Communiqué le 9 janvier 1952

Contributions à la théorie des séries de Dirichlet

Note IV

Par FRITZ CARLSON

1. Soient λ_v des nombres réels vérifiant

$$0 \le \lambda_1 < \lambda_2 \ldots < \lambda_n < \lambda_{n+1} \ldots, \quad \lambda_n \to \infty$$

et C_n des nombres quelconques tels que

$$|C_n| \le \lambda_{n+1}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Considérons la série

$$F(x) = \sum_{v=1}^{\infty} C_v \left\{ \frac{x}{\lambda_{v+1} - \lambda_v} \int_{\lambda_v}^{\lambda_{v+1}} e^{-ux} du - \frac{x}{\lambda_{v+2} - \lambda_{v+1}} \int_{\lambda_{v+1}}^{\lambda_{v+2}} e^{-ux} du \right\} \tag{2}$$

pour des valeurs réelles et positives de x. Les parenthèses étant positives, cette série a la majorante

$$\sum_{v=1}^{\infty} \lambda_{v+1} \left\{ \frac{x}{\lambda_{v+1} - \lambda_v} \int_{\lambda_v}^{\lambda_{v+1}} e^{-ux} du - \frac{x}{\lambda_{v+2} - \lambda_{v+1}} \int_{\lambda_{v+1}}^{\lambda_{v+2}} e^{-ux} du \right\} \tag{3}$$

série qui converge uniformément pour $x \ge \delta > 0$. On voit facilement que la somme (3) a la valeur

$$\frac{\lambda_2 e^{-\lambda_1 x} - \lambda_1 e^{-\lambda_2 x}}{\lambda_2 - \lambda_1} \le 1$$

pour $x > 0$. La série (2) peut être dérivée. On aura

$$|F^{(n)}(x)| \le \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v \left| \frac{1}{\lambda_{v+1} - \lambda_v} \int_{\lambda_v}^{\lambda_{v+1}} e^{-ux} (x u^n - n u^{n-1}) du - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\lambda_{v+2} - \lambda_{v+1}} \int_{\lambda_{v+1}}^{\lambda_{v+2}} e^{-ux} (x u^n - n u^{n-1}) du \right|$$

et, par un calcul facil,

$$|F^{(n)}(x)| < \frac{\underline{|n}\sqrt{n+1}}{x^n} K, \qquad K \text{ constante.}$$

Donc le développement

$$\sum_0^\infty (z-x)^n \frac{F^{(n)}(x)}{\underline{|n}} \tag{4}$$

converge pour

$$|z-x| < x. \tag{5}$$

Mais x étant arbitrairement grand, tout point donné du demi-plan $R(z) > 0$ appartiendra à un cercle (5). Par conséquent la série (4) définit une fonction analytique régulière pour $R(z) > 0$ et identique à la fonction (2) pour $z = x$ réel et positif. On a $|F(x)| \leq 1$ pour x réel et positif.

Cela étant, supposons la série de Dirichlet

$$f(s) = \sum_1^\infty a_v e^{-\lambda_v s} \tag{6}$$

convergente pour une valeur finie de s. Soit $s = \sigma + it$ $(\sigma > 0)$ un point à l'intérieur du demi-plan de convergence et posons

$$\varrho_n = \sum_{v=n}^\infty a_v e^{-\lambda_v s}, \qquad s_n = \sum_{v=1}^n a_v e^{-\lambda_v t i}. \qquad (s_0 = 0)$$

On a $\varrho_n \to 0$ et, à l'aide d'une sommation partielle, on trouvera

$$s_n e^{-\lambda_n s} \to 0.$$

Posons

$$\sum_{v=1}^n (\lambda_{n+1} - \lambda_v) a_v e^{-\lambda_v t i} = C_n(t) = C_n.$$

Alors

$$\sum_{v=1}^n a_v e^{-\lambda_v s} = \sum_{v=1}^n (s_v - s_{v-1}) e^{-\lambda_v \sigma} =$$

$$= \sum_{v=1}^{n-1} C_v \left\{ \frac{\sigma}{\lambda_{v+1} - \lambda_v} \int_{\lambda_v}^{\lambda_{v+1}} e^{-u\sigma} du - \frac{\sigma}{\lambda_{v+2} - \lambda_{v+1}} \int_{\lambda_{v+1}}^{\lambda_{v+2}} e^{-u\sigma} du \right\} +$$

$$+ \frac{C_{n-1}\sigma}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-u\sigma} du + s_n e^{-\lambda_n \sigma}.$$

Supposons maintenant que les C_n vérifient les inégalités (1) et faisons tendre n vers l'infini. On aura

$$(7)\qquad f(s)=\sum_{v=1}^{\infty} C_v\left\{\frac{\sigma}{\lambda_{v+1}-\lambda_v}\int_{\lambda_v}^{\lambda_{v+1}} e^{-u\sigma}du-\frac{\sigma}{\lambda_{v+2}-\lambda_{v+1}}\int_{\lambda_{v+1}}^{\lambda_{v+2}} e^{-u\sigma}du\right\}.$$

Nous avons établi cette égalité pour σ positif et plus grand que l'abscisse de convergence de la série (6). D'après ce que nous avons démontré plus haut l'égalité subsiste pour $\sigma > 0$; $f(s)$ est une fonction régulière dans ce domaine et de module ≤ 1. Donc:

pour que la série (6) *supposée convergente pour une valeur finie de s définisse une fonction régulière et de module ≤ 1 dans le demi-plan $\sigma > 0$, il suffit que*

$$(8)\qquad \left|\sum_{v=1}^{n}(\lambda_{n+1}-\lambda_v)\,a_v\,e^{-\lambda_v t i}\right|\leq \lambda_{n+1}$$

pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ et pour toute valeur réelle de t.

Inversement, supposons que la série (6) converge pour un s fini et qu'elle représente une fonction $f(s)$ régulière et de module ≤ 1 pour $\sigma > 0$. Alors pour $s_0 = t i$, $\beta > 0$, $x > 0$

$$\sum_{\lambda_v<x}(x-\lambda_v)\,a_v\,e^{-\lambda_v t i}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} f(z)\,e^{x(z-s_0)}\,\frac{dz}{(z-s_0)^2}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} f(z)\left\{e^{x(z-s_0)}-2+e^{-x(z-s_0)}\right\}\frac{dz}{(z-s_0)^2}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} f(z)\left\{e^{\frac{x}{2}(z-s_0)}-e^{-\frac{x}{2}(z-s_0)}\right\}^2\frac{dz}{(z-s_0)^2}$$

de sorte que

$$\left|\sum_{\lambda_v<x}(x-\lambda_v)\,a_v\,e^{-\lambda_v t i}\right|\leq\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{\frac{x}{2}(\beta+i(y-t))}-e^{-\frac{x}{2}(\beta+i(y-t))}\right|^2\frac{dy}{|\beta+i(y-t)|^2}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(e^{\beta x}+e^{-\beta x}-2\cos ux)\,\frac{du}{u^2+\beta^2}$$

$$=\frac{2x}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2du+\frac{e^{\beta x}+e^{-\beta x}-2}{\pi\beta}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{\beta x^2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin\dfrac{\beta x u}{2}}{\dfrac{\beta x u}{2}}\right)^2\frac{du}{1+u^2}$$

quantité qui tend vers

$$\frac{2x}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2du=x$$

lorsque β tend vers zéro. Par conséquent:

pour que la fonction $f(s)$ définie par la série (6) *supposée convergente pour un s fini reste régulière et de module $\leqq 1$ pour $\sigma > 0$ il faut que*

(9) $$\Big|\sum_{\lambda_v < x} (x - \lambda_v)\, a_v\, e^{-\lambda_v t i}\Big| \leqq x$$

pour tout x positif et pour tout t réel.

2. On voit que l'inégalité (8) est analogue à l'inégalité correspondante qui exprime la condition pour qu'une série de puissance représente une fonction régulière et de module ≤ 1 dans le cercle unité.[1] L'une et l'autre sont liées à la sommation des séries. Il y a d'autres analogies. En maintenant l'hypothèse que la série (6) définit une fonction régulière et de module $\leqq 1$ pour $\sigma > 0$, on aura

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{2\,\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |f(\sigma + i t)|^2\, d t = \sum_{v=1}^{\infty} |a_v|^2\, e^{-2\lambda_v \sigma}$$

pour $\sigma > 0$. Donc[2]

(10) $$\sum_{v=1}^{\infty} |a_v|^2 \leqq 1,$$

et, en particulier,

(11) $$|a_v| \leq 1, \qquad v = 1, 2, 3, \ldots$$

S'il y a un v pour lequel $|a_v| = 1$, tous les autres a_v s'annulent. Appliquons cela à l'intégrale

$$\lim \frac{1}{2\,\omega\, i} \int_{\beta - i\omega}^{\beta + i\omega} f(s)\, e^{\lambda_n s}\, \{1 + c_1\, e^{(\lambda_1 - \lambda_n) s} + c_2\, e^{(\lambda_2 - \lambda_n) s} + \cdots + c_p\, e^{(\lambda_p - \lambda_n) s}\}^2\, d s$$

où $\beta > 0$. Cette limite est égale à

$$a_n + 2\, c_1\, a_1 + 2\, c_2\, a_2 + \cdots + 2\, c_p\, a_p$$

si

(12) $$2\,\lambda_p - \lambda_n < \lambda_1.$$

D'autre part sa valeur absolue est majorée par

$$\lim \frac{e^{\lambda_n \beta}}{2\,\omega\, i} \int_{\beta - i\omega}^{\beta + i\omega} |1 + c_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_n) s} + \cdots + c_p\, e^{(\lambda_p - \lambda_n) s}|^2\, d s = e^{\lambda_n \beta} \left\{1 + \sum_{1}^{p} |c_v|^2\, e^{2(\lambda_v - \lambda_n)\beta}\right\}$$

et comme $\beta > 0$ est arbitraire, nous en concluons

[1] C. f. p. e. LANDAU, *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie*, Berlin 1929.

[2] Voir Note I, Arkiv för Matematik etc., t. 16, n:o 18 (1922).

$$(13) \qquad |a_n + 2\sum_1^p c_v a_v| \leq 1 + \sum_1^p |c_v|^2.$$

Supposons a_n réel et positif et choisissons

$$c_v = \bar{a}_v.$$

Alors, en posant

$$|a_v| = \alpha_v$$

il s'ensuit

$$(14) \qquad \alpha_n \leqq 1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 \ldots - \alpha_p^2.$$

Si

$$(12') \qquad 2\lambda_p - \lambda_n = \lambda_1$$

l'inégalité (13) sera remplacée par l'inégalité

$$|a_n + 2\sum_1^p c_v a_v + c_p^2 a_1| \leqq 1 + \sum_1^p |c_v|^2.$$

En choisissant maintenant

$$c_p = \frac{\bar{a}_p}{1+\alpha_1}, \quad c_v = \bar{a}_v, \quad v = 1, 2, \ldots p-1$$

on aura

$$(15) \qquad \alpha_n \leqq 1 - \alpha_1^2 - \cdots - \alpha_{p-1}^2 - \frac{\alpha_p^2}{1+\alpha_1}.$$

Observons que l'inégalité (12) est toujours vérifiée pour $p = 1$, $n = 2, 3, \ldots$ de sorte que

$$(16) \qquad \alpha_n \leqq 1 - \alpha_1^2, \quad n = 2, 3, \ldots$$

ce qui est une première amélioration de (11).

Considérons p. e. une série de la forme

$$(17) \qquad f(s) = \sum_1^\infty \frac{a_n}{n^s}.$$

Si $f(s)$ est régulière et de module ≤ 1 pour $\sigma > 0$ les inégalités (16) conduiront à

$$\sum_1^\infty \frac{\alpha_n}{n^{\sigma'}} \leq 1$$

où σ' est la racine de l'équation

$$\sum_2^\infty \frac{1}{n^{\sigma'}} = \frac{1}{1+\alpha_1}$$

ou bien

$$\prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^{\sigma'}}} = 1 + \frac{1}{1+\alpha_1}, \tag{18}$$

p désignant les nombres premiers. (On a supposé $\alpha_1 < 1$.) La série (17) peut être écrite sous la forme d'une série de puissance d'une infinité de variables. En effet, en posant

$$x_v = \frac{1}{p_v^s}, \quad v = 1, 2, \ldots$$

où $p_1 = 2$, $p_2 = 3, \ldots$ sont les nombres premiers, la série (17) s'écrira

$$a_1 + \sum c_v x_v + \sum c_{v_1 v_2} x_{v_1} x_{v_2} + \sum c_{v_1 v_2 v_3} x_{v_1} x_{v_2} x_{v_3} + \cdots$$

Considérons la fonction d'un nombre fini ou infini de variables

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots) = a_1 + \sum c_v x_v + \sum c_{v_1 v_2} x_{v_1} x_{v_2} + \cdots \tag{19}$$

jouissant de la propriété que pour tout m la section $F_m(x_1, x_2, \ldots x_m)$ obtenue en posant dans F

$$x_{m+1} = x_{m+2} = \cdots = 0$$

est régulière et de module ≤ 1 pour $|x_1| < 1$, $|x_2| < 1, \ldots |x_m| < 1$. Alors l'intégrale

$$\frac{1}{(2\pi i)^m} \int\int \cdots \int F_m(x_1, \ldots x_m)(1 + \mu x_1^{v_1} \ldots x_m^{v_m})^2 \frac{d x_1 d x_2 \ldots d x_m}{x_1^{v_1+1} x_2^{v_2+1} \ldots x_m^{v_m+1}}$$

prise suivant des cercles $|x_v| = R_v < 1$ est égale à

$$b + 2\mu a_1$$

où b est le coefficient de $x_1^{v_1} x_2^{v_2} \ldots x_m^{v_m}$. D'autre part la valeur absolue de l'intégrale est

$$\leq 1 + |\mu|^2.$$

Il s'ensuit

$$|b| \leq 1 - \alpha_1^2, \quad \alpha_1 = |a_1|$$

Nous en concluons

$$\alpha_1 + \sum |c_v x_v| + \sum |c_{v_1 v_2} x_{v_1} x_{v_2}| + \cdots \leq 1$$

pour $|x_v| \leq \varrho_v$, $v = 1, 2, \ldots$ *où*

$$\prod_{v=1}^{\infty} \frac{1}{1-\varrho_v} \leq 1 + \frac{1}{1+\alpha_1}.$$

Tryckt den 2 september 1952

Uppsala 1952. Almqvist & Wiksells Boktryckeri AB