Théorèmes de bidualité locale pour les $\mathcal{D}_X$-modules holonomes

Zoghman Mebkhout

§ 0. Introduction et notations

On démontre dans cet article deux théorèmes de bidualité locale pour les $\mathcal{D}_X$-modules à gauche holonomes énoncés sans preuve dans ([12]; Théorèmes 4.1 et 6.1). Le premier théorème affirme que le complexe de De Rham d'un système holonome est dual au sens des catégories dérivées à son complexe des solutions holomorphes. La démonstration combine la dualité de *Serre* et la dualité de *Poincaré—Verdier* [20]. Le deuxième théorème affirme que le système de De Rham $\mathcal{O}_X$ est dualisant dans la catégorie dérivée des complexes bornés de $\mathcal{D}_X^\infty$-modules à gauche à cohomologie holonome. La démonstration utilise, d'une part, le premier théorème de dualité et, d'autre part, la définition cohomologique du faisceau $\mathcal{D}_X^\infty$ des opérateurs différentiels d'ordre infini de *M. Sato* [16]. On a globalisé le théorème de dualité dans ([13]* et ([14] chap. IV)). Reprenant les démonstrations de ([11] et [12]) ces théorèmes nous permettent de formulier trois conditions a), b) et c) qui caractérisent un système holonome régulier (cf. proposition 3.3). Nous avons utilisé (([14], chap. V) et [15]) ces conditions pour démontrer une version $\mathcal{D}_X^\infty$ du problème de *Riemann—Hilbert* établissant une équivalence de catégories entre la catégorie dérivée des complexes bornés C-analytiquement constructibles sur une variété analytique complexe lisse X et la catégorie dérivée des complexes bornés de $\mathcal{D}_X^\infty$-modules à gauche à cohomologie holonome. Nous avons obtenu récemment une version d'ordre fini (cf. [15]). Des conditions similaires aux conditions a), b) et c) sont formulées dans *Ramis* [17]. De leur côté, en partant de la définition micro-locale des systèmes réguliers de *Kashiwara—Oshima* [6], *Kashiwara* et *Kawai* ont développé dans un long article [8] une théorie des systèmes réguliers du point de vue micro-local. En particulier, ils ont démontré le théorème de comparaison pour les systèmes réguliers généralisant le théorème de *B. Malgrange* ([10]) qui affirme que toute solution formelle d'une équation différentielle régulière est, en fait, convergente. Le théorème de

* Les demonstrations des resultats dans [13] sont à paraitre dans "Théorèmes de dualité globale pour les $\mathcal{D}_X$-modules coherènts" en *Mathematica Scandinavica* (1981).

comparaison est équivalent aux conditions a), b) et c) qui ne sont pas effectives. *J. E. Björk* [1] et *A. Van Den Essen* [18] ont étudié les systèmes réguliers d'un point de vue purement algébrique. Le livre de *J. E. Björk* contient une étude des fonctions de classe de *Nilsson* ([1]; chap. VI).

Cet article, à part l'introduction et un complément à la bibliographie, reproduit le chapitre III de notre thèse [14].

On utilise les notations suivantes:

$(X, \mathcal{O}_X)$:	Variété analytique complexe lisse de dimension n.
$\mathcal{D}_X^\infty$:	Faisceau des opérateurs différentiels d'ordre infini.
$\mathcal{D}_X$:	Faisceau des opérateurs différentiels d'ordre fini.
Ω_X:	Faisceau des n formes holomorphes.
$D(\mathcal{A})$:	La catégorie dérivée de la catégorie des $\mathcal{A}$-modules si $\mathcal{A}$ est un faisceau d'anneaux unitaires sur X.
R:	Foncteur dérivé droit dans la catégorie dérivée.
$Rhom_{\mathcal{A}}$:	Foncteur dérivé droit du foncteur $hom_{\mathcal{A}}$.
$\otimes_{\mathcal{A}}^L$:	Foncteur dérivé gauche du foncteur produit tensoriel sur $\mathcal{A}$.
Y:	Sous-espace analytique complexe de X défini pour un Idéal $\mathcal{J}_Y$.
$R\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M})$:	Complexe de cohomologie locale algébrique d'un complexe $\mathcal{M}$ de $D(\mathcal{D}_X)$ défini par $\mathbf{R}\ \lim_k hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X \mid \mathcal{J}_Y^K, \mathcal{M})$. C'est encore un complexe de $D(\mathcal{D}_X)$ [11].
$R\Gamma_Y(\mathcal{M}^\infty)$:	Cohomologie locale ordinaire d'un complexe $\mathcal{M}^\infty$ de $D(\mathcal{D}_X^\infty)$. C'est encore un complexe de $D(\mathcal{D}_X^\infty)$.
p_*:	Foncteur image directe par un morphisme p d'espaces topologiques.
$p!$	Foncteur à support propre par p. C'est le prolongement par zéro si p est une immersion ouverte.
p^{-1}:	Foncteur image réciproque par p.
p^*:	Foncteur image réciproque d'espaces annelés si p est un morphisme d'espaces annelés.
C_X:	Faisceau constant sur X associé au corps des nombres complexes.

Pour la notion de catégorie dérivée et de foncteur dérivé nous renvoyons le lecteur à [19]. Pour la notion de faisceau constructible qui généralise la notion de système local ou de monodromie nous renvoyons le lecteur à ([21]; [5]). Rappelons qu'un faisceau $\mathcal{F}$ sur X d'espaces vectoriels complexes de dimension finie est dit constructible s'il existe une stratification de *Whitney* $\bigcup_{i \in I} X_i$ de X telle que la restriction $\mathcal{F}_{|X_i}$ de $\mathcal{F}$ à chaque strate X_i soit un système local. Pour les notions sur les systèmes différentiels et la propriétés de $\mathcal{D}_X^\infty$ et $\mathcal{D}_X$ nous renvoyons le lecteur à [16] et à [1]. Disons simplement que le faisceau $\mathcal{D}_X$ est un faisceau cohérent d'anneaux unitaires non commutatifs et que le faisceau $\mathcal{D}_X^\infty$ est un faisceau d'algèbres unitaires sur $\mathcal{D}_X$ fidèlement plat. Dans tout ce qui suit, complexe sera synonyme de complexe borné.

§ 1. Dualité locale pour les $\mathscr{D}_X$-modules holonomes

On rappelle qu'étant donné un système différentiel $\mathscr{M}$ non nul c'est-à-dire un $\mathscr{D}_X$-module cohérent à gauche sa variété caractéristique $S\check{}S(\mathscr{M})$ est un sous espace analytique involutif du fibré cotangent T^*X ([16] et [1]). Un sous-espace analytique involutif non vide du fibré cotangent T^*X est de dimension au moins égale à $n = \dim X$. Un système holonome est par définition un système différentiel $\mathscr{M}$ dont la variété caractéristique $S\check{}S(\mathscr{M})$ est de dimension $n = \dim X$ [6]. Nous noterons $D(\mathscr{D}_X)_c$ la sous-catégorie de $D(\mathscr{D}_X)$ formée des complexes bornés à cohomologie $\mathscr{D}_X$-cohérente et $D(\mathscr{D}_X)_h$ la sous-catégorie de $D(\mathscr{D}_X)_c$ formée des complexes à cohomologie $\mathscr{D}_X$-holonome. On rappelle [5] que si $\mathscr{M}$ appartient à $D(\mathscr{D}_X)_h$ alors le complexe $Rhom_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}\mathscr{O}_X)$ des solutions holomorphes est C-analytiquement constructible (voir aussi [7]). Nous noterons $D(C_X)_c$ la sous-catégorie de $D(C_X)$ formée des complexes bornés à cohomologie constructible. Le premier théorème concerne les complexes de $D(\mathscr{D}_X)_h$ et affirme que le complexe de De Rham d'un système holonome est dual dans $D(C_X)_c$ de son complexe de ses solutions holomorphes.

Soit $\mathscr{M}$ un complexe de $D(\mathscr{D}_X)_h$ on rappelle que son complexe de De Rham noté $DR(\mathscr{M})$, est égal par définition à $Rhom_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{O}_X, \mathscr{M})$ (voir [11] par exemple page 103).

Théorème 1.1. *On a isomorphisme canonique dans $D(C_X)$ si $\mathscr{M}$ est un complexe de $D(\mathscr{D}_X)_h$:*

$$DR(\mathscr{M}) \simeq Rhom_{C_X}(Rhom_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{O}_X), C_X).$$

On démontre les deux lemmes suivants:

Lemme 1.2. *Le faisceau $\mathscr{E}xt^i_{C_X}(\mathscr{O}_X, C_X)$ est nul si $i \neq \dim X$.*

Lemme 1.3. *Il existe un morphisme canonique de $\Omega_X[-n] \to Rhom_{C_X}(\mathscr{O}_X, C_X)$.*

La démonstration des lemmes 1.2 et 1.3 repose sur la dualité de *Poincaré—Verdier* pour une variété différentiable. Soit M une variété différentiable, orientée pour simplifier, de dimension m, et $\mathscr{F}$ un faisceau d'espaces vectoriels complexes; alors le dual algébrique de l'espace vectoriel

$$H^{m-i}_c(M; \mathscr{F}) \text{ est égal à l'espace } \mathrm{Ext}^i_{C_M}(M; \mathscr{F}, C_M)$$

en vertu de la dualité de *Poincaré—Verdier* [20] où l'indice c désigne la famille des compacts de M. On rappelle que le faisceau associé au préfaisceau:

$$U \to \mathrm{Ext}^i_{C_M}(U; \mathscr{F}, C_M) \text{ est égal à } \mathscr{E}xt^i_{C_M}(\mathscr{F}, C_M).$$

Si on applique cette situation à $M=X$ et $\mathscr{F}=\mathcal{O}_X$ on trouve que $\mathscr{E}xt^i_{C_X}(\mathcal{O}_X, C_X)$ est nul si $i\neq\dim X$. En effet pour tout ouvert de *Stein* U de X l'espace $\mathrm{Ext}^i_{C_X}(U;\mathcal{O}_X, C_X)=[H^{2n-i}_c(U;\mathcal{O}_X)]^*$ est nul si $i\neq n=\dim X$ en vertu de la dualité de *Serre* et du théorème *B* de *Cartan*. Comme tout point admet un système de voisinages de *Stein* la démonstration du lemme 1.2 est terminée.

Pour établir le lemme 1.3 il suffit de voir que l'espace $\Gamma(U;\Omega_X)$ est égal au dual topologique de l'espace $H^n_c(U;\mathcal{O}_X)$ pour tout ouvert de *Stein* U toujours en vertu de la dualité de *Serre*.

D'où une application:

$$\begin{array}{ccccl} \Gamma(U;\Omega_X) & = & [H^n_c(U;\mathcal{O}_X)] & = & \text{dual topologique} \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathrm{Ext}^n_{C_X}(U;\mathcal{O}_X, C_X) & = & [H^n_c(U;\mathcal{O}_X]^* & = & \text{dual algébrique.} \end{array}$$

En passant aux faisceaux associés on trouve un morphisme:

$$\Omega_X \to \mathscr{E}xt^n_{C_X}(\mathcal{O}_X, C_X) = Rhom_{C_X}(\mathcal{O}_X, C_X)[n] \text{ d'où le lemme 1.3.}$$

Démonstration du théorème 1.1.

Soit $\mathscr{M}$ un complexe de $D(\mathscr{D}_X)_h$, du morphisme du lemme 1.3 on déduit un morphisme:

$$\Omega_X \overset{L}{\underset{\mathscr{D}_X}{\otimes}} \mathscr{M}[-n] \to Rhom_{C_X}(\mathcal{O}_X, C_X) \overset{L}{\underset{\mathscr{D}_X}{\otimes}} \mathscr{M}.$$

La structure de $\mathscr{D}_X$-module à droite de $Rhom_{C_X}(\mathcal{O}_X, C_X)$ qui prolonge celle de Ω_X provient de la structure de $\mathscr{D}_X$-module à gauche de $\mathcal{O}_X$. D'autre part on dispose d'un isomorphisme de foncteurs en $\mathscr{M}$ en vertu du lemme du "way out" (on dit aussi Lemme du δ-foncteur voir [11] par exemple):

$$Rhom_{C_X}(\mathcal{O}_X, C_X) \overset{L}{\underset{\mathscr{D}_X}{\otimes}} \mathscr{M} \simeq Rhom_{C_X}(Rhom_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathcal{O}_X), C_X).$$

Mais on sait que ([11] page 104) $DR(\mathscr{M})=\Omega_X \otimes^L_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}[-n]$.

On obtient donc le morphisme canonique du théorème 1.1.:

$$DR(\mathscr{M}) \to Rhom_{C_X}(Rhom_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathcal{O}_X), C_X).$$

Pour établir que c'est un isomorphisme dans $D(C_X)$ la question est locale. On peut supposer, en vertu du lemme du "way out", que $\mathscr{M}$ est réduit à un système holonome admettant une résolution libre finie de type fini:

$$0 \leftarrow \mathscr{M} \leftarrow \mathscr{D}_X^{r_0} \leftarrow \ldots \leftarrow \mathscr{D}_X^{r_m} \leftarrow 0.$$

On a donc un représentant local de $Rhom_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathcal{O}_X)$:

$$0 \to \mathcal{O}_X^{r_0} \to \ldots \to \mathcal{O}_X^{r_m} \to 0.$$

Mais, en vertu du lemme 1.2, on a un représentant local de

$$Rhom_{C_X}\left(Rhom_{\mathscr{D}_X} \mathscr{M}, \mathscr{O}_X), C_X\right)$$

$$[-n]\, 0 \leftarrow \mathscr{E}xt^n_{C_X}(\mathscr{O}_X^{r_0}, C_X) \leftarrow \ldots \mathscr{E}xt^n_{C_X}(\mathscr{O}_X^{r_m}, C_X) \leftarrow 0.$$

D'autre part on a un représentant local de $DR(\mathscr{M})$:

$$[-n]\, 0 \leftarrow \Omega_X^{r_0} \leftarrow \ldots \leftarrow \Omega_X^{r_m} \leftarrow 0.$$

En vertu du lemme 1.3 on a un morphisme de complexe qui représente localement le morphisme du théorème 1.1:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \leftarrow & \Omega_X^{r_0} & \leftarrow \ldots \leftarrow & \Omega_X^{r_m} & \leftarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \leftarrow & \mathscr{E}xt^n_{C_X}(\mathscr{O}_X^{r_0}, C_X) & \ldots \leftarrow & \mathscr{E}xt^n_{C_X}(\mathscr{O}_X^{r_m}, C_X) & \leftarrow 0. \end{array}$$

Il nous faut montrer que c'est un quasi-isomorphisme pour achever la démonstration du théorème 1.1.

Il suffit de montrer que pour un ouvert U de *Stein* suffisamment petit le morphisme de complexes d'espaces vectoriels:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \leftarrow & \Gamma(U;\, \Omega_X^{r_0}) & \leftarrow \ldots \leftarrow & \Gamma(U;\, \Omega_X^{r_m}) & \leftarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \leftarrow & \mathrm{Ext}^n_{C_X}(U;\, \mathscr{O}_X^{r_0}, C_X) & \leftarrow \ldots \leftarrow & \mathrm{Ext}^n_{C_X}(U;\, \mathscr{O}_X^{r_m}, C_X) & \leftarrow 0 \end{array}$$

est un quasi-isomorphisme.

Mais ce diagramme est égal au diagramme suivant, en vertu de la dualité de *Poincaré—Serre—Verdier:*

$$(*) \qquad \begin{array}{ccccccc} 0 \leftarrow & [H^n_c(U;\, \mathscr{O}_X^{r_0})]' & \leftarrow \ldots \leftarrow & [H^n_c(U;\, \mathscr{O}_X^{r_m})]' & \leftarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \leftarrow & [H^n_c(U;\, \mathscr{O}_X^{r_0})]^* & \leftarrow \ldots \leftarrow & [H^n_c(U;\, \mathscr{O}_X^{r_m})]^* & \leftarrow 0. \end{array}$$

Les espaces de cohomologie du complexe:

$$0 \to H^n_c(U;\, \mathscr{O}_X^{r_0}) \to \ldots \to H^n_c(U;\, \mathscr{O}_X^{r_0}) \to 0$$

sont de dimension finie si U est suffisamment petit en vertu de la constructibilité de $Rhom_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{O}_X)$. Il résulte que leur duaux algébriques et topologiques coïncident et le morphisme $(*)$ de complexes d'espaces vectoriels est un quasi-isomorphisme. D'où le théorème 1.1 en passant à la limite inductive.

Remarque 1.5. Par dualité [21] on a bien sûr que

$$Rhom_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{O}_X) = Rhom_{C_X}\left(DR(\mathscr{M}), C_X\right).$$

Il est intéressant de savoir si cette formule caractérise les systèmes de $D(\mathscr{D}_X)_h$.

§ 2. Bidualité locale pour les $\mathscr{D}_X^\infty$-modules holonomes

Le théorème suivant concerne les systèmes d'ordre infini admissibles et affirme que le $\mathscr{D}_X^\infty$-module $\mathcal{O}_X$ est "dualisant" pour les systèmes holonomes d'ordre infini. On rappelle qu'on appelle ainsi un $\mathscr{D}_X^\infty$-module $\mathcal{M}^\infty$ à gauche tel que, localement sur X, il existe un $\mathscr{D}_X$-module cohérent à gauche $\mathcal{M}$ et un isomorphisme

$$\mathscr{D}_X^\infty \underset{\mathscr{D}_X}{\otimes} \mathcal{M} \simeq \mathcal{M}^\infty.$$

On dira qu'un $\mathscr{D}_X^\infty$-module $\mathcal{M}^\infty$ est holonome si, dans l'isomorphisme précédent, le système $\mathcal{M}$ est $\mathscr{D}_X$-holonome. Nous noterons $D(\mathscr{D}_X^\infty)_h$ la sous-catégorie de $D(\mathscr{D}_X^\infty)$ formée des complexes bornés à cohomologie $\mathscr{D}_X^\infty$-holonome. La propriété, pour un faisceau d'espace vectoriel, d'être constructible est locale; il en résulte que $Rhom_{\mathscr{D}_X^\infty}(\mathcal{M}^\infty, \mathcal{O}_X)$ appartient à $D(C_X)_c$ si $\mathcal{M}^\infty$ est $\mathscr{D}_X^\infty$ holonome, puisque, localement $Rhom_{\mathscr{D}_X}^\infty(\mathcal{M}^\infty; \mathcal{O}_X) \simeq Rhom_{\mathscr{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ en vertu de la platitude de $\mathscr{D}_X^\infty$ sur $\mathscr{D}_X$. Soit $\mathcal{M}^\infty$ un complexe de $D(\mathscr{D}_X^\infty)$, on dispose d'un homomorphisme canonique:

$$(*) \qquad \mathcal{M}^\infty \to Rhom_{C_X}(Rhom_{\mathscr{D}_X^\infty}(\mathcal{M}^\infty, \mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X)$$

qu'on peut expliciter en prenant une résolution $\mathscr{D}_X^\infty$-injective de $\mathcal{O}_X$ qui soit aussi C_X-injective. Une telle résolution existe, par exemple la résolution canonique injective de *Godement*.

Théorème 2.1. *Si $\mathcal{M}^\infty$ appartient à $D(\mathscr{D}_X^\infty)_h$ alors l'homomorphisme $(*)$ est un isomorphisme dans $D(\mathscr{D}_X^\infty)_h$.*

Ce théorème est de nature locale il est donc équivalent au corollaire suivant en vertu de la platitude de $\mathscr{D}_X^\infty$ sur $\mathscr{D}_X$:

Corollaire 2.2. *Si $\mathcal{M}^\infty$ est de la forme $\mathscr{D}_X^\infty \otimes_{\mathscr{D}_X} \mathcal{M}$ où $\mathcal{M}$ appartient à $D(\mathscr{D}_X)_h$ on a un isomorphisme canonique dans $D(\mathscr{D}_X^\infty)_h$:*

$$\mathscr{D}_X^\infty \underset{\mathscr{D}_X}{\otimes} \mathcal{M} \simeq Rhom_{C_X}(Rhom_{\mathscr{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X).$$

La démonstration du théorème 2.1 repose sur le théorème 1.1 et occupera la majeure partie de ce paragraphe.

Soit $f\colon X \to Z$ un morphisme de variétés analytiques complexes lisses et Δ_f son graphe. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Delta_f \to & X \times Z & \\ & p\downarrow \quad \downarrow q & \\ & X \quad Z & \end{array}$$

où p et q sont les projections naturelles.

Proposition 2.3. *Soit $\mathscr{F}$ un complexe de $D(C_Z)_c$ alors il existe un isomorphisme canonique:*

$$q^{-1}(Rhom_{C_Z}(\mathscr{F}, C_Z)) \underset{C}{\otimes} p^{-1}\mathcal{O}_X \simeq Rhom_{C_{X\times Z}}(q^{-1}, \mathscr{F}, p^{-1}\mathcal{O}_X).$$

Remarque 2.4. Il n'est pas vrai en général que l'homomorphisme canonique

$$Rhom_{C_X}(\mathscr{F}, C_X) \underset{C}{\otimes} \mathcal{O}_X \to Rhom_{C_X}(\mathscr{F}, \mathcal{O}_X)$$

soit un isomorphisme, même si $\mathscr{F}$ appartient à $D(C_X)_c$.

Pour obtenir un contre exemple il suffit de prendre pour $\mathscr{F} = \mathbf{C}_Y$ le faisceau caractéristique d'une sous-variété lisse de codimension d dans X. On trouve que

$$Rhom_{C_X}(C_Y, C_X) \underset{C}{\otimes} O_X = C_Y \underset{C}{\otimes} \mathcal{O}_X[-2d]$$

$$Rhom_{C_X}(C_Y, \mathcal{O}_X) \qquad = H_Y^d(\mathcal{O}_X)[-d].$$

Ces deux faisceaux ne sont pas bien sûr isomorphes.

Démonstration de la proposition 2.3. (Voir [3], exposé III.) Explicitons d'abord l'homomorphisme. On dispose d'un homomorphisme canonique qui est d'ailleurs un isomorphisme si $\mathscr{F}$ appartientà $D(C_Z)_c$:

$$q^{-1}(Rhom_{C_Z}(\mathscr{F}, C_Z)) \to Rhom_{C_{X\times Z}}(q^{-1}\mathscr{F}, q^{-1}C_X) = Rhom_{C_{X\times Z}}(q^{-1}\mathscr{F}, C_{X\times Z}).$$

D'où en composant avec l'homomorphisme du produit tensoriel on déduit l'homomorphisme cherché:

$$q^{-1}(Rhom_{C_Z}(\mathscr{F}, C_Z)) \underset{C}{\otimes} p^{-1}\mathcal{O}_X \to Rhom_{C_{X\times Z}}(q^{-1}\mathscr{F}, p^{-1}O_X).$$

Pour montrer que c'est un isomorphisme dans $D(\mathbf{C}_{X\times Z})$ la question est locale. Par devissage et localisation on peut supposer $\mathscr{F}$ de la forme $\mathscr{F} = j_!\, j^{-1}\mathbf{C}_Z$ où j est l'inclusion d'un ouvert U de Z de complémentaire d'un fermé analytique (voir [21]). Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} U\times X \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "q'"'] & Z\times X \arrow[d, "q"] \\ U \arrow[r, "j"] & Z \end{tikzcd}$$

Par dualité on a $Rj_* Rhom_{C_U}(C_U, j^{-1}C_Z) = Rhom_{C_Z}(Rj!\,C_U, C_Z)$ donc,

$$q^{-1} Rhom(j!\,C_U, C_Z) = q^{-1} Rj_* C_U$$

et

$$Rhom_{C_{Z\times X}}(j!\,C_{U\times X'}\, p^{-1}\mathcal{O}_X) = Rj'_*(j'^{-1}p^{-1}\mathcal{O}_X).$$

D'autre part on dispose d'une flèche de *Künneth*

$$q^{-1}Rj_*C_U \underset{C}{\otimes} p^{-1}\mathcal{O}_X \to Rj'_*[q^{-1}C_U \underset{C}{\otimes} p^{-1}\mathcal{O}_X] = Rj'_*[j'^{-1}p^{-1}\mathcal{O}_X].$$

L'application j n'étant pas propre cette flèche de *Künneth* n'est pas un isomorphisme en général, contrairement à ce qui se passe en géométrie algébrique. Mais nous allons voir que dans ce cas particulier c'est un isomorphisme ce qui termine la démonstration de la proposition 2.3. Il suffit de montrer que les homomorphismes induitsen cohomologie sont des isomorphismes

$$q^{-1}R^i j_* C_U \underset{C}{\otimes} p^{-1}\mathcal{O}_X \to R^i j'_*(C_{U\times X} \underset{C}{\otimes} p^{-1}\mathcal{O}_X).$$

Soit un point (x, z) de $X\times Z$ et $V\times W$ un voisinage de (x, z). Si U' désigne la trace de W sur U on a un homomorphisme d'espaces vectoriels pour tout i

$$H^i(U'; C) \underset{C}{\otimes} \Gamma(V; \mathcal{O}_X) \to H^i(U'\times V; C_{U\times X} \underset{C}{\otimes} p^{-1}\mathcal{O}_X).$$

Il suffit de montrer que c'est un isomorphisme pour un système fondamental de voisinage de (x, z) et l'assertion résulte par passage à la limite inductive.

Pour cela on prendra un système fondamental de voisinage W de z tel que l'espace H^i $(U'; C)$ soit de dimension finie. Cela est possible parce que les images supérieures par j d'un faisceau eonstructible sont des faisceaux constructibles.

Pour système fondamental de voisinage de x on prendra des compacts de *Stein* V. Considérons la projection q: $U'\times V \to U'$ et calculons

$$Rq_*[C_{U\times X} \underset{C}{\otimes} p^{-1}\mathcal{O}_X].$$

L'application q étant propre il en résulte que la fibre en point z de U' des faisceaux

$$R^i q_*[C_{U\times X} \underset{C}{\otimes} p^{-1}\mathcal{O}_X]$$

est égal à la cohomologie de la fibre $q^{-1}(z)=V$. Mais V étant de *Stein* il en résulte que les faisceaux sont nuls si $i\neq 0$ et

$$Rq_*[C_{U\times X} \underset{C}{\otimes} p^{-1}\mathcal{O}_X] = q_* C_{U\times X} \underset{C}{\otimes} p^{-1}\mathcal{O}_X = C_U \underset{C}{\otimes} \Gamma(V, \mathcal{O}_X).$$

La suite spectrale de *Leray* nous donne

$$H^i(U'\times V; C_{U\times X} \underset{C}{\otimes} p^{-1}\mathcal{O}_X) = H^i(U'; C_U \underset{C}{\otimes} \Gamma(V; \mathcal{O}_X)).$$

Mais la formule des coefficients universels valable ici puisque la dimension de $H^i(U'; C)$ est finie donne

$$H^i(U'; C_U \underset{C}{\otimes} \Gamma(V; \mathcal{O}_X)) = H^i(U'; C) \underset{C}{\otimes} \Gamma(V; \mathcal{O}_X)$$

et la flèche de Künneth est un isomorphisme dans cette situation.

Remarque 2.5. On peut remplacer $\mathcal{O}_X$ par n'importe quel faisceau analytique cohérent.

Supposons maintenant que le morphisme f est égal à l'identité de X. Nous allons utiliser la proposition 2.3 pour en déduire la proposition 2.6 suivante. Nous notons Δ la diagonale de $X\times X$.

Proposition 2.6. *Pour un complexe $\mathscr{F}$ de $D(C_X)_c$ il existe un isomorphisme canonique:*

$$Rp_* R\Gamma_\Delta(X\times X;\ q^{-1} Rhom_{C_X}(\mathscr{F}, C_X) \underset{C}{\otimes} p^{-1}\mathcal{O}_X) \simeq Rhom_{C_X}(\mathscr{F}, \mathcal{O}_X)\,[-n].$$

Rappelons d'abord la formule de dualité de *Verdier* pour le cas simple d'une projection du produit de 2 variétés analytiques complexes lisses sur le premier facteur [20].

Avec les notations utilisées on a un isomorphisme fonctoriel pour un complexe borné d'espace vectoriel $\mathscr{F}$ sur $X\times Z$ et un complexe borné d'espace vectoriel G sur X:

$$Rp_* Rhom_{C_{X\times Z}}(\mathscr{F}, p^{-1}G) \simeq Rhom_{C_X}(R_{p!}\mathscr{F}, G)\,[-2n].$$

Revenons à la proposition 2.6. Nous avons grâce à 2.3 l'isomorphisme:

$$R\Gamma_\Delta(X\times X;\ q^{-1} Rhom_{C_X}(\mathscr{F}, C_X) \underset{C}{\otimes} p^{-1}\mathcal{O}_X))$$

$$\simeq Rhom_{C_{X\times X}}(C_\Delta, Rhom_{C_{X\times X}}(q^{-1}\mathscr{F}, p^{-1}\mathcal{O}_X)).$$

La formule d'adjonction du produit tensoriel et du foncteur $hom_{C_{X\times X}}$ nous donne

$$Rhom_{C_{X\times X}}(C_\Delta, Rhom_{C_{X\times X}}(q^{-1}\mathscr{F}, p^{-1}\mathcal{O}_X)) = Rhom_C(C_\Delta \underset{C}{\otimes} q^{-1}\mathscr{F}, p^{-1}\mathcal{O}_X).$$

La dualité relative [20] pour la projection p nous donne

$$Rp_* Rhom_{C_{X\times X}}(C_\Delta \otimes q^{-1}\mathscr{F}, p^{-1}\mathcal{O}_X) = Rhom_{C_{X\times X}}(Rp_! C_\Delta \underset{C}{\otimes} q^{-1}\mathscr{F}, \mathcal{O}_X)\,[-2n].$$

Pour en déduire la proposition 2.6 il suffit de voir que

$$Rp_!(C_\Delta \underset{C}{\otimes} q^{-1}\mathscr{F}) = p_*(C_\Delta \underset{C}{\otimes} q^{-1}\mathscr{F}) = \mathscr{F}$$

parce que p est isomorphisme de Δ sur X.

En appliquant cette proposition à $\mathscr{F} = Rhom_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathcal{O}_X)$ qui appartient à $D(C_X)_c$ si $\mathscr{M}$ appartient à $D(\mathscr{D}_X)_h$ [5] on trouve

$$Rp_* R\Gamma_\Delta(X\times X;\ p^{-1}(Rhom_C(Rhom_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathcal{O}_X), C_X)) \underset{C}{\otimes} p^{-1}\mathcal{O}_X)\,[2n]$$

$$\simeq Rhom_{C_X}(Rhom_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X).$$

Mais en vertu du théorème 1.1 on a

$$Rhom_{C_X}(Rhom_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathcal{O}_X), C_X) \simeq DR(\mathscr{M}).$$

Pour achever la démonstration du théorème 2.1 il suffit de montre que l'homomorphisme composé est un isomorphisme:

$$(*)\qquad \mathcal{D}_X^\infty \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{M} \to Rp_* R\Gamma_\Delta(X\times X;\ q^{-1}(DR(\mathcal{M})) \underset{C}{\otimes} p^{-1}\mathcal{O}_X).$$

Proposition 2.7. *L'homomorphisme* $(*)$ *est un isomorphisme si* $\mathcal{M}$ *appartient à* $D(\mathcal{D}_X)_h$.

Rappelons la définition du faisceau $\mathcal{D}_X^\infty$ selon *M. Sato* (voir [11] par exemple). On a par définition

$$\mathcal{D}_X^\infty = Rp_* R\Gamma_\Delta(X\times X;\ q^*\Omega_X[-n]) = p_* H_\Delta^n(X\times X;\ q^*\Omega_X)$$

où

$$q^*\Omega = \mathcal{O}_{X\times X} \underset{q^{-1}\mathcal{O}_X}{\otimes} q^{-1}\Omega_X.$$

Il en résulte puisque Ω_X est un $\mathcal{O}_X$-module inversible que

$$(\mathcal{D}_X^\infty)^{r_i} = p_* H_\Delta^n(X\times X;\ q^*\Omega_X^{r_i}).$$

Nous allons interpréter le faisceau $q^*\Omega_X^{r_i}$ grâce à la *nucléarité* comme le faisceau associé au préfaisceau [9]:

$$U\times V \to \Gamma(U;\ \mathcal{O}_X) \hat{\underset{C}{\otimes}} \Gamma(V;\ \Omega_X^{r_i}).$$

Les deux membres ayant des topologies de *Fréchet*-Nucleair le produit tensoriel complété est défini sans ambiguïté. Nous noterons par $\mathcal{O}_X \hat{\otimes}_C \Omega^{r_i} = q^*\Omega^{r_i}$ le faisceau ainsi obtenu. Cela permet de considérer le foncteur

$$\Omega^{r_i} \to \mathcal{O}_X \hat{\underset{C}{\otimes}} \Omega_X^{r_i}$$

comme un foncteur exact de $D(C_X)$ dans $D(C_{X\times X})$ pourvu que les flèches que l'on considère sont C_X-linéaires continues et non pas seulement $\mathcal{O}_X$-linéaires.

Démonstration de la proposition 2.7.

La question est locale, on peut supposer que $\mathcal{M}$ est un système simple admettant une résolution libre:

$$0 \leftarrow \mathcal{M} \leftarrow \mathcal{D}_X^{r_0} \leftarrow \dots \leftarrow \mathcal{D}_X^{r_m} \leftarrow 0.$$

D'où un représentant local de $DR(\mathcal{M})$

$$0 \leftarrow \Omega_X^{r_0} \leftarrow \dots \leftarrow \Omega_X^{r_m} \leftarrow 0\,[-n].$$

Les flèches étant des opérateurs différentiels donc continues et l'on peut considérer le complexe

$$O_X \hat{\underset{C}{\otimes}} DR(\mathcal{M}):\ 0 \leftarrow \mathcal{O}_X \hat{\underset{C}{\otimes}} \Omega_X^{r_0} \leftarrow \dots \leftarrow \mathcal{O}_X \hat{\underset{C}{\otimes}} \Omega_X^{r_m} \leftarrow 0\,[-n].$$

Applicant le foncteur $Rp_* R\Gamma_\Delta$ on trouve $Rp_* R\Gamma_\Delta(X\times X;\ \mathcal{O}_X \hat{\otimes}_C DR(\mathcal{M}))$:

$$0 \leftarrow (\mathcal{D}_X^\infty)^{r_0} \leftarrow \dots \leftarrow (\mathcal{D}_X^\infty)^{r_m} \leftarrow 0$$

puisque les objets de $\mathcal{O}_X \hat{\otimes}_C DR(\mathscr{M})$ sont cohomologiquement *triviaux* pour le foncteur $Rp_* R\Gamma_\Delta$ en vertu des définitions même.

Il nous reste à montrer que l'homomorphisme

$$q^{-1}(DR(\mathscr{M})) \underset{C}{\otimes} p^{-1}\mathcal{O}_X \to DR(\mathscr{M}) \underset{C}{\hat{\otimes}} \mathcal{O}_X$$

est un quasi isomorphisme pour achever la démonstration de la proposition 2.7. Il suffit de prendre un système de voisinages fondamental $U\times V$ d'un point de $X\times X$ tel que les espaces de cohomologie du complexe suivant soient des espaces vectoriels de dimension finie, ce qui est possible grâce à la constructibilité [5]:

$$0 \leftarrow \Gamma(U;\, \Omega_X^{r_0}) \leftarrow \ldots \leftarrow \Gamma(U;\, \Omega_X^{r_m}) \leftarrow 0.$$

Au-dessus de $U\times V$ les cohomologies de

$$q^{-1}DR(\mathscr{M}) \underset{C}{\otimes} p^{-1}\mathcal{O}_X \quad \text{et de} \quad DR(\mathscr{M}) \underset{C}{\hat{\otimes}} O_X$$

coïncident et la conclusion résulte par passage à la limite inductive. D'où la proposition 2.7 et donc le théorème 2.1.

§ 3. Une équivalence de catégories

Nous allons montrer que le foncteur $Rhom_{\mathscr{D}_X^\infty}(*, \mathcal{O}_X)$ de $D(\mathscr{D}_X^\infty)_h$ dans $D(C_X)_c$ est une équivalence de catégorie en explicitant un inverse. Soit $\mathscr{F}$ un complexe $D(C_X)_c$ de la structure de $\mathscr{D}_X^\infty$-module de $\mathcal{O}_X$ on déduit que le

$$Rhom_{C_X}(\mathscr{F}, \mathcal{O}_X) \quad \text{appartient à} \quad D(\mathscr{D}_X^\infty).$$

Théorème 3.1. *Si $\mathscr{F}$ appartient à $D(C_X)_c$ le complexe $Rhom_{C_X}(\mathscr{F}, \mathcal{O}_X)$ appartient à $(\mathscr{D}_X^\infty)_h$ et l'on a un isomorphisme dans $D(C_X)$:*

$$\mathscr{F} \simeq Rhom_{\mathscr{D}_X^\infty}(Rhom_{C_X}(\mathscr{F}, \mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X).$$

La question est locale par *devissage* on peut supposer que $\mathscr{F}$ est de la forme C_Y où Y est un sous espace analytique fermé de X. C'est le cas crucial qui a fait l'objet de {[11] et [12]} et des deux premiers paragraphes. On dispose de deux foncteurs inverses l'un de l'autre (pour une démonstration complète, voir le chapitre V de [14]). En vertue des théorèmes 2.1 et 3.1 on dispose de 2 foncteurs inverses l'un de l'autre:

$$F\colon D(\mathscr{D}_X^\infty)_h \to D(C_X)_c\colon \mathscr{M}^\infty \to Rhom_{\mathscr{D}_X^\infty}(\mathscr{M}^\infty, \mathcal{O}_X)$$

$$G\colon D(C_X)_c \to D(\mathscr{D}_X^\infty)_h\colon \mathscr{F} \to Rhom_{C_X}(\mathscr{F}, \mathcal{O}_X).$$

Remarque 3.2. Les démonstrations de [12] pour le système $\mathscr{M} = \mathcal{O}_X$ reposent sur deux fait:

D'une part que le complexe $R\Gamma_{[Y]}(\mathcal{O}_X)$ appartient à $D(\mathcal{D}_X)_h$ et d'autre part que l'homomorphisme canonique suivant est un isomorphisme dans $D(C_X)$:

$$DR(R\Gamma_{[Y]}(\mathcal{O}_X)) \to R\Gamma_Y(DR(\mathcal{O}_X)).$$

C'est le théorème 3.1 de [12] qui résulte essentiellement du théorème de comparaison de *Grothendieck* [3]. On va voir que les théorèmes de [12] restent vrais si l'on remplace $\mathcal{O}_X$ par n'importe quel système holonome $\mathcal{M}$ qui satisfait au théorème de comparaison précédent. De façon précise on a la proposition suivante:

Proposition 3.3. *Soit $\mathcal{M}$ un complexe de $D(\mathcal{D}_X)_h$ et Y un sous-espace analytique fermé de X alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

a) *L'homomorphisme canonique est un isomorphisme dans $D(C_X)_c$*

$$DR(R\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M})) \simeq R\Gamma_Y(DR(\mathcal{M})).$$

b) *Il existe un isomorphisme canonique dans $D(C_X)_c$*

$$Rhom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \underset{C}{\otimes} C_Y \simeq Rhom_{\mathcal{D}_X}(R\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M}), \mathcal{O}_X).$$

c) *L'homomorphisme canonique dans $D(\mathcal{D}_X^\infty)$ est un isomorphisme*

$$\mathcal{D}_X^\infty \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} R\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M}) \simeq R\Gamma_Y(\mathcal{D}_X^\infty \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{M}).$$

Démonstration:

1) a)$\Rightarrow$b): On sait que $R\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M})$ appartient à $D(\mathcal{D}_X)_h$ (voir [1] si Y est une hypersurface et [12] pour la codimension supérieure) si $\mathcal{M}$ appartient à $D(\mathcal{M})_h$. Du théorème 1.1 on déduit que l'on a:

$$Rhom_{C_X}(R\Gamma_Y(DR(\mathcal{M}), C_X)) = Rhom_{C_X}(DR(R\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M}), C_X))$$

$$\simeq Rhom_{\mathcal{D}_X}(R\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M}), \mathcal{O}_X).$$

Il suffit de voir que

$$Rhom_{C_X}(R\Gamma_Y(DR(\mathcal{M})), C_X) \simeq Rhom_{C_X}(DR(\mathcal{M}), C_X) \underset{C}{\otimes} C_Y$$

ce qui résulte par dualité [21] de la constructibilité des complexes en questions. Il suffit d'invoquer le théorème 1.1 de nouveau pour terminer l'implication

a) $\Rightarrow$ b).

2) Montrons que

b) $\Rightarrow$ c).

Explicitons l'homomorphisme

$$\mathcal{D}_X^\infty \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} R\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M}) \to R\Gamma_Y(\mathcal{D}_X^\infty \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{M}).$$

De l'injection $\mathcal{M} \to \mathcal{D}_X^\infty \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}$ on déduit un homomorphisme:

$$R\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M}) \to R\Gamma_Y(\mathcal{D}_X^\infty \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{M}).$$

Mais $R\Gamma_Y(\mathcal{D}_X^\infty \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M})$ appartient à $D(\mathcal{D}^\infty)$. D'où l'homomorphisme cherché par composition:

$$\mathcal{D}_X^\infty \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} R\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M}) \to \mathcal{D}_X^\infty \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} R\Gamma_Y(\mathcal{D}_X^\infty \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{M}) \to R\Gamma_Y(\mathcal{D}_X^\infty \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{M}).$$

Par le théorème 2.1 on a

$$\mathcal{D}_X^\infty \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} R\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M}) \simeq Rhom_{C_X}(Rhom_{\mathcal{D}_X}(R\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M}), \mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X))$$

$$\begin{aligned} R\Gamma_Y(\mathcal{D}_X^\infty \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{M}) &\simeq R\Gamma_Y(Rhom_{C_X}(Rhom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X)) \\ &\simeq Rhom_{C_X}(Rhom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X), R\Gamma_Y(\mathcal{O}_X)) \\ &\simeq Rhom_{C_X}(Rhom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \underset{C}{\otimes} C_Y, \mathcal{O}_X). \end{aligned}$$

Il en résulte que b)$\Rightarrow$c).

3) c)$\Rightarrow$a). Prenons le complexe de De Rham de chaque membre de l'isomorphisme de c):

$$DR(\mathcal{D}_X^\infty \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} R\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M})) = DR(R\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M}))$$

$$DR(R\Gamma_Y(\mathcal{D}_X^\infty \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{M}) = R\Gamma_Y(DR(\mathcal{D}_X^\infty \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{M})) = R\Gamma_Y(DR(\mathcal{M})),$$

d'où l'implication c)$\Rightarrow$a).

Il reste à trouver des conditions suffisamment simples pour qu'un système $\mathcal{M}$ vérifie les conditions a), b), c). Les conditions a), b), c) sont difficiles à vérifier directement sur des exemples concrets. Le résultat principal de [12] affirme que le système de De Rham $\mathcal{O}_X$ est régulier le long de tout sous-espace analytique Y de X, c'est à dire qu'il satisfait aux trois conditions a), b), et c).

Références

1. J. E. Björk, *Rings of differential operators.* North-Holland Company — Amsterdam (1979).
2. P. Deligne, *Equations différentielles à points singuliers réguliers,* Lecture Notes in Math. n° **163**. Berlin—Heidelberg—New York, Springer (1969).
3. A. Grothendieck, *Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie* 1965—66. Cohomologie l-adique et fonctions L. Lectures Notes in Math. n° **569**. Berlin—Heidelberg—New York, Springer (1977).

4. A. GROTHENDIECK, On the De Rham. Cohomology of Algebraic Varieties *Publ. I.H.E.S.* **29** (1966), 95—103.
5. M. KASHIWARA, On the maximally over determined systems of linear differential equations I. *Publ. R.I.M.S. Kyoto University.* **10** (1975), 563—579.
6. M. KASHIWARA, I. OSHIMA, System of differential equations with regular singularities and their boundary value problem. *Ann of Math.* **106** (1977), 145—200.
7. M. KASHIWARA, P. SCHAPIRA, Micro-Hyperbolic systems. *Act Math.* **142** (1979), 1—56.
8. M. KASHIWARA, T. KAWAI, On holonomic systems of micro-differential equations III. (Preprint).
9. J. HUBBARD, Transversalité. Séminaire de l'Ecole Normale Supérieure (1973). *Astérisque* **16** (1974), 33—34.
10. B. MALGRANGE, Sur les points singuliers réguliers des équations différentielles. *Enseignement Math.* **20** (1974), 147—176.
11. Z. MEBKHOUT, Cohomologie locale d'une hypersurface. In fonctions de plusieurs variables complexes III. Lecture Notes in Math. n° **670**, Berlin—Heidelberg—New York, Springer (1977).
12. Z. MEBKHOUT, Local cohomology of analytic spaces. *Publ. R.I.M.S. Kyoto Univers.* **12** suppl. (1977), 247—256.
13. Z. MEBKHOUT, Théorèmes de dualité pour les $\mathcal{D}_X$-modules cohérents. *C.R. Acad. Sc. Paris* **285** (1977), 785—787.
14. Z. MEBKHOUT, Cohomologie locale des espaces analytiques complexes. *Thèse de Doctorat d'Etat,* Université de Paris VII, 126 pages (Fév. 1979).
15. Z. MEBKHOUT, Sur le problème de Hilbert—Riemann. *C.R. Acad. Sc. Paris* **290** (1980), 415—417.
16. M. SATO, T. KAWAI, M. KASHIWARA, *Micro-fonctions and Pseudo differential equations.* Lecture Notes in Math. n° **287**; 265—529. Berlin—Heidelberg—New York, Springer (1973).
17. J. P. RAMIS, Variations sur le thème GAGA, Séminaire Lelong. Lecture Notes in Math. n° **694**. Berlin—Heidelberg—New York, Springer (1978).
18. A. R. P. VAN DEN ESSEN, Fuchsion modules. (*Thesis,* 1979, Katholieke Universiteit Nymegen, The Netherlands).
19. J. L. VERDIER, Catégories dérivées Etat 0. In S. G. A. 4 1/2. Lecture Notes In Math. n° **569**; 262—311. Berlin—Heidelberg—New York, Springer (1977).
20. J. L. VERDIER, Dualité dans la cohomologie des espaces localement compacts. *Séminaire Bourbaki,* n° **300** (1965—66).
21. J. L. VERDIER, Classe d'homologie associée à un cycle. Séminaire de l'Ecole Normale Supérieure. *Astérisque* **36—37** (1976), 101—151.

Received March 15, 1980

Zoghman Mebkhout
Departement de mathematiques
Universite d'Orleans
45045 Orleans
France