Ark. Mat., **36** (1998), 177–190

Automorphismes analytiques des domaines produits

Jean-Pierre Vigué

Abstract. In this paper, I study the group of analytic automorphisms of a bounded product domain in the space $\mathcal{C}(S, \mathbf{C})$ of continuous functions on a compact space S. I prove that its automorphism group is a Lie group and I am able to prove which are the bounded symmetric ones.

1. Introduction

Les automorphismes analytiques des domaines bornés d'un espace de Banach complexe ont été étudiés par de nombreux auteurs. J'ai défini sur ce groupe la topologie de la convergence uniforme locale [12]. Pour un certain nombre de domaines bornés symétriques, il a été possible de calculer ce groupe explicitement (voir par exemple S. Greenfield et N. Wallach [7], J.-P. Vigué [14], T. Barton, S. Dineen et R. Timoney [2] et M. Abd-alla [1]). Je crois qu'il est important d'avoir aussi d'autres exemples de domaines bornés dont on sait calculer explicitement le groupe des automorphismes analytiques. Le but du présent article est d'étudier les automorphismes analytiques des domaines bornés produits dans l'espace $\mathcal{C}(S, \mathbf{C})$ des fonctions continues complexes sur un espace topologique compact S. Les domaines produits sont définis de la façon suivante : une fonction φ semi-continue inférieurement bornée strictement positive étant choisie, on définit

$$D_\varphi = \{f \in \mathcal{C}(S, \mathbf{C}) \mid |f(s)| < \varphi(s)\}.$$

Comme d'habitude dans ce cas, l'étude du groupe des automorphismes analytiques $G(D_\varphi)$ de D_φ se divise en deux parties :

(1) On commence par étudier le groupe d'isotropie $G_0(D_\varphi)$ de l'origine dont on sait d'après un résultat de H. Cartan [4] (voir aussi J.-P. Vigué [12]) que c'est un sous-groupe du groupe linéaire. Pour traiter ce cas, nous allons étudier, de manière un peu plus générale, les isomorphismes linéaires entre deux tels domaines $D_\varphi \subset$

$\mathcal{C}(S,\mathbf{C})$ et $D_\psi\subset\mathcal{C}(T,\mathbf{C})$. Dans un théorème de type Banach–Stone, nous montrerons qu'un tel isomorphisme est de la forme

$$f\longmapsto\{t\mapsto a(t)f(\sigma(t))\},$$

où a est une fonction continue sur T à valeurs dans $\mathbf{C}^*$, et σ un homéomorphisme de T sur S. En particulier, compte-tenu d'un théorème de W. Kaup et H. Upmeier [8] (voir aussi [3]), ce résultat montre que D_φ et D_ψ sont analytiquement isomorphes si et seulement si il existe un homéomorphisme σ de T sur S et une fonction continue $b\colon T\to\mathbf{R}$ à valeurs strictement positives tels que

$$\varphi(\sigma(t))=b(t)\psi(t).$$

On déduit en particulier de ce résultat qu'un domaine produit borné $D_\varphi\subset\mathcal{C}(S,\mathbf{C})$ est analytiquement isomorphe à la boule-unité ouverte de $\mathcal{C}(S,\mathbf{C})$ si et seulement si φ est continue.

(2) Ensuite, il faut étudier les automorphismes proches de l'identité : pour cela, j'utiliserai un résultat de J.-P. Vigué [13] et je montrerai que tout automorphisme F de D_φ suffisamment proche de l'identité est de la forme

$$g\longmapsto F(g)=\left\{s\mapsto\lambda(s)\frac{g(s)+a(s)}{1+\overline{a(s)}g(s)/\varphi(s)^2}\right\}$$

où λ est une application continue de S dans l'ensemble $\mathbf{U}$ des nombres complexes de module 1 et a une application continue appartenant à D_φ nulle en les points de discontinuité de φ.

A l'aide de ces deux résultats, il est facile de montrer que les automorphismes analytiques de D_φ sont de la forme

$$g\longmapsto F(g)=\left\{s\mapsto\lambda(s)\frac{g(\sigma(s))+a(\sigma(s))}{1+\overline{a(\sigma(s))}g(\sigma(s))/\varphi(\sigma(s))^2}\right\},$$

où λ est une application continue de S dans $\mathbf{C}^*$, a une application continue appartenant à D_φ nulle en les points de discontinuité de φ et σ un homéomorphisme de S.

Ces résultats nous permettront de montrer que le groupe $G(D_\varphi)$ a, de façon naturelle, une structure de groupe de Lie banachique réel compatible avec sa topologie. Je montrerai également que l'orbite de l'origine 0 sous l'action de $G(D_\varphi)$ est exactement l'intersection de D_φ avec le sous-espace vectoriel A de $\mathcal{C}(S,\mathbf{C})$ des fonctions nulles aux points de discontinuité de φ. En particulier, D_φ est homogène si et seulement si φ est continue, c'est-à-dire si et seulement si D_φ est isomorphe à B, la boule-unité ouverte de $\mathcal{C}(S,\mathbf{C})$.

Tous ces résultats seront précisés dans la suite de cet article. Commençons par donner quelques définitions et rappels.

2. Définition des domaines produits et premières propriétés

Soit S un espace topologique compact et soit $\mathcal{C}(S, \mathbf{C})$ l'espace vectoriel complexe des fonctions continues sur S à valeurs dans $\mathbf{C}$, muni de la norme

$$\|f\| = \sup_{s \in S} |f(s)|,$$

qui en fait un espace de Banach complexe. Soit φ une fonction semi-continue inférieurement strictement positive et bornée sur S. Soit

$$D_\varphi = \{f \in \mathcal{C}(S, \mathbf{C}) \mid |f(s)| < \varphi(s), \text{ pour tout } s \in S\}.$$

Lemme 2.1. *L'ensemble D_φ est un domaine borné convexe de $\mathcal{C}(S, \mathbf{C})$.*

Démonstration. Comme φ est bornée, il est clair que D_φ est borné et convexe. Montrons que D_φ est ouvert. Soit $f \in D_\varphi$. La fonction

$$s \longmapsto \varphi(s) - |f(s)|$$

est semi-continue inférieurement et strictement positive. D'après les propriétés classiques des fonctions sci (voir par exemple G. Choquet [5]), φ atteint sa borne inférieure ε qui est donc strictement positive. Par suite, la boule $B(f_0, \varepsilon)$ de centre f_0 et de rayon ε est contenu dans D_φ et le résultat est démontré.

Comme φ est une fonction semi-continue inférieurement strictement positive et bornée, il existe deux constantes réelles m et M telles que

$$0 < m \leq \varphi(s) \leq M, \quad \text{pour tout } s \in S.$$

On en déduit que D_φ est la boule-unité ouverte de $\mathcal{C}(S, \mathbf{C})$ pour la norme

$$\|f\|_\varphi = \sup_{s \in S} \frac{|f(s)|}{\varphi(s)},$$

qui est une norme équivalente à la norme donnée.

Nous avons maintenant le théorème et définition suivants.

Théorème et définition 2.2. *Soit D un domaine borné de $\mathcal{C}(S, \mathbf{C})$. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe une fonction $\varphi: S \to \mathbf{R}$ semi-continue inférieurement bornée à valeurs strictement positives telle que $D = D_\varphi$;*

(ii) *pour toute famille finie de fonctions $(f_1, \dots, f_n)$ de $\mathcal{C}(S, \mathbf{C})$ appartenant à D, pour tout $f \in \mathcal{C}(S, \mathbf{C})$ telle que, pour tout $s \in S$,*

$$|f(s)| \leq \sup(|f_1(s)|, \dots, |f_n(s)|),$$

alors $f \in D$.

On dit alors que D est un domaine produit de $\mathcal{C}(S,\mathbf{C})$.

Démonstration. Montrons que (i) entraîne (ii). En effet, si $(f_1,\dots,f_n)$ appartiennent à D_φ, alors, pour tout $s\in S$, $|f_1(s)|<\varphi(s),\dots,|f_n(s)|<\varphi(s)$. Par suite, $\sup(|f_1(s)|,\dots,|f_n(s)|)<\varphi(s)$. Maintenant, si f est telle que

$$|f(s)|\leq \sup(|f_1(s)|,\dots,|f_n(s)|),$$

alors $|f(s)|<\varphi(s)$ et $f\in D_\varphi$.

Montrons maintenant que (ii) entraîne (i). Pour tout $s\in S$, soit

$$\varphi(s)=\sup_{f\in S}|f(s)|.$$

La fonction φ, comme borne supérieure de fonctions continues bornées strictement positives, est une fonction semi-continue inférieurement bornée strictement positive.

Si $f\in D$, on déduit facilement du fait que D est ouvert que, pour tout $s\in S$, $|f(s)|<\varphi(s)$. Par suite, $f\in D_\varphi$.

Réciproquement, si $f\in D_\varphi$, pour tout $s\in S$, on a $|f(s)|<\varphi(s)$. Pour tout $s\in S$, on peut donc trouver une fonction $g_s\in D$ telle que

$$|f(s)|<|g_s(s)|.$$

Comme f et g_s sont continues, la même inégalité reste vraie sur un voisinage ouvert U_s de s. Les $(U_s)_{s\in S}$ forment un recouvrement ouvert du compact S ; on peut donc en extraire un sous-recouvrement fini $U_{s_1},\dots,U_{s_n}$. On a donc, pour tout $t\in S$,

$$|f(t)|<\sup(|g_{s_1}(t)|,\dots,|g_{s_n}(t)|).$$

Ainsi, $f\in D$, et la réciproque est démontrée.

Nous aurons également besoin d'un lemme sur l'existence de certaines fonctions continues. Ce résultat fera l'objet du lemme plus ou moins classique suivant.

Lemme 2.3. *Soit S un espace topologique compact, soit φ une fonction semi-continue inférieurement bornée strictement positive sur S, soit $s_0\in S$ et soit U un voisinage de s_0. Alors il existe une fonction continue $f\colon S\to\mathbf{R}_+$, nulle en dehors de U, telle que $f(s_0)=\varphi(s_0)$ et que, pour tout $s\in S$, $f(s)\leq\varphi(s)$.*

Idée de la démonstration. On peut construire une suite de voisinages ouverts $(U_n)_{n>1}$ de s_0 tels que $U_{n+1}\subset\subset U_n$, $U_2\subset U$ et que, pour tout $s\in\overline{U}_n$,

$$\varphi(s)\geq\varphi(s_0)(1-1/n).$$

On définit alors la fonction f de la façon suivante :

– sur le complémentaire de U_2, $f \equiv 0$;

– sur $\overline{U}_n \backslash U_{n+1}$, on définit f comme une fonction continue à valeurs dans le segment $[\varphi(s_0)(1-1/(n-1)), \varphi(s_0)(1-1/n)]$ égale à $\varphi(s_0)(1-1/(n-1))$ sur ∂U_n et à $\varphi(s_0)(1-1/n)$ sur ∂U_{n+1} (une telle fonction existe car S est normal) ;

– enfin, $f(s)=\varphi(s_0)$ sur $\bigcap \overline{U}_n$.

On vérifie que f répond à la question.

3. Les points extrémaux de $\overline{D}'_\varphi$

Nous voulons maintenant démontrer un théorème de Banach–Stone pour les automorphismes linéaires de D_φ. Pour cela, on commence par considérer $\mathcal{C}(S, \mathbf{C})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\varphi$. (On sait que D_φ est la boule-unité ouverte de $\mathcal{C}(S, \mathbf{C})$ pour cette norme). Soit $\overline{D}'_\varphi$ la boule-unité fermée du dual topologique de $\mathcal{C}(S, \mathbf{C})$ muni de la norme duale

$$\|\theta\|'_\varphi = \sup_{\substack{f \in \mathcal{C}(S, \mathbf{C}) \\ \|f\|_\varphi \leq 1}} |\theta(f)|.$$

Comme dans la démonstration du théorème de Banach–Stone donnée dans le livre de N. Dunford et J. Schwartz [6], nous allons commencer par montrer le théorème suivant concernant les points extrémaux de $\overline{D}'_\varphi$.

Théorème 3.1. *Soit E un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{C}(S, \mathbf{C})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\varphi$, et soit E' son dual topologique muni de la norme duale $\|\cdot\|'_\varphi$. Pour tout $s \in S$, soit $\delta_s : \mathcal{C}(S, \mathbf{C}) \to \mathbf{C}$ l'application définie par $\delta_s(f)=f(s)$. Alors tout point extrémal de la boule-unité fermée $\overline{(D_\varphi \cap E)'}$ pour $\|\cdot\|'_\varphi$ est de la forme*

$$(\alpha/\varphi(s))\delta_s, \quad \textit{avec } |\alpha|=1, \ s \in S.$$

De plus, si $E=\mathcal{C}(S, \mathbf{C})$, tout élément de la forme $(\alpha/\varphi(s))\delta_s$, avec $|\alpha|=1$, $s \in S$ est un point extrémal de $\overline{D}'_\varphi$.

Démonstration. Soit $A \subset E'$ l'ensemble des points de la forme $(\alpha/\varphi(s))\delta_s$, avec $|\alpha|=1$. On considère sur E' la topologie faible $\sigma(E', E)$. Soit $\bar{A}$ l'adhérence de A pour cette topologie. Soit $\overline{\text{co}}(\bar{A})$ l'enveloppe convexe fermée de $\bar{A}$ pour cette topologie et on sait que $\bar{A}$ et $\overline{\text{co}}(\bar{A})$ sont compacts.

Soit $\theta \in E'$, $\theta \notin \overline{\text{co}}(\bar{A})$. D'après le théorème de Hahn–Banach, il existe $f \in E$ et des constantes réelles c et ε strictement positives telles que

$$\operatorname{Re} \theta(f) \geq c, \ \operatorname{Re}[(\alpha/\varphi(s))\delta_s(f)] \leq c-\varepsilon, \quad \text{pour tout } (\alpha/\varphi(s))\delta_s \in A.$$

Mais, quitte à choisir convenablement α de module 1,

$$\mathrm{Re}[(\alpha/\varphi(s))\delta_s(f)] = (|\alpha|/\varphi(s))|f(s)| = |f(s)|/\varphi(s).$$

On a donc bien, pour tout $s\in S$:

$$|f(s)|/\varphi(s) \leq c-\varepsilon.$$

Comme $|\theta(f)|\geq c$, on en déduit que θ n'appartient pas à $\overline{D}'_\varphi$.

D'après le lemme 5 de [6, p. 440], l'ensemble des points extrémaux de $\overline{D}'_\varphi$ est contenu dans $\bar{A}$. On vérifie alors que les éléments de $\bar{A}$ (pour la topologie faible $\sigma(E',E)$) sont les $(\alpha/\beta)\delta_s$ où $|\alpha|=1$, et où β est une valeur d'adhérence de $\varphi(t)$ quand t tend vers s. Comme φ est semi-continue inférieurement, on a $\beta\geq\varphi(s)$, ce qui entraîne que $1/\beta\leq 1/\varphi(s)$. On en déduit que $(\alpha/\beta)\delta_s$ ne peut être un point extrémal de $\overline{D}'_\varphi$ que si $\beta=\varphi(s)$. La première partie du résultat est démontré.

Soit $s\in S$. Montrons maintenant que, dans le cas de $E=\mathcal{C}(S,\mathbf{C})$, $(1/\varphi(s))\delta_s$ est un point extrémal de $\overline{D}'_\varphi$. Pour cela, supposons que

$$(1/\varphi(s))\delta_s = \lambda\theta_1+(1-\lambda)\theta_2,$$

où $\theta_1,\theta_2\in\overline{D}'_\varphi$, $\lambda\in]0,1[$. Nous allons montrer que $\theta_1=\theta_2=(1/\varphi(s))\delta_s$.

Choisissons un voisinage N de s. D'après le lemme 2.3, il existe $f\in\overline{D}_\varphi$ nulle en dehors de N telle que $f(s)=\varphi(s)$. On a donc

$$(1/\varphi(s))\delta_s(f) = f(s)/\varphi(s) = 1.$$

Par suite,

$$\lambda\theta_1(f)+(1-\lambda)\theta_2(f)=1, \quad \text{et} \quad |\theta_1(f)|\leq 1,\ |\theta_2(f)|\leq 1.$$

Ceci entraîne que $\theta_1(f)=\theta_2(f)=1$.

Soit maintenant $g\in\mathcal{C}(S,\mathbf{C})$ telle que $\|g\|_\varphi\leq 1$ et $g\equiv 0$ sur N. Alors, $f+g\in\overline{D}_\varphi$. On montre de la même façon que $\theta_1(f+g)=\theta_2(f+g)=1$. La linéarité de θ_1 et θ_2 montre que $\theta_1(g)=\theta_2(g)=0$. Ainsi, le support de θ_1 et θ_2 est contenu dans $\overline{N}$. Ce résultat est vrai pour tout voisinage N de s. Comme l'intersection des $\overline{N}$, pour tout voisinage N de s est réduit à $\{s\}$, le support de θ_1 et θ_2 est réduit à $\{s\}$, et ceci suffit à montrer que

$$\theta_1=\theta_2=(1/\varphi(s))\delta_s.$$

Ceci démontre le théorème.

4. Le théorème de Banach–Stone

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer le théorème de Banach–Stone pour les isomorphismes linéaires entre $D_\varphi \subset \mathcal{C}(S, \mathbf{C})$ et $D_\psi \subset \mathcal{C}(T, \mathbf{C})$.

Théorème 4.1. *Soient $D_\varphi \subset \mathcal{C}(S, \mathbf{C})$ et $D_\psi \subset \mathcal{C}(T, \mathbf{C})$ deux domaines produits bornés et supposons qu'il existe un isomorphisme linéaire $F: D_\varphi \to D_\psi$. Alors, il existe une application continue $\alpha: T \to \mathbf{C}^*$ et un homéomorphisme $\sigma: T \to S$ tels que*

$$[F(f)](t) = \alpha(t) f(\sigma(t)).$$

De plus, on a $\psi(t) = |\alpha(t)| \varphi(\sigma(t))$.

Démonstration. Remarquons d'abord que, s'il existe une application continue $\alpha: T \to \mathbf{C}^*$ et un homéomorphisme $\sigma: T \to S$ tels que $\psi(t) = |\alpha(t)| \varphi(\sigma(t))$, alors l'application linéaire F définie par

$$[F(f)](t) = \alpha(t) f(\sigma(t))$$

est bien un isomorphisme linéaire de D_φ sur D_ψ.

Soit maintenant F un isomorphisme linéaire de $D_\varphi \subset \mathcal{C}(S, \mathbf{C})$ sur $D_\psi \subset \mathcal{C}(T, \mathbf{C})$. D'après ce que nous avons dit, F est un isomorphisme linéaire isométrique pour les normes $\|\cdot\|_\varphi$ et $\|\cdot\|_\psi$. Il nous faut maintenant construire α et σ. Pour cela, considérons la transposée ${}^tF: \mathcal{C}(T, \mathbf{C})' \to \mathcal{C}(S, \mathbf{C})'$ de F définie par ${}^tF(\theta) = \theta \circ F$; c'est un isomorphisme linéaire isométrique pour les normes $\|\cdot\|'_\psi$ et $\|\cdot\|'_\varphi$. Ainsi, ${}^tF$ envoie les points extrémaux de $\overline{D}'_\psi$ sur les points extrémaux de $\overline{D}'_\varphi$. L'image par ${}^tF$ de $(1/\psi(t))\delta_t$ est donc de la forme $(\beta/\varphi(s))\delta_s$, avec $|\beta| = 1$. Si on pose $s = \sigma(t)$, ceci définit une bijection σ de T sur S.

De même, on définit la fonction α par la formule

$$\alpha(t) = \frac{\beta \psi(t)}{\varphi(s)} = \frac{\beta \psi(t)}{\varphi(\sigma(t))}.$$

Le fait que α est continue découle simplement du fait que $\alpha = F(1)$. En effet, on a

$$[F(1)](t) = [\delta_t \circ F](1) = [{}^tF(\delta_t)](1) = \alpha(t) \delta_{\sigma(t)}(1) = \alpha(t).$$

L'application $i: S \to \mathcal{C}(S, \mathbf{C})'$ (resp. $j: T \to \mathcal{C}(T, \mathbf{C})'$) définie par $i(s) = \delta_s$ (resp. $j(t) = (1/\alpha(t))\delta_t$) est un homéomorphisme de S (resp. T) sur son image lorsque les images sont munies de la topologie faible. Il est facile de voir que $\sigma = j^{-1} \circ {}^tF \circ i$ et, comme ${}^tF$ est continue, σ est un homéomorphisme de T sur S.

On peut alors calculer $F(f)$

$$[F(f)](t) = [\delta_t \circ F](f) = [{}^tF(\delta_t)](f) = \alpha(t)\delta_{\sigma(t)}(f) = \alpha(t)f(\sigma(t)),$$

et le théorème est démontré.

Remarquons que, comme dans la démonstration de [6], le point essentiel est que ${}^tF$ envoie les points extrémaux de $\overline{D}'_\psi$ sur les points extrémaux de $\overline{D}'_\varphi$. Ceci permet de montrer d'autres généralisations du théorème de Banach–Stone sans supposer F surjective (voir par exemple E. Vesentini [11]).

Si maintenant on considère un automorphisme linéaire F de D_φ définie par

$$[F(g)](s) = \lambda(s)g(\sigma(s)),$$

où $\sigma \neq \mathrm{id}$, il est clair que, si $s_0 \in S$ est tel que $\sigma(s_0) \neq s_0$, et si $g \in \mathcal{C}(S, \mathbf{C})$ est tel que $g(s_0) = \varphi(s_0)$, $g(\sigma(s_0)) = 0$, $\|g\|_\varphi = 1$, on a

$$\|F(g) - g\|_\varphi \geq 1,$$

ce qui montre que F est loin de l'identité. On en déduit qu'un voisinage de l'identité dans le groupe des automorphismes linéaires de D_φ est constitué des automorphismes F définis par

$$[F(g)](s) = \lambda(s)g(s),$$

où λ est une application continue de S dans l'ensemble $\mathbf{U}$ des nombres complexes de module 1. On en déduit donc le corollaire suivant.

Corollaire 4.2. *Le groupe $G_0(D)$ des automorphismes linéaires de D_φ a, de manière naturelle, une structure de groupe de Lie réel compatible avec sa topologie.*

5. Quelques rappels sur les automorphismes analytiques des domaines cerclés bornés

Les automorphismes analytiques d'un domaine cerclé borné D d'un espace de Banach complexe E ont été étudiés par W. Kaup et H. Upmeier [8] dans le cas convexe (voir R. Braun, W. Kaup et H. Upmeier [3] pour le cas général).

Soit $\mathfrak{g}(D)$ l'algèbre de Lie réelle des transformations infinitésimales de D (au sens de J.-P. Vigué [12] ou H. Upmeier [10]). Comme le fibré tangent à D est trivial, nous considérerons les éléments de $\mathfrak{g}(D)$ comme des applications holomorphes de D dans E. D'autre part, $\mathfrak{g}(D)$ admet une décomposition directe

$$\mathfrak{g}(D) = \mathfrak{g}(D)^+ \oplus \mathfrak{g}(D)^-$$

(où $\mathfrak{g}(D)^+=\{\psi\in\mathfrak{g}(D)\,|\,\psi(0)=0\}$), et l'application

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}(D)^- &\longrightarrow E,\\ \psi &\longmapsto \psi(0),\end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces de Banach réels de $\mathfrak{g}(D)^-$ sur son image F qui est un sous-espace de Banach complexe de E.

De plus, l'orbite de l'origine 0 sous l'action de $G(D)$ est exactement $D\cap F$, et c'est la seule orbite qui soit une sous-variété complexe de D.

De la forme des automorphismes analytiques, on déduit [14] que, sur le groupe $G(D)$ des automorphismes analytiques d'un domaine cerclé borné D, la topologie de la convergence uniforme locale et la topologie de la convergence uniforme sur D coïncident.

Ces résultats (voir [8]) ont plusieurs conséquences : ainsi, si deux domaines cerclés bornés sont analytiquement isomorphes, on peut trouver un isomorphisme f qui envoie 0 sur 0, et qui, d'après H. Cartan [4], est un isomorphisme linéaire.

On déduit aussi de ces considérations que $G(D)=G_0(D)\cdot G^0(D)$, où $G^0(D)$ est le sous-groupe de $G(D)$ engendré par les groupes à un paramètre d'automorphismes de D correspondant aux transformations infinitésimales de $\mathfrak{g}(D)$ et $G_0(D)$ le groupe d'isotropie de l'origine 0. Ceci entraîne que, si U est un voisinage de l'identité dans $G(D)$, l'image

$$\begin{aligned}U &\longrightarrow D,\\ g &\longmapsto g(0),\end{aligned}$$

contient un voisinage de 0 dans $D\cap F$.

Ainsi, pour revenir au cas de D_φ, comme nous avons déjà calculé $G_0(D_\varphi)$, il nous reste seulement à étudier $G^0(D_\varphi)$, et, pour cela, il suffit de connaître les automorphismes analytiques de D_φ proches de l'identité.

6. Les automophismes analytiques de D_φ proches de l'identité

Pour étudier les automorphismes analytiques de D_φ proches de l'identité, nous allons utiliser des résultats de J.-P. Vigué [13]. D'abord, il est clair que D_φ est "produit continu", au sens de [13] des domaines $\Delta_{\varphi(s)}\subset\mathbf{C}$, où

$$\Delta_{\varphi(s)}=\{z\in\mathbf{C}\,|\,|z|<\varphi(s)\}.$$

Pour appliquer le théorème 1.8, p. 233 de [13], il nous faut vérifier les deux conditions suivantes :

(a) pour tout $t \in S$, pour tout $a \in \Delta_{\varphi(t)}$, pour tout $b \in \Delta_{\varphi(t)}$, il existe une application holomorphe $\tau \colon \Delta_{\varphi(t)} \to D_\varphi$ telle que $[\tau(a)](t) = a$, $[\tau(b)](t) = b$;

(b) il existe un voisinage U de 0 dans D_φ tel que D_φ soit étoilé par rapport à tout point de U.

On vérifie facilement dans le cas de D_φ que les conditions (a) et (b) sont satisfaites. Le (b) est évident puisque D_φ est convexe. Le (a) est une conséquence facile de l'existence (démontrée au lemme 2.3) d'une fonction $f \colon S \to \mathbf{R}_+$ continue telle que $f(t) = \varphi(t)$ et que $f(s) \leq \varphi(s)$, pour tout $s \in S$.

On déduit alors du théorème 1.8 de [13] la proposition suivante.

Proposition 6.1. *Il existe un voisinage U de l'identité dans $G(D_\varphi)$ tel que, pour tout $F \in U$, il existe une famille $(f_s)_{s \in S}$ d'automorphismes analytiques de $\Delta_{\varphi(s)}$ tels que, pour tout $g \in D_\varphi$, on ait*

$$[F(g)](s) = f_s(g(s)).$$

On peut alors déduire de cette expression la forme précise des automorphismes analytiques de D_φ proches de l'identité. Pour cela, définissons A comme l'ensemble des éléments de D_φ qui s'annullent en les points de discontinuité de φ. Soit Λ l'ensemble des applications continues de S dans l'ensemble $\mathbf{U}$ des nombres complexes de module 1. Nous pouvons alors énoncer le théorème.

Théorème 6.2. *Soit $F \colon D_\varphi \to D_\varphi$ définie, pour tout $g \in D_\varphi$, par*

$$[F(g)](s) = \lambda(s) \frac{g(s) + a(s)}{1 + \overline{a(s)} g(s) / \varphi(s)^2},$$

où $\lambda \in \Lambda$, $a \in A$. Alors, $F \in G(D)$. L'ensemble de ces applications F, où $\lambda \in \Lambda$ et $a \in A$ forme un voisinage de l'identité dans $G(D)$.

Démonstration. Remarquons d'abord qu'il est facile de voir que $\lambda \in \Lambda$, $a \in A$ étant donnés, pour tout $g \in D_\varphi$, l'application $F(g)$ ainsi définie est une application continue et appartient à D_φ. Le fait que F est un isomorphisme analytique découle facilement du fait que F est une application homographique.

Réciproquement, soit $F \colon D_\varphi \to D_\varphi$ un automorphisme analytique suffisamment proche de l'identité. D'après la proposition 6.1, il existe une famille $(f_s)_{s \in S}$ d'automorphismes analytiques de $\Delta_{\varphi(s)}$ tels que, pour tout $g \in D_\varphi$,

$$[F(g)](s) = f_s(g(s)),$$

et de la forme des automorphismes de $\Delta_{\varphi(s)}$, on déduit que $f_s(g(s))$ s'écrit de manière unique

$$f_s(g(s))=\lambda(s)\frac{g(s)+a(s)}{1+\overline{a(s)}g(s)/\varphi(s)^2},$$

avec $|\lambda(s)|=1$, $|a(s)|<\varphi(s)$, pour tout $s\in S$. Il reste seulement à montrer que λ et a sont continues et que $a\in A$.

En écrivant que $F(0)$ appartient à D_φ, on montre que $\lambda(s)a(s)$ est une fonction continue de s. Considérons alors deux fonctions g_1 et g_2 de D_φ partout distinctes et non nulles. On obtient alors le système aux inconnues $\lambda(s)$ et $\overline{a(s)}/\varphi(s)^2$ suivant

$$g_1(s)\lambda(s)-F(g_1)(s)g_1(s)\overline{a(s)}/\varphi(s)^2=F(g_1)(s)-\lambda(s)a(s),$$
$$g_2(s)\lambda(s)-F(g_2)(s)g_2(s)\overline{a(s)}/\varphi(s)^2=F(g_2)(s)-\lambda(s)a(s).$$

Comme $F(g_1)$ et $F(g_2)$ sont deux fonctions partout distinctes, il est facile de vérifier que le déterminant du système est non nul et, comme toutes les fonctions qui interviennent sont continues, on en déduit que $\lambda(s)$ et $\overline{a(s)}/\varphi(s)^2$ sont des fonctions continues de s. Par suite, $a(s)=\lambda(s)a(s)/\lambda(s)$ est aussi continue. On vérifie enfin que dire que $\overline{a(s)}/\varphi(s)^2$ est une fonction continue de s est équivalent à dire que a s'annulle en les points de discontinuité de φ.

On déduit immédiatement de ce résultat la forme des automorphismes de D_φ.

Théorème 6.3. *Tout automorphisme analytique F de D_φ est de la forme*

$$g\longmapsto F(g)=\left\{s\mapsto\lambda(s)\frac{g(\sigma(s))+a(\sigma(s))}{1+\overline{a(\sigma(s))}g(\sigma(s))/\varphi(\sigma(s))^2}\right\},$$

où λ est une application continue de S dans $\mathbf{C}^*$, a une application continue appartenant à D_φ nulle en les points de discontinuité de φ et σ un homéomorphisme de S.

Démonstration. Soit $a\in D_\varphi$ tel que $F(a)=0$. On déduit des résultats du paragraphe 5 que $a\in A$, où A est l'ensemble des g de $\mathcal{C}(S,\mathbf{C})$ nulles aux points de discontinuité de φ. Soit F_a l'automorphisme de D_φ défini par

$$[F_a(g)](s)=\frac{g(s)+a(s)}{1+\overline{a(s)}g(s)/\varphi(s)^2}.$$

Alors, on a $F\circ F_{-a}(0)=0$. D'après le théorème de Banach–Stone et les résultats de W. Kaup et H. Upmeier [8], on a

$$[F\circ F_{-a}(g)](s)=\lambda(s)g(\sigma(s))$$

où λ est une application continue à valeurs dans $\mathbf{C}^*$, et σ un homéomorphisme de S. Le résultat s'en déduit.

7. Applications

Nous pouvons préciser l'orbite de l'origine 0 de D_φ sous l'action du groupe $G(D_\varphi)$. Nous avons le théorème suivant.

Théorème 7.1. *Soit D_φ un domaine produit. Alors l'orbite de l'origine* 0 *sous l'action du groupe $G(D_\varphi)$ est égale à $D_\varphi \cap A$, où A est l'ensemble des $f \in \mathcal{C}(S, \mathbf{C})$ qui s'annullent en les points de discontinuité de φ.*

Il découle de ce théorème que D_φ est homogène si et seulement si φ est continue. On peut énoncer ce résultat sous la forme suivante.

Corollaire 7.2. *Soit de même D_φ un domaine produit. Alors D_φ est homogène si et seulement si φ est continue. Dans ce cas, D_φ est analytiquement isomorphe à la boule-unité ouverte B de $\mathcal{C}(S, \mathbf{C})$.*

On montre aussi facilement le corollaire suivant.

Corollaire 7.3. *Soit de même D_φ un domaine produit. Alors le groupe $G(D_\varphi)$ des automorphismes analytiques de D_φ a, de manière naturelle, une structure de groupe de Lie réel compatible avec sa topologie.*

Pour terminer, je voudrais faire une remarque sur les points fixes des automorphismes analytiques de D_φ. On sait (voir par exemple [14]) et on peut vérifier sur leur forme explicite que les automorphismes de D_φ se prolongent continument sur $\overline{D}_\varphi$ et une question intéressante est celle de l'existence de points fixes d'un automorphisme f dans $\overline{D}_\varphi$. (La réponse est positive en dimension finie, d'après le théorème de Brouwer et cette question a été étudiée par L. Stachó [9] dans le cas de la boule-unité ouverte de $\mathcal{C}(S, \mathbf{C})$.) Considérons l'exemple suivant.

Exemple. Soit $l^\infty(\mathbf{N})$ l'espace de Banach des suites complexes bornées. Cet espace s'identifie à l'espace des fonctions continues sur le compactifié de Stone–Cech $\widetilde{\mathbf{N}}$ de $\mathbf{N}$. Si on considère la boule-unité B de $l^\infty(\mathbf{N})$, il est classique que tout automorphisme analytique de B admet un point fixe dans $\overline{B}$. Soit s_0 un point de $\widetilde{\mathbf{N}} \backslash \mathbf{N}$. Soit φ définie sur $\widetilde{\mathbf{N}}$ par $\varphi(s) = 1$, pour $s \neq s_0$, et $\varphi(s_0) = \frac{1}{2}$. Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite à termes strictement positifs tendant vers 0 à l'infini et soit a la fonction que cette suite définit sur $\widetilde{\mathbf{N}}$. Considérons l'automorphisme analytique F de D_φ définie par

$$[F(g)](s) = \frac{g(s) + a(s)}{1 + \overline{a(s)} g(s) / \varphi(s)^2}.$$

Il est facile de voir que, si g est un point fixe de F, on a, pour tout $s \in \mathbf{N}$,

$$g(s) = \pm 1.$$

Mais une telle fonction g ne peut pas appartenir à la frontière de D_φ. Ainsi F n'a pas de point fixe dans $\overline{D}_\varphi$.

Bibliographie

1. ABD-ALLA, M., Domaines de Reinhardt bornés homogènes de $\mathcal{C}(S, \mathbf{C})$, dans *Séminaire d'Analyse* (Lelong, P., Dolbeault, P. et Skoda, H., éds), Lecture Notes in Math. **1198**, p. 1–34, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg 1986.
2. BARTON, T., DINEEN, S. et TIMONEY, R., Bounded Reinhardt domains in Banach spaces, *Compositio Math.* **59** (1986), 265–321.
3. BRAUN, R., KAUP, W. et UPMEIER, H., On the automorphisms of circular and Reinhardt domains in complex Banach spaces, *Manuscripta Math.* **25** (1978), 97–133.
4. CARTAN, H., Les fonctions de deux variables complexes et le problème de la représentation analytique, *J. Math. Pures Appl.* **10** (1931), 1–114.
5. CHOQUET, G., *Cours d'analyse tome II*, Masson, Paris, 1969.
6. DUNFORD N. et SCHWARTZ, J., *Linear Operators Part I*, Interscience Publishers, New York, 1958.
7. GREENFIELD, S. et WALLACH, N., Automorphism groups of bounded domains in Banach spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **166** (1972), 45–57.
8. KAUP, W. et UPMEIER, H., Banach spaces with biholomorphically equivalent unit balls are isomorphic, *Proc. Amer. Math. Soc.* **58** (1976), 129–133.
9. STACHÓ, L., On fixed points of holomorphic automorphisms, *Ann. Mat. Pura Appl.* **78** (1980), 207–225.
10. UPMEIER, H., Über die Automorphismengruppen von Banach-Mannigfaltigkeiten mit invarianter Metrik, *Math. Ann.* **223** (1976), 279–288.
11. VESENTINI, E., On the Banach–Stone theorem, *Adv. in Math.* **112** (1995), 135–146.
12. VIGUÉ, J.-P., Le groupe des automorphismes analytiques d'un domaine borné d'un espace de Banach complexe. Application aux domaines bornés symétriques, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **9** (1976), 203–282.
13. VIGUÉ, J.-P., Automorphismes analytiques des produits continus de domaines bornés, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **11** (1978), 229–246.
14. VIGUÉ, J.-P., Automorphismes analytiques d'un domaine de Reinhardt borné d'un espace de Banach à base, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **34**:2 (1984), 67–87.
15. VIGUÉ, J.-P. et ISIDRO, J., Sur la topologie du groupe des automorphismes analytiques d'un domaine cerclé borné, *Bull. Sci. Math.* **106** (1982), 417–426.

Reçu le 8 août 1997

Jean-Pierre Vigué
URA CNRS D1322 Groupes de Lie et Géométrie Mathématiques
Université de Poitiers
40, avenue du Recteur Pineau
F-86022 Poitiers Cedex
France
email: vigue@mathrs.univ-poitiers.fr