The Annals of Probability
1998, Vol. 26, No. 2, 500–532

PROBLÈME DE SKOROHOD MULTIVOQUE

BY EMMANUEL CÉPA

Université d'Orléans

On prouve un résultat d'existence et d'unicité pour une généralisation (par introduction d'un opérateur maximal monotone multivoque) du problème de Skorohod (avec réflexion normale) déterministe associé à un convexe fermé D de $\mathbb{R}^d$. La formulation à partir des opérateurs maximaux monotones multivoques permet de considérer des drifts singuliers explosant au bord du domaine. Cette "approche multivoque" clarifie la connexion entre problème de Skorohod et semigroupes nonlinéaires. En guise d'application, on considère ensuite le cas stochastique: les équations différentielles stochastiques multivoques sont ainsi revisitées. Par conséquent, cette contribution fournit une nouvelle méthode de construction de diffusions réfléchies normalement possédant un coefficient de dérive discontinu, explosif.

An existence and uniqueness result is proven for a generalization (by introduction of a multivalued maximal monotone operator) of the deterministic Skorohod problem (with normal reflection) associated with a closed convex D in $\mathbb{R}^d$. The maximal monotone operator formulation allows for drifts that blow up as one gets near the boundary. This "multivalued approach" clarifies the connection between nonlinear semigroup theory and the Skorohod problem. As a consequence, we discuss then the stochastic case: multivalued stochastic differential equations are thus revisited. Therefore, we give an alternative way to construct diffusions with normal reflecting boundary conditions and discontinuous, exploding drift.

1. Introduction. Lorsque Skorohod [14] construisit la solution d'une équation différentielle stochastique sur $\mathbb{R}^+$ réfléchie en 0, il utilisa de façon essentielle les propriétés d'une certaine application sur l'espace des fonctions continues réelles sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans lui-même. Cette application était définie à partir d'un problème déterministe associé à l'équation différentielle stochastique: ce problème a pris dès lors le nom de problème de Skorohod et l'application qui en découle, application de Skorohod. Explicitons la notion de problème de Skorohod (d'abord sur $\mathbb{R}^+$): étant donnée w continue sur $[0; T]$, $T > 0$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que $w(0) \geq 0$, on appelle solution du problème de Skorohod sur $\mathbb{R}^+$ de donnée w, tout couple de fonctions (x, k) satisfai-

Received October 1996; revised September 1997.

AMS 1991 *subject classifications*. 34F05, 47N20, 47N30, 60H10, 60J60.

Key words and phrases. Multivalued stochastic differential equations, Skorohod problem, nonlinear semigroup, reflected diffusion with exploding drift, diffusive particle with electrostatic repulsion.

sant à

1. $x = \{x(t);\ 0 \le t \le T\}$ continue, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$;
2. $k = \{k(t);\ 0 \le t \le T\}$ continue, à variation bornée (sa variation totale sur $[0;t]$ est notée $|k|_t$), à valeurs dans $\mathbb{R}$, $k(0) = 0$;
3.

$$x(t) = w(t) - k(t) \qquad \forall\ t \in [0;T] \tag{1.1}$$

4.

$$\int_0^T \mathbb{1}_{\{x(s)>0\}}\, d|k|_s = 0. \tag{1.2}$$

Le but est donc, en ajoutant une certaine fonction k à la donnée w qui est continue, à valeurs dans $\mathbb{R}$, d'obtenir une fonction continue, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ de façon minimale, c'est-à-dire k ne varie que lorsque c'est indispensable c'est-à-dire si $x = 0$ [condition (4)]. En fait, dans ce cas particulier, la fonction k est monotone et le problème possède une unique solution qui est connue explicitement:

$$k(t) = 0 \wedge \inf_{0\le s\le t} w(s); \qquad x(t) = w(t) - 0 \wedge \inf_{0\le s\le t} w(s). \tag{1.3}$$

L'application de Skorohod est alors définie sur (une partie de) l'espace des fonctions continues de $[0;T]$ dans $\mathbb{R}$, noté $C([0;T];\mathbb{R})$, de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \Gamma\colon C([0;T];\mathbb{R}) &\to C([0;T];\mathbb{R}), \\ w \quad &\mapsto \quad x. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Remarquons que cette application est ici lipschitzienne de constante de Lipschitz 2. On peut étendre à tout domaine "suffisamment régulier" D de $\mathbb{R}^d$ la notion de problème de Skorohod de la façon suivante: étant donnée $w \in C([0;T];\mathbb{R}^d)$ telle que $w(0) \in \overline{D}$, on appelle solution du problème de Skorohod (avec réflexion normale) sur D de donnée w, tout couple de fonctions (x, k) satisfaisant à:

1. $x = \{x(t);\ 0 \le t \le T\}$ continue, à valeurs dans $\overline{D}$;
2. $k = \{k(t);\ 0 \le t \le T\}$ continue, à variation bornée, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $k(0) = 0$;
3.

$$x(t) = w(t) - k(t) \qquad \forall\ t \in [0;T]; \tag{1.5}$$

4.

$$\int_0^T \mathbb{1}_{\{x(s)\in \mathrm{Int}(D)\}}\, d|k|_s = 0; \tag{1.6}$$

5.

$$k(t) = \int_0^t n_s\, d|k|_s \qquad \forall\ t \in [0;T], \tag{1.7}$$

avec pour $d|k|$-presque tout $s \in [0;T]$, n_s appartient à l'ensemble des normales extérieures unitaires à D au point du bord $x(s)$.

Cette dernière condition (qui était bien sûr inutile en dimension 1) précise dans quelle direction la fonction k agit pour repousser x à l'intérieur du domaine D, ici selon les normales du domaine. L'unicité pour ce type de problème est obtenue facilement et pour ce qui est de l'existence plusieurs résultats sont connus, en particulier, [15] obtient l'existence d'une solution pour tout domaine convexe D satisfaisant une condition supplémentaire qui est en particulier vérifiée si $d = 2$ ou D borné. Quant à [12], il prouve un résultat d'existence pour tout domaine D satisfaisant une condition uniforme de sphère extérieure, la condition introduite par Tanaka et une hypothèse de type "régularité du domaine" (dite d'admissibilité). Ensuite, [13] a démontré que l'on pouvait supprimer la condition d'admissibilité dans le problème considéré par Lions et Sznitman. Dans chacun de ces cas, on peut ensuite de nouveau définir l'application de Skorohod comme pour $\mathbb{R}^+$.

Examinons de plus près le cas où D est un convexe fermé de $\mathbb{R}^d$. Remarquons que, d'après (1.7), la mesure dk est construite sur le cône normal extérieur à D: l'application multivoque (i.e., à valeurs dans l'ensemble des parties de $\mathbb{R}^d$) π: $x \to \pi_x$ (où π_x est le cône normal extérieur à D en x) est le sous-différentiel de la fonction convexe (s.c.i.) valant 0 sur D et $+\infty$ en dehors de D (appelée fonction indicatrice de D). Or, le sous-différentiel d'une fonction convexe (s.c.i.) est un cas particulier d'opérateur maximal monotone multivoque: il peut donc paraître intéressant d'étendre la problématique précédente à de tels opérateurs. Signalons que la maximalité est nécessaire pour permettre une formulation variationnelle simple du problème (en termes de produit scalaire). Par conséquent, on se propose dans la suite d'étendre la notion de problème de Skorohod à n'importe quel opérateur maximal monotone multivoque de $\mathbb{R}^d$ (nous parlerons alors de problème de Skorohod multivoque), c'est-à-dire, plus nécessairement sous forme de sous-différentiel de la fonction indicatrice d'un convexe fermé et de prouver l'existence et l'unicité d'une solution à ce problème. L'introduction d'opérateurs maximaux monotones multivoques permet surtout de considérer des coefficients de dérive discontinus, explosant au bord du domaine (voir aussi [9] pour ce type de problème). Il faut noter que dans tout l'article, seul le problème de réflexion normale est abordé (on ne considère pas la situation où la réflexion est oblique); par conséquent, dans toute la suite, le qualificatif "avec réflexion normale" sera toujours sous-entendu lorsque l'on parlera de réflexion ou de problème de Skorohod.

Aprés avoir complètement résolu le problème déterministe, on considère la version stochastique du problème de Skorohod multivoque. Plus précisément, étant, données b: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et σ: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ applications Lipschitziennes, on s'intéresse à la résolution de l'équation différentielle stochastique "multivoque" associée à un opérateur maximal monotone multivoque A de $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire, formellement, du type

$$\begin{aligned} &dX_t + A(X_t)\,dt \ni b(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dW_t, \\ &X_0 = x_0 \in \overline{D(A)}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

En fait, le problème d'existence et d'unicité pour (1.8) a *déjà* été complètement résolu en dimension $d = 1$ par Lépingle et Marois [11] puis en dimension (finie) d quelconque par l'auteur (1994) dans [5]. Pour montrer l'existence d'une solution dans [5], on avait considéré un problème approché (défini à partir des approximées Yosida de A) puis passé à la limite au sens de la convergence en loi en utilisant la pseudo-topologie de Meyer-Zheng sur l'espace des trajectoires càdlàg et le fait que la convergence au sens de cette topologie implique la convergence uniforme à un changement de temps près. On obtenait ainsi une solution faible du problème et, finalement, on avait conclu qu'il y avait existence forte grâce à l'unicité trajectorielle (analogue au cas unidimensionnel) et au théorème de Yamada-Watanabe (étendu au cas multivoque). Cette première méthode de démonstration de l'existence était par conséquent une méthode de type pénalisation-compacité. On se propose de donner une deuxième démonstration de l'existence d'une solution forte pour (1.8) avec A opérateur maximal monotone multivoque de $\mathbb{R}^d$ et b, σ Lipschitziens, de façon élémentaire; on va, en effet, construire directement sur l'espace probabilisé donné une solution forte en utilisant seulement l'existence d'une solution au problème de Skorohod déterministe (voir plus haut) et une méthode de point fixe due à [8]. Même si le résultat d'existence pour (1.8) avait été obtenu par une autre méthode, la présente méthode semble plus directe, élémentaire, mieux adaptée au problème et surtout elle améliore considérablement la connaissance que l'on a de la solution X en fournissant par exemple "gratuitement" un résultat de grandes déviations en dimension 1.

Le résultat fondamental d'existence et d'unicité fortes pour les équations différentielles stochastiques multivoques présente deux intérêts essentiels (voir la Section 5 pour plus de détails).

1. Il permet la construction de diffusions réfléchies dans un domaine D de $\mathbb{R}^d$ qui possèdent un coefficient de diffusion dégénéré et un coefficient de dérive discontinu, explosant au bord du domaine D.
2. Il fournit un support théorique pour la modélisation d'une vaste classe de systèmes de particules en interaction via un potentiel singulier (de type électrostatique par exemple) et pour l'étude des propriétés qui s'y rattachent: problème de collision des particules, comportement du système lorsque le nombre de particules tend vers l'infini.

Signalons que le lecteur pourra trouver dans [5] une introduction aux équations différentielles stochastiques multivoques avec de nombreux rappels et références ainsi que l'exposé de la démonstration d'unicité trajectorielle pour (1.8) et la première méthode pour démontrer l'existence (forte) pour (1.8). Plus généralement, tous les résultats figurant dans [5] et le présent article forment un résumé d'une partie des résultats obtenus par l'auteur dans sa thèse [4]. On renvoie le lecteur à [4] pour une rédaction plus détaillée et/ou pour d'éventuels compléments sur le sujet.

L'article sera organisé de la façon suivante. On donne dans la Section 2 les principaux résultats sur les opérateurs maximaux monotones multivoques de

$\mathbb{R}^d$ (définitions, exemples, propriétées élémentaires, approximation par des opérateurs univoques) qui seront nécessaires pour énoncer précisément le problème de Skorohod puis pour prouver l'existence et l'unicité d'une solution. Dans la Section 3, on définit rigoureusement la notion de problème de Skorohod multivoque, puis on énonce le résultat principal de cet article, à savoir le théorème d'existence et d'unicité d'une solution pour ce problème. Dans la Section 4, on démontre ce théorème d'existence et d'unicité. La formulation du problème stochastique telle qu'elle a été faite dans (1.8) est purement formelle et n'a pour seul but que de donner une idée du problème posé au lecteur: une formulation précise est donnée dans la Section 5, puis on donne dans la Section 6 une nouvelle démonstration de l'existence d'une solution forte pour les équations différentielles stochastique multivoques en dimension finie quelconque en appliquant les résultats déterministes essentiellement. Dans la Section 7, on développe quelques compléments sur le problème de Skorohod multivoque (déterministe et stochastique) dans le cas particulier de la dimension 1.

2. Opérateurs maximaux monotones multivoques. On renvoie le lecteur à [5], et surtout à l'ouvrage de Brézis [3], pour des résultats plus complets sur les opérateurs maximaux monotones multivoques. Dans toute la suite, d est un entier naturel non nul fixé.

DÉFINITION 2.1. (i) On appelle opérateur multivoque (par opposition aux opérateurs habituels ou "univoques") de $\mathbb{R}^d$ toute application A de $\mathbb{R}^d$ dans $P(\mathbb{R}^d)$, où $P(\mathbb{R}^d)$ désigne l'ensemble des parties de $\mathbb{R}^d$. Le domaine de A est l'ensemble

$$D(A) = \{x \in \mathbb{R}^d \colon A(x) \neq \emptyset\}. \tag{2.1}$$

Un opérateur multivoque de $\mathbb{R}^d$ est complètement déterminé par la donnée de son graphe défini par

$$\mathrm{Gr}(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2d} \colon x \in \mathbb{R}^d,\ y \in A(X)\}. \tag{2.2}$$

(ii) Un opérateur multivoque A de $\mathbb{R}^d$ est dit monotone si et seulement si

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0 \qquad \forall\,(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathrm{Gr}(A), \tag{2.3}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^d$.

(iii) Un opérateur monotone multivoque A de $\mathbb{R}^d$ est dit maximal monotone s'il est maximal (pour l'inclusion des graphes) dans l'ensemble des opérateurs monotones multivoques, c'est-à-dire A est maximal monotone si et seulement si A est monotone et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^{2d}$ tel que

$$\langle y - v, x - u \rangle \geq 0 \qquad \forall\,(u, v) \in \mathrm{Gr}(A), \tag{2.4}$$

alors $y \in A(x)$.

PROPOSITION 2.2 (Exemple fondamental). *Soit φ une fonction convexe de $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire une application $\varphi \colon \mathbb{R}^d \to]-\infty; +\infty]$ telle que $\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, $t \in [0; 1]$. On appelle domaine ef-*

fectif de φ *l'ensemble* $\operatorname{dom}(\varphi) = \{x \in \mathbb{R}^d\colon\ \varphi(x) < +\infty\}$ *et on dit que* φ *est propre* (*resp. strictement propre*) *si* $\operatorname{dom}(\varphi)$ *est non vide* (*resp.* $\operatorname{dom}(\varphi)$ *est d'intérieur non vide*). *On appelle sous-différentiel de* φ, *noté* $\partial\varphi$, *l'opérateur multivoque de* $\mathbb{R}^d$ *défini par son graphe de la façon suivante*:

$$(2.5)\qquad (x, y) \in \operatorname{Gr}(\partial\varphi) \Leftrightarrow \varphi(x) \leq \varphi(z) + \langle y, x - z\rangle \qquad \forall\, z \in \mathbb{R}^d.$$

Avec les définitions précédentes, le sous-différentiel d'une fonction convexe, semicontinue inférieurement (*s.c.i. en abrégé*), *propre de* $\mathbb{R}^d$ *est un opérateur maximal monotone multivoque de* $\mathbb{R}^d$.

Cas particulier. Sous-différentiel de la fonction indicatrice d'un convexe fermé. Soit D un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^d$. On appelle fonction indicatrice de D, notée I_D, la fonction définie par

$$(2.6)\qquad I_D(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in D, \\ +\infty, & \text{si } x \notin D. \end{cases}$$

On vérifie facilement que I_D est une fonction convexe, s.c.i., propre (elle est strictement propre si $\operatorname{Int}(D) \neq \varnothing$) avec $\operatorname{dom}(I_D) = D$.

On a alors pour tout x dans D,

$$(2.7)\qquad \partial I_D(x) = \left\{y \in \mathbb{R}^d\colon \langle y, z - x\rangle \geq 0, \forall\, z \in D\right\},$$

c'est-à-dire,

$$(2.8)\qquad \partial I_D(x) = \begin{cases} \varnothing, & \text{si } x \notin D, \\ \{0\}, & \text{si } x \in \operatorname{Int}(D), \\ \Pi_x, & \text{si } x \in \partial D, \end{cases}$$

où l'on a noté Π_x le cône normal extérieur à D en x.

Notations. On peut montrer (voir [3]) que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $A(x)$ est un convexe fermé de $\mathbb{R}^d$; ceci permet de définir l'opérateur (univoque) $A^\circ(x) = \operatorname{proj}_{A(x)}(0)$, $x \in \mathbb{R}^d$, où pour tout convexe fermé C de $\mathbb{R}^d$, proj_C désigne la projection sur C et $\operatorname{proj}_\varnothing(0) = \delta$, avec δ un point à l'infini de $\mathbb{R}^d$, fixé, et pour lequel on prendra $|\delta| = +\infty$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $A^\circ(x)$ est l'élément de norme minimale de $A(x)$; on aura donc l'équivalence $x \in D(A) \Leftrightarrow |A^\circ(x)| < +\infty$.

PROPOSITION 2.3. *Soit* A *opérateur maximal monotone multivoque de* $\mathbb{R}^d$. *Alors* A *est borné au voisinage de tout point intérieur à* $D(A)$; *c'est-à-dire, pour tout* $x \in D(A)$, *il existe un voisinage* V *de* x *tel que*

$$(2.9)\qquad \bigcup_{x' \in V} A(x')$$

soit une partie bornée de $\mathbb{R}^d$. *En particulier,* A *est borné sur tout compact inclus dans* $\operatorname{Int}(D(A))$.

PROPOSITION 2.4 (Approximation Yosida "multivoque"; voir [3] pages 23, 27, 28). *Soit A opérateur maximal monotone multivoque de $\mathbb{R}^d$. Il existe une suite (J_n, A_n) d'opérateurs* univoques *vérifiant*:

(i) J_n *(nieme résolvante) est une contraction (univoque) définie sur $\mathbb{R}^d$ tout entier, à valeurs dans $D(A)$. De plus,*

$$J_n(y) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{proj}_{\overline{D(A)}}(y) \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}^d; \tag{2.10}$$

(ii) A_n *(nieme approximée Yosida) est un opérateur maximal monotone (univoque) défini sur $\mathbb{R}^d$ tout entier, Lipschitzien de rapport n, $A_n = n(I - J_n)$;*

(iii) *pour tout $y \in D(A)$,*

$$A_n(y) \xrightarrow[n\to\infty]{} A^\circ(y), \tag{2.11}$$

avec $|A_n(y)| \uparrow |A^\circ(y)|$ quand $n \uparrow \infty$;

(iv) *pour tout $y \notin D(A)$,*

$$|A_n(y)| \uparrow +\infty \quad \text{quand } n \uparrow \infty; \tag{2.12}$$

(v) *pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, $A_n(y) \in A(J_n(y))$.*

3. Problème de Skorohod associé à un opérateur maximal monotone multivoque.

3.1. *Données.*

1. $d \in \mathbb{N}^*$;
2. A opérateur maximal monotone multivoque de $\mathbb{R}^d$ tel que

$$\mathrm{Int}(D(A)) \neq \varnothing; \tag{3.1}$$

3. $T > 0$;
4. $w = \{w(t);\ 0 \le t \le T\}$ continue, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $w(0) \in \overline{D(A)}$.

On note $C([0;T];\mathbb{R}^d)$ (resp., $C^p([0;T];\mathbb{R}^d)$, $p \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$) l'espace des fonctions continues (resp. de classe C^p) sur $[0;T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $C_A([0;T];\mathbb{R}^d)$ le sous-ensemble fermé de $C([0;T];\mathbb{R}^d)$ formé des fonctions w telles que $w(0) \in \overline{D(A)}$.

3.2. *Énoncé du problème.* On cherche un couple de fonctions (x, k) telles que:

1. $x = \{x(t);\ 0 \le t \le T\}$ continue, à valeurs dans $\overline{D(A)}$;
2. $k = \{k(t);\ 0 \le t \le T\}$ continue, à variation bornée, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $k(0) = 0$;
3.

$$x(t) = w(t) - k(t) \qquad \forall\, t \in [0;T]; \tag{3.2}$$

4. pour tout couple de fonctions (α, β) continues sur $[0;T]$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ telles que

$$(\alpha(u), \beta(u)) \in \mathrm{Gr}(A) \qquad \forall\, u \in [0;T], \tag{3.3}$$

la mesure

$$\langle x(u) - \alpha(u), dk(u) - \beta(u)\, du\rangle \tag{3.4}$$

est positive.

Le problème précédent est noté $S(A, w, T)$.

3.3. *Cas particulier*. La proposition suivante montre que le problème $S(A, w, T)$ est bien une généralisation du problème de Skorohod associé à un convexe fermé de $\mathbb{R}^d$ défini dans [15].

PROPOSITION 3.1. *Soit D un convexe fermé d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^d$. Alors le problème $S(I_D, w, T)$ est équivalent au problème de Skorohod associé à (D, w, T) défini dans* [15].

DÉMONSTRATION. Remarquons tout d'abord que, d'après le Lemma 4.8 et le fait que pour $A = I_D$, l'opérateur A° est l'opérateur identiquement nul sur D, la condition 3.2(4) est équivalente à la condition suivante [qui sera notée 3.2(4′)]; pour toute fonction α continue sur $[0; T]$, à valeurs dans D, la mesure

$$\langle x(u) - \alpha(u), dk(u)\rangle \tag{3.5}$$

est positive. On va en premier lieu démontrer que toute solution (x, k) de $S(I_D, w, T)$ est solution du problème étudié dans [15]. On commence par montrer que (x, k) vérifie la condition (1.6) de Tanaka; c'est-à-dire,

$$\int_0^T \mathbb{1}_{\{x(s)\in \mathrm{Int}(D)\}}\, d|k|_s = 0. \tag{3.6}$$

Soit $]t_1; t_2[$ une composante de l'ouvert $\{s \in [0; T];\ x(s) \in \mathrm{Int}(D)\}$. Il suffit de montrer que k est constante sur $[a; b]$ puor tous $t_1 < a < b < t_2$. On pose

$$V = \{x(s);\ s \in [a; b]\}. \tag{3.7}$$

La partie V est un compact inclus dans l'ouvert $\mathrm{Int}(D)$, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\{z \in \mathbb{R}^d: \mathrm{dist}(V, z) < \varepsilon\} \subset \mathrm{Int}(D), \tag{3.8}$$

où l'on a noté $\mathrm{dist}(V, z)$ la distance entre V et z. Soient $e \in \mathbb{R}^d$, $|e| = 1$ et $a \le s \le t \le b$. En appliquant la condition 3.2(4′) avec

$$\alpha(u) = x(u) + \varepsilon e,$$

puis

$$\alpha(u) = x(u) - \varepsilon e,$$

on peut écrire

$$\int_s^t \langle e, dk(u)\rangle = 0, \tag{3.9}$$

c'est-à-dire,

$$\langle e, k(t) - k(s)\rangle = 0, \tag{3.10}$$

puis

$$\begin{aligned}|k(t)-k(s)| &= \sup\{\langle e, k(t)-k(s)\rangle; e \in \mathbb{R}^d, |e|=1\}\\ &= 0,\end{aligned}$$

d'où le résultat. Il reste à voir que (x, k) vérifie la condition (1.7) de Tanaka; c'est-à-dire,

$$k(t) = \int_0^t n_s \, d|k|_s \qquad \forall\, t \in [0; T], \tag{3.11}$$

avec pour $d|k|$-presque tout $s \in [0; T]$, n_s appartient à l'ensemble des normales extérieures unitaires à D au point du bord $x(s)$. Il est classique que k peut s'écrire sous la forme (3.11) avec $|n_s| = 1$; il faut s'assurer que pour $d|k|$-presque tout $s \in [0; T]$, n_s appartient à l'ensemble des normales extérieures unitaires à D au point du bord $x(s)$. Or la condition 3.2(4′) appliquée pour $\alpha(u) \equiv \alpha$, α quelconque dans D, donne pour tous $0 \le s \le t \le T$,

$$\int_s^t \langle x(u) - \alpha, n_u\rangle \, d|k|_u \ge 0, \tag{3.12}$$

d'où

$$\langle x(u) - \alpha, n_u\rangle \ge 0 \qquad \forall\, \alpha \in D,\ d|k|\text{-p.p.}, \tag{3.13}$$

ce qui implique bien le résultat voulu par α.

Réciproquement, il faut prouver que toute solution du problème considéré dans [15] résout le problème $S(I_D, w, T)$; ceci est immédiat car pour toute fonction α continue sur $[0; T]$, à valeurs dans D, on peut écrire, si $0 \le s \le t \le T$,

$$\int_s^t \langle x(u) - \alpha(u), dk(u)\rangle = \int_s^t \langle x(u) - \alpha(u), n_u\rangle \, d|k|_u \ge 0, \tag{3.14}$$

puisque pour $d|k|$-presque tout $u \in [0; T]$, n_u appartient à l'ensemble des normales extérieures unitaires à D au point du bord $x(u)$. □

3.4. Résultats.

THÉORÈME 3.2. *Pour tous $d \in \mathbb{N}^*$, A opérateur maximal monotone multivoque de $\mathbb{R}^d$ vérifiant* (3.1), $w \in C_A([0; T]; \mathbb{R}^d)$, *il existe une unique solution (x, k) du problème $S(A, w, T)$. De plus, l'application*

$$\begin{aligned}\Gamma: C_A([0; T]; \mathbb{R}^d) &\to C([0; T]; \mathbb{R}^d)\\ w &\mapsto x,\end{aligned} \tag{3.15}$$

est continue (*pour la topologie de la convergence uniforme*).

4. Démonstration de l'existence et l'unicité: cas déterministe.

Convention. Dorénavant, dans les calculs, toutes les constantes, dont la valeur n'a pas lieu d'être précisée, seront notées indifféremment C.

Nous allons démontrer le théorème précédent en plusieurs étapes.

4.1. *Étape* 1: *unicité.*

PROPOSITION 4.1. *Soient* $(x, k), (x', k')$ *des fonctions continues sur* $[0; T]$, *à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$, *telles que* k, k' *à variation finie,* x, x' *à valeurs dans* $\overline{D(A)}$ *et*

$$\langle x(u) - \alpha(u), dk(u) - \beta(u)\, du \rangle \geq 0, \tag{4.1}$$

$$\langle x'(u) - \alpha(u), dk'(u) - \beta(u)\, du \rangle \geq 0, \tag{4.2}$$

pour tout couple de fonctions (α, β) *continues vérifiant*

$$(\alpha(u), \beta(u)) \in \mathrm{Gr}(A) \qquad \forall\, u \in [0; T]. \tag{4.3}$$

Alors la mesure

$$\langle x(u) - x'(u), dk(u) - dk'(u) \rangle \tag{4.4}$$

est positive sur $[0; T]$.

DÉMONSTRATION. Soient $(x, k), (x', k')$ vérifiant les hypothèses de la Proposition 4.1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, prenons

$$\alpha^{(n)} = J_n\left(\frac{x(u) + x'(u)}{2} \right), \tag{4.5}$$

$$\beta^{(n)} = A_n\left(\frac{x(u) + x'(u)}{2} \right), \tag{4.6}$$

alors $\alpha^{(n)}, \beta^{(n)}$ continues et $(\alpha^{(n)}(u), \beta^{(n)}(u)) \in \mathrm{Gr}(A)$ car $A_n(y) \in A(J_n(y))$ pour tout y dans $\mathbb{R}^d$ d'après la Proposition 2.4(v).

En appliquant (4.1) et (4.2) pour $(\alpha^{(n)}, \beta^{(n)})$, $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire

$$0 \leq \left\langle x(u) - J_n\left(\frac{x(u) + x'(u)}{2} \right), dk(u) - A_n\left(\frac{x(u) + x'(u)}{2} \right) du \right\rangle, \tag{4.7}$$

$$0 \leq \left\langle x'(u) - J_n\left(\frac{x(u) + x'(u)}{2} \right), dk'(u) - A_n\left(\frac{x(u) + x'(u)}{2} \right) du \right\rangle, \tag{4.8}$$

d'où en ajoutant et retranchant $(x(u) + x'(u))/2$ dans le premier membre de chacun des produits scalaires, on obtient, grâce à la relation $A_n = n(I - J_n)$ (voir Proposition 2.4),

$$\begin{aligned} 0 \leq \Bigg\langle & \frac{x(u) - x'(u)}{2} + \frac{1}{n} A_n\left(\frac{x(u) + x'(u)}{2} \right), \\ & dk(u) - A_n\left(\frac{x(u) + x'(u)}{2} \right) du \Bigg\rangle, \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$0 \leq \left\langle \frac{x'(u) - x(u)}{2} + \frac{1}{n} A_n\left(\frac{x(u) + x'(u)}{2} \right), \right. \tag{4.10}$$
$$\left. dk'(u) - A_n\left(\frac{x(u) + x'(u)}{2} \right) du \right\rangle,$$

puis en sommant les équations (4.9) et (4.10) ainsi obtenues

$$0 \leq \frac{1}{2}\langle x(u) - x'(u), dk(u) - dk'(u)\rangle - \frac{2}{n}\left| A_n\left(\frac{x(u) + x'(u)}{2} \right) \right|^2 du$$
$$+ \left\langle \frac{x(u) + x'(u)}{2} - J_n\left(\frac{x(u) + x'(u)}{2} \right), dk(u) + dk'(u) \right\rangle,$$

par conséquent

$$\langle x(u) - x'(u), dk(u) - dk'(u)\rangle$$
$$\geq -2\left\langle \frac{x(u) + x'(u)}{2} - J_n\left(\frac{x(u) + x'(u)}{2} \right), dk(u) + dk'(u) \right\rangle,$$

puis en passant à la limite quand $n \to \infty$ d'après la convergence

$$J_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathrm{proj}_{\overline{D(A)}}(x) \tag{4.11}$$

rappelée dans la Proposition 2.4, et, grâce à la convexité de $\overline{D(A)}$ (voir [5]),

$$\frac{x(u) + x'(u)}{2} \in \overline{D(A)}, \tag{4.12}$$

on obtient le résultat voulu après application du théorème de convergence dominée de Lebesgue via le caractère contractant de J_n. □

PROPOSITION 4.2. *Le problème $S(A, w, T)$ possède au plus une solution.*

DÉMONSTRATION. Soient $(x, k), (x', k')$ deux solutions du problème $S(A, w, T)$. On peut écrire, grâce à la Proposition 4.1,

$$|x(t) - x'(t)|^2 = -2\int_0^t \langle x(u) - x'(u), dk(u) - dk'(u)\rangle$$
$$\leq 0,$$

d'où $x = x'$ et donc par différence $k = k'$. □

La démarche utilisée dans la suite pour prouver l'existence d'une solution de $S(A, w, T)$ s'apparente à celle utilisée dans [15], [12] et [13]. On démontre d'abord l'existence d'une solution pour un ensemble de données $w_n(C^\infty([0; T]; \mathbb{R}^d))$ dense dans $C([0; T]; \mathbb{R}^d)$, puis on obtient une estimation a priori uniforme de $|k_n|_T$ qui permet de construire une solution par passage à la limite dans $S(A, w_n, T)$. Cependant, dans notre situation, on doit en plus "gérer" l'éventuelle singilarité de A au bord (penser simplement à $A = \partial\varphi$ avec φ fonction convexe explosant au bord de son domaine effectif).

4.2. *Étape* 2: *estimations a priori*.

PROPOSITION 4.3. *Soient* $w, w' \in C_A([0;T];\mathbb{R}^d)$. *Si* (x,k) *et* (x',k') *sont, respectivement, solutions de* $S(A,w,T)$, $S(A,w',T)$ *alors*

$$\|x - x'\| \le \|w - w'\|^{1/2}(\|w - w'\| + 4|k|_T + 4|k'|_T)^{1/2}, \tag{4.13}$$

où l'on convient de noter pour $f \in C([0;T];\mathbb{R}^d)$, g *à variation finie sur* $[0;T]$,

$$\|f\| = \sup_{0 \le t \le T} |f(t)|, \tag{4.14}$$

$$|g|_t^s = \sup\left\{ \sum_{i=0}^{p-1} |g(t_{i+1}) - g(t_i)|; \right.$$

$$\left. 0 \le s = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = t \le T,\ p \in \mathbb{N}^* \right\}, \tag{4.15}$$

$$|g|_t = |g|_t^0 \qquad \forall\ t \in [0;T].$$

DÉMONSTRATION. Pour tout $0 \le t \le T$, on peut écrire d'après (3.2) et la Proposition 4.1,

$$\begin{aligned}
|x(t) - x'(t)|^2 &= |w(t) - w'(t)|^2 + |k(t) - k'(t)|^2 \\
&\quad - 2\langle w(t) - w'(t), k(t) - k'(t)\rangle \\
&= |w(t) - w'(t)|^2 + 2\int_0^t \langle k(s) - k'(s), dk(s) - dk'(s)\rangle \\
&\quad - 2\int_0^t \langle w(t) - w(s) - w'(t) + w'(s), dk(s) - dk'(s)\rangle \\
&\quad - 2\int_0^t \langle w(s) - w'(s), dk(s) - dk'(s)\rangle \\
&= |w(t) - w'(t)|^2 - 2\int_0^t \langle x(s) - x'(s), dk(s) - dk'(s)\rangle \\
&\quad - 2\int_0^t \langle w(t) - w(s) - w'(t) + w'(s), dk(s) - dk'(s)\rangle \\
&\le \|w - w'\|^2 + 4\|w - w'\|(|k|_T + |k'|_T),
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

PROPOSITION 4.4. *Il existe* $a \in \mathbb{R}^d$, $\gamma > 0$, $\mu \ge 0$ (*ne dépendant que de* A) *tels que pour toute* $w \in C_A([0;T];\mathbb{R}^d)$, *si* (x,k) *est solution de* $S(A,w,T)$ *alors pour tous* $0 \le s \le t \le T$, *on a*

$$\int_s^t \langle x(u) - a, dk(u)\rangle \ge \gamma|k|_t^s - \mu\int_s^t |x(u) - a|\,du - \gamma\mu(t-s). \tag{4.17}$$

DÉMONSTRATION. Soient $a \in \mathrm{Int}(D(A))$ [non vide par l'hypothèse (3.1)], $\gamma > 0$ tel que $\overline{B}(a, \gamma) \subset \mathrm{Int}(D(A))$ et

$$\mu = \sup\{|y|;\ y \in A(x),\ x \in \overline{B}(a, \gamma)\}. \tag{4.18}$$

D'après la Proposition 2.3, on a $0 \le \mu < \infty$. Pour tout $e \in \mathbb{R}^d$, $|e| = 1$, on a puisque (x, k) est solution de $S(A, w, T)$ et par définition de μ,

$$\begin{aligned}\langle x(u) - a - \gamma e, dk(u)\rangle &\ge \langle x(u) - a - \gamma e, A^\circ(a + \gamma e)\, du\rangle \\ &\ge -(\mu|x(u) - a| + \mu\gamma)\, du.\end{aligned}$$

Soit $0 \le s = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = t \le T$ une subdivision quelconque de $[s; t]$; en utilisant l'estimation précédente, on peut écrire

$$\begin{aligned}\langle k(t_{i+1}) - k(t_i), e\rangle &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle e, dk(u)\rangle \\ &= \gamma^{-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle x(u) - a, dk(u)\rangle \\ &\quad - \gamma^{-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle x(u) - a - \gamma e, dk(u)\rangle \\ &\le \gamma^{-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle x(u) - a, dk(u)\rangle \\ &\quad + \mu\gamma^{-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |x(u) - a|\, du + \mu(t_{i+1} - t_i),\end{aligned}$$

dont on déduit

$$\begin{aligned}|k(t_{i+1}) - k(t_i)| &= \sup\{\langle k(t_{i+1}) - k(t_i), e\rangle;\ e \in \mathbb{R}^d, |e| = 1\} \\ &\le \gamma^{-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle x(u) - a, dk(u)\rangle + \mu\gamma^{-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |x(u) - a|\, du \\ &\quad + \mu(t_{i+1} - t_i);\end{aligned}$$

puis en sommant les inégalités obtenues

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{p-1} |k(t_{i+1}) - k(t_i)| &\le \gamma^{-1} \int_s^t \langle x(u) - a, dk(u)\rangle \\ &\quad + \mu\gamma^{-1} \int_s^t |x(u) - a|\, du + \mu(t - s)\end{aligned}$$

et finalement, prenant la borne supérieure sur l'ensemble des subdivisions de $[s; t]$,

$$0 \le s = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = t \le T,$$

on tire

$$|k|_t^s \le \gamma^{-1} \int_s^t \langle x(u) - a, dk(u)\rangle + \mu\gamma^{-1} \int_s^t |x(u) - a|\, du + \mu(t - s). \quad \square$$

PROPOSITION 4.5. *On suppose que*:

(i) $(w_n)_n$ *suite de* $C_A([0;T];\mathbb{R}^d)$ *telle que* $w_n \to_{n\to\infty} w$ *dans* $C([0;T];\mathbb{R}^d)$;
(ii) *le problème* $S(A, w_n, T)$ *admet une solution* (x_n, k_n) *pour tout* $n \in \mathbb{N}$;
(iii) $(x_n, k_n) \to_{n\to\infty} (x, k)$ *dans* $C([0;T];\mathbb{R}^{2d})$;
(iv) $|k_n|_T \le C$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Alors (x, k) *est solution de* $S(A, w, T)$.

DÉMONSTRATION. On a clairement x continue, à valeurs dans $\overline{D(A)}$, k continue, à variation finie, $k(0) = 0$, $x(t) = w(t) - k(t)$, $0 \le t \le T$. Il reste à montrer que la mesure $\langle x(u) - \alpha(u), dk(u) - \beta(u)\,du\rangle$ est positive sur $[0;T]$ pour tout couple de fonctions (α, β) continues, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et telles que

$$(\alpha(u), \beta(u)) \in \operatorname{Gr}(A) \qquad \forall\, u \in [0;T]. \tag{4.19}$$

Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \le s \le t \le T$, on a

$$\int_s^t \langle x_n(u) - \alpha(u), dk_n(u) - \beta(u)\,du\rangle \ge 0. \tag{4.20}$$

On aura besoin dans la suite du lemme suivant (voir [13] pour une démonstration):

LEMME 4.6. *Soient* $(k^{(n)})_n$ *une suite de fonctions* $k^{(n)}: [0;T] \to \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}^*$, *continues à variation finie telles que*:

(i) $\sup_n |k^{(n)}|_T \le C < \infty$;
(ii) $k^{(n)} \to_{n\to\infty} k$ *uniformément sur* $[0;T]$;

$(f^{(n)})_n$ *une suite de fonctions* $f^{(n)}: [0;T] \to \mathbb{R}^d$ *continues telles que*

(iii) $f^{(n)} \to_{n\to\infty} f$ *uniformément sur* $[0;T]$.

Alors pour tous $0 \le s \le t \le T$, *on a*

$$\int_s^t \langle f^{(n)}(u), dk^{(n)}(u)\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_s^t \langle f(u), dk(u)\rangle. \tag{4.21}$$

Il suffit alors de passer à la limite dans (4.20) en utilisant les convergences (iii), l'estimation uniforme (iv) et le Lemme 4.6 pour obtenir

$$\int_s^t \langle x(u) - \alpha(u), dk(u) - \beta(u)\,du\rangle \ge 0. \tag{4.22}$$

□

4.3. Étape 3: approximation.

PROPOSITION 4.7. *Pour toute* $w \in C^\infty([0;T];\mathbb{R}^d) \cap C_A([0;T];\mathbb{R}^d)$, *il existe une unique solution du problème* $S(A, w, T)$.

DÉMONSTRATION. Pour $f \in C^1([0;T];\mathbb{R}^d)$ (resp. $f \in C^2([0;T];\mathbb{R}^d)$), on note $\dot{f}$ (resp. $\ddot{f}$) la dérivée première (resp. seconde) de f. Soit $w \in C^\infty([0;T];\mathbb{R}^d) \cap C_A([0;T];\mathbb{R}^d)$. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le problème approché

$$\begin{aligned} &\dot{x}_n(t) = \dot{w}(t) - A_n(x_n(t)), \\ &x_n(0) = w(0), \end{aligned} \tag{4.23}$$

qui possède une unique solution $x_n \in C^1([0;T];\mathbb{R}^d)$ car A_n Lipschitzien.

Soit $h > 0$. Pour $0 \le t \le T - h$, on pose

$$x'_n(t) = x_n(t+h); \qquad w'(t) = w(t+h), \tag{4.24}$$

de telle sorte que x'_n est solution de

$$\begin{aligned} &\dot{x}'_n(t) = \dot{w}'(t) - A_n(x'_n(t)), \\ &x'_n(0) = x_n(h). \end{aligned} \tag{4.25}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour $0 \le t \le T - h$, on pose

$$\Phi(t) = \left(|x_n(t) - x'_n(t)|^2 + \varepsilon\right)^{1/2}. \tag{4.26}$$

En utilisant (4.23), (4.25) et la monotonie de A_n, on obtient

$$\dot{\Phi}(t) \le |\dot{w}(t) - \dot{w}'(t)|, \tag{4.27}$$

dont on déduit

$$\begin{aligned} |x_n(t) - x'_n(t)| &\le \Phi(t) \\ &\le \Phi(0) + \int_0^t \dot{\Phi}(s)\, ds \\ &\le \left(|x_n(0) - x'_n(0)|^2 + \varepsilon\right)^{1/2} + \int_0^t |\dot{w}(s) - \dot{w}'(s)|\, ds. \end{aligned}$$

En faisant $\varepsilon \to 0$ dans l'inégalité précédente, on tire

$$|x_n(t) - x'_n(t)| \le |x_n(0) - x'_n(0)| + \int_0^t |\dot{w}(s) - \dot{w}'(s)|\, ds, \tag{4.28}$$

c'est-à-dire,

$$|x_n(t+h) - x_n(t)| \le |x_n(h) - x_n(0)| + \int_0^t |\dot{w}(s+h) - \dot{w}(s)|\, ds, \tag{4.29}$$

puis divisant par $h > 0$ et faisant tendre h vers 0,

$$\begin{aligned} |\dot{x}_n(t)| &\le |\dot{x}_n(0)| + \int_0^t |\ddot{w}(s)|\, ds \\ &\le |\dot{w}(0)| + |A_n(w(0))| + \int_0^t |\ddot{w}(s)|\, ds \\ &\le |\dot{w}(0)| + |A^\circ(w(0))| + \int_0^t |\ddot{w}(s)|\, ds, \end{aligned}$$

que l'on peut écrire

$$|\dot{x}_n(t)| \leq C = C(A, w, T) \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}^*. \tag{4.30}$$

On en déduit les majorations

$$|x_n(t)| \leq C = C(A, w, T) \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}^*, \tag{4.31}$$

et d'après (4.23) et (4.30),

$$|A_n(x_n(t))| \leq C = C(A, w, T) \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}^*. \tag{4.32}$$

On définit

$$k_n(t) = \int_0^t A_n(x_n(s))\, ds, \qquad 0 \leq t \leq T;\ n \in \mathbb{N}^*. \tag{4.33}$$

D'après les estimations (4.30), (4.31) et le théorème d'Ascoli, on peut affirmer qu'il existe $x, k \in C([0; T]; \mathbb{R}^d)$ telles que, à extraction près d'une sous-suite,

$$(x_n, k_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x, k) \quad \text{dans } C\big([0; T]\, \mathbb{R}^{2d}\big). \tag{4.34}$$

A l'aide de (4.32), (4.34) on déduit que k à variation finie, $k(0) = 0$ et $x(t) = w(t) - k(t)$. Il reste à voir que x est à valeurs dans $\overline{D(A)}$ et la positivité de la mesure $\langle x(u) - \alpha(u), dk(u) - \beta(u)\, du\rangle$. S'il existait $t_0 \in [0; T]$ tel que $x(t_0) \notin \overline{D(A)}$ alors d'après la Proposition 2.4 (utiliser la croissance par rapport à n de $|A_n(z)|$, $z \in \mathbb{R}^d$), on aurait

$$|A_n(x_n(t_0))| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty, \tag{4.35}$$

ce qui est impossible d'après la majoration uniforme (4.32), d'où $x(t) \in \overline{D(A)}$ pour tout $0 \leq t \leq T$. Remarquons que l'inégalité (4.32) donne

$$|k_n|_T \leq C \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}^*. \tag{4.36}$$

On va prouver tout d'abord que pour toute fonction continue α' sur $[0; T]$ à valeurs dans $D(A)$ et telle que

$$\int_0^T |A^\circ(\alpha'(u))|\, du < +\infty, \tag{4.37}$$

la mesure

$$\langle x(u) - \alpha'(u), dk(u) - A^\circ(\alpha'(u))\, du\rangle \tag{4.38}$$

est positive sur $[0; T]$. Puisque (x_n, k_n) est solution de $S(A_n, w, T)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire

$$\int_s^t \langle x_n(u) - \alpha'(u), dk_n(u) - A_n(\alpha'(u))\, du\rangle \geq 0. \tag{4.39}$$

En utilisant la convergence de (x_n, k_n) vers (x, k) dans $C([0; T]\, \mathbb{R}^{2d})$, l'estimation uniforme $|k_n|_T \leq C$ et le Lemme 4.6, on obtient

$$\int_s^t \langle x_n(u) - \alpha'(u), dk_n(u)\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_s^t \langle x(u) - \alpha'(u), dk(u)\rangle, \tag{4.40}$$

puis à l'aide de (4.37), de l'estimation

$$|A_n(\alpha'(u))| \leq |A^\circ(\alpha'(u))| \tag{4.41}$$

(donnée par la Proposition 2.4) et le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on peut écrire

$$\begin{aligned}\int_s^t \langle x_n(u) - \alpha'(u), A_n(\alpha'(u))\, du\rangle \\ \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_s^t \langle x(u) - \alpha'(u), A^\circ(\alpha'(u))\, du\rangle.\end{aligned} \tag{4.42}$$

Finalement, en passant à la limite dans (4.39) via les convergences (4.40) et (4.42), on obtient

$$\int_s^t \langle x(u) - \alpha'(u), dk(u) - A^\circ(\alpha'(u))\, du\rangle \geq 0. \tag{4.43}$$

En utilisant (4.43) et le lemme suivant, on va obtenir que la mesure

$$\langle x(u) - \alpha(u), dk(u) - \beta(u)\, du\rangle \tag{4.44}$$

est positive pour tout couple de fonctions (α, β) continues vérifiant

$$(\alpha(u), \beta(u)) \in \mathrm{Gr}(A) \qquad \forall\, u \in [0;T], \tag{4.45}$$

ce qui termine la démonstration de la Proposition 4.7. □

LEMME 4.8. *Soit (x, k) couple de fonctions continues telles que x à valeurs dans $\overline{D(A)}$, k à variation finie et*

$$\langle x(u) - \alpha'(u), dk(u) - A^\circ(\alpha'(u))\, du\rangle \geq 0, \tag{4.46}$$

pour toute fonction continue α' sur $[0;T]$ à valeurs dans $D(A)$ et vérifiant (4.37). *Alors pour tout couple de fonctions (α, β) continues vérifiant*

$$(\alpha(u), \beta(u)) \in \mathrm{Gr}(A) \qquad \forall\, u \in [0;T], \tag{4.47}$$

la mesure

$$\langle x(u) - \alpha(u), dk(u) - \beta(u)\, du\rangle \tag{4.48}$$

est positive sur $[0;T]$.

DÉMONSTRATION. Soit (α, β) couple de fonctions continues telles que $(\alpha(u), \beta(u))$ appartient à $\mathrm{Gr}(A)$ pour tout $0 \leq u \leq T$. On a donc pour toute fonction continue α' à valeurs dans $D(A)$ et vérifiant (4.37)

$$\langle x(u) - \alpha'(u), dk(u) - A^\circ(\alpha'(u))\, du\rangle \geq 0; \tag{4.49}$$

$$\langle \alpha(u) - \alpha'(u), \beta(u)\, du - A^\circ(\alpha'(u))\, du\rangle \geq 0. \tag{4.50}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ prenons

$$\alpha'(u) = J_n\left(\frac{x(u) + \alpha(u)}{2}\right). \tag{4.51}$$

Alors α' est continue, à valeurs dans $D(A)$ et satisfait (4.37) car

$$\int_0^T |A^\circ(\alpha'(u))|\, du \le \int_0^T \left| A_n\left(\frac{x(u)+\alpha(u)}{2}\right)\right| du < +\infty, \tag{4.52}$$

d'après $A_n(y) \in A(J_n(y))$ pour tout y dans $\mathbb{R}^d$ [Proposition 2.4(v)], le fait que $A^\circ(\alpha'(u))$ est par définition l'élément de norme minimale de $A(\alpha'(u))$, et la continuité de A_n, x, α. En appliquant (4.49) et (4.50) avec α', on peut écrire

$$0 \le \left\langle x(u) - J_n\left(\frac{x(u)+\alpha(u)}{2}\right), dk(u) - A^\circ(\alpha'(u))\, du\right\rangle, \tag{4.53}$$

$$0 \le \left\langle \alpha(u) - J_n\left(\frac{x(u)+\alpha(u)}{2}\right), \beta(u)\, du - A^\circ(\alpha'(u))\, du\right\rangle, \tag{4.54}$$

d'où, en ajoutant et retranchant $(x(u)+\alpha(u))/2$ dans le premier terme de chacun des produits scalaires [en utilisant de nouveau la relation $A_n = n(I - J_n)$],

$$\begin{aligned} 0 \le \Bigg\langle \frac{x(u)-\alpha(u)}{2} + \frac{1}{n} A_n\left(\frac{x(u)+\alpha(u)}{2}\right), \\ dk(u) - A^\circ(\alpha'(u))\, du \Bigg\rangle, \end{aligned} \tag{4.55}$$

$$\begin{aligned} 0 \le \Bigg\langle \frac{\alpha(u)-x(u)}{2} + \frac{1}{n} A_n\left(\frac{x(u)+\alpha(u)}{2}\right), \\ \beta(u)\, du - A^\circ(\alpha'(u))\, du \Bigg\rangle, \end{aligned} \tag{4.56}$$

puis en sommant les équations ainsi obtenues,

$$\begin{aligned} 0 \le\ & \frac{1}{2}\langle x(u) - \alpha(u), dk(u) - \beta(u)\, du\rangle \\ & - \frac{2}{n}\left\langle A_n\left(\frac{x(u)+\alpha(u)}{2}\right), A^\circ\left(J_n\left(\frac{x(u)+\alpha(u)}{2}\right)\right) du\right\rangle \\ & + \left\langle \frac{x(u)+\alpha(u)}{2} - J_n\left(\frac{x(u)+\alpha(u)}{2}\right), dk(u) + \beta(u)\, du\right\rangle \end{aligned}$$

or

$$A_n\left(\frac{x(u)+\alpha(u)}{2}\right) \in A\left(J_n\left(\frac{x(u)+\alpha(u)}{2}\right)\right); \tag{4.57}$$

donc

$$\left\langle A_n\left(\frac{x(u)+\alpha(u)}{2}\right), A^\circ\left(J_n\left(\frac{x(u)+\alpha(u)}{2}\right)\right) du\right\rangle \ge 0 \tag{4.58}$$

par définition de A°, d'où

$$\langle x(u) - \alpha(u), dk(u) - \beta(u)\, du\rangle \geq -2\left\langle \frac{x(u)+\alpha(u)}{2} - J_n\left(\frac{x(u)+\alpha(u)}{2}\right), dk(u) + \beta(u)\, du\right\rangle.$$

On passe ensuite à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'équation précédente exactement comme dans la fin de la démonstration de la Proposition 4.1. □

Notons que d'après l'unicité d'une solution obtenue pour $S(A, w, T)$, toutes les sous-suites convergentes de (x_n, k_n) convergent vers (x, k) où (x, k) est l'unique solution de $S(A, w, T)$. On en déduit qu'il y a convergence de toute la suite

$$(4.59)\qquad (x_n, k_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x, k) \quad \text{dans } C([0; T]; \mathbb{R}^{2d}).$$

4.4. *Étape* 4: *estimation uniforme de* $|k|_T$.

PROPOSITION 4.9. *Soit H partie relativement compacte de $C_A([0; T]; \mathbb{R}^d)$ [pour la norme de la convergence uniforme induite par $C([0; T]\,\mathbb{R}^d)$] telle que pour tout $w \in H$, $S(A, w, T)$ possède une (unique) solution (x, k). Alors on a l'estimation uniforme des variations totales suivante*:

$$(4.60)\qquad |k|_T \leq C = C(A, H, T) \qquad \forall\, w \in H.$$

DÉMONSTRATION. On reprend a, γ, μ donnés par la Proposition 4.4. On peut écrire pour tous $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\begin{aligned}
|x(t) - a|^2 &= |w(t) - a|^2 + |k(t)|^2 - 2\langle w(t) - a, k(t)\rangle\\
&= |w(t) - a|^2 + 2\int_0^t \langle k(u), dk(u)\rangle - 2\int_0^t \langle w(u) - a, dk(u)\rangle\\
&\quad - 2\int_0^t \langle w(t) - w(u), dk(u)\rangle\\
&= |w(t) - a|^2 - 2\int_0^t \langle x(u) - a, dk(u)\rangle\\
&\quad - 2\int_0^t \langle w(t) - w(u), dk(u)\rangle,
\end{aligned}$$

puis par différence, en utilisant successivement la Proposition 4.4 puis la bornitude de H ($\|w\| \leq C'$) et de l'intervalle de temps ($0 \leq s$, $t \leq T < \infty$),

$$\begin{aligned}
&|x(t) - a|^2 - |x(s) - a|^2\\
&\quad = |w(t) - a|^2 - |w(s) - a|^2 - 2\int_s^t \langle x(u) - a, dk(u)\rangle\\
&\qquad + 2\int_s^t \langle w(u) - w(s), dk(u)\rangle - 2\langle k(t), w(t) - w(s)\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq |w(t)-s|^2 - |w(s)-a|^2 - 2\gamma|k|_t^s + 2\gamma\mu(t-s)\\
&\quad + 2\mu\int_s^t |x(u)-a|\,du + 2\int_s^t \langle w(u)-w(s), dk(u)\rangle\\
&\quad + 2\langle x(t)-a+a-w(t), w(t)-w(s)\rangle\\
&\leq 2\big(\sup\{|w(u)-w(v)|; |v-u| \leq |t-s|\} - \gamma\big)|k|_s^t\\
&\quad + C + C\|x-a\|.
\end{aligned}$$

Puisque H est relativement compacte, on sait d'après le théorème d'Ascoli qu'il existe $\eta = \eta(H) > 0$ tel que

$$\sup\{|w(u)-w(v)|; |v-u| \leq \eta\} < \frac{\gamma}{2} \qquad \forall\, w \in H, \tag{4.61}$$

par conséquent, si $|t-s| \leq \eta$,

$$|x(t)-a|^2 - |x(s)-a|^2 \leq C + C\|x-a\| - \gamma|k|_s^t \tag{4.62}$$

et, en particulier,

$$|x(t)-a|^2 - |x(s)-a|^2 \leq C + C\|x-a\| \qquad \text{si } |t-s| \leq \eta. \tag{4.63}$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $N\eta > T$. On pose

$$t_i = i\eta, \qquad 0 \leq i \leq N. \tag{4.64}$$

En utilisant l'inégalité élémentaire,

$$ab \leq \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}b^2 \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R} \tag{4.65}$$

et l'estimation (4.63), on peut écrire pour tout $0 \leq t \leq T$,

$$\begin{aligned}
|x(t)-a|^2 &= \sum_{i=0}^{l-1}\Big(|x(t_{i+1})-a|^2 - |x(t_i)-a|^2\Big)\\
&\quad + |x(t)-a|^2 - |x(t_l)-a|^2 + |w(0) = a|^2\\
&\leq N(C + C\|x-a\|) + C\\
\|x-a\|^2 &\leq C + C\|x-a\|\\
&\leq C + C^2/2 + \|x-a\|^2/2\\
\|x-a\|^2 &\leq C.
\end{aligned}$$

En revenant à (4.62), on obtient

$$\begin{aligned}
\gamma|k|_t^s &\leq C + |x(s)-a|^2 + C\|x-a\| \quad \text{si } |t-s| \leq \eta,\\
|k|_t^s &\leq C \quad \text{si } |t-s| \leq \eta,\\
|k|_T &\leq \sum_i |k|_{t_{i+1}}^{t_i}\\
&\leq NC.
\end{aligned}$$

□

4.5. *Étape* 5: *fin de la démonstration du théorème.* Soit $w \in C_A([0;T];\mathbb{R}^d)$. Par densité de $C^\infty([0;T];\mathbb{R}^d)$ dans $C([0;T];\mathbb{R}^d)$, il existe une suite $w_n \in C^\infty([0;T];\mathbb{R}^d) \cap C_A([0;T];\mathbb{R}^d)$ telle que

$$w_n \to w \quad \text{dans } C\big([0;T];\mathbb{R}^d\big). \tag{4.66}$$

Grâce à la Proposition 4.7, il existe une unique solution (x_n, k_n) de $S(A, w_n, T)$ pour tout n. D'après les Propositions 4.3 et 4.9, on a

$$\|x_n - x_m\| \le C\|w_n - w_m\|^{1/2} \xrightarrow[n,\,m\to\infty]{} 0, \tag{4.67}$$

d'où l'existence de (x, k) vérifiant

$$(x_n, k_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x, k) \quad \text{dans } C\big([0;T];\mathbb{R}^{2d}\big) \tag{4.68}$$

et puisque $|k_n|_T \le C$ par la Proposition 4.9, on peut conclure que (x, k) est solution de $S(A, w, T)$ grâce à la Proposition 4.5. Finalement, on a démontré que pour toute $w \in C_A([0;T];\mathbb{R}^d)$, le problème $S(A, w, T)$ possède une unique solution (x, k). Il est donc possible de définir l'application suivante sur $C_A([0;T];\mathbb{R}^d)$:

$$\begin{array}{llll} \Gamma: & C_A\big([0;T];\mathbb{R}^d\big) & \to & C\big([0;T];\mathbb{R}^d\big) \\ & w & \mapsto & x. \end{array} \tag{4.69}$$

D'après les Propositions 4.3 et 4.9, l'application Γ est Hölderienne d'ordre $\frac{1}{2}$ sur les compacts de $C_A([0;T];\mathbb{R}^d)$ donc en particulier continue. Ceci termine la démonstration du Théorème 3.2. □

5. Cas stochastique (EDS multivoques): bases et enjeux. Étant données:

1. $d \in \mathbb{N}^*$;
2. A opérateur maximal monotone multivoque de $\mathbb{R}^d$ tel que

$$\operatorname{Int}(D(A)) \neq \varnothing; \tag{5.1}$$

3. $(\Omega, F, \{F_t\}, \mathbb{P})$ espace probabilisé filtré vérifiant les conditions habituelles;
4. $W = \{W_t, F_t;\ 0 \le t < \infty\}$ mouvement Brownien d-dimensionnel standard défini sur $(\Omega, F, \mathbb{P})$ avec $W_0 = 0$;
5. $b: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et $\sigma: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ applications Lipschitziennes;
6. $x_0 \in \overline{D(A)}$,

on cherche un couple de processus (X, K) vérifiant:

(i) $X = \{X_t, F_t;\ 0 \le t < \infty\}$ processus continu, adapté, défini sur $(\Omega, F, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\overline{D(A)}$ avec $X_0 = x_0$, $\mathbb{P}$-p.s.;

(ii) $K = \{K_t, F_t;\ 0 \le t < \infty\}$ processus continu, adapté, à variation finie, défini sur $(\Omega, F, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $K_0 = 0$, $\mathbb{P}$-p.s.;

(iii) $dX_t = b(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dW_t - dK_t$; $0 \le t < \infty$, $\mathbb{P}$-p.s.;

(iv) pour tout douple de processus (α, β), $\alpha = \{\alpha_t, F_t;\ 0 \le t < \infty\}$ et $\beta = \{\beta_t, F_t;\ 0 \le t < \infty\}$ continus, adaptés, définis sur $(\Omega, F, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, vérifiant

$$(\alpha_u, \beta_u) \in \mathrm{Gr}(A) \qquad \forall\ u \in [0; +\infty[, \tag{5.2}$$

la mesure

$$\langle X_u - \alpha_u, dK_u - \beta_u\, du \rangle \tag{5.3}$$

est $\mathbb{P}$-p.s. positive sur $\mathbb{R}^+$.

Le problème [(i), (ii), (iii), (iv)] sera noté $EDSM^d(A, b, \sigma, x_0)$. Tout à fait formellement, on l'écrira sous la forme

$$\begin{gathered} dX_t + A(X_t)\, dt \ni b(X_t)\, dt + \sigma(X_t)\, dW_t, \\ X_0 = x_0 \in \overline{D(A)}. \end{gathered} \tag{5.4}$$

On peut maintenant rappeler le résultat fondamental d'existence et d'unicité pour l'équation différentielle stochastique multivoque associée à un opérateur maximal monotone multivoque de $\mathbb{R}^d$: (cf. [4], [5]; voir aussi [2] lorsque $A = \partial\varphi$). Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, on a le théorème.

Théorème 5.1 ($EDSM^d$). *Pour tout opérateur maximal monotone multivoque A de $\mathbb{R}^d$ vérifiant* (5.1), *tout $t_0 \in \overline{D(A)}$, toutes applications b, σ Lipschitziennes, il existe une unique solution du problème $EDSM^d(A, b, \sigma, x_0)$.*

Il est intéressant de noter que puisque l'on peut considérer en particulier A sous la forme $\partial\varphi$ avec φ seulement convexe, s.c.i., strictement propre, le Théorème 5.1 donne un résultat d'existence et d'unicité fortes pour des équations différentielles stochastiques possédant un coefficient de dérive éventuellement très singulier. Le Théorème 5.1 permet en particulier d'obtenir des diffusions qui sont réfléchies dans un domaine D de $\mathbb{R}^d$ et qui possèdent un coefficient de dérive discontinu et explosant au bord du domaine D.

Gardons à l'esprit les cas particuliers de (5.4), lesquels montrent toute la richesse de cette classe d'équations différentielles stochastiques.

1. Soient D un convexe fermé d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^d$ et $A = \partial(\mathbb{I}_D)$. Dans ce cas la solution X de (5.4) est une diffusion (pour les données b et σ) réfléchie normalement dans le convexe D [voir Proposition (3.1)].
2. $d = 1$ et soient n un entier, $n \geq 2$, $A = \partial\varphi$ avec $\varphi(x) = -((n-1)\ln x)/2$ si $x > 0$ et $+\infty$ sinon. On peut alors montrer (voir [11]) que le processus X associé est un processus de Bessel de dimension n.
3. Soit $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on note $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)})$ ses composantes. On considère la fonction convexe s.c.i. strictement propre de $\mathbb{R}^d$ définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\lambda. \sum_{1 \leq i < j \leq d} \ln(x^{(j)} - x^{(i)}), & \text{si } x^{(1)} < x^{(2)} < \cdots < x^{(d)}, \\ +\infty, & \text{sinon}, \end{cases} \tag{5.5}$$

avec $\lambda > 0$, et les coefficients b: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, σ: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ de la forme suivante:

$$(b(x))^{(i)} = \tilde{b}(x^{(i)}) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^d,\, 1 \le i \le d, \tag{5.6}$$

et

$$\sigma_{ij}(x) = \delta_{ij}.\tilde{\sigma}(x^{(i)}) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^d,\, 1 \le i,\, j \le d, \tag{5.7}$$

pour des fonctions $\tilde{b}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tilde{\sigma}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convenables données.

On peut alors montrer (voir [6]) que l'équation différentielle stochastique multivoque (5.4) associée à ces données s'écrit composante par composante,

$$\begin{aligned}
dX_t^{(1)} &= \tilde{b}\big(X_t^{(1)}\big)\,dt + \tilde{\sigma}\big(X_t^{(1)}\big)\,dW_t^{(1)} + \lambda.\sum_{1 \le j \ne 1 \le d} \frac{dt}{X_t^{(1)} - X_t^{(j)}},\\
dX_t^{(2)} &= \tilde{b}\big(X_t^{(2)}\big)\,dt + \tilde{\sigma}\big(X_t^{(2)}\big)\,dW_t^{(2)} + \lambda.\sum_{1 \le j \ne 2 \le d} \frac{dt}{X_t^{(2)} - X_t^{(j)}},\\
\cdots &= \cdots\\
dX_t^{(i)} &= \tilde{b}\big(X_t^{(i)}\big)\,dt + \tilde{\sigma}\big(X_t^{(i)}\big)\,dW_t^{(i)} + \lambda.\sum_{1 \le j \ne i \le d} \frac{dt}{X_t^{(i)} - X_t^{(j)}}\\
\cdots &= \cdots\\
dX_t^{(d)} &= \tilde{b}\big(X_t^{(d)}\big)\,dt + \tilde{\sigma}\big(X_t^{(d)}\big)\,dW_t^{(d)} + \lambda.\sum_{1 \le j \ne d \le d} \frac{dt}{X_t^{(d)} - X_t^{(j)}},
\end{aligned}$$

qui est un système d'équations différentielles stochastiques régissant le mouvement sur la droite réelle de d particules chargées, soumises à un champ extérieur $\tilde{b}$, à des perturbations aléatoires et en interaction via une répulsion électrostatique.

Les équations différentielles stochastiques multivoques permettent donc de modéliser et d'étudier des systèmes de particules en interaction avec un potentiel d'interaction éventuellement très singulier. On renvoie le lecteur à [6] pour un exemple d'étude de ce genre de systèmes de particules.

6. Démonstration de l'existence forte pour les EDS multivoques. Nous allons donner maintenant, comme application du théorème d'existence et d'unicité pour le problème de Skorohod multivoque, une deuxième démonstration (après celle donnée dans [5]) de la partie existence dans le Théorème 5.1.

Il est connu que l'espace $L^2(\Omega; C([0;T]; \mathbb{R}^d))$ est un espace de Banach pour la norme

$$|||\, X \,||| = \mathbb{E}^{1/2}\Big(\sup_{0 \le t \le T} |X_t|^2\Big), \tag{6.1}$$

et donc aussi pour chacune des normes

$$|||\, X \,|||_\lambda = \sup_{0 \le t \le T}\Big[e^{-\lambda t}\mathbb{E}^{1/2}\Big(\sup_{0 \le s \le t} |X_s|^2\Big)\Big], \qquad \lambda > 0, \tag{6.2}$$

puisque, pour tout $\lambda > 0$, les normes $|||\cdot|||$ et $|||\cdot|||_\lambda$ sont équivalentes. On note $L^2_{\mathrm{ad}}(\Omega; C([0;T];\mathbb{R}^d))$ le sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\Omega; C([0;T];\mathbb{R}^d))$ formé des processus X qui sont $\{F_t\}$-adaptés, c'est-à-dire tels que X_t soit F_t-mesurable pour chaque $t \in [0;T]$.

Soit $Y = \{Y_t, F_t;\ 0 \le t \le T\}$ un processus continu, adapté, défini sur $(\Omega, F, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. D'après le Théorème 3.2, il existe un unique couple (Z, H), $Z = \{Z_t, F_t;\ 0 \le t \le T\}$, $H = \{H_t, F_t;\ 0 \le t \le T\}$, de processus continus, adaptés, définis sur $(\Omega, F, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, tel que pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, $(Z_\cdot(\omega), H_\cdot(\omega))$ soit la solution de

$$S\left(A;\ x_0 + \int_0^{\cdot} b(Y_s(\omega))\, ds + \left(\int_0^{\cdot} \sigma(Y_s)\, dW_s \right)(\omega); T \right). \tag{6.3}$$

On pose alors

$$F(Y) = Z. \tag{6.4}$$

PROPOSITION 6.1. *L'espace $L^2_{\mathrm{ad}}(\Omega; C([0;T];\mathbb{R}^d))$ est stable par F; c'est-à-dire,*

$$F\left(L^2_{\mathrm{ad}}\left(\Omega; C\left([0;T];\mathbb{R}^d\right)\right)\right) \subset L^2_{\mathrm{ad}}\left(\Omega; C\left([0;T];\mathbb{R}^d\right)\right). \tag{6.5}$$

DÉMONSTRATION. Soit $Y \in L^2_{\mathrm{ad}}(\Omega; C([0;T];\mathbb{R}^d))$. On note comme précédemment (Z, H), $Z = \{Z_t, F_t;\ 0 \le t \le T\}$, $H = \{H_t, F_t;\ 0 \le t \le T\}$, l'unique couple de processus continus, adaptés, définis sur $(\Omega, F, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, tel que pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, $(Z_\cdot(\omega), H_\cdot(\omega))$ soit la solution de

$$S\left(A;\ x_0 + \int_0^{\cdot} b(Y_s(\omega))\, ds + \left(\int_0^{\cdot} \sigma(Y_s)\, dW_s \right)(\omega); T \right). \tag{6.6}$$

On souhaite montrer que $Z = F(Y) \in L^2_{\mathrm{ad}}(\Omega, C([0;T];\mathbb{R}^d))$. On reprend a, γ, μ donnés par la Proposition 4.4. On pose (avec les conventions habituelles)

$$\tau_p = \inf\{0 \le t \le T : |Y_t| + |Z_t| \ge p\}, \qquad p \in \mathbb{N}^*. \tag{6.7}$$

Alors τ_p est un $\{F_t\}$-temps d'arrêt pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $\tau_p \uparrow \infty$ quand $p \uparrow \infty$, $\mathbb{P}$-p.s. En utilisant successivement la formule d'Itô, la Proposition 4.4, l'inégalité (4.65) et l'hypothèse Lipschitz faite sur (b, σ) et l'inégalité de Davis, on peut écrire

$$\begin{aligned}
|Z_{s \wedge \tau_p} - a|^2 &= |x_0 - a|^2 + 2\int_0^{s \wedge \tau_p} \langle b(Y_u), Z_u - a \rangle\, du \\
&\quad + 2\int_0^{s \wedge \tau_p} \langle \sigma(Y_u), Z_u - a \rangle\, dW_u \\
&\quad - 2\int_0^{s \wedge \tau_p} \langle Z_u - a, dH_u \rangle + \int_0^{s \wedge \tau_p} \mathrm{tr}(\sigma\sigma^*(Y_u))\, du \\
&\le C + |x_0 - a|^2 + C\int_0^s |Z_{u \wedge \tau_p} - a|^2\, du \\
&\quad + C\int_0^s |Y_{u \wedge \tau_p}|^2\, du + 2\int_0^{s \wedge \tau_p} \langle \sigma(Y_u), Z_u - a \rangle\, dW_u,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E\Big(\sup_{0\le s\le t}|Z_{s\wedge\tau_p}-a|^2\Big) &\le C + C\int_0^t \mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le u}|Z_{s\wedge\tau_p}-a|^2\Big)\,du\\
&\qquad + 2\mathbb{E}\bigg(\sup_{0\le s\le t}\bigg|\int_0^{s\wedge\tau_p}\langle\sigma(Y_u),Z_u-a\rangle\,dW_u\bigg|\bigg)\\
&\qquad + C\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le T}|Y_s|^2\Big)\\
&\le C + C|||Y|||^2 + C\int_0^t \mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le u}|Z_{s\wedge\tau_p}-a|^2\Big)\,du\\
&\qquad + C\mathbb{E}\bigg(\bigg\{\int_0^{t\wedge\tau_p}|\sigma(Y_u)|^2\,|Z_u-a|^2\,du\bigg\}^{1/2}\bigg).
\end{aligned}
$$

Or, en utilisant l'inégalité (4.65) et l'hypothèse Lipschitz faite sur σ, on peut obtenir la majoration

$$
\begin{aligned}
&C\mathbb{E}\bigg(\bigg\{\int_0^{t\wedge\tau_p}|\sigma(Y_u)|^2\,|Z_u-a|^2\,du\bigg\}^{1/2}\bigg)\\
&\quad\le C\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le t}|Z_{s\wedge\tau_p}-a|.\Big(1+\sup_{0\le s\le T}|Y_s|\Big)\Big)\\
&\quad\le C(1+|||Y|||^2)+\tfrac{1}{2}\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le t}|Z_{s\wedge\tau_p}-a|^2\Big),
\end{aligned}
$$

d'où, en revenant à l'inégalité précédente,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le t}|Z_{s\wedge\tau_p}-a|^2\Big) &\le C(1+|||Y|||^2)\\
&\qquad + C\int_0^t \mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le u}|Z_{s\wedge\tau_p}-a|^2\Big)\,du,
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

puis par le lemme de Gronwall,

$$
\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le t\le T}|Z_{t\wedge\tau_p}|^2\Big)\le C(1+|||Y|||^2)e^{CT},
\tag{6.9}
$$

et on conclut finalement à l'aide du lemme de Beppo-Levi en faisant $p\uparrow\infty$. □

PROPOSITION 6.2. *Pour $\lambda>0$ suffisamment grand, F est une contraction de l'espace $L^2_{\mathrm{ad}}(\Omega;C([0;T];\mathbb{R}^d))$ muni de $|||\cdot|||_\lambda$; c'est-à-dire, il existe $\lambda_0>0$ tel que pour tout $\lambda>\lambda_0$, on peut trouver une constante $0<C=C(b,\sigma,T,\lambda)$ <1 vérifiant*

$$
\begin{aligned}
&|||F(Y)-F(Y')|||_\lambda \le C|||Y-Y'|||_\lambda\\
&\qquad\qquad \forall\ Y,Y'\in L^2_{\mathrm{ad}}\big(\Omega;C\big([0;T];\mathbb{R}^d\big)\big).
\end{aligned}
\tag{6.10}
$$

DÉMONSTRATION. Soient $\lambda > 0$ et $Y, Y' \in L^2_{\mathrm{ad}}(\Omega; C([0;T];\mathbb{R}^d))$. On note (Z, H), $Z = \{Z_t, F_t;\ 0 \le t \le T\}$, $H = \{H_t, F_t;\ 0 \le t \le T\}$, l'unique couple de processus continus, adaptés, définis sur $(\Omega, F, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, tel que pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, $(Z_\cdot(\omega), H_\cdot(\omega))$ soit la solution de

$$S\left(A; x_0 + \int_0^\cdot b(Y_s(\omega))\, ds + \left(\int_0^\cdot \sigma(Y_s)\, dW_s\right)(\omega); T\right), \tag{6.11}$$

et (Z', H'), $Z' = \{Z'_t, F_t;\ 0 \le t \le T\}$, $H' = \{H'_t, F_t;\ 0 \le t \le T\}$, l'unique couple de processus continus, adaptés, définis sur $(\Omega, F, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, tel que pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, $(Z'_\cdot(\omega), H'_\cdot(\omega))$ soit la solution de

$$S\left(A; x_0 + \int_0^\cdot b(Y'_s(\omega))\, ds + \left(\int_0^\cdot \sigma(Y'_s)\, dW_s\right)(\omega); T\right), \tag{6.12}$$

de sorte que

$$F(Y) = Z; \qquad F(Y') = Z'. \tag{6.13}$$

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\tau_p = \inf\{0 \le t \le T : |Y_t| + |Y'_t| + |Z_t| + |Z'_t| \ge p\}. \tag{6.14}$$

Alors τ_p est un $\{F_t\}$-temps d'arrêt pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $\tau_p \uparrow \infty$ quand $p \uparrow \infty$ $\mathbb{P}$-p.s. D'après la formule d'Itô, la Proposition 4.1, l'hypothèse Lipschitz sur (b, σ), l'inégalité (4.65), l'inégalité de Davis, on peut écrire

$$\begin{aligned}
|Z_{s\wedge\tau_p} - Z'_{s\wedge\tau_p}|^2 &= 2\int_0^{s\wedge\tau_p} \langle b(Y_u) - b(Y'_u), Z_u - Z'_u\rangle\, du \\
&\quad + 2\int_0^{s\wedge\tau_p} \langle \sigma(Y_u) - \sigma(Y'_u), Z_u - Z'_u\rangle\, dW_u \\
&\quad - 2\int_0^{s\wedge\tau_p} \langle Z_u - Z'_u, dH_u - dH'_u\rangle \\
&\quad + \int_0^{s\wedge\tau_p} \mathrm{tr}\left[\{\sigma(Y_u) - \sigma(Y'_u)\}\{\sigma(Y_u) - \sigma(Y'_u)\}^*\right] du,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|Z_{s\wedge\tau_p} - Z'_{s\wedge\tau_p}|^2 &\le C\int_0^s |Y_u - Y'_u|^2\, du + C\int_0^s |Z_{u\wedge\tau_p} - Z'_{u\wedge\tau_p}|^2\, du \\
&\quad + 2\int_0^{s\wedge\tau_p} \langle \sigma(Y_u) - \sigma(Y'_u), Z_u - Z'_u\rangle\, dW_u,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le t} |Z_{s\wedge\tau_p} - Z'_{s\wedge\tau_p}|^2\Big) \\
&\quad \le C\int_0^t \mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le u} |Y_s - Y'_s|^2\Big)\, du + C\int_0^t \mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le u} |Z_{s\wedge\tau_p} - Z'_{s\wedge\tau_p}|^2\Big)\, du \\
&\qquad + 2\mathbb{E}\left(\sup_{0\le s\le t}\left|\int_0^{s\wedge\tau_p} \langle \sigma(Y_u) - \sigma(Y'_u), Z_u - Z'_u\rangle\, dW_u\right|\right)
\end{aligned}$$

$$\leq C\int_0^t \mathbb{E}\Big(\sup_{0\leq s\leq u}|Y_s - Y'_s|^2\Big)\,du + C\int_0^t \mathbb{E}\Big(\sup_{0\leq s\leq u}|Z_{s\wedge\tau_p} - Z'_{s\wedge\tau_p}|^2\Big)\,du$$
$$+ C\mathbb{E}\bigg(\bigg\{\int_0^{t\wedge\tau_p}\big|\sigma(Y_u)-\sigma(Y'_u)\big|^2|Z_u - Z'_u|^2\,du\bigg\}^{1/2}\bigg).$$

Or, en utilisant de nouveau l'inégalité élémentaire (4.65) et l'hypothèse Lipschitz sur σ, on peut obtenir la majoration

$$C\mathbb{E}\bigg(\bigg\{\int_0^{t\wedge\tau_p}\big|\sigma(Y_u)-\sigma(Y'_u)\big|^2|Z_u - Z'_u|^2\,du\bigg\}^{1/2}\bigg)$$
$$\leq C\mathbb{E}\bigg(\sup_{0\leq s\leq t}|Z_{s\wedge\tau_p} - Z'_{s\wedge\tau_p}|\bigg\{\int_0^t\big|\sigma(Y_u)-\sigma(Y'_u)\big|^2\,du\bigg\}^{1/2}\bigg)$$
$$\leq \tfrac{1}{2}\mathbb{E}\Big(\sup_{0\leq s\leq t}|Z_{s\wedge\tau_p} - Z'_{s\wedge\tau_p}|^2\Big) + C\int_0^t \mathbb{E}\Big(\sup_{0\leq s\leq u}|Y_s - Y'_s|^2\Big)\,du,$$

d'où, en revenant à l'inégalité précédente,

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0\leq s\leq t}|Z_{s\wedge\tau_p} - Z'_{s\wedge\tau_p}|^2\Big)$$
$$\leq C\int_0^t \mathbb{E}\Big(\sup_{0\leq s\leq u}|Y_s - Y'_s|^2\Big)\,du + C\int_0^t \mathbb{E}\Big(\sup_{0\leq s\leq u}|Z_{s\wedge\tau_p} - Z'_{s\wedge\tau_p}|^2\Big)\,du$$

puis par le lemme de Gronwall

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0\leq s\leq t}|Z_{s\wedge\tau_p} - Z'_{s\wedge\tau_p}|^2\Big) \leq Ce^{Ct}\int_0^t \mathbb{E}\Big(\sup_{0\leq s\leq u}|Y_s - Y'_s|^2\Big)\,du \tag{6.15}$$

et on conclut finalement à l'aide du lemme de Beppo-Levi en faisant $p\uparrow\infty$ que l'on peut écrire

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0\leq s\leq t}|Z_s - Z'_s|^2\Big) \leq C\int_0^t \mathbb{E}\Big(\sup_{0\leq s\leq u}|Y_s - Y'_s|^2\Big)\,du. \tag{6.16}$$

On en déduit

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0\leq s\leq t}|Z_s - Z'_s|^2\Big) \leq C\int_0^t \mathbb{E}\Big(\sup_{0\leq s\leq u}|Y_s - Y'_s|^2\Big)\,du$$
$$\leq C\int_0^t e^{2\lambda u}e^{-2\lambda u}\mathbb{E}\Big(\sup_{0\leq s\leq u}|Y_s - Y'_s|^2\Big)\,du$$
$$\leq \Big(C\int_0^t e^{2\lambda u}\,du\Big).\ |||\,Y - Y'\,|||_\lambda^2$$
$$\leq Ce^{2\lambda t}/\lambda.|||\,Y - Y'\,|||_\lambda^2,$$

puis finalement,

$$\begin{aligned}\||| Z - Z' \|||_\lambda^2 &= \sup_{0 \le t \le T} e^{-2\lambda t}. \mathbb{E}\Big(\sup_{0 \le s \le t} |Z_s - Z'_s|^2 \Big) \\ &\le C/\lambda . \||| Y - Y' \|||_\lambda^2,\end{aligned}$$

d'où le résultat si l'on prend $\lambda_0 = C = C(b, \sigma, T)$. □

Choisissons $\lambda > \lambda_0$, où λ_0 est donné par la proposition précédente; on a donc que F est une contraction de l'espace de Banach $L^2_{\mathrm{ad}}(\Omega; C([0; T]; \mathbb{R}^d))$ lorsque l'on munit $L^2_{\mathrm{ad}}(\Omega; C([0; T]; \mathbb{R}^d))$ de la norme $\||| \cdot \|||_\lambda$. Le théorème du point fixe de Banach permet alors d'affirmer l'existence d'un unique point fixe X pour F. En particulier, $X \in L^2_{\mathrm{ad}}(\Omega; C([0; T]; \mathbb{R}^d))$, $X = F(X)$ et il existe $K \in L^2_{\mathrm{ad}}(\Omega; C([0; T]; \mathbb{R}^d))$, à variation finie tel que pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, $(F(X)_\cdot(\omega), K_\cdot(\omega)) = (X_\cdot(\omega), K_\cdot(\omega))$ soit la solution de

$$S\left(A; x_0 + \int_0^\cdot b(X_s(\omega))\, ds + \left(\int_0^\cdot \sigma(X_s)\, dW_s \right)(\omega); T \right), \tag{6.17}$$

autrement dit (X, K) est solution du problème $EDSM^d(A; b; \sigma; x_0)$ sur $[0; T]$. Par la technique classique de recollement, on construit une solution du problème sur $[0; +\infty[$. Ceci termine la démonstration de la partie existence du Théorème 5.1.

Remarque. L'unique solution (X, K) du problème $EDSM^d(A; b; \sigma; x_0)$ pourrait aussi être obtenue comme limite dans $L^2_{\mathrm{ad}}(\Omega; C([0; T]; \mathbb{R}^d))$ de la suite des itérées de Picard définie par

$$\begin{aligned} X^{(n+1)} &= F(X^{(n)}); \qquad n \in \mathbb{N}^*, \\ X^{(0)} &\equiv x_0. \end{aligned} \tag{6.18}$$

7. Compléments en dimension 1.

7.1. *Régularité de* Γ. On a montré dans le Section 4 que l'application de Skorohod Γ associée à un opérateur maximal monotone multivoque A de $\mathbb{R}^d$ est Hölderienne d'ordre $\frac{1}{2}$ sur les compacts de $C([0; T]; \mathbb{R}^d)$. La même régularité est obtenue par Lions et Snitzman [12] d'une part, et Saisho [13] d'autre part dans le cas où A est le sous-différentiel de la fonction indicatrice d'un convexe fermé (sans autre hypothèse) de $\mathbb{R}^d$. Dans [7], Dupuis et Ishii obtiennent une caractérisation des convexes fermés de $\mathbb{R}^d$ pour lesquels l'application Γ est Lipschitzienne: ce sont les polyèdres. En particulier, en dimension 1, l'application de Skorohod associée au sous-différential de tout convexe fermé de $\mathbb{R}$ est Lipschitzienne. On va montrer que ce résultat s'étend à l'ensemble des opérateurs maximaux monotones multivoques de $\mathbb{R}$.

THÉORÈME 7.1. *Soit A un opérateur maximal monotone multivoque de $\mathbb{R}$ vérifiant* (3.1). *Alors l'application de Skorohod Γ associée à A par le Théorème* 3.2 *est Lipschitzienne. Plus précisément, pour toutes $w, w' \in C_A([0;T];\mathbb{R}^d)$, on a l'estimation*

$$\|\Gamma(w) - \Gamma(w')\| \leq 2\|w - w'\|. \tag{7.1}$$

DÉMONSTRATION. Puisque $C^\infty([0;T];\mathbb{R}^d) \cap C_A([0;T];\mathbb{R}^d)$ est dense dans $C_A([0;T];\mathbb{R}^d)$ et Γ continue, il suffit de prouver (7.1) pour $w, w' \in C^\infty([0;T];\mathbb{R}^d) \cap C_A([0;T];\mathbb{R}^d)$. Soient $w, w' \in C^\infty([0;T];\mathbb{R}^d) \cap C_A([0;T];\mathbb{R}^d)$. On pose

$$x = \Gamma(\omega), \qquad x' = \Gamma(\omega'). \tag{7.2}$$

Si on note x_n et x'_n les solutions de $S(A_n, w, T)$, $S(A_n, w', T)$ respectivement, c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} &\dot{x}_n(t) = \dot{w}(t) - A_n(x_n(t)),\\ &x_n(0) = w(0), \end{aligned} \tag{7.3}$$

$$\begin{aligned} &\dot{x}'_n(t) = \dot{w}'(t) - A_n(x'_n(t)),\\ &x'_n(0) = w'(0), \end{aligned} \tag{7.4}$$

alors on sait que

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \quad \text{et} \quad x'_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x' \quad \text{dans } C([0;T];\mathbb{R}^d).$$

Il suffit donc de prouver

$$\|x_n - x'_n\| \leq 2\|w - w'\| \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \tag{7.5}$$

autrement dit

$$|x_n(t) - x'_n(t)| \leq 2\|w - w'\| \qquad \forall\, t \in [0;T], \forall\, n \in \mathbb{N}^*. \tag{7.6}$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq t \leq T$. Le résultat est clair si $t = 0$ car

$$|x_n(0) - x'_n(0)| = |w(0) - w'(0)| \leq \|w - w'\|. \tag{7.7}$$

On peut donc supposer $0 < t \leq T$ et aussi bien sûr $x_n(t) \neq x'_n(t)$; admettons par exemple que l'on ait $x_n(t) > x'_n(t)$. On pose

$$G = \{0 \leq s \leq t \colon x_n(s) = x'_n(s)\}, \tag{7.8}$$

puis

$$\tau = \max(\sup G; 0), \tag{7.9}$$

de telle sorte que

$$x_n(s) \geq x'_n(s), \qquad \tau \leq s \leq t, \tag{7.10}$$

et de plus, pour $\tau = 0$ comme pour $\tau > 0$, on a

$$\begin{aligned}(7.11)\qquad &\left|(w(t) - w'(t)) - (w(\tau) - w'(\tau)) + (x_n(\tau) - x'_n(\tau))\right| \\ &\quad \le 2\|w - w'\|.\end{aligned}$$

On calcule alors en utilisant la monotonie de A_n,

$$\begin{aligned}|x_n(t) - x'_n(t)| &= x_n(t) - x'_n(t) \\ &= (w(t) - w'(t)) - (w(\tau) - w'(\tau)) + (x_n(\tau) - x'_n(\tau)) \\ &\qquad - \int_\tau^t (A_n(x_n(s)) - A_n(x'_n(s)))\, ds \\ &\le \left|(w(t) - w'(t)) - (w(\tau) - w'(\tau)) + (x_n(\tau) - x'_n(\tau))\right| \\ &\le 2\|w - w'\|. \qquad \square\end{aligned}$$

7.2. *Remarque sur la démonstration d'existence.* Pour obtenir l'existence d'une solution (forte) à l'équation différentielle stochastique multivoque $EDSM^d(A, b, \sigma, x_0)$, on a appliqué la méthode d'itération de Picard via l'application de Skorohod Γ. En dimension $d = 1$, cette application Γ est Lipschitzienne d'après le Théorème 7.1 ce qui permet d'obtenir directement la solution X de $EDSM^d(A, b, \sigma, x_0)$ en posant

$$(7.12)\qquad X = \Gamma(Y),$$

où Y est l'unique solution [existence et unicité assurées par le caractère Lipschitz des fonctionnelles $b(\Gamma)$, $\sigma(\Gamma)$] de

$$(7.13)\qquad Y_t = x_0 + \int_0^t b(\Gamma(Y)(s))\, ds + \int_0^t \sigma(\Gamma(Y)(s))\, dW_s.$$

7.3. *Grandes déviations des équations différentielles stochastiques multivoques unidimensionnelles.* A l'aide des résultats de grandes déviations obtenus pour l'équation (1.8) lorsque $A = 0$ dans [10], la méthode de l'application continue appliquée dans [1] et le caractère Lipschitz de l'application de Skorohod, on peut très facilement obtenir un résultat de grandes déviations pour l'équation différentielle stochastique multivoque (1.8).

THÉORÈME 7.2. *Soient*:

(i) *A opérateur maximal monotone multivoque de $\mathbb{R}$ tel que*

$$(7.14)\qquad \mathrm{Int}(D(A)) \neq \varnothing;$$

(ii) $E = (\Omega, F, \{F_t\}, \mathbb{P})$ *espace probabilisé filtré vérifiant les conditions habituelles*;

(iii) $W = \{W_t, F_t,\ 0 \le t < \infty\}$ *mouvement Brownien unidimensionnel standard défini sur* (Ω, F, P), $W_0 = 0$;

(iv) $b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *vérifiant pour une certaine constante* $0 < C < \infty$,

$$|b(x)| + |\sigma(x)| \le C \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}, \tag{7.15}$$

$$|b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \le C|x-y| \qquad \forall\ x, y \in \mathbb{R}, \tag{7.16}$$

$$|\sigma(x)| \ge \frac{1}{C} \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}; \tag{7.17}$$

(v) $x_0 \in \overline{D(A)}$;

(vi) $T > 0$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, *on note* $X^{(\varepsilon)}$, *l'unique solution de l'équation différentielle stochastique multivoque unidimensionnelle*:

$$dX_t^{(\varepsilon)} + A\big(X_t^{(\varepsilon)}\big)\,dt \ni b\big(X_t^{(\varepsilon)}\big)\,dt + \varepsilon^{1/2}\sigma\big(X_t^{(\varepsilon)}\big)\,dW_t, \tag{7.18}$$

et pour $g \in C([0;T];\mathbb{R})$, $g(0) = x_0$, *on pose*

$$\lambda(g) = \inf\big\{\tilde{\lambda}(f)\colon f \in C_A([0;T];\mathbb{R}),\ \Gamma(f) = g\big\}, \tag{7.19}$$

avec pour toute $f \in C_A([0;T];\mathbb{R})$,

$$\tilde{\lambda}(f) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^T \frac{\big(\dot{f}(s) - b(\Gamma(f)(s))\big)^2}{\sigma^2(\Gamma(f)(s))}\,ds, & \textit{si } f \textit{ absolument continue},\\ +\infty, & \textit{sinon}, \end{cases} \tag{7.20}$$

puis

$$\Lambda(E) = \inf\{\lambda(g)\colon g \in E\}, \tag{7.21}$$

si E *est un Borélien de* $C([0;T];\mathbb{R})$. *Alors*:

(i) *pour tout* $R > 0$, *l'ensemble* $\{\lambda \le R\}$ *est un compact de* $C([0;T];\mathbb{R})$; *en particulier*, λ *est s.c.i. sur* $C([0;T];\mathbb{R})$;

(ii) *pour tout Borélien* E *de* $C([0;T];\mathbb{R})$, *on a*

$$\begin{aligned} -\Lambda(\mathrm{Int}(E)) &\le \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \ln \mathbb{P}(X^{(\varepsilon)} \in E)\\ &\le \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \ln \mathbb{P}(X^{(\varepsilon)} \in E) \le -\Lambda(\overline{E}), \end{aligned} \tag{7.22}$$

où l'on convient de noter $\mathrm{Int}(E)$ *et* $\overline{E}$ *l'intérieur et l'adhérence* (*pour la topologie de la convergence uniforme*) *respectivement de toute partie* E *de* $C([0;T];\mathbb{R})$.

Autrement dit, $(\mathbb{P}^{X^{(\varepsilon)}}, \varepsilon)$ *est un système de grandes déviations pour la fonctionnelle d'action* λ.

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que l'on peut écrire $X^{(\varepsilon)}$ sous la forme

$$X^{(\varepsilon)} = \Gamma(Y^{(\varepsilon)}) \qquad \forall\, \varepsilon > 0, \tag{7.23}$$

où $Y^{(\varepsilon)}$ est l'unique solution de l'équation différentielle stochastique classique (univoque)

$$dY_t^{(\varepsilon)} = b\big(\Gamma(Y^{(\varepsilon)})_t\big)\, dt + \varepsilon^{1/2}\sigma\big(\Gamma(Y^{(\varepsilon)})_t\big)\, dW_t, \tag{7.24}$$

pour laquelle on connait les grandes déviations d'après [10]. En effet, grâce aux hypothèses faites sur b, σ et le caractère Lipschitz de Γ, les résultats de [10] s'appliquent ici (le théorème de Freidlin et Wentzell n'était pas énoncé pour des fonctionnelles non anticipatives sur $C([0;T];\mathbb{R})$ mais leur résultat reste vrai dans ce cas comme l'ont remarqué initialement Anderson et Orey [1]). On obtient les grandes déviations de $X^{(\varepsilon)}$ en transportant celles de $Y^{(\varepsilon)}$ en utilisant la méthode bien connue de l'application continue (voir [1] par exemple). □

REMARQUE. A l'aide de l'application de Skorohod Γ définie dans le Théorème 3.2, on peut (en s'inspirant du cas des EDS réfléchies) définir un schéma de discrétisation de type Euler pour les équations différentielles stochastiques multivoques et montrer la convergence d'un tel schéma; on renvoie le lecteur à [4] pour plus de détails sur le sujet.

Remerciements. L'auteur remercie le referee pour toutes ses remarques qui ont permis d'améliorer la présentation de cet article, ainsi que pour ses suggestions et la référence [9]. L'auteur tient aussi à remercier son directeur de thèse, le professeur Dominique Lépingle, de lui avoir proposé ce sujet de recherche, et lui est très reconnaissant de tous ses judicieux conseils.

REFERENCES

[1] ANDERSON, R. et OREY, S. (1976). Small perturbations of dynamicals with reflecting boundary. *Nagoya Math. J.* **60** 189–216.

[2] BENSOUSSAN, A. et RASCANU, A. (1994). *d*-Dimensional stochastic differential equation with a multivalued subdifferential operator in drift. A paraître.

[3] BREZIS, H. (1973). Opérateurs monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert. North-Holland, Amsterdam.

[4] CÉPA, E. (1994). Équations différentielles stochastiques multivoques. Thèse.

[5] CÉPA, E. (1995). Équations différentielles stochastiques multivoques. *Séminaire Probabilités XXIX* 86–107. Springer, Berlin.

[6] CÉPA, E. et LÉPINGLE, D. (1997). Diffusive particles with electrostatic repulsion. *Probab. Theory Related Fields* **107** 429–449.

[7] DUPUIS, P. et ISHII, H. (1991). On Lipschitz continuity of the solution mapping to the Skorohod problem with applications. *Stochastics* **35** 31–62.

[8] FEYEL, D. (1987). Sur la méthode de Picard (EDO et EDS). *Séminaire Probabilités XXI* 515–520. Springer, Berlin.

[9] FILLIPOV, A. N. (1960). Differential equations with discontinuous right-hand side. *Mat. Sb.* (N.S.) **51** 99–128.

[10] FREIDLIN, M. I. et WENTZELL, A. D. (1984). *Random Perturbations of Dynamicals Systems*. Springer, New York.
[11] LÉPINGLE, D. et MAROIS, C. (1987). Équations différentielles stochastiques multivoques unidimensionnelles. *Séminaire Probabilités XXI* 520–533. Springer, Berlin.
[12] LIONS, P. L. et SZNITMAN, A. S. (1984). Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions. *Comm. Pure Appl. Math.* **37** 511–537.
[13] SAISHO, Y. (1987). Stochastic differential equations for multidimensional domains with reflecting boundary. *Probab. Theory Related Fields* **74** 455–477.
[14] SKOROHOD, A. V. (1961). Stochastic equations for diffusions in a bounded region. *Theory Probab. Appl.* **6** 264–274.
[15] TANAKA, H. (1979). Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions in convex regions. *Hiroshima Math. J.* **9** 163–177.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UMR 6628–MAPMO
UNIVERSITÉ D'ORLÉANS
BP 6759
45067 ORLÉANS, CEDEX 2
FRANCE
E-MAIL: cepa@labomath.univ-orleans.fr