}$.

Pour une application holomorphe $F\colon\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$, nous noterons $J_F(z)$ le Jacobien de F au point z, $F^{-1}(0)$ l'image réciproque de 0 par F et

$$M_F(r)=\sup_{z\in B(0,r)}\|F(z)\|.$$

Si V est un sous-ensemble de $\mathbf{C}^n$, nous noterons $\operatorname{Card}V$ le cardinal de V et

$$n(r,V)=\operatorname{Card}(V\cap B(0,r)).$$

Dans tout l'article, C_n désignera une constante qui ne dépend que de n, sa valeur pourra varier.

1. Résultats principaux

Le théorème fondamental de ce travail est le résultat suivant.

Théorème 1.1. *Soit F une fonction holomorphe de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^n$. Soit f une fonction positive sur $\mathbf{C}^n$. En posant $\tilde f(r)=\sup_{|z|\le r}f(z)$, on suppose que $\tilde f$ est croissante et que*

$$M_F(r)\le A(\tilde f(r))^B,\quad \text{où } A \text{ et } B \text{ sont des constantes positives.}$$

Notons $N_f=\{a_j\}$ l'ensemble des zéros de F qui vérifient

$$|J_F(a_j)|\ge\frac{1}{f(a_j)}.$$

Alors, si r est assez grand pour que $\log\tilde f(r)\ge1$ et $r'>r$,

$$n(r,N_f)\le C_n\frac{r'^{2n}}{(r'-r)^{2n}}(r'-r)^{-n/\log\tilde f(r')}(\log\tilde f(r'))^n.$$

Comme conséquence de ce théorème, nous retrouvons les théorèmes 4.1 et 5.1 de Li–Taylor [5].

Rappelons que dans cet article, $A_p(\mathbf{C}^n)$ désigne l'ensemble des fonctions entières telles que, il existe deux constantes positives A et B avec

$$|f(z)| \leq A \exp(Bp(z)) \quad \text{pour tout } z \in \mathbf{C}^n,$$

p étant une fonction poids pluri-sousharmonique. Nous renvoyons à [1] ou [7] pour les définitions et les propriétés de cet espace.

On dit que $V=\{a_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ est d'interpolation pour $A_p(\mathbf{C}^n)$ si pour toute suite de nombres complexes $\{C_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ vérifiant

$$|C_k| \leq A' \exp(B'p(a_k)), \quad A' \text{ et } B' \text{ étant des constantes positives,}$$

il existe une fonction $f \in A_p(\mathbf{C}^n)$ telle que $f(a_k)=C_k$ pour tout k.

On note $\tilde{p}(r)=\sup_{|z|\leq r} p(z)$.

D'après le corollaire 2.7 de Berenstein–Li [1], si V est d'interpolation pour $A_p(\mathbf{C}^n)$, il existe une application $F=(f_1, \dots, f_n)$, avec f_j appartenant à $A_p(\mathbf{C}^n)$ pour $j \in \{1, \dots, n\}$ telle que $V \subset F^{-1}(0)$ et

$$|J_F(a_j)| \geq \varepsilon \exp(-Bp(a_j)) \quad \text{pour tout } j \in \mathbf{N}.$$

Il suffit alors d'appliquer théorème 1.1 avec $f(z)=(\exp Bp(z))/\varepsilon$ et $r'=\alpha r$ pour obtenir le résultat du théorème 4.1 de [5].

Corollaire 1.2. *Si $V=\{a_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ est d'interpolation pour $A_p(\mathbf{C}^n)$, alors, pour tout $\alpha>1$,*

$$n(r, V) = O(p(\alpha r)).$$

Ensuite, en appliquant le théorème 1.1 avec $f(z)=M_F(|z|)^B/\varepsilon$ et $r'=\alpha r$, $\alpha>1$, on obtient le résultat du théorème 5.1 de [5].

Corollaire 1.3. *On note $V=\{a_j\}$ l'ensembles des zéros de F tels que*

$$|J_F(a_j)| \geq \varepsilon M_F(|a_j|)^{-B}.$$

Alors, pour tout $\alpha>1$, $n(r, V)=O((\log M_F(\alpha r))^n)$.

Soit maintenant $\gamma>0$.

Si on pose $r'=r+r(\log\log M_F(r))^{-2}$, on a

$$\begin{aligned} n(r, V) &\leq C_n(\log\log M_F(r))^{2n(2+1/(\log\varepsilon+B\log M_F(r')))}(\log M_F(r'))^n \\ &\leq C_n(\log M_F(r'))^{n+\gamma} \end{aligned}$$

si r est assez grand. D'après Gruman [4], il existe une suite $r_k \uparrow +\infty$ qui vérifie

$$M_F(r_k') \leq 2M_F(r_k) \quad \text{où } r_k' = r_k + r_k(\log\log M_F(r_k))^{-2}.$$

On en conclut que

$$n(r_k, V) \leq C_n(\log M_F(r_k))^{n+\gamma}$$

si k est assez grand, ou encore le corollaire suivant.

Corollaire 1.4. *Pour tout* $\gamma>0$,

$$\limsup_{r\to+\infty}\frac{n(r,V)}{(\log M_F(r))^{n+\gamma}}=0.$$

2. Preuve du théorème

Soit F une application holomorphe $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^n$, non identiquement nulle. Soient deux rayons $r'>r>0$ (r sera choisi assez grand au besoin).

Lemme 2.1. *Il existe une constante* $C_n>0$ *telle que, pour tout* $\gamma>0$ (γ *dépendra éventuellement de* r),

$$\int_{B(0,r)} i\partial\bar\partial\log\|F\|^2\wedge(i\partial\bar\partial\|F\|^{2\gamma})^{n-1}\le C_n\frac{r'^{2n}}{(r'-r)^{2n}}M_F(r')^{2\gamma(n-1)}\log M_F(r').$$

Preuve. Posons $r_k=r'-k(r'-r)/n$ pour $k\in\{1,2,\dots,n\}$ et

$$I_k=\int_{B(0,r_k)} i\partial\bar\partial\log\|F\|^2\wedge(i\partial\bar\partial\|F\|^{2\gamma})^{k-1}\wedge\beta_{n-k}.$$

En utilisant le lemme I.2.2 de [6], nous avons les estimations suivantes

$$\begin{aligned}
I_k&\le\frac{1}{(r_{k-1}^2-r_k^2)^2}\int_{B(0,r_{k-1})}(r_{k-1}^2-\|z\|^2)^2 i\partial\bar\partial\log\|F\|^2\wedge(i\partial\bar\partial\|F\|^{2\gamma})^{k-1}\wedge\beta_{n-k}\\
&=\frac{1}{(r_{k-1}^2-r_k^2)^2}\\
&\quad\times\int_{B(0,r_{k-1})}\|F\|^{2\gamma}i\partial\bar\partial\log\|F\|^2\wedge i\partial\bar\partial(r_{k-1}^2-\|z\|^2)^2\wedge(i\partial\bar\partial\|F\|^{2\gamma})^{k-2}\wedge\beta_{n-k}\\
&\le\frac{8r_{k-1}^2(n-k+1)}{(r_{k-1}^2-r_k^2)^2}\int_{B(0,r_{k-1})}\|F\|^{2\gamma}i\partial\bar\partial\log\|F\|^2\wedge(i\partial\bar\partial\|F\|^{2\gamma})^{k-2}\wedge\beta_{n-k+1}\\
&\le 8n^3\frac{M_F(r')^{2\gamma}}{(r'-r)^2}I_{k-1}.
\end{aligned}$$

Après itération, celà donne

$$I_n\le(8n^3)^{n-1}\frac{M_F(r')^{2\gamma(n-1)}}{(r'-r)^{2(n-1)}}I_1.$$

Il reste à majorer I_1. En procédant comme ci-dessus, nous obtenons

$$I_1 \leq 8n^3 \frac{1}{(r'^2 - r^2)} \int_{B(0,r')} |\log \|F\|^2| \beta_n.$$

On peut écrire

$$|\log \|F\|^2| = \log^+ \|F\|^2 + \log^- \|F\|^2 \quad \text{et} \quad \log \|F\|^2 = \log^+ \|F\|^2 - \log^- \|F\|^2$$

avec $\log^+ \|F\|^2 = \sup\{\log \|F\|^2, 0\}$ et $\log^- \|F\|^2 = -\inf\{\log \|F\|^2, 0\}$. En supposant que $F(0) \neq 0$, moyennant une translation au besoin,

$$\log \|F(0)\|^2 \leq \frac{n!}{\pi^n r'^{2n}} \int_{B(0,r')} \log \|F(z)\|^2 \, d\lambda(z).$$

On en déduit que

$$\int_{B(0,r')} \log^- \|F(z)\|^2 \, d\lambda(z) \leq \int_{B(0,r')} \log^+ \|F(z)\|^2 \, d\lambda(z) - \frac{(r')^{2n} \pi^n}{n!} \log \|F(0)\|,$$

et que, par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_{B(0,r')} |\log \|F(z)\|^2| \, d\lambda(z) &\leq 2 \int_{B(0,r')} \log^+ \|F(z)\|^2 \, d\lambda(z) - \frac{(r')^{2n} \pi^n}{n!} \log \|F(0)\| \\ &\leq C_n \log M_F(r') r'^{2n}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$I_n \leq C_n \frac{(r')^{2n}}{(r'-r)^{2n}} M_F(r')^{2\gamma(n-1)} \log M_F(r'). \quad \square$$

Remarque. Nous pouvons aussi trouver ce type d'estimations dans [3] dans un cadre plus général.

Rappelons maintenant le résultat suivant qui donne une version quantitative du théorème d'inversion locale.

Théorème 2.2. ([6]) *Soit F une application holomorphe de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^n$ et $r' > r > 0$.*

Soit $z_0 \in B(0,r)$ tel que $J_F(z_0) \neq 0$, alors F est injective sur $B(z_0, S)$ où

$$S = C_n (r'-r)^{n+1} M_F(r')^{-n} |J_F(z_0)|$$

et $F\big(B(z_0, \tfrac{1}{2}S)\big)$ contient la boule $B(F(z_0), S')$ où

$$S' = C'_n (r'-r)^{2n} M_F(r')^{-2n+1} |J_F(z_0)|^2.$$

Proposition 2.3. *Pour* $\gamma>0$,

$$\sum_{a\in F^{-1}(0)\cap B(0,r)} |J_F(a)|^{4(n-1)\gamma} \le \frac{C_n\gamma^{n-1}M_F(r')^{4n(n-1)\gamma}\log M_F(r')}{(r'-r)^{4n(n-1)\gamma}}\frac{(r')^{2n}}{(r'-r)^{2n}}.$$

Preuve. Soit $r_1=\frac{1}{2}(r'-r)$. Un calcul montre que les mesures

$$i\partial\bar\partial\log\|z\|^2\wedge(i\partial\bar\partial\|z\|^{2\gamma})^{n-1} \quad \text{et} \quad \gamma^n\|z\|^{-2n+2(n-1)\gamma}d\lambda(z)$$

sont egales à une constante près. On en déduit avec le lemme 2.1 que

$$(2.4)\qquad \int_{B(0,r_1)}\|F\|^{-2n+2(n-1)\gamma}|J_F(z)|^2\,d\lambda(z)\le\frac{C_n}{\gamma^n}\frac{(r')^{2n}}{(r'-r)^{2n}}M_F(r')^{2\gamma(n-1)}\log M_F(r').$$

Pour tout $a\in F^{-1}(0)\cap B(0,r)$, d'après le théorème 2.2, F est injective sur $B(a,S)$, en particulier, les boules $B(a,\frac{1}{2}S)$ sont deux à deux disjointes. De plus, $F(B(a,\frac{1}{2}S))$ contient $B(0,S')$.

$$\begin{aligned}
&\int_{B(0,r_1)}\|F\|^{-2n+2(n-1)\gamma}|J_F(z)|^2\,d\lambda(z)\\
&\qquad\ge\sum_{a\in F^{-1}(0)\cap B(0,r)}\int_{B(a,S/2)}\|F\|^{-2n+2(n-1)\gamma}|J_F|^2\,d\lambda(z)\\
&\qquad\ge\sum_{a\in F^{-1}(0)\cap B(0,r)}\int_{B(0,S')}\|z\|^{-2n+2(n-1)\gamma}\,d\lambda(z)\\
&\qquad\ge\frac{C_n}{\gamma}\sum_{a\in F^{-1}(0)\cap B(0,r)}(S')^{2(n-1)\gamma}.
\end{aligned}$$

En remplaçant S' par sa valeur donnée par le théorème 2.2 et en utilisant (2.4), on obtient facilement le résultat. $\square$

Preuve du théorème 1.1. On applique la proposition 2.3 avec

$$\gamma=\frac{1}{4(n-1)\log\tilde f(r')}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
n(r,N_f)&\le\frac{1}{e}\sum_{a\in V\cap B(0,r)}|J_F(a)|^{1/\log\tilde f(r')}\\
&\le C_n(\log\tilde f(r'))^n(r'-r)^{-n/\log\tilde f(r')}\frac{(r')^{2n}}{(r'-r)^{2n}}.\quad\square
\end{aligned}$$

Bibliographie

1. Berenstein, C. A. et Li, B. Q., Interpolating varieties for weighted spaces of entire functions in $\mathbf{C}^n$, *Publ. Mat.* **38** (1994), 157–173.
2. Cornalba, M. et Shiffman, B., A counterexample to the transcendental Bézout problem, *Ann. of Math.* **96** (1972), 402–406.
3. Demailly J.-P., Monge–Ampère operators, Lelong numbers and intersection theory, dans *Complex Analysis and Geometry* (Ancona, V. et Silva, A., éds), p. 115–193, Plenum, New York, 1993.
4. Gruman, L., L'image d'une application holomorphe, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* **12** (1991), 75–100.
5. Li, B. Q. et Taylor, B. A., On the Bézout problem and area of interpolating varieties in $\mathbf{C}^n$, *Amer. J. Math.* **118** (1995), 989–1010.
6. Ounaies, M., Estimations du type Nevanlinna pour les applications holomorphes de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^n$, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **30** (1997), 797–819.
7. Ounaies, M., On interpolating discrete varieties for weighted spaces of entire functions, Preprint, 1998.

Reçu le 11 octobre 1999
Révisé le 12 septembre 2000

Myriam Ounaies
Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur
7 rue René Descartes
FR-67084 Strasbourg Cedex
France
email: ounaies@math.u-strasbg.fr