The Annals of Probability
1997, Vol. 25, No. 2, 953–996

LE POINT D'UN FERMÉ LE PLUS VISITÉ PAR LE MOUVEMENT BROWNIEN

PAR CHRISTOPHE LEURIDAN

Université de Grenoble

Soit $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien dans $\mathbb{R}$, issu de 0. Soit $(L_t^x)_{t\in\mathbb{R}_+}^{x\in\mathbb{R}}$ une version continue de ses temps locaux. F étant un fermé de $\mathbb{R}$, contenant 0, on s'intéresse au processus càdlàg $(A_t^F)_{t\in\mathbb{R}_+}$, où A_t^F est "le" point de F le plus visité à l'instant t, c'est-à-dire "le" point $a \in F$ tel que $L_t^a = L_t^F$, en notant $L_t^F = \max_{x\in F} L_t^x$.

On démontre que le processus $(A_t^F)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est à variation localement bornée (et même purement de sauts) et que le processus croissant $(L_t^F)_{t\in\mathbb{R}_+}$ majore le temps local symétrique en 0 de la semi-martingale $(B_t - A_t^F)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Lorsque $F = \mathbb{R}$, on montre que cette majoration est en fait une égalité et que les sauts du processus $(A_t^F)_{t\in\mathbb{R}_+}$ ne sont ni isolés, ni "obligés."

Introduction. On considère dans cet article un mouvement brownien $B=(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ dans $\mathbb{R}$, issu de 0, à trajectoires continues, défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. $(L_t^x)_{t\in\mathbb{R}_+}^{x\in\mathbb{R}}$ désigne une version presque sûrement continue du temps local associé à B.

F étant un fermé non vide de $\mathbb{R}$, on note pour $t \in \mathbb{R}_+$: $L_t^F = \sup_{x\in F} L_t^x$. Comme presque sûrement, pour $t \in \mathbb{R}_+$, l'application $x \mapsto L_t^x$ est continue à support compact, L_t^F est en fait un maximum de temps locaux. On s'intéresse aux points $a \in F$ réalisant ce maximum, c'est-à-dire tels que $L_t^a = L_t^F$: ce sont les points de F les plus visités par le mouvement brownien B à l'instant t. En fait, il y a en général un seul point réalisant le maximum à un instant donné (voir Théorème 1.1.1). Des résultats sur le point le plus visité ont déjà été obtenus par Bass, Griffin et Eisenbaum dans les cas particuliers où $F = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}_+$.

Bass et Griffin ont publié en 1985 [2] des résultats remarquables décrivant le comportement asymptotique du plus petit point de $\mathbb{R}_+$ le plus visité, défini à tout instant $t \geq 0$ par la formule

$$\underline{A}_t^{\mathbb{R}_+} = \inf\{x \in \mathbb{R}_+ | L_t^x = L_t^{\mathbb{R}_+}\}.$$

Leur résultat le plus surprenant est le suivant

$$\text{pour tout } \gamma > 11, \qquad \underline{A}_t^{\mathbb{R}_+} t^{-1/2} (\ln t)^\gamma \to +\infty, \quad \text{comme } t \to +\infty,$$

ce qui entraîne en particulier que $\underline{A}_t^{\mathbb{R}_+}$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$, ce qui est loin d'être évident. Ils ont également montré que

$$\text{pour tout } \gamma < 2, \qquad \liminf_{t\to+\infty} \underline{A}_t^{\mathbb{R}_+} t^{-1/2} (\ln t)^\gamma = 0$$

Received September 1995; revised May 1996.
AMS 1991 *subject classifications*. 60J65, 60J55.
Key words and phrases. Brownian motion, local time, maxima of local time, most visited point.

et

$$\limsup_{t\to+\infty} \underline{A}_t^{\mathbb{R}_+}(2t\ln(\ln\ t))^{-1/2} = 1,$$

et ils ont transposé tous ces résultats à une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.

Dans sa thèse de doctorat [5], soutenue en 1989, Eisenbaum a prouvé un théorème d'unicité: presque sûrement, à tout instant $t > 0$, il y a un seul point de $\mathbb{R}$ le plus visité, sauf pour un ensemble au plus dénombrable d'instants où il y a exactement deux points, B_t étant l'un d'eux.

Eisenbaum a également obtenu plusieurs lois explicites concernant le point le plus visité par une excursion, ou par le mouvement brownien au premier instant où le temps local en 0 atteint une valeur $r > 0$, ainsi qu'un théorème de type "Ray–Knight" donnant la loi des temps locaux à l'instant où leur maximum sur $\mathbb{R}_+$ atteint la valeur 1.

L'objet de ce travail est de décrire le comportement trajectoriel du processus du point de F le plus visité, F étant un fermé de $\mathbb{R}$ fixé. Je reprends ici l'étude que j'ai faite dans ma thèse de doctorat [10], en généralisant l'un des principaux résultats.

On supposera toujours que le fermé F contient le point 0, ce qui nous évitera le problème de définir le processus du point de F le plus visité avant le premier instant d'atteinte de F par le mouvement brownien, et ce qui simplifie certaines formules. Cette restriction ne constitue pas vraiment une perte de généralité puisqu'on peut toujours se ramener à ce cas en ne regardant le mouvement brownien B qu'à partir de son premier instant d'atteinte de F.

Nous commençons dans la première partie, par démontrer un théorème d'unicité généralisant celui de Eisenbaum: nous prouvons que presque sûrement, à tout instant $t > 0$, il existe un seul point $a \in F$ tel que $L_t^a = L_t^F$, sauf pour un ensemble au plus dénombrable d'instants où il y a exactement deux points. Cet ensemble d'instants est inclus dans l'ensemble des extrémités droites des intervalles de constance du processus $(L_t^F)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

De façon imagée, nous étudions une "course de temps locaux" à laquelle ne participent que les temps locaux indexés par les points de F. À tout instant, il y a un seul temps local en tête de la course, sauf pour un ensemble au plus dénombrable d'instants où un temps local en double un autre.

Eisenbaum a prouvé ce résultat dans le cas où $F = \mathbb{R}$ en utilisant le théorème de Ray [12] donnant la loi du processus $(L_T^x)_{x\in\mathbb{R}}$ pour un temps T exponentiel indépendant du mouvement brownien. La démonstration que nous donnons ici a l'avantage d'être valable pour n'importe quel fermé F et de n'utiliser que des propriétés élémentaires du mouvement brownien: propriété de Markov, continuité des temps locaux, constance du temps local en x sur tout intervalle de temps où le mouvement brownien ne passe pas en x.

Ce théorème nous permet de définir un processus càdlàg $(A_t^F)_{t\in\mathbb{R}_+}$ à valeurs dans F et vérifiant à tout instant $t \in \mathbb{R}_+$ l'égalité $L_t^{A_t^F} = L_t^F$. Il montre que ce processus est constant sur les intervalles ouverts de constance de $(L_t^F)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et ne peut sauter qu'aux extrémités droites de ces intervalles.

Nous prouvons également deux résultats utiles par la suite: presque sûrement l'ensemble des zéros du processus $B - A^F$ et l'image du processus

A^F sont de mesure nulle. Le premier sera utile pour montrer que le processus A^F est à variation bornée.

L'un des referees m'a fait remarquer que pour $F = \mathbb{R}$, le second résultat se déduisait facilement du théorème de Bass et Griffin assurant que $|A_t^{\mathbb{R}}| \to +\infty$ quand $t \to +\infty$, et qu'il permettait de montrer que le processus $A^{\mathbb{R}}$ est de saut plus simplement que je le faisais dans [10]: cette nouvelle démonstration n'utilise plus le calcul difficile de la quatrième partie.

Il m'a suggéré aussi que l'on pourrait peut-être prouver le résultat pour un fermé F quelconque, ce que j'ai réussi à faire depuis.

Le processus A^F étant à variation bornée et purement de sauts, la différence $B - A^F$ est donc une semi-martingale possédant une famille continue de temps locaux $(\lambda_t^x)_{t\in\mathbb{R}_+}^{x\in\mathbb{R}}$. Le fait que l'ensemble des zéros de la semi-martingale soit égal à l'ensemble des points de croissance du processus L^F conduit à chercher un lien entre le processus L^F et le temps local λ^0. Il s'agit là d'un problème assez délicat que nous ne résolvons complètement que dans le cas où le fermé F est discret et le cas où $F = \mathbb{R}$.

Nous commençons dans la deuxième partie par le cas où F est discret. La situation est alors relativement simple puisque le processus A^F est en escalier. Nous démontrons la formule de Tanaka suivante:

$$|B_t - A_t^F| = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s - A_{s-}^F)\, dB_s - V_t^F + L_t^F,$$

où V_t^F est la variation totale du processus A^F sur l'intervalle $[0,\ t]$. Cette formule indique que le processus L^F est égal au temps local λ^0.

Dans la troisième partie, nous cherchons à étendre ces résultats au cas général en approchant le fermé F par une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermés discrets. En notant $V_t^{F_n}$ la variation totale du processus A^{F_n} sur l'intervalle $[0, t]$, nous montrons la convergence de $(A_t^{F_n})_{n\in\mathbb{N}}$ vers A_t^F, puis celle de $(V_t^{F_n})_{n\in\mathbb{N}}$ vers V_t^F, où V^F est un processus croissant càdlàg. Nous prouvons de cette manière que le processus A^F est à variation localement bornée (et même purement de sauts, puisque son image est de mesure nulle).

Malheureusement, cela ne garantit pas que V_t^F soit la variation du processus A^F sur l'intervalle $[0, t]$, mais seulement que V_t^F majore cette variation. En transformant cette inégalité, nous obtenons l'inégalité $\lambda_t^0 \leq L_t^F$. Ces deux inégalités sont en fait équivalentes et prouver l'égalité dans l'une équivaut à la prouver dans l'autre.

Dans la quatrième partie, nous démontrons l'égalité $\lambda_t^0 = L_t^F$ dans le cas particulier où $F = \mathbb{R}$. Nous procédons de manière indirecte en montrant par un calcul explicite l'égalité $\mathbb{E}\lambda_T^0 = \mathbb{E}L_T^*$, où T est un temps exponentiel indépendant du mouvement brownien B et $L_T^* = L_T^{\mathbb{R}}$. La formule de Borodin [4] nous fournit une expression du second membre $\mathbb{E}L_T^*$. Pour le premier, on ramène son calcul à celui de la densité en 0 de la variable aléatoire $B_T - A_T^{\mathbb{R}}$, puis à celle de la variable aléatoire $A_T^{\mathbb{R}}$. Le calcul de cette dernière est assez technique et repose sur le théorème de Ray (voir [3] ou [12]) donnant la loi du processus $(L_T^x)_{x\in\mathbb{R}}$.

Dans la cinquième partie, nous établissons deux propriétés concernant les sauts du processus $A^{\mathbb{R}}$. Nous prouvons que les sauts ne sont pas isolés (chaque saut est immédiatement suivi d'autres sauts) et qu'ils ne sont pas "obligés": aux extrémités droites des intervalles de constance de L^* (qui sont les seuls instants ou le processus A peut sauter), il peut ne pas y avoir de saut. De façon équivalente, le mouvement brownien peut revenir à son point le plus visité sans que le temps local en ce point se fasse doubler par d'autres temps locaux.

Pour démontrer ces deux propriétés, nous établissons des résultats assez précis concernant l'allure des temps locaux au voisinage de leur maximum, grâce au théorème de Eisenbaum (voir [5] ou [6]) donnant la loi du processus des temps locaux au premier instant où leur maximum sur $\mathbb{R}_+$ atteint une valeur $r > 0$, et au théorème de D.B. Ray (voir [3] ou [12]).

Enfin, dans la sixième et dernière partie, nous soulevons quelques questions ouvertes.

1. L'unicité et les premières propriétés du processus du point de F le plus visité. Commençons par poser quelques notations qui serviront dans toute la suite. Le processus $(L_t^F)_{t\in\mathbb{R}_+}$ étant presque sûrement continu et croissant, on introduit les instants τ_r^F et τ_{r+}^F définis pour $r \in \mathbb{R}_+$ par

$$\tau_r^F = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ | L_t^F \geq r\}$$

et

$$\tau_{r+}^F = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ | L_t^F > r\} = \lim_{s\to r+} \tau_s^F.$$

Le segment $[\tau_r^F, \tau_{r+}^F]$ est ainsi égal à l'ensemble des instants t tels que $L_t^F = r$. Pour $t \in \mathbb{R}_+$, on note $g^F(t) = \tau_r^F$ et $d^F(t) = \tau_{r+}^F$ où $r = L_t^F$, ce qui entraîne que $g^F(t) \leq t \leq d^F(t)$.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le fermé F, nous omettrons l'indice F dans les notations ci-dessus. Nous pouvons maintenant énoncer les principaux résultats de cette partie.

1.1. *Le théorème d'unicité.*

THÉORÈME 1.1.1. *Il existe un événement presque sûr Ω_1 sur lequel on a pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$:*

(i) *Pour tout instant $t \in [\tau_r, \tau_{r+}[$, B_{τ_r} est le seul point $a \in F$ tel que $L_t^a = L_t^F$.*
(ii) *B_{τ_r} et $B_{\tau_{r+}}$ sont les seuls points $a \in F$ tels que $L_{\tau_{r+}}^a = L_{\tau_{r+}}^F$.*

COROLLAIRE 1.1.2. *Sur l'événement presque sûr $\Omega_2 = \Omega_1 \cap \{\tau_{0+} = 0\}$, on a à tout instant $t > 0$ unicité du point $a \in F$ tel que $L_t^a = L_t^F$ sauf pour un ensemble d'instants de la forme τ_{r+} avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\tau_r < \tau_{r+}$.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. On introduit l'événement presque sûr Ω_0 formé des éventualités $\omega \in \Omega$ pour lesquelles:

(i) La famille des temps locaux $(L_t^x(\omega))_{t\in\mathbb{R}_+}^{x\in\mathbb{R}}$ est continue.

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le processus $(L_t^x(\omega))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est croissant, et ne croît pas hors du fermé :

$$\{t \in \mathbb{R}_+ | B_t(\omega) = x\}.$$

La démonstration s'effectue alors en trois étapes, grâce à deux lemmes.

LEMME 1.1.3. *Sur l'événement Ω_0 et pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, les affirmations suivantes sont vérifiées:*

(i) B_{τ_r} *est le seul point* $a \in F$ *tel que* $L_{\tau_r}^a = r$;
(ii) *pour* $t \in [\tau_r, \tau_{r+}]$, $L_t^{B_{\tau_r}} = r$;
(iii) $B_{\tau_{r+}} \in F$ *et* $L_{\tau_{r+}}^{B_{\tau_{r+}}} = r$.

Le Lemme 1.1.3 nous dit donc que pour $r \in \mathbb{R}_+^*$, il y a unicité du point de F le plus visité à l'instant τ_r, ce point étant B_{τ_r}. Ce point B_{τ_r} reste l'un des points de F les plus visités pendant l'intervalle de temps $[\tau_r, \tau_{r+}]$. À l'instant τ_{r+}, il apparaît un deuxième point parmi les points de F les plus visités : $B_{\tau_{r+}}$ qui est peut-être égal à B_{τ_r}.

DÉMONSTRATION DU LEMME 1.1.3. Comme il existe au moins un point $a \in F$ tel que $L_{\tau_r}^a = L_{\tau_r}^F = r$, il suffit pour démontrer (i) de prouver que pour $x \in F \setminus \{B_{\tau_r}\}$, on a $L_{\tau_r}^x < r$. Or si $x \in F \setminus \{B_{\tau_r}\}$, par continuité du mouvement brownien, il existe $\delta > 0$ tel que $B_t \neq x$ pour tout $t \in [\tau_r - \delta, \tau_r]$, ce qui entraîne:

$$L_{\tau_r}^x = L_{\tau_r-\delta}^x \leq L_{\tau_r-\delta}^F < r,$$

par définition de τ_r.

(ii) se démontre en écrivant, pour $t \in [\tau_r, \tau_{r+}]$, que

$$r = L_{\tau_r}^{B_{\tau_r}} \leq L_t^{B_{\tau_r}} \leq L_{\tau_{r+}}^{B_{\tau_r}} \leq L_{\tau_{r+}}^F = r.$$

(iii) D'après (i), on a pour tout $s > r$, $B_s \in F$ et $L_{\tau_s}^{B_{\tau_s}} = s$. Par continuité de $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et de $(L_t^{B_t})_{t\in\mathbb{R}_+}$, on obtient (iii) en passant à la limite quand $s \to r+$.

Nous allons maintenant énoncer le lemme clé de la démonstration.

LEMME 1.1.4. *Il existe un événement presque sûr Ω_1 sur lequel on a, pour tout $r \in \mathbb{R}_+$,*

$$\tau_{r+} = \inf\{t > \tau_r | B_t \in F \text{ et } L_t^{B_t} = L_t^F\}.$$

DÉMONSTRATION. L'inégalité $\tau_{r+} \geq \inf\{t > \tau_r | B_t \in F \text{ et } L_t^{B_t} = L_t^F\}$ est une simple conséquence du point (i) du Lemme 1.1.3. Pour tout $s > r$, on a en effet

$$\tau_s > \tau_r, \qquad B_{\tau_s} \in F \quad \text{et} \quad L_{\tau_s}^{B_{\tau_s}} = L_{\tau_s}^F,$$

d'où

$$\tau_s \geq \inf\{t > \tau_r | B_t \in F \text{ et } L_t^{B_t} = L_t^F\}.$$

Il suffit alors de passer à la limite quand $s \to r+$.

L'inégalité $\tau_{r+} \leq \inf\{t > \tau_r | B_t \in F \text{ et } L_t^{B_t} = L_t^F\}$ constitue le point important du Lemme 1.1.4, la difficulté étant de l'obtenir pour tous les r à la fois, y compris pour ceux tels que $\tau_r < \tau_{r+}$ (pour les autres, elle est évidente).

L'idée consiste à montrer que presque sûrement, on a pour $t_0 \in \mathbb{R}_+$ $d(t_0) \leq \tilde{d}(t_0)$, où:

$$d(t_0) = \tau_{(L_{t_0}^F)_+} = \inf\{t \geq t_0 | L_t^F > L_{t_0}^F\}$$

et

$$\tilde{d}(t_0) = \inf\{t > t_0 | B_t \in F \text{ et } L_t^{B_t} = L_t^F\}$$

En prenant cette inégalité aux instants particuliers $t_0 = \tau_r$ pour $r \in \mathbb{R}_+$, on obtiendra alors l'inégalité voulue.

Pour cela, on commence par remarquer que les processus d et $\tilde{d}$ sont croissants et continus à droite. Cela se voit en écrivant que d est la composée du processus croissant continu à droite $(\tau_{r+})_{r\in\mathbb{R}_+}$ et du processus croissant continu $(L_t^F)_{t\in\mathbb{R}_+}$, et en écrivant pour $t_0 \in \mathbb{R}_+$:

$$\tilde{d}(t_0) = \inf(Z^F \cap\,]t_0, +\infty[)$$

avec

$$Z^F = \{t \in \mathbb{R}_+ | B_t \in F \text{ et } L_t^{B_t} = L_t^F\}.$$

Par conséquent, il suffit de prouver l'inégalité presque sûre $d(t_0) \leq \tilde{d}(t_0)$ à t_0 fixé et de prendre $\Omega_1 = \{\omega \in \Omega_0 | \forall t \in \mathbb{Q}_+ \ d(t, \omega) \leq \tilde{d}(t, \omega)\}$.

À t_0 fixé, l'inégalité presque sûre $d(t_0) \leq \tilde{d}(t_0)$ vient de ce que $\tilde{d}(t_0)$ est un temps d'arrêt pour la filtration naturelle associée au mouvement brownien B. Par conséquent, presque sûrement le temps local en $B_{\tilde{d}(t_0)}$ augmente aussitôt après $\tilde{d}(t_0)$. Or par définition de $\tilde{d}(t_0)$ et par continuité de B, de $(L_t^{B_t})_{t\in\mathbb{R}_+}$ et de $(L_t^F)_{t\in\mathbb{R}_+}$, on a

$$B_{\tilde{d}(t_0)} \in F \quad \text{et} \quad L_{\tilde{d}(t_0)}^{B_{\tilde{d}(t_0)}} = L_{\tilde{d}(t_0)}^F.$$

Donc presque sûrement, pour tout $t > \tilde{d}(t_0)$,

$$L_t^F \geq L_t^{B_{\tilde{d}(t_0)}} > L_{\tilde{d}(t_0)}^{B_{\tilde{d}(t_0)}} = L_{\tilde{d}(t_0)}^F \geq L_{t_0}^F,$$

c'est-à-dire

$$\tilde{d}(t_0) \geq d(t_0).$$

FIN DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.1.1. Nous allons démontrer que sur l'événement Ω_1, on a pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$:

(iv) Pour $t \in]\tau_r, \tau_{r+}[$, $B_t \notin F$ ou $L_t^{B_t} < r$. A fortiori, $B_t \neq B_{\tau_r}$.

(v) Pour $t \in]\tau_r, \tau_{r+}[$, B_{τ_r} est le seul point $a \in F$ tel que $L_t^a = L_t^F$.

(vi) B_{τ_r} et $B_{\tau_{r+}}$ sont les seuls points $a \in F$ tels que $L_{\tau_{r+}}^a = L_{\tau_{r+}}^F$,

ce qui achèvera la démonstration du théorème.

Lorsque $\tau_r = \tau_{r+}$, il n'y a rien à prouver dans les points (iv) et (v), et le point (vi) est déjà prouvé par le point (i) du Lemme 1.1.3. Soit donc $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\tau_r < \tau_{r+}$:

1. Le point (iv) n'est qu'une autre formulation du Lemme 1.1.4.
2. S'il existait un instant $t \in]\tau_r, \tau_{r+}[$ et un point $a \in F \backslash \{B_{\tau_r}\}$ tel que $L_t^a = L_t^F$, on aurait d'après le Lemme 1.1.3 point (i):

$$L_{\tau_r}^a < r = L_t^F = L_t^a.$$

Le mouvement brownien serait passé en a entre les instants τ_r et t, et à son dernier instant de passage s avant t, on aurait

$$B_s = a \in F \quad \text{et} \quad L_s^{B_s} = L_s^a = L_t^a = L_t^F = L_s^F,$$

ce qui contredirait le point (iv). Cela prouve le point (v).

3. Soit $x \in F \setminus \{B_{\tau_r}, B_{\tau_{r+}}\}$. Par continuité du mouvement brownien, comme $B_{\tau_{r+}} \neq x$, il existe $\delta \in]0, \tau_{r+} - \tau_r[$ tel que $B_t \neq x$ pour tout $t \in [\tau_{r+} - \delta, \tau_{r+}]$. On a donc

$$L_{\tau_{r+}}^x = L_{\tau_{r+}-\delta}^x < r,$$

d'après le point (v), puisque $x \in F \setminus \{B_{\tau_r}\}$. Avec les points (ii) et (iii) du Lemme 1.1.3, cela prouve le point (vi).

Nous pouvons maintenant définir le processus du point de F le plus visité.

1.2. *Définition et propriétés immédiates du processus* $(A_t^F)_{t\geq 0}$. D'après le théorème, lorsque t se trouve dans un intervalle $[\tau_r, \tau_{r+}[$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$, B_{τ_r} est le seul point de F le plus visité à l'instant t. On pose alors $A_t^F = B_{\tau_r}$.

Il peut y avoir un problème de choix aux points de la forme τ_{r+} où $r \in \mathbb{R}_+^*$ est tel que $\tau_r < \tau_{r+}$, puisqu'alors l'ensemble des points de F les plus visités est $\{B_{\tau_r}, B_{\tau_{r+}}\}$. Nous choisirons de poser $A_{\tau_{r+}}^F = B_{\tau_{r+}}$. L'intérêt de ce choix sera justifié à la fin de cette section. Nous posons donc la:

DÉFINITION 1.2.1. On appelera processus du point de F le plus visité le processus $(A_t^F)_{t\in\mathbb{R}_+}$ défini par la formule

$$A_t^F = B_{g(t+)}.$$

Autrement dit

$$A_t^F = \begin{cases} B_{\tau_r}, & \text{si } t \in [\tau_r, \tau_{r+}[\text{ avec } r \in \mathbb{R}_+, \\ B_{\tau_{r+}}, & \text{si } t = \tau_{r+}. \end{cases}$$

De tout ce qui précède, on déduit immédiatement les propriétés suivantes, qui joueront un rôle important dans la suite:

COROLLAIRE 1.2.2. *Sur l'événement presque sûr Ω_2, le processus $(A_t^F)_{t\in\mathbb{R}_+}$ vérifie les propriétés suivantes:*

(a) Le processus $(A_t^F)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est càdlàg. Il est constant sur les intervalles $[\tau_r, \tau_{r+}[$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et ne saute qu'à des instants de la forme τ_{r+}, où $r \in \mathbb{R}_+^*$ est tel que $\tau_r < \tau_{r+}$.

(b) À tout instant $t \geq 0$, $A_t^F \in F$ et $L_t^{A_t^F} = L_t^F$.

(c) À tout instant $t > 0$, les seuls points de F les plus visités sont $A_t^F = B_{g(t+)}$ et $A_{t-}^F = B_{g(t)}$.

(d) Si t est un instant de saut de A^F, alors $B_t = A_t^F$.

(e) À tout instant $t \geq 0$, on a l'équivalence:

$$\begin{aligned} B_t = A_t^F &\Leftrightarrow B_t \in F \text{ et } L_t^{B_t} = L_t^F \\ &\Leftrightarrow t \text{ est un instant de la forme } \tau_r \text{ ou } \tau_{r+}. \end{aligned}$$

REMARQUE 1.2.3. La propriété (e) signifie qu'il y a égalité entre: l'ensemble des zéros du processus $B - A^F$; l'ensemble $Z^F = \{t \in \mathbb{R}_+ | B_t \in F \text{ et } L_t^{B_t} = L_t^F\}$; le support de la mesure de Stieltjes associée au processus croissant L^F.

Cela implique en particulier que l'ensemble des zéros du processus $B - A^F$ est fermé, bien que le processus $B - A^F$ ne soit pas continu (excepté dans le cas où $F = \{0\}$). Nous verrons à la Section 1.3 que ce fermé est presque sûrement de mesure nulle.

Nous pouvons maintenant justifier l'intérêt d'avoir posé $A_{\tau_{r+}}^F = B_{\tau_{r+}}$ (ce qui rend le processus A^F càdlàg): si nous choisissions de poser $A_{\tau_{r+}}^F = B_{\tau_r}$ (ce qui rendrait le processus A^F càglàd), la propriété (e) ne serait pas vraie.

1.3. *L'ensemble des zéros de $B - A^F$ est de mesure nulle.* Nous allons démontrer ici la:

PROPOSITION 1.3.1. *Pour tout instant $t > 0$, on a $P[B_t = A_t^F] = 0$.*

Par intégration vis-à-vis de t sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit le:

COROLLAIRE 1.3.2. *Presque sûrement, l'ensemble Z^F des zéros de $B - A^F$ est de mesure nulle.*

Ce corollaire nous servira à la Section 2.2 pour démontrer que le processus A^F est à variation localement bornée.

La démonstration de la proposition repose sur le lemme suivant.

LEMME 1.3.3. *Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. On a presque sûrement*

$$\liminf_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \mathbb{1}_{\{L_t^{B_t+y} \leq L_t^{B_t}\}} \, dy < 1.$$

Autrement dit, presque sûrement B_t n'est pas un point de densité de l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R} | L_t^x \le L_t^{B_t}\}.$$

DÉMONSTRATION. Par changement d'échelle, la probabilité

$$P\left[\liminf_{h\to 0} \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \mathbb{1}_{\{L_t^{B_t+y} \le L_t^{B_t}\}}\, dy < 1\right]$$

est indépendante de $t \in \mathbb{R}_+^*$. Elle est donc égale à

$$P\left[\liminf_{h\to 0} \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \mathbb{1}_{\{L_T^{B_t+y} \le L_T^{B_T}\}}\, dy < 1\right],$$

où T est un temps exponentiel indépendant du mouvement brownien B. Choisissons T exponentiel d'espérance égale à 2. D'après le théorème de Ray (voir [3] ou [12]), le processus $(L_T^{B_T+\varepsilon y})_{y\in\mathbb{R}_+}$, où $\varepsilon = \operatorname{sgn}(B_T)$, est une diffusion sur $\mathbb{R}_+$, de générateur infinitésimal $2x(d^2/dx^2) - 2x(d/dx)$. Comme on a

$$\left(2x\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx}\right)(e^x) = 0 \quad \text{et} \quad \left(2x\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx}\right)(e^{2x}) = 4xe^{2x},$$

on en déduit que les processus

$$(M_y)_{y\in\mathbb{R}_+} \quad \text{et} \quad \left(M_y^2 - \int_0^y 4(\ln M_z)M_z^2\, dz\right)_{y\in\mathbb{R}_+}, \quad \text{où} \quad M_y = \exp(L_T^{B_T+\varepsilon y}),$$

sont des martingales locales. Et comme

$$4(\ln M_y)M_y^2 \to 4L_T^{B_T}\exp(2L_T^{B_T}) > 0$$

presque sûrement lorsque $y \to 0$, on a ainsi

$$\begin{aligned}
\liminf_{h\to 0+} \frac{1}{h}\int_0^h \mathbb{1}_{\{L_T^{B_T+\varepsilon y} \le L_T^{B_T}\}}\, dy &= \liminf_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^h \mathbb{1}_{\{M_y \le M_0\}}\, d\,y \\
&= \liminf_{h\to 0} \frac{\int_0^h \mathbb{1}_{\{M_y\le M_0\}} 4(\ln M_y)M_y^2\, dy}{\int_0^h 4(\ln M_y)M_y^2\, dy} \\
&= \liminf_{h\to 0} \frac{\int_0^h \mathbb{1}_{\{M_y\le M_0\}}\, d\langle M, M\rangle_y}{\langle M, M\rangle_h} \\
&= \liminf_{u\to 0} \frac{1}{u}\int_0^u \mathbb{1}_{\{\beta_v \le 0\}}\, dv,
\end{aligned}$$

où $(\beta_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est le mouvement brownien obtenu à partir de la martingale locale $(M_y - M_0)_{y\in\mathbb{R}_+}$ par changement de temps (et éventuellement augmentation de l'espace probabilisé).

Montrons que l'on a presque sûrement

$$\liminf_{u\to 0} \frac{1}{u}\int_0^u \mathbb{1}_{\{\beta_v \le 0\}}\, dv = 0.$$

D'après la loi du 0–1 de Blumenthal et Getoor, il suffit de prouver que pour $x \in]0,1[$, on a:

$$P\left[\liminf_{u\to 0} \frac{1}{u}\int_0^u \mathbb{1}_{\{\beta_v \le 0\}}\, dv \le x\right] > 0.$$

Or

$$\begin{aligned}
P&\left[\liminf_{u\to 0} \frac{1}{u}\int_0^u \mathbb{1}_{\{\beta_v \le 0\}}\, dv \le x\right] \\
&\ge P\left[\bigcap_{N\in\mathbb{N}}\bigcup_{n\ge N}\left\{2^n\int_0^{2^{-n}} \mathbb{1}_{\{\beta_v\le 0\}} dv \le x\right\}\right] \\
&\ge \limsup_{n\to+\infty} P\left[2^n\int_0^{2^{-n}} \mathbb{1}_{\{\beta_v\le 0\}}\, dv \le x\right] \quad \text{(d'après le lemme de Fatou)} \\
&= P\left[\int_0^1 \mathbb{1}_{\{\beta_s\le 0\}}\, ds \le x\right] \quad \text{(par changement d'échelle)} \\
&= \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x} > 0,
\end{aligned}$$

car la variable aléatoire $\int_0^1 \mathbb{1}_{\{\beta_v>0\}}\, dv$ suit la loi arcsinus sur l'intervalle $[0,1]$ (voir [13] au Chapitre VI, Théorème 2.7).

Cela montre que l'on a presque sûrement

$$\liminf_{h\to 0+} \frac{1}{h}\int_0^h \mathbb{1}_{\{L_T^{B_T+\varepsilon y}\le L_T^{B_T}\}}\, dy = 0,$$

d'où:

$$\liminf_{h\to 0} \frac{1}{2h}\int_{-h}^h \mathbb{1}_{\{L_T^{B_T+y}\le L_T^{B_T}\}}\, dy \le \frac{1}{2} < 1,$$

ce qui prouve le Lemme 1.3.3. On pourrait prouver par des méthodes semblables que cette dernière limite inférieure vaut 0.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1.3.1. Soit E l'ensemble des points de densité de F,

$$E = \left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, \frac{1}{2h}\int_{-h}^h \mathbb{1}_F(x+y)\, dy \to 1 \text{ lorsque } h\to 0\right\}.$$

On a $E\subset F$ car F est fermé, et $F\setminus E$ est de mesure nulle. Écrivons pour $t>0$,

$$\begin{aligned}
\{B_t = A_t^F\} &= \{B_t\in F; L_t^{B_t} = L_t^F\} \\
&= \{B_t\in F\setminus E; L_t^{B_t} = L_t^F\} \cup \{B_t\in E; L_t^{B_t} = L_t^F\}.
\end{aligned}$$

Le premier de ces deux derniers événements est de probabilité nulle car $F\setminus E$ est de mesure nulle. Le deuxième s'écrit "B_t est un point de densité de F et F est inclus dans $\{x\in\mathbb{R} | L_t^x \le L_t^{B_t}\}$". Il est donc de probabilité nulle d'après le Lemme 1.3.3.

1.4. *L'image du processus A^F est de mesure nulle.* Dans ce paragraphe, nous démontrons le résultat suivant:

PROPOSITION 1.4.1. *Soit a un point d'accumulation de F. Alors presque sûrement, on a $L_t^a < L_t^F$ pour tout instant $t > 0$ (autrement dit le point a n'est jamais le point de F le plus visité).*

Comme l'ensemble des points isolés du fermé F est au plus dénombrable, on obtient par intégration sur F vis-à-vis de a la conséquence suivante.

COROLLAIRE 1.4.2. *Presque sûrement, l'ensemble $\{A_t^F, t \in \mathbb{R}_+\}$ est de mesure nulle.*

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1.4.1. Remarquons tout d'abord que l'on peut supposer que $a = 0$. En effet, si a est le point le plus visité de F à un instant $t > 0$, alors nécessairement $t > \sigma_a$, où $\sigma_a = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ | B_t = a\}$, et à l'instant $t - \sigma_a$, 0 est le point de $F - a$ le plus visité par le mouvement brownien $B_{\sigma_a + \cdot} - a$.

Supposons donc que 0 est un point d'accumulation de F. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels de même signe—par exemple positifs—de $F \setminus \{0\}$ convergeant vers 0.

Pour montrer que presque sûrement, pour tout instant $t > 0$, $L_t^0 < L_t^F$, il suffit de le vérifier pour les instants de la forme $\tau_r^0 = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ | L_t^0 \geq r\}$ avec $r > 0$. En effet, si 0 était le point de F le plus visité à un instant $t > 0$, il le serait déjà au dernier zéro du mouvement brownien précédant l'instant t, qui est un instant de la forme τ_r^0 où $r > 0$.

Nous allons donc montrer que pour $l \in Q_+^*$ fixé, on a presque sûrement

$$\forall r \geq l, \exists n \in \mathbb{N}, \qquad L_{\tau_r^0}^{x_n} > r.$$

La preuve comporte deux étapes:

Première étape. Presque sûrement, $\limsup_{n\to+\infty} x_n^{-1/2}\big(L_{\tau_l^0}^{x_n} - l\big) = +\infty$. En effet, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} P\Big[\limsup_{n\to+\infty} x_n^{-1/2}\big(L_{\tau_l^0}^{x_n} - l\big) \geq \lambda\Big] &\geq P\Big[\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq N} \{x_n^{-1/2}\big(L_{\tau_l^0}^{x_n} - l\big) \geq \lambda\}\Big] \\ &\geq \limsup P[x_n^{-1/2}\big(L_{\tau_l^0}^{x_n} - l\big) \geq \lambda] \quad \text{(d'après le lemme de Fatou)} \\ &> 0, \end{aligned}$$

car $x^{-1/2}(L_{\tau_l^0}^x - l) \to 2\sqrt{l}B_1$ en loi lorsque $x \downarrow 0$. Comme le processus $(L_{\tau_l^0}^x)_{x\in\mathbb{R}_+}$ est markovien de Feller (il s'agit d'un carré de Bessel de dimension 0 d'après le théorème de Knight), la loi du 0-1 de Blumenthal et Getoor entraîne que $P[\limsup_{n\to+\infty} x_n^{-1/2}(L_{\tau_l^0}^{x_n} - l) \geq \lambda] = 1$, ce qu'on voulait démontrer.

Ainsi, à l'instant τ_l^0, certains des temps locaux aux points x_n ont une avance relativement importante sur le temps local en 0. Par conséquent, le temps local en 0 mettra beaucoup de temps pour rattraper le temps local en ces points. L'objet de la deuxième étape est de montrer qu'il ne parviendra jamais à les rattraper tous.

Deuxième étape. Soit $\rho = \inf\{r \geq l | \forall n \in \mathbb{N}\ L^{x_n}_{\tau_r^0} \leq r\}$. Alors $\rho = +\infty$ presque sûrement. En effet, soit $\widetilde{B}$ le mouvement brownien $B_{\tau_l^0+\cdot}$. Alors $\widetilde{B}$ est issu de 0 et indépendant de la tribu $\mathscr{F}_{\tau_l^0}$ engendrée par le mouvement brownien B jusqu'à l'instant τ_l^0. La formule $\widetilde{L}_t^x = L^x_{\tau_l^0+t} - L^x_{\tau_l^0}$ fournit une version continue des temps locaux de $\widetilde{B}$ et l'on a pour $s \in \mathbb{R}_+$,

$$\tau_{l+s}^0 = \tau_l^0 + \tilde{\tau}_s^0, \quad \text{où } \tilde{\tau}_s^0 = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ | \widetilde{L}_t^0 \geq s\}.$$

Pour tout entier n, on a donc

$$\begin{aligned}\{\rho \leq l+s\} &\subset \Big\{\sup_{0\leq r\leq s}\big(l+r-L^{x_n}_{\tau^0_{l+r}}\big) \geq 0\Big\}\\ &= \Big\{\sup_{0\leq r\leq s} x_n^{-1/2}\big(r-\widetilde{L}^{x_n}_{\tilde{\tau}_r^0}\big) \geq x_n^{-1/2}\big(L^{x_n}_{\tau_l^0}-l\big)\Big\}.\end{aligned}$$

Par indépendance de B et $\mathscr{F}_{\tau_l^0}$,

$$P\big[\rho \leq l+s | \mathscr{F}_{\tau_l^0}\big] \leq f_n\big(x_n^{-1/2}\big(L^{x_n}_{\tau_l^0}-l\big)\big),$$

où

$$f_n(\lambda) = P\Big[\sup_{0\leq r\leq s} x_n^{-1/2}\big(r-\widetilde{L}^{x_n}_{\tilde{\tau}_r^0}\big) \geq \lambda\Big].$$

Fixons $\lambda \in \mathbb{R}_+$. D'après la première étape, on a presque sûrement, pour une infinité d'entiers n,

$$x_n^{-1/2}\big(L^{x_n}_{\tau_l^0}-l\big) \geq \lambda,$$

d'où par décroissance de f_n,

$$P[\rho \leq l+s | \mathscr{F}_{\tau_l^0}] \leq f_n\big(x_n^{-1/2}\big(L^{x_n}_{\tau_l^0}-l\big)\big) \leq f_n(\lambda).$$

Or

$$f_n(\lambda) \to P\Big[\sup_{0\leq r\leq s}(-2B_r) \geq \lambda\Big] \quad \text{lorsque } n \to +\infty,$$

d'après la convergence en loi

$$\big(\varepsilon^{-1/2}\big(L^{\varepsilon}_{\tau_r^0}-r\big)\big)_{r\geq 0} \to (2B_r)_{r\geq 0} \quad \text{lorsque } \varepsilon \downarrow 0,$$

qui est contenue dans celle obtenue par Yor dans [18]. Ainsi

$$P[\rho \leq l+s | \mathscr{F}_{\tau_l^0}] \leq P\Big[\sup_{0\leq r\leq s}(-2B_r) \geq \lambda\Big].$$

Comme $\lambda \in \mathbb{R}_+$ est arbitraire, on a donc $P[\rho \leq l+s | \mathscr{F}_{\tau_l^0}] = 0$, d'où $\rho > l+s$ presque sûrement, ce qui achève la preuve.

2. Le cas où F est discret.

2.1. *Comportement du processus* $(A_t^F)_{t\in\mathbb{R}_+}$. L'objet de cette section est de démontrer la

PROPOSITION 2.1.1. *Si F est discret, le processus $(A_t^F)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est en escalier.*

DÉMONSRATION. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des instants où le point de F le plus visité change, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de temps d'arrêt définie par $T_0 = 0$ et $T_{n+1} = \inf\{t \geq T_n | A_t^F \neq A_{T_n}^F\}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

D'après le Corollaire 1.2.2, le processus $(A_t^F)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est càdlàg. Comme F est discret, on en déduit immédiatement que pour $n \in \mathbb{N}$: $T_{n+1} > T_n$; le processus $(A_t^F)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est constant sur l'intervalle $[T_n, T_{n+1}[$; $A_{T_{n+1}} \neq A_{T_n}$; $B_{T_{n+1}} = A_{T_{n+1}}$ [car T_{n+1} est un instant de saut du processus $(A_t^F)_{t\in\mathbb{R}_+}$].

Enfin, on a $T_n \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$. Sinon, par croissance stricte de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on aurait $T_n \to T_\infty$ comme $n \to +\infty$ avec $T_\infty \in \mathbb{R}_+^*$ et $A_{T_n} \to A_{T_\infty -}$ lorsque $n \to +\infty$. Comme F est un fermé discret, on aurait donc $A_{T_n} = A_{T_\infty -}$ pour n assez grand, ce qui contredirait le fait que $A_{T_{n+1}} \neq A_{T_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Tout cela montre que le processus $(A_t^F)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est en escalier.

2.2. *Une formule de Tanaka et sa signification.* Dans tout ce qui suit, nous définissons $\operatorname{sgn}(x)$ pour tout x réel en faisant la convention $\operatorname{sgn}(0) = 0$. À l'aide de la proposition 2.1.1, nous allons prouver l'identité suivante:

PROPOSITION 2.2.1. *Si F est discret, on a presque sûrement:*

$$|B_t - A_t^F| = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s - A_{s-}^F)\, dB_s - V_t^F + L_t^F \text{ pour } t \in \mathbb{R}_+,$$

où

$$V_t^F = \sum_{n\in\mathbb{N}^*/T_n\leq t} |A_{T_n}^F - A_{T_{n-1}}^F| = \sum_{n\in\mathbb{N}^*/T_n\leq t} |B_{T_n} - B_{T_{n-1}}|$$

représente la variation totale du processus A^F sur l'intervalle $[0, t]$.

DÉMONSTRATION. Par continuité à droite des processus, il suffit de prouver l'égalité presque sûre à t fixé. Sur l'événement $\{T_n \leq t < T_{n+1}\}$, on a presque sûrement

$$\begin{aligned}
\int_0^t \operatorname{sgn}(B_s - A_{s-}^F)\, dB_s &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{T_k}^{T_{k+1}} \operatorname{sgn}(B_s - B_{T_k})\, dB_s \\
&\quad + \int_{T_n}^t \operatorname{sgn}(B_s - B_{T_n})\, dB_s \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left[|B_{T_{k+1}} - B_{T_k}| - L_{T_{k+1}}^{B_{T_k}} + L_{T_k}^{B_{T_k}}\right] \\
&\quad + |B_t - B_{T_n}| - L_t^{B_{T_n}} + L_{T_n}^{B_{T_n}},
\end{aligned}$$

d'après la formule de Tanaka habituelle. En utilisant les égalités $L_{T_k}^{B_{T_k}} = L_{T_k}^F$ et $L_{T_{k+1}}^{B_{T_k}} = L_{T_{k+1}}^F$ pour $k \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\int_0^t \mathrm{sgn}(B_s - A_{s-}^F)\, dB_s = V_t^F - L_t^{B_{T_n}} + |B_t - B_{T_n}|$$
$$= V_t^F - L_t^F + |B_t - A_t^F|,$$

qui est l'égalité voulue.

Nous allons maintenant interpréter cette inégalité en termes de temps locaux. Le lecteur pourra trouver dans [17] les définitions et les premières propriétés relatives aux temps locaux de semi-martingales discontinues.

Rappelons que si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une semi-martingale càdlàg vérifiant pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ $\sum_{s\le t} |\Delta X_s| < +\infty$, où $\Delta X_s = X_s - X_{s-}$ désigne le saut de X à l'instant s, alors $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ possède une famille de temps locaux continue vis-à-vis de la variable de temps et càdlàg vis-à-vis de la variable d'espace. Le temps local *symétrique* en a, $(\lambda_t^a(X))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est donné par la formule

$$|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t \mathrm{sgn}(X_{s-} - a)\, dX_s + \lambda_t^a(X)$$
$$+ \sum_{s\le t} \big(\Delta|X-a|_s - \mathrm{sgn}(X_{s-} - a)\Delta X_s\big),$$

où l'on continue de poser $\mathrm{sgn}(0) = 0$ et où le symbole $\int_0^t$ désigne l'intégrale sur le segment $[0, t]$. Par rapport aux cas des semi-martingales continues, la seule différence est le terme correctif $\sum_{s\le t}(\Delta|X-a|_s - \mathrm{sgn}(X_{s-} - a)\,\Delta X_s)$ qui vient compenser les différences de sauts des processus $|X-a|$ et $\int_0^\cdot \mathrm{sgn}(X_{s-}-a)\, dX_s$. Ce terme, toujours positif, ne prend en compte que les sauts de X enjambant le point a, ou issus de a.

Comme le processus A^F est en escalier, on peut appliquer ce qui vient d'être dit à la semi-martingale $B-A^F$. Notons $(\lambda_t^x)_{t\in\mathbb{R}_+}^{x\in\mathbb{R}}$ la famille de ses temps locaux symétriques. On a donc

$$|B_t - A_t^F| = \int_0^t \mathrm{sgn}(B_s - A_{s-}^F)\, dB_s - \int_0^t \mathrm{sgn}(B_s - A_{s-}^F)\, dA_s^F$$
$$+ \lambda_t^0 + \sum_{s\le t}\big[\Delta|B - A^F|_s - \mathrm{sgn}(B_s - A_{s-}^F)\Delta(B - A^F)_s\big].$$

À cause de la propriété (d) du processus A^F, tous les sauts de la semi-martingale $B - A^F$ sont en fait des retours en 0. On voit donc que, dans ce cas, le terme correctif $\sum_{s\le t}[\Delta|B - A^F|_s - \mathrm{sgn}(B_s - A_{s-}^F)\Delta(B - A^F)_s]$ est nul et que, comme A^F est en escalier,

$$\int_0^t \mathrm{sgn}(B_s - A_{s-}^F)\, dA_s^F = \sum_{s\le t} \mathrm{sgn}(B_s - A_{s-}^F)\,\Delta A_s^F$$
$$= \sum_{s\le t} |\Delta A_s^F|$$
$$= V_t^F,$$

car $B_s = A_s^F$ lorsque s est un instant de saut du processus A^F. Ainsi,

$$|B_t - A_t^F| = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s - A_{s-}^F)\, dB_s - V_t^F + \lambda_t^0.$$

En comparant cette formule et celle de la Proposition 2.2.1, on en déduit le:

COROLLAIRE 2.2.2. *Lorsque le fermé F est discret, le processus L^F représente le temps local symétrique en 0 de la semi-martingale $B - A^F$.*

3. Le passage du cas discret au cas général. Dans cette partie, nous cherchons à étendre au cas général les résultats de la deuxième partie. Pour cela, nous allons obtenir une formule analogue à la formule “de Tanaka” de la Section 2.2, et valable pour tout fermé F.

3.1. *La formule générale pour la semi-martingale $B - A^F$.* L’objet de cette section est d’obtenir le:

THÉORÈME 3.1.1. *On a presque sûrement, pour tout instant $t \in \mathbb{R}_+$,*

$$|B_t - A_t^F| = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s - A_{s-}^F)\, dB_s - V_t^F + L_t^F,$$

où V^F est un processus croissant càdlàg. De plus, le processus A^F est un processus purement de sauts, dont la variation totale sur l’intervalle $[0, t]$ est inférieure ou égale à V_t^F.

DÉMONSTRATION. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés discrets contenant 0, inclus dans F, tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la distance de tout point de F au fermé F_n soit majorée par 2^{-n}.

D’après la Proposition 2.2.1 on a presque sûrement, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$|B_t - A_t^{F_n}| = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s - A_{s-}^{F_n})\, dB_s - V_t^{F_n} + L_t^{F_n},$$

où $V_t^{F_n}$ est la variation totale du processus A^{F_n} sur l’intervalle $[0, t]$. Pour $t \in \mathbb{R}_+$ fixé, étudions le comportement de chaque terme de cette égalité, quand $n \to +\infty$:

(a) On a $L_t^{F_n} \to L_t^F$ presque sûrement, par continuité de $x \mapsto L_t^x$. Il y a aussi convergence dans $L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ à cause des inégalités $0 \le L_t^{F_n} \le L_t^*$, où $L_t^* = \sup_{x\in\mathbb{R}} L_t^x$.

(b) Sur l’événement “A_t^F est le seul point de F le plus visité à l’instant t” (et donc presque sûrement), on a $A_t^{F_n} \to A_t^F$. En effet, pour $\alpha > 0$, on a sur cet événement

$$L_t^{F \setminus]A_t^F - \alpha,\, A_t^F + \alpha[} < L_t^F,$$

donc, à partir d'un certain rang,

$$L_t^{F\setminus]A_t^F-\alpha,\, A_t^F+\alpha[} < L_t^{F_n},$$

d'où, comme $F_n \subset F$,

$$A_t^{F_n} \in]A_t^F - \alpha, A_t^F + \alpha[.$$

Cela montre la convergence presque sûre de la suite $(A_t^{F_n})_{n\in\mathbb{N}}$ vers A_t^F. On en déduit la convergence presque sûre et dans $L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ de $(|B_t - A_t^{F_n}|)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $|B_t - A_t^F|$, en vertu des inégalités $|B_t - A_t^{F_n}| \leq 2B_t^*$, où $B_t^* = \sup_{s\in[0,t]} |B_s|$.

(c) On a $\int_0^t \text{sgn}(B_s - A_{s-}^{F_n})\, dB_s \to \int_0^t \text{sgn}(B_s - A_{s-}^F) dB_s$ dans $L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$. En effet,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t [\text{sgn}(B_s - A_{s-}^{F_n}) - \text{sgn}(B_s - A_{s-}^F)]\, dB_s\Big)^2\Big] \\
&= \mathbb{E}\int_0^t [\text{sgn}(B_s - A_s^{F_n}) - \text{sgn}(B_s - A_s^F)]^2\, ds \\
&\to 0,
\end{aligned}$$

d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue puisqu'on a pour tout instant $s > 0$: $A_s^{F_n} \to A_s^F$ presque sûrement et $B_s \neq A_s^F$ presque sûrement, d'après la Proposition 1.3.1.

(d) Par convergence des trois autres termes de l'égalité, on a $V_t^{F_n} \to V_t^F$ dans $L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$, où

$$V_t^F = -|B_t - A_t^F| + \int_0^t \text{sgn}(B_s - A_{s-}^F)\, dB_s + L_t^F.$$

Il reste à établir les propriétés du processus V^F défini par cette égalité. On voit immédiatement que le processus V^F est càdlàg. Par ailleurs les processus $V^{F_n} + A^{F_n}$ et $V^{F_n} - A^{F_n}$ étant croissants, on en déduit facilement que les processus $(V_t^F + A_t^F)_{t\in\mathbb{Q}_+}$ et $(V_t^F - A_t^F)_{t\in\mathbb{Q}_+}$ sont presque sûrement croissants, et donc que les processus $V^F + A^F$ et $V^F - A^F$ sont presque sûrement croissants, par continuité à droite. Cela prouve à la fois que V^F est croissant, que A^F est à variation localement bornée et que V^F majore la variation totale de A^F. Le fait que le processus A^F est à variation localement bornée et que son image est de mesure nulle (d'après le Corollaire 1.4.2) entraîne que le processus A^F est purement de sauts (voir par exemple le théorème 2.10.13 de [7]) et la Remarque 2.10.14. Le théorème est donc démontré.

Grâce au théorème, nous allons montrer un résultat qui est l'analogue de la formule classique:

$$L_t^0 = \max_{s\in[0,t]} (-\widehat{B}_s) \quad \text{où} \quad \widehat{B}_\cdot = \int_0^\cdot \text{sgn}(B_s)\, dB_s.$$

COROLLAIRE 3.1.2. *Presque sûrement, pour tout instant $t \in \mathbb{R}_+$,*

$$L_t^F = \sup_{s\in[0,t]} (V_s^F - \widehat{B}_s^F) \quad \textit{où} \quad \widehat{B}_\cdot^F = \int_0^\cdot \text{sgn}(B_s - A_{s-}^F)\, dB_s.$$

DÉMONSTRATION. (a) L'inégalité $L_t^F \geq \sup_{s\in[0,t]}(V_s^F - \widehat{B}_s^F)$ vient de ce que l'on a, pour $s \in [0,t]$,

$$V_s^F - \widehat{B}_s^F = L_s^F - |B_s - A_s^F| \leq L_s^F \leq L_t^F.$$

(b) Par ailleurs, l'instant $g(t)$ appartient à l'intervalle $[0,t]$ et

$$V_{g(t)}^F - \widehat{B}_{g(t)}^F = L_{g(t)}^F - |B_{g(t)} - A_{g(t)}^F| = L_{g(t)}^F = L_t^F,$$

ce qui prouve que la borne supérieure est atteinte et qu'elle vaut L_t^F.

REMARQUE 3.1.3. Dans l'égalité de processus,

$$|B - A^F| = \int_0^{\cdot} \operatorname{sgn}(B_s - A_{s-}^F)\, dB_s - V^F + L^F,$$

écrivons que les deux membres ont le même saut à l'instant t. Par continuité de l'intégrale stochastique et de L^F, nous obtenons

$$\Delta|B - A^F|_t = -\Delta V_t^F.$$

Or à cause de la propriété *(d)* du processus A^F, on montre comme dans la Section 2.2 que

$$\Delta|B - A^F|_t = -|\Delta A^F|_t.$$

Ainsi,

$$\Delta V_t^F = |\Delta A_t^F|.$$

Cela montre que le processus V^F et la variation totale de A^F ont les mêmes sauts.

3.2. *La formulation en termes de temps locaux.* Dans cette section, nous donnons quelques conséquences du Théorème 3.1.1 sur les temps locaux de la semi-martingale $B - A^F$. Une première conséquence est la continuité des temps locaux vis-à-vis de la variable d'espace. A posteriori, il n'y a donc pas lieu de distinguer le temps local en x_-, en x_+, et le temps local symétrique au point x.

En fait, comme les temps locaux sont continus et croissants vis-à-vis de la variable de temps, nous pouvons énoncer:

PROPOSITION 3.2.1. *Les temps locaux de la semi-martingale $B - A^F$ sont continus conjointement en les deux variables.*

En effet, d'après [17], si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une semi-martingale càdlàg vérifiant à tout instant $t > 0$ la condition $\sum_{s\leq t} |\Delta X_s|$ presque sûrement, la différence de ses temps locaux en x_+ et en x_- est donnée par la formule

$$\lambda_t^{x_+}(X) - \lambda_t^{x_-}(X) = 2\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s = x\}}\, dY_s,$$

où $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est la partie à variation bornée de la semi-martingale continue $(X_t - \sum_{s\leq t}\Delta X_s)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Dans le cas qui nous intéresse, on a $X = B - A^F$, d'où $Y = 0$ car le processus A^F est purement de sauts.

Une autre conséquence concerne le temps local en 0 de la semi-martingale $B - A^F$. On montre de la même façon que dans la Section 2.2, en utilisant la propriété *(d)* du processus A^F (voir Corollaire 1.2.2), que la formule de Tanaka donnant le temps local (symétrique) en 0 de la semi-martingale $B - A^F$ s'écrit

$$|B_t - A_t^F| = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s - A_{s-}^F)\,dB_s - \sum_{s\leq t}|\Delta A_s^F| + \lambda_t^0.$$

En comparant cette égalité avec celle du théorème précédent, on obtient

$$L_t^F = \lambda_t^0 + V_t^F - \sum_{s\leq t}|\Delta A_s^F|,$$

soit à cause de la remarque précédente,

$$L_t^F = \lambda_t^0 + V_t^F - \sum_{s\leq t}\Delta V_s^F,$$

ce qui prouve le:

COROLLAIRE 3.2.2. *Presque sûrement, le processus croissant L^F majore le temps local en 0 de la semi-martingale $B - A^F$, et il y a équivalence entre les assertions suivantes:*

(i) *L^F est égal au temps local en 0 de la semi-martingale $B - A^F$;*
(ii) *V^F est un processus de sauts;*
(iii) *V^F est la variation totale du processus A^F.*

Nous terminons cette partie par la:

CONJECTURE. *Les assertions* (i), (ii) *et* (iii) *sont vraies*.

Nous allons démontrer cette conjecture dans le cas où $F = \mathbb{R}$, en prouvant l'assertion (i).

4. L'égalité $\boldsymbol{\lambda}_t^0 = L_t^F$ dans le cas où $F = \mathbb{R}$. Dans cette partie et dans les suivantes, nous nous intéressons au cas où $F = \mathbb{R}$. Nous noterons, suivant l'usage, $L_t^* = \sup_{x\in\mathbb{R}} L_t^x$ au lieu de $L_t^{\mathbb{R}}$. Les processus $A^{\mathbb{R}}$ et $V^{\mathbb{R}}$, définis aux Sections 1.2 et 3.1, seront notés plus simplement A et V.

4.1. *Explication de la démarche suivie.* L'objet de cette partie est de prouver le:

THÉORÈME 4.1.1. (a) *Le processus (L_t^*) représente le temps local en 0 de la semi-martingale $(B_t - A_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.*

(b) $(V_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est un processus de sauts.*
(c) $(V_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est la variation totale du processus* $(A_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

D'après la section précédent, il suffit de prouver le premier point de ce théorème. Comme nous savons déjà que, presque sûrement pour tout instant $t \in \mathbb{R}_+$, $L_t^* \geq \lambda_t^0$, il suffit de montrer l'inégalité $\mathbb{E}\lambda_T^0 \geq \mathbb{E}L_T^*$ pour un temps T exponentiel d'espérance 2 indépendant du mouvement brownien B.

L'intérêt de considérer un tel temps T est que l'on connaît la loi conjointe de B_T et du processus $(L_T^x)_{x\in\mathbb{R}}$ grâce au théorème de Ray ([3] ou [12]), ainsi que la loi de L_T^* grâce à la formule de Borodin [4] (qui est d'ailleurs une conséquence du théorème de Ray):

$$P[L_T^* \geq l] = \frac{4le^l}{(e^l-1)^2}\frac{I_1(l/2)}{I_0(l/2)} \quad \text{pour } l \in \mathbb{R}_+$$

où I_0 et I_1 sont les fonctions de Bessel modifiées d'indice 0 et 1.

La formule de Borodin nous fournit une expression du deuxième membre de l'inégalité à démontrer

$$\mathbb{E}L_T^* = \int_0^{+\infty} \frac{4le^l}{(e^l-1)^2}\frac{I_1(l/2)}{I_0(l/2)}\,dl.$$

Pour le premier membre $\mathbb{E}\lambda_T^0$, nous remarquerons à la Section 4.2 qu'il est égal au double de la densité en 0 de la variable aléatoire $B_T - A_T$, ou encore de la variable aléatoire A_T.

Pour estimer cette densité, nous exprimons, dans la Section 4.3, $P[|A_T|\leq\varepsilon; |B_T| > \varepsilon]$ à l'aide de la loi conditionnelle du quadruplet $(L_T^{-\varepsilon}, L_T^{[-\varepsilon,0]}, L_T^{\varepsilon}, L_T^{[0,\varepsilon]})$ sachant L_T^0. Puis, à la Section 4.4, nous minorons la quantité $\mathbb{E}\lambda_T^0 = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon^{-1} P[|A_T| \leq \varepsilon]$ à l'aide de l'expression précédente, en montrant la convergence en loi du quadruplet $(L_T^{-\varepsilon}, L_T^{[-\varepsilon,0]}, L_T^{\varepsilon}, L_T^{[0,\varepsilon]})$ convenablement normalisé. Nous obtenons de cette manière l'inégalité voulue $\mathbb{E}\lambda_T^0 \geq \mathbb{E}L_T^*$ (qui est en fait une égalité).

4.2. *Le passage de $\mathbb{E}\lambda_T^0$ à la densité en 0 de la variable aléatoire $B_T - A_T$.* D'après la formule de densité d'occupation,

$$\lambda_T^0 = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}((1/2\varepsilon)\int_0^T \mathbb{1}_{\{|B_s-A_s|\leq\varepsilon\}}\,ds.$$

En admettant provisoirement l'uniforme intégrabilité de la famille de variables aléatoires $((1/2\varepsilon)\int_0^T \mathbb{1}_{\{|B_s-A_s|\leq\varepsilon\}}\,ds)_{\varepsilon>0}$, on a donc

$$\mathbb{E}\lambda_T^0 = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\varepsilon}\mathbb{E}\int_0^T \mathbb{1}_{\{|B_s-A_s|\leq\varepsilon\}}\,ds.$$

Or, comme T est indépendant du mouvement brownien B et de loi exponentielle d'espérance 2, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int_0^T \mathbb{1}_{\{|B_s-A_s|\le\varepsilon\}}\,ds &= \mathbb{E}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^t \mathbb{1}_{\{|B_s-A_s|\le\varepsilon\}}\,ds\right)\frac{e^{-t/2}}{2}\,dt\\ &= \int_0^{+\infty} P[|B_s-A_s|\le\varepsilon]\left(\int_s^{+\infty}\frac{e^{-t/2}}{2}\,dt\right)ds\\ &= 2P\big[|B_T-A_T|\le\varepsilon\big].\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}\lambda_T^0 = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}P\big[|B_T-A_T|\le\varepsilon\big].$$

Montrons maintenant l'uniforme intégrabilité des variables

$$\left((1/2\varepsilon)\int_0^T \mathbb{1}_{\{|B_s-A_s|\le\varepsilon\}}\,ds\right)_{\varepsilon>0}.$$

La démonstration qui suit est plus simple que celle que je donnais dans [10]. Elle m'a été suggérée par Marc Yor, que je remercie. Elle reprend des majorations plus générales qu'il a effectuées dans [17] et utilise la “formule de Tanaka” du Théorème 3.1.1. On écrit

$$\left(\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^T \mathbb{1}_{\{|B_s-A_s|\le\varepsilon\}}\,ds\right)^2 = \left(\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\lambda_T^x\,dx\right)^2 \le \frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}(\lambda_T^x)^2\,dx.$$

Or:

$$\begin{aligned}\lambda_T^x &\le |B_T-A_T-x|-|x|-\int_0^T \operatorname{sgn}(B_s-A_{s-}-x)\,d(B_s-A_s)\\ &\le |B_T-A_T|-\int_0^T \operatorname{sgn}(B_s-A_{s-}-x)\,dB_s+V_T\\ &= L_T^*+\int_0^T\big(\operatorname{sgn}(B_s-A_{s-})-\operatorname{sgn}(B_s-A_{s-}-x)\big)\,dB_s,\end{aligned}$$

car V majore la variation totale de A, et d'après la formule du Théorème 3.1.1. Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\lambda_T^{x\;2}] &\le 2\left(\mathbb{E}[L_T^{*2}]+\mathbb{E}\left[\int_0^T\big(\operatorname{sgn}(B_s-A_{s-})-\operatorname{sgn}(B_s-A_{s-}-x)\big)^2\,ds\right]\right)\\ &\le 4(\mathbb{E}[L_1^{*2}]+4),\end{aligned}$$

car $\mathbb{E}T=2$. Ainsi,

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^T \mathbb{1}_{\{|B_s-A_s|\le\varepsilon\}}\,ds\right)^2\right] \le 4(\mathbb{E}[L_1^{*\;2}]+4) < +\infty.$$

REMARQUE 4.2.1. Comme le temps T est indépendant du mouvement brownien B, le processus $(B_T - B_{T-t})_{t\in[0,T]}$ est un mouvement brownien issu de 0 et tronqué à l'instant T, et presque sûrement, $B_T - A_T$ est son seul point le plus visité à l'instant T. Il y a donc identité en loi entre $B_T - A_T$ et A_T, ce qui permet d'écrire

$$\mathbb{E}\lambda_T^0 = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} P\big[|B_T - A_T| \le \varepsilon\big] = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} P\big[|A_T| \le \varepsilon\big].$$

Cette dernière égalité sera plus commode à utiliser pour minorer $\mathbb{E}\lambda_T^0$.

4.3. *Calcul de $P[|A_T| \le \varepsilon; |B_T| > \varepsilon]$.* Le calcul repose sur le théorème de Ray [12]. Nous rappelons ici la formulation donnée par Biane et Yor [3], qui sera plus commode pour nous:

THÉORÈME (D. B. Ray). *Soit T un temps exponentiel d'espérance 2, indépendant du mouvement brownien B. Alors:*

(i) *Les variables aléatoires L_T^0 et B_T sont indépendantes et leur loi est donnée par*

$$P[L_T^0 \in dl] = \mathbb{1}_{\{l>0\}} e^{-l}\, dl \quad \text{et} \quad P[B_T \in db] = \tfrac{1}{2} e^{-|b|}\, db.$$

(ii) *Sachant $(L_T^0, B_T) = (l, b)$ avec $(l, b) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, le processus $(L_T^x)_{x\in\mathbb{R}}$ suit la loi $Q_{l,b}$ définie comme suit:*
$(L_T^x)_{x\in\mathbb{R}}$ est markovien inhomogène.
$(L_T^{-x})_{x\in\mathbb{R}_+}$ et $(L_T^x)_{x\ge b}$ sont des diffusions de générateur infinitésimal $2x(d^2/dx^2) - 2x(d/dx)$.
$(L_T^x)_{x\in[0,b]}$ est une diffusion de générateur infinitésimal $2x(d^2/dx^2) - 2x(d/dx) + 2(d/dx)$.

Dans ce qui suit, nous noterons Q_l et Q_l' la loi des diffusions issues de l, de générateur $2x(d^2/dx^2) - 2x(d/dx)$ et $2x(d^2/dx^2) - 2x(d/dx) + 2(d/dx)$. X désignera le processus canonique sur l'espace $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ou $\mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ suivant les cas. Ces notations étant fixées, nous pouvons commencer le calcul. Par symétrie, on a

$$\begin{aligned} P\big[|A_T| \le \varepsilon; |B_T| > \varepsilon\big] &= 2P\big[|A_T| \le \varepsilon; B_T > \varepsilon\big] \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-l}\, dl \int_\varepsilon^{+\infty} e^{-b}\, db\; Q_{l,b}\Big[\sup_{|x|\ge\varepsilon} X_x \le \sup_{|x|\le\varepsilon} X_x\Big], \end{aligned}$$

d'après le théorème de Ray. Or en utilisant le caractère markovien du processus $(X_x)_{x\in\mathbb{R}}$ sous la loi $Q_{l,b}$, on a pour $m_1 \ge l_1 \ge 0$, $m_2 \ge l_2 \ge 0$ et

$m = m_1 \vee m_2$,

$$\begin{aligned}
&Q_{l,b}\Big[\sup_{|x|\geq\varepsilon} X_x \leq \sup_{|x|\leq\varepsilon} X_x \Big| \Big(X_{-\varepsilon}, \sup_{-\varepsilon\leq x\leq 0} X_x, X_\varepsilon, \sup_{0\leq x\leq\varepsilon} X_x\Big) = (l_1, m_1, l_2, m_2)\Big]\\
&\quad = Q_{l_1}\Big[\sup_{t\geq 0} X_t \leq m\Big]\, Q'_{l_2}\Big[\sup_{0\leq t\leq b-\varepsilon} X_t \leq m; Q_{X_{b-\varepsilon}}\Big[\sup_{t\geq 0} X_t \leq m\Big]\Big]\\
&\quad = \frac{e^m - e^{l_1}}{e^m - 1}\, Q'_{l_2}\Big[\sup_{0\leq t\leq b-\varepsilon} X_t \leq m; \frac{e^m - e^{X_{b-\varepsilon}}}{e^m - 1}\Big].
\end{aligned}$$

Pour la dernière égalité, on a utilisé le fait que sous la loi Q_l, le processus $(e^{X_t})_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale locale issue de e^l et piégée lorsqu'elle atteint 1. Ainsi, pour $m > l$ l'événement $\{\sup_{t\geq 0} X_t < m\}$ est presque sûrement égal à l'événement,

le processus $(e^{X_t})_{t\in\mathbb{R}_+}$ atteint 1 avant d'atteindre e^m

et a donc pour probabilité $(e^m - e^l)/(e^m - 1)$.

On vérifie assez facilement (voir Section 4.5) que, sous la loi Q'_{l_2}, le processus

$$\Big(X_t, \sup_{s\leq t} X_s\Big)_{t\in\mathbb{R}_+}$$

est un processus de Feller issu de (l_2, l_2), à valeurs dans l'ensemble

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq y\}.$$

Soit $(P_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ son semi-groupe. En notant f_m l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f_m(x, y) = \frac{e^m - e^x}{e^m - 1}\, \mathbb{1}_{\{y\leq m\}},$$

nous avons ainsi:

$$\begin{aligned}
&Q_{l,b}\Big[\sup_{|x|\geq\varepsilon} X_x \leq \sup_{|x|\leq\varepsilon} X_x \Big| \Big(X_{-\varepsilon}, \sup_{-\varepsilon\leq x\leq 0} X_x, X_\varepsilon, \sup_{0\leq x\leq\varepsilon} X_x\Big) = (l_1, m_1, l_2, m_2)\Big]\\
&\quad = \frac{e^m - e^{l_1}}{e^m - 1} P_{b-\varepsilon} f_m(l_2, l_2).
\end{aligned}$$

Notons $\mu_{l,\varepsilon}$ et $\mu'_{l,\varepsilon}$ la loi du couple $(X_\varepsilon, \sup_{0\leq x\leq\varepsilon} X_x)$ sous Q_l et Q'_l. Pour $l \geq 0$ et $b \geq \varepsilon$, la loi du quadruplet $(X_{-\varepsilon}, \sup_{-\varepsilon\leq x\leq 0} X_x, X_\varepsilon, \sup_{0\leq x\leq\varepsilon} X_x)$ est donc $\mu_{l,\varepsilon} \otimes \mu'_{l,\varepsilon}$. En notant toujours $m = m_1 \vee m_2$ pour alléger les expressions, on a ainsi

$$\begin{aligned}
&P[|A_T| \le \varepsilon; |B_T| > \varepsilon] \\
&\quad = \int_0^{+\infty} e^{-l}\,dl \int_\varepsilon^{+\infty} e^{-b}\,db \int_E\int_E \mu_{l,\varepsilon}(dl_1 \times dm_1)\mu'_{l,\varepsilon}(dl_2 \times dm_2) \\
&\qquad\qquad \times \frac{e^m - e^{l_1}}{e^m - 1} P_{b-\varepsilon} f_m(l_2, l_2) \\
&\quad = e^{-\varepsilon} \int_0^{+\infty} e^{-l}\,dl \int_E\int_E \mu_{l,\varepsilon}(dl_1 \times dm_1)\mu'_{l,\varepsilon}(dl_2 \times dm_2) \\
&\qquad\qquad \times \frac{e^m - e^{l_1}}{e^m - 1} g_m(l_2, l_2),
\end{aligned}$$

où g_m est l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par

$$g_m(x, y) = \int_0^{+\infty} P_t f_m(x, y) e^{-t}\,dt \quad \text{pour } y \ge x \ge 0.$$

Le calcul de g_m fait intervenir la résolvante du semi-groupe $(P_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Nous le détaillerons dans la Section 4.5. Pour ne pas perdre le fil conducteur de la démonstration, nous admettons pour l'instant la formule

$$g_m(l, l) = \frac{1}{e^m - 1}\left(e^l + e^m - 2e^m \frac{S(l)}{S(m)}\right) \quad \text{pour } m \ge l \ge 0,$$

où $S(z) = \exp(z/2) I_0(z/2)$ pour $z \in \mathbb{C}$. On a ainsi

$$\begin{aligned}
&P[|A_T| \le \varepsilon; |B_T| > \varepsilon] \\
&\quad = e^{-\varepsilon} \int_0^{+\infty} e^{-l}\,dl \int_E\int_E \mu_{l,\varepsilon}(dl_1 \times dm_1)\mu'_{l,\varepsilon}(dl_2 \times dm_2) F(l_1, m_1, l_2, m_2)
\end{aligned}$$

avec pour $m_1 \ge l_1 \ge 0$ et $m_2 \ge l_2 \ge 0$,

$$F(l_1, m_1, l_2, m_2) = \frac{S(l_2)}{(e^m - 1)^2}(e^m - e^{l_1})\left(\frac{e^{l_2} + e^m}{S(l_2)} - \frac{2e^m}{S(m)}\right),$$

où $m = m_1 \vee m_2$.

4.4. *Application à la minoration de* $\mathbb{E}\lambda_T^0$. Comme les calculs sont assez techniques, nous reportons dans les sections suivantes ceux qui ne sont pas indispensables pour comprendre l'idée de la démonstration.

D'après les sections précédentes, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\lambda_T^0 &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} P[|A_T| \le \varepsilon] \\
&\ge \liminf_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} P[|A_T| \le \varepsilon; |B_T| > \varepsilon] \\
&= \liminf_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{+\infty} e^{-l}\,dl \int_E\int_E \mu_{l,\varepsilon}(dl_1 \times dm_1) \\
&\qquad\qquad \times \mu'_{l,\varepsilon}(dl_2 \times dm_2) F(l_1, m_1, l_2, m_2).
\end{aligned}$$

Écrivons pour $m_1 \geq l_1 \geq 0$ et $m_2 \geq l_2 \geq 0$;

$$\frac{1}{\varepsilon}F(l_1, m_1, l_2, m_2) = \frac{S(l_2)}{(e^m-1)^2}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{l_1}^{m} e^r\,dr \\ \times \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{l_2}^{m}\left(\frac{e^r(S'(r)-S(r))}{S(r)^2}+\frac{e^m S'(r)}{S(r)^2}\right)dr$$

avec $m = m_1 \vee m_2$, et effectuons le changement de variables

$$\begin{aligned} l_1 - l &= 2\sqrt{l\varepsilon}x_1, \\ m_1 - l &= 2\sqrt{l\varepsilon}y_1, \\ l_2 - l &= 2\sqrt{l\varepsilon}x_2, \\ m_2 - l &= 2\sqrt{l\varepsilon}y_2. \end{aligned}$$

En notant $D = \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ et $\nu_{l,\varepsilon}, \nu'_{l,\varepsilon}$ la loi de $1/(2\sqrt{l\varepsilon})\,(X_\varepsilon - l, \sup_{0\leq x\leq\varepsilon} X_x - l)$ sous Q_l, Q'_l, on a donc

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{+\infty} e^{-l}\,dl\int_E\int_E \mu_{l,\varepsilon}(dl_1\times dm_1)\mu'_{l,\varepsilon}(dl_2\times dm_2)F(l_1, m_1, l_2, m_2) \\ = \int_0^{+\infty} e^{-l}\,dl\int_D\int_D \nu_{l,\varepsilon}(dx_1\times dy_1)\nu'_{l,\varepsilon}(dx_2\times dy_2)G_{l,\varepsilon}(x_1, y_1, x_2, y_2)$$

avec pour $l > 0$, $\varepsilon > 0$, $(x_1, y_1) \in D$ et $(x_2, y_2) \in D$,

$$G_{l,\varepsilon}(x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{1}{\varepsilon}F(l+2\sqrt{l\varepsilon}x_1, l+2\sqrt{l\varepsilon}y_1, l+2\sqrt{l\varepsilon}x_2, l+2\sqrt{l\varepsilon}y_2).$$

En utilisant l'expression de $(1/\varepsilon)F(l_1, m_1, l_2, m_2)$ ci-dessus, on voit que

$$G_{l,\varepsilon}(x_1, y_1, x_2, y_2) \to G_{l,0}(x_1, y_1, x_2, y_2) \quad \text{lorsque } \varepsilon \downarrow 0,$$

où, en notant $y = y_1 \vee y_2$,

$$\begin{aligned} G_{l,0}(x_1, y_1, x_2, y_2) &= \frac{S(l)}{(e^l-1)^2}\sqrt{2l}(y-x_1)e^l \\ &\quad \times \sqrt{2l}(y-x_2)\frac{e^l(2S'(l)-S(l))}{S(l)^2} \\ &= \frac{4le^{2l}}{(e^l-1)^2}\left(\frac{2S'(l)}{S(l)}-1\right)(y-x_1)(y-x_2) \\ &= \frac{4le^{2l}}{(e^l-1)^2}\frac{I_1(l/2)}{I_0(l/2)}(y-x_1)(y-x_2), \end{aligned}$$

car, pour tout $z \in C$, $S(z)^2 = e^z I_0(z/2)^2$ et $I'_0(z) = I_1(z)$.

Or, nous avons (cela sera prouvé dans la Section 4.6) $\nu_{l,\varepsilon} \to \nu$ et $\nu'_{l,\varepsilon} \to \nu$ lorsque $\varepsilon \downarrow 0$ où ν désigne la loi de $(B_1, \sup_{s\in[0,1]} B_s)$. Par positivité des applications $G_{l,\varepsilon}$, cela entraîne (nous le justifierons précisément au Section 4.6) que

$$\begin{aligned}
\liminf_{\varepsilon\downarrow 0} \int_0^{+\infty} e^{-l}\,dl \int_D\int_D \nu_{l,\varepsilon}(dx_1\times dy_1)\nu'_{l,\varepsilon}(dx_2\times dy_2)G_{l,\varepsilon}(x_1,y_1,x_2,y_2)\\
\geq \int_0^{+\infty} e^{-l}\,dl \int_D\int_D \nu(dx_1\times dy_1)\nu(dx_2\times dy_2)\; G_{l,0}(x_1,y_1,x_2,y_2)\\
= C\int_0^{+\infty} \frac{4le^l}{(e^l-1)^2}\frac{I_1(l/2)}{I_0(l/2)}\,dl,
\end{aligned}$$

où $C=\int_D\int_D \nu(dx_1\times dy_1)\;\nu(dx_2\times dy_2)\;(y_1\vee y_2-x_1)(y_1\vee y_2-x_2)$.

Nous prouverons à la Section 4.7 que $C=1$. Ainsi, on a la chaîne d'inégalités

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\lambda_T^0 &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}P[|A_T|\leq\varepsilon]\\
&\geq \liminf_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}P[|A_T|\leq\varepsilon;|B_T|>\varepsilon]\\
&= \liminf_{\varepsilon\downarrow 0}\int_0^{+\infty} e^{-l}\,dl\int_D\int_D \nu_{l,\varepsilon}(dx_1\times dy_1)\nu'_{l,\varepsilon}(dx_2\times dy_2)G_{l,\varepsilon}(x_1,y_1,x_2,y_2)\\
&\geq \int_0^{+\infty}\frac{4le^l}{(e^l-1)^2}\frac{I_1(l/2)}{I_0(l/2)}\,dl\\
&= \mathbb{E}L_T^*,
\end{aligned}$$

d'après la Section 4.1. On a obtenu l'inégalité voulue, ce qui prouve le théorème moyennant les justifications et les calculs qui ont été reportés aux paragraphes suivants.

REMARQUE 4.4.1. Comme $\lambda_T^0\leq L_T^*$ presque sûrement, toutes les inégalités que nous venons d'écrire sont en fait des égalités. En particulier, on voit que

$$\frac{1}{\varepsilon}P[|A_T|\leq\varepsilon;|B_T|\leq\varepsilon]\to 0\quad\text{lorsque } \varepsilon\downarrow 0,$$

ce qui montre *a posteriori* que la minoration de $P[|A_T|\leq\varepsilon]$ par $P[|A_T|\leq\varepsilon;|B_T|>\varepsilon]$ était fine.

4.5. *Calcul de* $g_m(x,y)=\int_0^{+\infty}P_tf_m(x,y)e^{-t}\,dt$. Comme nous l'avons signalé à la Section 4.2, le calcul de g_m fait intervenir la résolvante du semi-groupe $(P_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ associé au processus $(X_t,\sup_{s\leq t}X_s)$ sous la loi Q'_x.

Pour établir que ce processus est markovien homogène on écrit que sachant $(X_{t_0},\sup_{s\leq t_0}X_s)=(x,y)$ où $(x,y)\in E$, le processus $(X_{t_0+t},\sup_{s\leq t}X_{t_0+s})_{t\in\mathbb{R}_+}$ est indépendant du processus $(X_t,\sup_{s\leq t}X_s)_{t\in[0,t_0]}$ et suit la loi $P^{(x,y)}$ du processus $(X_t,y\vee\sup_{s\leq t}X_s)_{t\in\mathbb{R}_+}$ sous Q'_x.

On vérifie enfin que le semi-groupe $(P_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est de Feller, ce qui permet d'utiliser son générateur infinitésimal pour le calcul de g_m. Son générateur infinitésimal $\mathscr{A}$ est donné par le:

LEMME 4.5.1. *Le domaine $\mathscr{D}_{\mathscr{A}}$ du générateur infinitésimal contient les applications $g\colon E \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, à support compact, telles que $\partial g/\partial y\,(x,x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Pour ces applications g, $\mathscr{A} g$ est donné par la formule*

$$\mathscr{A} g(x,y) = 2x\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) - 2x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + 2\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \quad \textit{pour } (x,y) \in E.$$

DÉMONSTRATION. Soit g vérifiant les conditions du lemme et soit f l'application définie par

$$f(x,y) = 2x\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) - 2x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + 2\frac{\partial g}{\partial x}(x,y).$$

En notant $(X_t, Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ le processus canonique de $\mathscr{C}(\mathbb{R}_+, E)$, il s'agit de montrer que le processus

$$\left(g(X_t,Y_t) - g(X_0,Y_0) - \int_0^t f(X_s,Y_s)\,ds\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$$

est une martingale sous les lois $P^{(x,y)}$.

Comme presque sûrement $Y_{\cdot} = Y_0 \vee \sup_{s\le \cdot} X_s$, le processus Y est croissant et n'augmente pas hors du fermé: $\{t \in \mathbb{R}_+ / X_t = Y_t\}$. À cause de la condition $\partial g/\partial y\,(x,x) = 0$, la formule d'Itô s'écrit ici:

$$g(X_t,Y_t) = g(X_0,Y_0) + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(X_s,Y_s)\,dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(X_s,Y_s)\,d\langle X,X\rangle_s.$$

Et comme le processus X admet pour générateur infinitésimal $2x(d^2/dx^2) - 2x(d/dx) + 2(d/dx)$, on a

$$g(X_t,Y_t) - g(X_0,Y_0) - \int_0^t f(X_s,Y_s)\,ds = \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(X_s,Y_s)[dX_s + 2X_s\,ds - 2\,ds],$$

ce qui montre que $g(X_{\cdot},Y_{\cdot}) - g(X_0,Y_0) - \int_0^{\cdot} f(X_s,Y_s)\,ds$ est une martingale. On a donc bien $g \in \mathscr{D}_{\mathscr{A}}$ et $\mathscr{A} g = f$.

Nous allons maintenant utiliser le lemme pour calculer

$$g_m(x,y) = \int_0^{+\infty} P_t f_m(x,y) e^{-t}\,dt.$$

Comme l'application f_m n'est pas continue, nous l'approchons par des applications $f_{m,\delta}$ définies pour $m > 0$ et $\delta > 0$ par:

$$f_{m,\delta}(x,y) = \frac{e^m - e^x}{e^m - 1}\psi_\delta(y-m) \quad \text{pour } (x,y) \in E,$$

où ψ_δ est une application de classe $\mathscr{C}^\infty$, décroissante, valant 1 sur $]-\infty, 0]$ et 0 sur $[\delta, +\infty[$. De cette façon, on a $f_{m,\delta} \in \mathscr{C}_0(E)$, donc l'application $g_{m,\delta}$ définie par $g_{m,\delta} = \int_0^{+\infty} P_t f_{m,\delta} e^{-t}\,dt$ appartient au domaine $\mathscr{D}_A$ du générateur infinitésimal et est l'unique solution de l'équation $g - \mathscr{A} g = f_{m,\delta}$ d'inconnue $g \in \mathscr{C}_0(E)$.

Cherchons si cette équation a une solution vérifiant les conditions du lemme. Si g est une telle solution, on a pour tout $(x, y) \in E$,

$$2x\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) - 2x\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + 2\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - g(x, y) = \frac{e^x - e^m}{e^m - 1}\psi_\delta(y - m).$$

Pour $y \in \mathbb{R}_+$ fixé, on voit que l'application $x \mapsto g(x, y)$ est solution sur l'intervalle $[0, y]$ d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre. On vérifie facilement que l'application $x \mapsto (e^x + e^m)/(e^m - 1)\psi_\delta(y - m)$ est une solution particulière. Étudions l'équation homogène associée:

$$2xu'' - 2xu' + 2u' - u = 0.$$

La recherche des solutions développables en série entière en voisinage de 0 fournit une droite vectorielle de solutions: ce sont les multiples de S, où

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{(1 \cdot 2 \cdots n)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

Cette série entière a un rayon de convergence égal à $+\infty$. On vérifie par une méthode de variation des constantes que ces solutions sont les seules solutions de l'équation homogène se prolongeant par continuité en 0.

D'après ce qui précède, si g est une solution de l'équation $g - \mathscr{A}g = f_{m,\delta}$ vérifiant les conditions du lemme, alors g est de la forme

$$g(x, y) = \varphi_m(x)\psi_\delta(y - m) + S(x)c(y),$$

où $\varphi_m(x) = (e^x + e^m)/(e^m - 1)$ et c est une application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On doit avoir en outre, pour $x \in \mathbb{R}_+$,

$$0 = \frac{\partial g}{\partial y}(x, x) = \varphi_m(x)\psi'_\delta(x - m) + S(x)c'(x),$$

c'est-à-dire ,

$$c'(x) = -\psi'_\delta(x - m)\frac{\varphi_m(x)}{S(x)}.$$

Par ailleurs, il faut que g soit à support compact, ce qui équivaut, compte tenu de ce que $\psi_\delta(y - m) = 0$ pour $y \geq m + \delta$, à la condition

$$c(y) = 0 \text{ pour } y \text{ assez grand.}$$

On doit ainsi avoir

$$c(y) = \int_y^{+\infty} \psi'_\delta(z - m)\frac{\varphi_m(z)}{S(z)}\,dz \quad \text{pour } y \in \mathbb{R}_+,$$

d'où

$$g(x, y) = \varphi_m(x)\psi_\delta(y - m) + S(x)\int_y^{+\infty} \psi'_\delta(z - m)\frac{\varphi_m(z)}{S(z)}\,dz \quad \text{pour } (x, y) \in E.$$

On vérifie facilement que cette formule définit bien une application g vérifiant les conditions du lemme et telle que $g - \mathscr{A}g = f_{m,\delta}$. Par unicité de la solution de l'équation $g - \mathscr{A} g = f_{m,\delta}$, g n'est autre que l'application $g_{m,\delta}$, ce qui prouve la formule

$$g_{m,\delta}(x,y) = \varphi_m(x)\psi_\delta(y-m) + S(x)\int_y^{+\infty} \psi'_\delta(z-m)\frac{\varphi_m(z)}{S(z)}\,dz \quad \text{pour } (x,y)\in E.$$

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\begin{aligned} g_m(x,y) &= \lim_{\delta\downarrow 0} g_{m,\delta}(x,y) \\ &= \varphi_m(x)\,\mathbb{1}_{\{y\le m\}} + S(x)\,\mathbb{1}_{\{y\le m\}}\left(\frac{-\varphi_m(m)}{S(m)}\right), \end{aligned}$$

car $-\psi'_\delta(\cdot - m)$ tend vers la masse de Dirac au point m quand $\delta \downarrow 0$. Ainsi, pour $m > 0$ et $(x,y)\in E$,

$$g_m(x,y) = \frac{S(x)}{e^m - 1}\,\mathbb{1}_{\{y\le m\}}\left(\frac{e^x + e^m}{S(x)} - \frac{2e^m}{S(m)}\right).$$

REMARQUE 4.5.2. Le lecteur familier des fonctions de Kummer s'apercevra que $S(x) = M(1/2, 1, x) = \exp(x/2) I_0(x/2)$, où $M(1/2,1,\cdot)$ est la fonction de Kummer de paramètres 1/2 et 1, et I_0 la fonction de Bessel modifiée d'indice 0. Le lecteur novice pourra consulter [1] au Chapitre 13 et plus particulièrement la formule 13.63. Il pourra aussi se contenter du changement de fonction inconnue $u(x) = \exp(x/2)v(x/2)$ dans l'équation différentielle $2xu'' - 2xu' + 2u' - u = 0$ pour trouver que v est solution de l'équation de Bessel modifiée d'indice 0.

4.6. *Justification des passages à la limite de la Section* 4.4.

Convergence des lois $\nu_{l,\varepsilon}$ et $\nu'_{l,\varepsilon}$ quand $\varepsilon \downarrow 0$. Montrons que la loi $\nu_{l,\varepsilon}$ de $1/(2\sqrt{l\varepsilon})\,(X_\varepsilon - l, \sup_{s\le\varepsilon} X_s - l)$ sous Q_l tend vers la loi ν de $(B_1, \sup_{s\le 1} B_s)$ quand $\varepsilon\downarrow 0$. On prouverait de la même façon que $\nu'_{l,\varepsilon}\to\nu$.

Je remercie Marc Yor de m'avoir suggéré la démonstration qui suit, plus simple que celle que je donnais initialement dans [10].

$(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ étant le processus canonique sur $\mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, on pose pour $\varepsilon > 0$ et $t\ge 0$,

$$Y_t^\varepsilon = \frac{X_{\varepsilon t} - l}{2\sqrt{l\varepsilon}}, \quad \text{c'est-à-dire ,} \quad X_{\varepsilon t} = l + 2\sqrt{l\varepsilon}\,Y_t^\varepsilon.$$

On commence par remarquer que sous la probabilité Q_l, le processus Y^ε a même limite en loi quand $\varepsilon\downarrow 0$ que le processus Z^ε, où

$$Z_t^\varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{l\varepsilon}}\left(X_{\varepsilon t} - l + \int_0^{\varepsilon t} 2X_s\,ds\right).$$

Or, pour $\varepsilon > 0$, Z^ε est une martingale locale continue issue de 0, dont la variation quadratique s'écrit

$$\langle Z^\varepsilon, Z^\varepsilon\rangle_t = \frac{1}{4l\varepsilon}\int_0^{\varepsilon t} 4X_s\,ds.$$

Comme on a presque sûrement,

$$\langle Z^\varepsilon, Z^\varepsilon\rangle_t \to t \quad \text{quand } \varepsilon \downarrow 0, \text{pour tout } t \in \mathbb{R}_+,$$

on en déduit que le processus Z^ε converge en loi vers le mouvement brownien B grâce à un théorème de convergence en loi pour les martingales (voir [13] au Chapitre XIII, Exercice 1.16).

Limite des intégrales. L'autre point à justifier est l'inégalité

$$\liminf_{\varepsilon\downarrow 0} \int_0^{+\infty} e^{-l}\, dl \int_D \int_D \nu_{l,\varepsilon}(dx_1 \times dy_1)\, \nu'_{l,\varepsilon}(dx_2 \times dy_2)\, G_{l,\varepsilon}(x_1, y_1, x_2, y_2)$$
$$\geq \int_0^{+\infty} e^{-l}\, dl \int_D \int_D \nu(dx_1 \times dy_1)\nu(dx_2 \times dy_2)\, G_{l,0}(x_1, y_1, x_2, y_2).$$

Nous savons déjà que pour $l > 0$,

$$\nu_{l,\varepsilon} \to \nu \quad \text{comme } \varepsilon \downarrow 0, \qquad \nu'_{l,\varepsilon} \to \nu \quad \text{comme } \varepsilon \downarrow 0$$

et

$$G_{l,\varepsilon} \to G_{l,0} \quad \text{comme } \varepsilon \downarrow 0, \text{ simplement sur } D \times D.$$

L'idée est d'utiliser le lemme de Fatou, car les applications $G_{l,\varepsilon}$ sont positives. Pour cela, on pose pour $l > 0$ et $\eta > 0$,

$$H_{l,\eta} = \inf_{0\leq\varepsilon\leq\eta} G_{l,\varepsilon},$$

et on écrit que comme $G_{l,\varepsilon} \geq H_{l,\eta}$ pour $\varepsilon \leq \eta$, on a pour $\eta > 0$ fixé,

$$\liminf_{\varepsilon\downarrow 0} \int_D \int_D \nu_{l,\varepsilon}(dx_1 \times dy_1)\, \nu'_{l,\varepsilon}(dx_2 \times dy_2) G_{l,\varepsilon}(x_1, y_1, x_2, y_2)$$
$$\geq \liminf_{\varepsilon\downarrow 0} \int_D \int_D \nu_{l,\varepsilon}(dx_1 \times dy_1)\nu'_{l,\varepsilon}(dx_2 \times dy_2) H_{l,\eta}(x_1, y_1, x_2, y_2)$$
$$\geq \int_D \int_D \nu(dx_1 \times dy_1)\nu(dx_2 \times dy_2) H_{l,\eta}(x_1, y_1, x_2, y_2)$$

car l'application $H_{l,\eta}$ est *continue* positive.

En effet, pour $l > 0$, l'application $(\varepsilon, x_1, y_1, x_2, y_2) \mapsto G_{l,\varepsilon}(x_1, y_1, x_2, y_2)$ est continue par rapport à l'ensemble des cinq variables, ce qui se voit en écrivant pour $\varepsilon \geq 0$, $(x_1, y_1) \in D$ et $(x_2, y_2) \in D$

$$G_{l,\varepsilon}(x_1, y_1, x_2, y_2)$$
$$= \frac{S(l + 2\sqrt{l\varepsilon}x_2)}{(\exp(l + 2\sqrt{l\varepsilon}y) - 1)^2} \int_{x_1}^{y} \exp(l + 2\sqrt{l\varepsilon}z) 2\sqrt{l}\, dz$$
$$\times \int_{x_2}^{y} \frac{\exp(l+2\sqrt{l\varepsilon}z)(S'-S)(l+2\sqrt{l\varepsilon}z) + \exp(l+2\sqrt{l\varepsilon}y) S'(l+2\sqrt{l\varepsilon}z)}{S(l+2\sqrt{l\varepsilon}z)^2}$$
$$\times 2\sqrt{l}\, dz$$

avec $y = y_1 \vee y_2$. Par conséquent, la famille d'applications $(G_{l,\varepsilon})_{\varepsilon\in[0,\eta]}$ est *équicontinue*, ce qui entraîne la continuité de $H_{l,\eta}$.

En faisant tendre η vers 0 dans l'inégalité précédente, on obtient par le théorème de Beppo Levi,

$$\begin{aligned}\liminf_{\varepsilon\downarrow 0}\int_D\int_D \nu_{l,\varepsilon}(dx_1\times dy_1)\nu'_{l,\varepsilon}(dx_2\times dy_2)G_{l,\varepsilon}(x_1,y_1,x_2,y_2)\\ \geq \int_D\int_D \nu(dx_1\times dy_1)\nu(dx_2\times dy_2)G_{l,0}(x_1,y_1,x_2,y_2),\end{aligned}$$

puisque $H_{l,\eta}\uparrow G_{l,0}$ lorsque $\eta\downarrow 0$, et l'inégalité voulue s'obtient à partir de cette dernière en appliquant le lemme de Fatou.

4.7. *Calcul de la constante C.* On a

$$\begin{aligned}C &= \int_D\int_D \nu(dx_1\times dy_1)\ \nu(dx_2\times dy_2)(y_1\vee y_2-x_1)(y_1\vee y_2-x_2)\\ &= \mathbb{E}[(S_1\vee S'_1-B_1)(S_1\vee S'_1-B'_1)],\end{aligned}$$

où B' est un mouvement brownien indépendant de B et pour $t\geq 0$,

$$S_t=\sup_{0\leq s\leq t} B_s,\qquad S'_t=\sup_{0\leq s\leq t} B'_s.$$

En développant le produit $(S_1\vee S'_1-B_1)(S_1\vee S'_1-B'_1)$, on obtient

$$C=\mathbb{E}[(S_1\vee S'_1)^2]-2\ \mathbb{E}[B_1(S_1\vee S'_1)].$$

Or par indépendance de S'_1 et de (B_1,S_1), on a pour $a\geq 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[B_1(S_1\vee S'_1)|S'_1=a] &= \mathbb{E}[B_1(S_1\vee a)]\\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^1 B_t d(S_t\vee a)\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^1 (S_t\vee a)d(S_t\vee a)\right],\end{aligned}$$

car sur le support de la mesure $d(S_t\vee a)$, on a $B_t=S_t\vee a$. Donc

$$\begin{aligned}2\ \mathbb{E}[B_1(S_1\vee S'_1)|S'_1=a] &= \mathbb{E}[(S_1\vee a)^2-a^2]\\ &= \mathbb{E}[(S_1\vee S'_1)^2-S'^2_1|S'_1=a].\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$2\ \mathbb{E}[B_1(S_1\vee S'_1)]=\mathbb{E}[(S_1\vee S'_1)^2-S'^2_1].$$

Ainsi

$$C=\mathbb{E}[S'^2_1]=\mathbb{E}[B_1^2]=1,$$

car S'_1 a même loi que $|B_1|$.

5. Deux propriétés des sauts du processus A.

5.1. *Introduction.* Nous avons montré dans la troisième partie que le point de $\mathbb{R}$ le plus visité n'évolue que par sauts. Et nous savons depuis la première partie (Corollaire 1.2.2) qu'il est constant sur tout intervalle ouvert où le mouvement brownien ne le rencontre pas. Mais que se passe-t-il lorsque le mouvement brownien rencontre son point le plus visité ?

Nous établissons d'abord qu'immédiatement après être passé à son point le plus visité, le mouvement brownien le modifie par une infinité de petits sauts. Cela montre en particulier que les sauts du processus A ne sont pas isolés.

Nous montrons cependant que les sauts n'ont pas un caractère obligé. Plus précisément, fixons un instant $t_0 > 0$. Presque sûrement, t_0 se trouve dans un intervalle ouvert de constance du processus L^*. L'extrémité droite de cet intervalle est le premier zéro du processus $B - A$ suivant l'instant t_0. À ce moment, deux situations peuvent se produire:

1. Le mouvement brownien a suffisamment visité un point pour que son temps local rattrape le temps local au point A_{t_0}, auquel cas le processus A saute de A_{t_0} vers ce point.
2. Le mouvement brownien est revenu assez vite au point A_{t_0}, de sorte que A_{t_0} est encore le point le plus visité à l'instant $d(t_0)$, auquel cas il n'y a pas de saut.

Il est facile de voir que la première situation se produit avec une probabilité strictement positive, comme l'a noté Eisenbaum (voir [5], Chapitre I, Remarque 13). Nous prouvons que la seconde se produit aussi (ce qui peut paraître plus surprenant).

Pour chacun de ces deux résultats, nous aurons besoin d'une description assez précise de l'allure des temps locaux au voisinage de leur maximum.

5.2. *Les sauts de A ne sont pas isolés.* Nous allons prouver ici le:

THÉORÈME 5.2.1. *Presque sûrement, dans tout voisinage à droite des instants τ_{r+}, pour $r \in \mathbb{R}_+$, le processus A saute une infinité de fois.*

Comme d'après le Corollaire 1.2.2, le processus A est constant sur les intervalles $[\tau_r, \tau_{r+}[$ et ne peut sauter qu'aux instants de la forme τ_{r+} où $\tau_r < \tau_{r+}$, on en déduit le:

COROLLAIRE 5.2.2. (a) *Presque sûrement, les processus L^* et A ont les mêmes intervalles ouverts de constance.*

(b) *Presque sûrement, tout saut de A est immédiatement suivi d'une infinité d'autres sauts.*

Le théorème se démontre facilement à partir de la:

PROPOSITION 5.2.3. *Pour r, $h \in \mathbb{Q}_+^*$, considérons l'instant*

$$\tau_{r,h} = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ | L_t^{B_{\tau_r}} \geq r + h\}.$$

On a alors $A_{\tau_{r,h}} \neq A_{\tau_r}$ presque sûrement.

En effet, en admettant la proposition, plaçons-nous sur l'événement formé des éventualités de Ω_2 (où Ω_2 est l'événement qui a été introduit à la Section 1.1) telles que: $t \mapsto A_t$ est une fonction de sauts (grâce au Théorème 4.1.1); pour tout $(r, h) \in \mathbb{Q}_+^{*2}$, $A_{\tau_{r,h}} \neq A_{\tau_r}$; pour tout $r \in \mathbb{Q}_+^*$, $\tau_{r,h} \to \tau_r$ comme $h \to 0$.

Alors sur cet événement, le processus A possède au moins un saut dans tout intervalle $]\tau_r, \tau_{r,h}]$ où $(r, h) \in \mathbb{Q}_+^{*2}$. Comme $\tau_{r,h} \to \tau_r$ comme $h \to 0$ pour $r \in \mathbb{Q}_+^*$ et $\tau_r \to \tau_{r_0+}$ comme $r \to r_0+$ pour $r_0 \in \mathbb{R}_+$, on voit que tout voisinage à droite de τ_{r_0+} pour $r_0 \in \mathbb{R}_+$ contient un intervalle de la forme $]\tau_r, \tau_{r+h}]$ où $r, h \in \mathbb{Q}_+^*$ et contient donc un instant de saut du processus A, ce qui démontre le théorème à partir de la proposition.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 5.2.3. On commence d'abord par remarquer que $B_{\tau_r} \neq 0$ presque sûrement. Une des nombreuses façons de le prouver consiste à écrire

$$\{B_{\tau_r} = 0\} \subset \{L^*_{\tau_r^0} = r\} \quad \text{où } \tau_r^0 = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ | L_t^0 \geq r\}.$$

Ce dernier événement est de probabilité 0 car le processus $(L^x_{\tau_r^0})_{x \in \mathbb{R}_+}$ est un carré de Bessel de dimension 0, issu de r, d'après le deuxième théorème de Ray-Knight (voir [9] ou [13] au Chapitre XI, Section 2).

Par symétrie, il suffit donc de prouver que la probabilité de l'événement $\{A_{\tau_r} \neq A_{\tau_{r,h}}\}$ sachant $\{B_{\tau_r} > 0\}$ est égale à 1. Nous allons prouver en fait que presque sûrement, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in]0, \varepsilon]$ tel que $L_{\tau_{r,h}}^{B_{\tau_r}+x} > r + h$, ce qui entraîne que le point le plus visité à l'instant $\tau_{r,h}$ n'est plus $B_{\tau_r} = A_{\tau_r}$.

Pour cela, on introduit le mouvement brownien $\widetilde{B}_\cdot = B_{\tau_r+\cdot} - B_{\tau_r}$. $\widetilde{B}$ est issu de 0 et est indépendant de la tribu $\mathscr{F}_{\tau_r}$, où $(\mathscr{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est le filtration engendrée par le mouvement brownien B. La formule $\widetilde{L}_t^x = L_{\tau_r+t}^{B_{\tau_r}+x} - L_{\tau_r}^{B_{\tau_r}+x}$ fournit une version continue des temps locaux de $\widetilde{B}$ et l'on a

$$\tau_{r,h} = \tau_r + \tilde{\tau}_h^0, \quad \text{où } \tilde{\tau}_h^0 = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ | \widetilde{L}_t^0 \geq r\}.$$

Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\{L_{\tau_{r,h}}^{B_{\tau_r}+x} > r + h\} = \{\widetilde{L}^x_{\tilde{\tau}_h^0} - h > r - L_{\tau_r}^{B_{\tau_r}+x}\}.$$

Il s'agit donc de prouver que

$$P[\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in]0, \varepsilon] \ L^x_{\tilde{\tau}_h^0} - h > r - L_{\tau_r}^{B_{\tau_r}+x} | B_{\tau_r} > 0] = 1.$$

Pour cela, nous allons d'une part montrer que pour la probabilité $P[\cdot|B_{\tau_r} > 0]$, les processus $(\widetilde{L}^x_{\tilde{\tau}^0_h})_{x\in\mathbb{R}_+}$ et $(L^{B_{\tau_r}+x}_{\tau_r})_{x\in\mathbb{R}_+}$ sont des processus de Feller indépendants, ce qui entraîne d'après la loi du 0–1 de Blumenthal et Getoor que

$$P[\forall\varepsilon > 0\ \exists x \in]0,\varepsilon] L^x_{\tilde{\tau}^0_h} - h > r - L^{B_{\tau_r}+x}_{\tau_r} | B_{\tau_r} > 0] \in \{0,1\}$$

et d'autre part montrer la convergence en loi:

$$\begin{aligned}&\varepsilon^{-1/2}(\widetilde{L}^{\varepsilon}_{\tilde{\tau}^0_h} - h, r - L^{B_{\tau_r}+\varepsilon}_{\tau_r}) \quad \text{sachant}\{B_{\tau_r} > 0\}\\ &\quad\to (2\sqrt{h}B_1, 2\sqrt{r}R_1) \quad \text{comme } \varepsilon\downarrow 0,\end{aligned}$$

où R est un processus de Bessel de dimension 3 issu de 0, indépendant de B. Cette convergence en loi entraîne en effet que

$$\begin{aligned}&P[\exists x\in]0,\varepsilon] L^x_{\tilde{\tau}^0_h} - h > r - L^{B_{\tau_r}+x}_{\tau_r} | B_{\tau_r} > 0]\\ &\quad\geq P[\widetilde{L}^{\varepsilon}_{\tilde{\tau}^0_h} - h > r - L^{B_{\tau_r}+\varepsilon}_{\tau_r} | B_{\tau_r} > 0]\\ &\quad\to P[\sqrt{h}B_1 > \sqrt{r}R_1] > 0 \quad \text{quand } \varepsilon\downarrow 0,\end{aligned}$$

d'où

$$P[\forall\varepsilon > 0\ \exists x\in]0,\varepsilon]\ \widetilde{L}^x_{\tilde{\tau}^0_h} - h > r - L^{B_{\tau_r}+x}_{\tau_r} | B_{\tau_r} > 0] > 0,$$

ce qui avec la loi du 0–1 prouvera que cette probabilité vaut 1 et démontrera ainsi la proposition. Les processus $(\widetilde{L}^x_{\tilde{\tau}^0_h})_{x\in\mathbb{R}_+}$ et $(L^{B_{\tau_r}+x}_{\tau_r})_{x\in\mathbb{R}_+}$ sachant $\{B_{\tau_r} > 0\}$ sont indépendants car le mouvement brownien $\widetilde{B}$ est indépendant de la tribu $\mathscr{F}_{\tau_r}$, où $(\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est la filtration engendrée par le mouvement brownien $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Il suffit donc de prouver que ce sont des processus de Feller et que l'on a les convergences en loi:

$$\varepsilon^{-1/2}(\widetilde{L}^{\varepsilon}_{\tilde{\tau}^0_h} - h) \to 2\sqrt{h}B_1$$

et

$$\varepsilon^{-1/2}(r - L^{B_{\tau_r}+\varepsilon}_{\tau_r}) \quad \text{sachant} \quad \{B_{\tau_r} > 0\} \to 2\sqrt{r}R_1.$$

La première de ces convergences en loi se démontre facilement en utilisant le deuxième théorème de Ray–Knight et une transformée de Fourier connue sur les carrés de Bessel (voir [13], au Chapitre XI). On peut aussi le voir comme un cas particulier de la convergence en loi démontrée par Yor dans [18].

Pour le processus $(L^{B_{\tau_r}+x}_{\tau_r})_{x\in\mathbb{R}_+}$ sachant $\{B_{\tau_r} > 0\}$, on obtient sa loi grâce à un théorème de Eisenbaum (voir [5] ou [6]) donnant la loi du processus $(L^x_{\alpha_r})_{x\in\mathbb{R}}$ où $\alpha_r = \tau^{\mathbb{R}_+}_r = \inf\{t > 0 | L^{\mathbb{R}_+}_t \geq r\}$ et en utilisant un théorème de retournement de Williams ([16], Théorème 2.5): en notant $S_t = \sup_{s\leq t} B_s$ pour $t\geq 0$, on voit sans peine que le processus $(L^{S_{\tau_r}-x}_{\tau_r})_{0\leq x\leq S_{\tau_r}-B_{\tau_r}}$ sachant $\{B_{\tau_r} > 0\}$ a même loi que le processus $(L^{S_{\alpha_r}-x}_{\alpha_r})_{0\leq x\leq S_{\alpha_r}-B_{\alpha_r}}$ sachant $\{L^{\mathbb{R}_-}_{\alpha_r} < r\}$.

D'après le théorème de Eisenbaum, il s'agit donc de carrés de Bessel de dimension 4, issus de 0, pris jusqu'à leur premier instant de passage en r. Autrement dit, sachant $\{B_{\tau_r} > 0\}$, le processus $(L_{\tau_r}^{S_{\tau_r}-x})_{0\le x\le S_{\tau_r}-B_{\tau_r}}$ est une diffusion régulière sur l'intervalle $[0, r]$, issue de 0, tuée en temps fini, lorsqu'elle atteint la frontière r. Cette diffusion admet pour générateur infinitésimal $\mathscr{A} = 2x(d^2/dx^2) + 4(d/dx)$, pour fonction d'échelle s: $x \mapsto -x^{-1}$ [qui vérifie $s(0+) = -\infty$ et $s(r) < +\infty$] et pour mesure de vitesse la mesure m de densité $dm/dx = x/2$.

D'après le théorème de retournement de Williams (voir [16], Théorème 2.5), le processus

$$(L_{\tau_r}^{B_{\tau_r}+x})_{0\le x\le S_{\tau_r}-B_{\tau_r}}$$

sachant $\{B_{\tau_r} > 0\}$ est une diffusion issue de r, tuée lorsqu'elle atteint 0 et de générateur infinitésimal:

$$\hat{\mathscr{A}} = (s(r) - s(x))^{-1}\mathscr{A}(s(r) - s(x)).$$

Un calcul facile aboutit à la formule

$$\hat{\mathscr{A}} = 2x\frac{d^2}{dx^2} - \frac{4x}{r-x}\frac{d}{dx}.$$

Comme $L_{\tau_r}^y = 0$ pour $y \ge S_{\tau_r}$, le processus $(L_{\tau_r}^{B_{\tau_r}+x})_{x\in\mathbb{R}_+}$ est encore une diffusion de générateur $\hat{\mathscr{A}}$, la frontière 0 étant cette fois un piège. Il s'agit donc d'un processus de Feller. Il reste à prouver la convergence en loi:

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(r - L_{\tau_r}^{B_{\tau_r}+x}) \quad \text{sachant} \quad \{B_{\tau_r} > 0\} \to 2\sqrt{r}R_1.$$

Pour cela notons X le processus $(L_{\tau_r}^{B_{\tau_r}+t})_{t\in\mathbb{R}_+}$ et Y^ε le processus

$$(1/4r\varepsilon(r - L_{\tau_r}^{B_{\tau_r}+\varepsilon t})^2)_{t\in\mathbb{R}_+}$$

pour $\varepsilon > 0$. Nous allons montrer que la loi Q^ε du processus Y^ε sachant $\{B_{\tau_r} > 0\}$ tend faiblement vers la loi du processus $({R_t}^2)_{t\in\mathbb{R}_+}$, en montrant que Q^ε est solution d'un problème de martingales à coefficients localement bornés, pour pouvoir appliquer un théorème de convergence de diffusions. [Comme nous voulons ici des coefficients localement bornés nous avons choisi de prendre $(Y_t^\varepsilon)_{t\in\mathbb{R}_+} = (1/4r\varepsilon(r - X_{\varepsilon t})^2)_{t\in\mathbb{R}_+}$ plutôt que $(1/2\sqrt{r\varepsilon}(r - X_{\varepsilon t})_{t\in\mathbb{R}_+})$].

Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, à support compact inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. Posons pour $x \in [0, r]$,

$$g(x) = f\left(\frac{(r-x)^2}{4r\varepsilon}\right).$$

Alors g est de classe $\mathscr{C}^2$, à support compact inclus dans $[0, r[$, et l'on a

$$g'(x) = -\frac{r-x}{2r\varepsilon} f'\left(\frac{(r-x)^2}{4r\varepsilon}\right)$$

et

$$g''(x) = \frac{1}{2r\varepsilon} f'\left(\frac{(r-x)^2}{4r\varepsilon}\right) + \left(\frac{r-x}{2r\varepsilon}\right)^2 f''\left(\frac{(r-x)^2}{4r\varepsilon}\right).$$

Sachant $\{B_{\tau_r} > 0\}$, le processus $(g(X_{\varepsilon t}) - \int_0^t \widehat{\mathscr{A}} g(X_{\varepsilon s})\varepsilon\, ds)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale. Or on a

$$\begin{aligned}
\varepsilon\hat{\mathscr{A}} g(X_{\varepsilon s}) &= 2X_{\varepsilon s}\varepsilon g''(X_{\varepsilon s}) - \frac{4X_{\varepsilon s}}{r - X_{\varepsilon s}} \varepsilon g'(X_{\varepsilon s}) \\
&= \frac{X_{\varepsilon s}}{r} f'(Y_s^\varepsilon) + \frac{(r - X_{\varepsilon s})^2}{2r\varepsilon} \frac{X_{\varepsilon s}}{r} f''(Y_s^\varepsilon) + \frac{2X_{\varepsilon s}}{r} f'(Y_s^\varepsilon) \\
&= 2Y_s^\varepsilon\left(1 - 2\sqrt{\frac{\varepsilon Y_s^\varepsilon}{r}}\right) f''(Y_s^\varepsilon) + 3\left(1 - 2\sqrt{\frac{\varepsilon Y_s^\varepsilon}{r}}\right) f'(Y_s^\varepsilon).
\end{aligned}$$

Donc sachant $\{B_{\tau_r} > 0\}$, le processus

$$\left(f(Y_t^\varepsilon) - \int_0^t \left(\tfrac{1}{2} a_\varepsilon(Y_s^\varepsilon) f''(Y_s^\varepsilon) + b_\varepsilon(Y_s^\varepsilon) f'(Y_s^\varepsilon)\right) ds\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$$

est une martingale, où pour $y \in \mathbb{R}$,

$$a_\varepsilon(y) = 4|y|\left(1 - 2\sqrt{\frac{\varepsilon|y|}{r}}\right) \quad \text{et} \quad b_\varepsilon(y) = 3\left(1 - 2\sqrt{\frac{\varepsilon|y|}{r}}\right).$$

Par approximation, on montre que cela reste vrai pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$, à support compact. Autrement dit, la loi Q_ε est solution du problème de martingales associé à la condition initiale 0 et aux coefficients a_ε et b_ε.

Comme $a_\varepsilon(y) \to 4|y|$ et $b_\varepsilon(y) \to 3$ uniformément sur les compacts vis-à-vis de y, la loi Q_ε converge vers la loi d'un carré de Bessel de dimension 3 issu de 0, d'après le Théorème de convergence de diffusions (voir le Théorème 11.1.4, au Chapitre 11 de [14]). On en déduit la convergence en loi voulue, ce qui achève de prouver la Proposition 5.2.3.

5.3. *Les sauts de A ne sont pas "obligés."* Commençons par formaliser la question 2 soulevée à la Section 5.1: Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la Proposition 1.3.1, on a presque sûrement $B_t \neq A_t$, c'est-à-dire $g(t) < t < d(t)$ d'après la propriété *(e)* du Corollaire 1.2.2. Sur l'intervalle $[g(t), d(t)[$ le point le plus visité est $B_{g(t)}$. À l'instant $d(t)$, "le" point le plus visité est $B_{d(t)}$. Le but de ce section est de prouver le:

THÉORÈME 5.3.1. *Pour $t > 0$ la probabilité pour que le point le plus visité ne saute pas à l'instant $d(t)$ est non nulle. Autrement dit*

$$P[B_{d(t)} = B_{g(t)}] > 0.$$

Eisenbaum s'est déjà intéressée à cette probabilité. En Remarquant qu'elle ne dépendait pas de t (par changement d'échelle) elle a démontré dans la Remarque 12 du Chapitre 1 de [5] que cette probabilité était strictement inférieure à 1. Rappelons brièvement pourquoi: si cette probabilité valait 1, on aurait presque sûrement, pour tout $s \in \mathbb{Q}_+^*$, $B_{d(s)} = B_{g(s)}$, ce qui entraînerait que le processus A serait continu. Or il y a de nombreux moyens de prouver que A possède des sauts. On peut par exemple le déduire des résultats de Bass et Griffin [2], qui entraînent que presque sûrement:

$$\liminf_{s\to+\infty} A_s = -\infty, \qquad \limsup_{s\to+\infty} A_s = +\infty \quad \text{et} \quad |A_s| \to +\infty, \quad \text{lorsque } s \to +\infty,$$

ou du fait que A est un processus de sauts non constant.

Pour démontrer que $P[B_{d(1)} = B_{g(1)}] > 0$, nous introduisons le premier instant après 1 où le mouvement brownien revient à son point le plus visité à l'instant 1:

$$D(1) = \inf\{t \geq 1 | B_t = A_1\}.$$

La première étape consiste à prouver les égalités presque sûres:

$$\{A_{D(1)} = A_1\} = \{D(1) = d(1)\} = \{L^*_{D(1)} = L^*_1\} = \{B_{d(1)} = B_{g(1)}\}.$$

Parmi ces événements, le premier signifie que A_1 est encore le point le plus visité au premier instant où le mouvement brownien revient en A_1. Le dernier signifie que le point le plus visité ne saute pas à l'instant $d(1)$.

La deuxième étape consiste à prouver que $P[L^*_{D(1)} = L^*_1] > 0$, ce que nous ferons en conditionnant par rapport à $\mathscr{F}_1 = \sigma((B_s)_{s\in[0,1]})$ et en utilisant le lemme suivant qui constitue le point-clé de la démonstration.

LEMME 5.3.2. *Soit ψ une fonction croissante et strictement positive sur un voisinage à droite de 0, à variation lente en $0+$, c'est-à-dire vérifiant*

$$\frac{\psi(tx)}{\psi(x)} \to 1 \quad \text{lorsque } x \downarrow 0, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+^*,$$

telle que $\psi(x) \to 0$ lorsque $x \downarrow 0$. On a presque sûrement

$$\liminf_{x\downarrow 0} \frac{L_1^* - L_1^{A_1\pm x}}{\sqrt{x}\,\psi(x)} = \begin{cases} +\infty, & \text{si } \int_{0+}^{\cdot} \psi(x)\dfrac{dx}{x} \text{ converge}, \\ 0, & \text{sinon}. \end{cases}$$

Nous appliquerons ce lemme à ψ: $x \mapsto (\ln x)^{-2}$, ce qui donne

$$x^{-1/2}(\ln x)^2(L_1^* - L_1^{A_1\pm x}) \to +\infty \quad \text{lorsque } x \downarrow 0, \text{ presque sûrement}.$$

On dispose ainsi d'une minoration de l'avance du temps local au point le plus visité sur les temps locaux en ses voisins immédiats.

Ce lemme sera démontré dans la Section 5.4.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5.3.1.

Première étape. Sur l'événement presque sûr $\{B_1 \neq A_1\}$, on a $A_1 = B_{g(1)}$, et de deux choses l'une:

(i) Ou bien à l'instant $D(1)$, A_1 est encore le point le plus visité. Dans ce cas A_1 est resté le point le plus visité pendant tout l'intervalle de temps $[1, D(1)]$, puisque pour $t \in [1, D(1)]$, $L_t^{A_1} = L_{D(1)}^{A_1} = L_{D(1)}^*$. L'instant $D(1)$ est donc le premier zéro du processus B–A après l'instant 1. En utilisant les propriétés du processus A énoncées à la Section 1.2, on voit donc que $D(1) = d(1)$, d'où $L_{D(1)}^* = L_{d(1)}^* = L_1^*$ et $B_{d(1)} = B_{D(1)} = A_1 = B_{g(1)}$.

(ii) Ou bien à l'instant $D(1)$, A_1 n'est plus le point le plus visité. Dans ce cas, on ne peut avoir $D(1) = d(1)$ car cela entraînerait

$$A_{D(1)} = A_{d(1)} = B_{d(1)} = B_{D(1)} = A_1,$$

ni $D(1) < d(1)$ car pendant l'intervalle de temps $[1, d(1)[$, A_1 est le point le plus visité. On a ainsi $D(1) > d(1)$, d'où $L_{D(1)}^* > L_{d(1)}^* = L_1^*$ par définition de l'instant $d(1)$ et $B_{d(1)} \neq A_1 = B_{g(1)}$ par définition de l'instant $D(1)$.

On a ainsi les équivalences

$$A_{D(1)} = A_1 \Leftrightarrow D(1) = d(1) \Leftrightarrow L_{D(1)}^* = L_1^* \Leftrightarrow B_{d(1)} = B_{g(1)},$$

puisque toutes ces égalités sont vraies dans le premier cas et fausses dans le second.

Deuxième étape. Il s'agit de montrer que $P[L_{D(1)}^* = L_1^*] > 0$. Pour cela, on introduit le mouvement brownien $\widetilde{B} = B_{1+\cdot} - B_1$, issu de 0 et indépendant de $\mathscr{F}_1 = \sigma((B_s)_{s\in[0,1]})$. La formule $\widetilde{L}_t^x = L_{1+t}^{B_1+x} - L_1^{B_1+x}$ fournit une version continue des temps locaux de $\widetilde{B}$. On remarque que $D(1) = 1 + \tilde{\sigma}_{A_1-B_1}$, en notant $\tilde{\sigma}_x = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ | \widetilde{B}_t = x\}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Ainsi

$$\begin{aligned}\{L_{D(1)}^* = L_1^*\} &= \{\forall x \in \mathbb{R}\, L_{D(1)}^{A_1+x} \leq L_1^*\} \\ &= \{\forall x \in \mathbb{R}\, \widetilde{L}_{\tilde{\sigma}_{A_1-B_1}}^{A_1-B_1+x} \leq L_1^* - L_1^{A_1+x}\}.\end{aligned}$$

D'après la propriété de Markov, on a donc

$$P[L_{D(1)}^* = L_1^* | \mathscr{F}_1] = F(B_1 - A_1, L_1^* - L_1^{A_1+\cdot}),$$

où

$$F(y, \varphi) = P[\forall x \in \mathbb{R}\, L_{\tilde{\sigma}_{-y}}^{-y+x} \leq \varphi(x)] \quad \text{pour } y \in \mathbb{R} \text{ et } \varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Nous allons démontrer que $F(B_1 - A_1, L_1^* - L_1^{A_1+\cdot}) > 0$ presque sûrement, ce qui entraînera

$$P[L_{D(1)}^* = L_1^*] = \mathbb{E}F(B_1 - A_1, L_1^* - L_1^{A_1+\cdot}) > 0.$$

Or d'après le lemme, on a presque sûrement

$$x^{-1/2}(\ln x)^2(L_1^* - L_1^{A_1\pm x}) \to +\infty \quad \text{lorsque } x \downarrow 0.$$

Par symétrie, il suffit donc de prouver que $F(y,\varphi) > 0$ pour $y \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant: $\varphi(0) = 0$; $\inf_{|x|\geq\varepsilon}\varphi(x) > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$; $x^{-1/2}(\ln x)^2\varphi(x) \to +\infty$ lorsque $x \downarrow 0$.

D'après le premier théorème de Ray–Knight (voir l'énoncé dans [12] et [13], Chapitre XI Section 2), on a en conditionnant par rapport à $\widetilde{L}^0_{\tilde{\sigma}_{-y}}$;

$$F(y,\varphi) = \mathbb{E}[f(\widetilde{L}^0_{\tilde{\sigma}_{-y}})g(\widetilde{L}^0_{\tilde{\sigma}_{-y}})],$$

où pour $l \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} f(l) &= Q^{2,y}_{0,l}[\forall t \in [0,y]\ X_t \leq \varphi(t)],\\ g(l) &= Q^0_l[\forall t \in \mathbb{R}_+\ X_t \leq \varphi(y+t)], \end{aligned}$$

en notant comme d'habitude $(X_t)_{t\in I}$ le processus canonique sur $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$; Q^δ_x la loi d'un carré de Bessel de dimension δ issu de x; $Q^{\delta,a}_{x,y}$ la loi du carré d'un pont de Bessel de $\sqrt{x}$ à $\sqrt{y}$, de dimension δ et de longueur a.

On remarque que les variables aléatoires $f(\widetilde{L}^0_{\tilde{\sigma}_{-y}})$ et $g(\widetilde{L}^0_{\tilde{\sigma}_{-y}})$ sont corrélées positivement, comme fonctions décroissantes d'une même variable aléatoire. La décroissance de f et g provient du théorème de comparaison de solutions d'équation différentielles stochastiques (voir le Théorème 3.7 au Chapitre IX de [13]). En effet Q^0_l et $Q^{2,y}_{l,0}$ (qui est la loi retournée de $Q^{2,y}_{0,l}$) sont les lois des solutions des équations différentielles stochastiques:

$$Y_t = l + \int_0^t 2\sqrt{Y_s}\,dB_s \quad \text{et} \quad Y_t = l + \int_0^t 2\sqrt{Y_s}\,dB_s + \int_0^t \left(2 - \frac{2Y_s}{y-s}\right)ds.$$

Cette dernière équation s'obtient à partir de l'équation différentielle stochastique vérifiée par le pont brownien dans $\mathbb{R}^2$, de $(l,0)$ à $(0,0)$ et de longueur y.

On a ainsi

$$\begin{aligned} F(y,\varphi) &\geq \mathbb{E}[f(\widetilde{L}^0_{\tilde{\sigma}_{-y}})]\mathbb{E}[g(\widetilde{L}^0_{\tilde{\sigma}_{-y}})]\\ &= Q^2_0[\forall t \in [0,y]\ X_t \leq \varphi(t)]\\ &\quad \times \int_0^{+\infty} Q^0_l[\forall t \in \mathbb{R}_+\ X_t \leq \varphi(y+t)]\exp\left(\frac{-l}{2y}\right)\frac{dl}{2y}. \end{aligned}$$

En conditionnant le premier facteur par X_ε pour $\varepsilon \in]0,y[$, on obtient de la même façon l'inégalité

$$\begin{aligned} &Q^2_0[\forall t \in [0,y]\ X_t \leq \varphi(t)]\\ &\quad \geq Q^2_0[\forall t \in [0,\varepsilon]\ X_t \leq \varphi(t)]Q^2_0[\forall t \in [\varepsilon,y]\ X_t \leq \varphi(t)]. \end{aligned}$$

Or, sous la loi Q^2_0 on a presque sûrement

$$\limsup \frac{X_t}{2t\ln|\ln\ t|} = 1,$$

d'après la loi du logarithme itéré pour le mouvement brownien plan. Comme

$$t^{-1/2}(\ln\ t)^2\varphi(t) \to +\infty \quad \text{lorsque } t \downarrow 0,$$

on a a fortiori

$$X_t = o(\varphi(t)) \quad \text{lorsque } t \downarrow 0, \text{ presque sûrement,}$$

ce qui entraîne que l'inégalité $X_t \le \varphi(t)$ est vraie pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ suffisamment petit. C'est là le point clé de la démonstration: comme on utilise les valeurs $y = B_1 - A_1$, $\varphi(x) = L_1^* - L_1^{A_1+x}$ et $X_x = L_{D(1)}^{A_1+x} - L_1^{A_1+x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$, cette inégalité signifie qu'à l'instant $D(1)$, le temps local au point A_1 ne s'est pas fait doubler par les temps locaux en ses voisins immédiats.

On a donc $Q_0^2[\forall t \in [0, \varepsilon]\ X_t \le \varphi(t)] > 0$ en choisissant ε assez petit. Et comme $\inf_{x \ge \varepsilon} \varphi(x) > 0$, on a aussi

$$Q_0^2[\forall t \in [\varepsilon, y]\ X_t \le \varphi(t)] > 0$$

et

$$Q_l^0[\forall t \in \mathbb{R}_+\ X_t \le \varphi(y+t)] > 0 \quad \text{pour } l \text{ assez petit.}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} F(y,\varphi) &\ge Q_0^2[\forall t \in [0,\varepsilon]\ X_t \le \varphi(t)] Q_0^2[\forall t \in [\varepsilon, y]\ X_t \le \varphi(t)] \\ &\qquad \times \int_0^{+\infty} Q_l^0[\forall t \in \mathbb{R}_+\ X_t \le \varphi(y+t)] \exp\left(\frac{-l}{2y}\right) \frac{dl}{2y} \\ &> 0, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

REMARQUE 5.3.3. La première étape de la démonstration nous fournit une minoration de la probabilité de saut à l'instant $d(1)$. En effet, en reprenant les notations de la deuxième étape relative au mouvement brownien $\widetilde{B}$, on a

$$\begin{aligned} P[B_{d(1)} \ne B_{g(1)}] = P[L_{D(1)}^* > L_1^*] &\ge P[L_{D(1)}^{B_1} > L_1^*] \\ &= P[\widetilde{L}^0_{\tilde{\sigma}_{A_1 - B_1}} > L_1^* - L_1^{B_1}]. \end{aligned}$$

Or

$$P[\widetilde{L}^0_{\tilde{\sigma}_{A_1 - B_1}} > L_1^* - L_1^{B_1} | \mathscr{F}_1] = G(B_1 - A_1, L_1^* - L_1^{B_1})$$

avec

$$G(y,\lambda) = P[\widetilde{L}^0_{\tilde{\sigma}_{-y}} > \lambda] = \exp\left(\frac{-\lambda}{2|y|}\right) \quad \text{pour } y \in \mathbb{R} \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}_+.$$

Ainsi

$$P[B_{d(1)} \ne B_{g(1)}] \ge \mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{L_1^* - L_1^{B_1}}{2|B_1 - A_1|}\right)\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{L_1^* - L_1^0}{2|A_1|}\right)\right],$$

la dernière égalité s'obtenant par retournement, en remarquant qu'à l'instant 1, $L_1^{B_1}$ est le temps local en 0 et $B_1 - A_1$ le point le plus visité du mouvement brownien $(B_1 - B_{1-t})_{t \in \mathbb{R}_+}$.

5.4. *Démonstration du Lemme* 5.3.2. Soit ψ une fonction croissante sur un voisinage à droite de 0, à variation lente en 0+, telle que $\psi(x) \to 0$ comme $x \downarrow 0$. Comme ψ est à variation lente en 0+, on a par changement d'échelle l'identité:

$$\liminf_{x\downarrow 0} \frac{L_T^* - L_T^{A_T \pm x}}{\sqrt{x}\psi(x)} = \liminf_{x\downarrow 0} \frac{L_1^* - L_1^{A_1 \pm x}}{\sqrt{x}\psi(x)} \quad \text{en loi,}$$

pour tout temps T indépendant du mouvement brownien B.

Choisissons pour T un temps exponentiel indépendant de B. D'après le théorème de Ray ([3] ou [12]), sachant $\{B_T = b\}$ où $b \in \mathbb{R}_+^*$, les processus $(L_T^{-x})_{x\in\mathbb{R}_+}$, $(L_T^x)_{x\in[0,b]}$ et $(L_T^x)_{x\geq b}$ sont des diffusions à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, où 0 est le seul point irrégulier. Comme $A_T \neq 0$ et $A_T \neq B_T$ presque sûrement, le processus $(L_T^x)_{x\in\mathbb{R}}$ est une diffusion régulière (éventuellement retournée) au voisinage de A_T.

Par changement d'échelle et de temps, on est ramené à prouver un résultat identique pour le mouvement brownien au voisinage de son maximum sur un segment, car les dérivées de la fonction échelle et du changement de temps qui apparaissent sont strictement positives et finies.

On finit donc la démonstration en prouvant la:

PROPOSITION 5.4.1. *Soit W un mouvement brownien dans $\mathbb{R}$. Soit ψ une fonction croissante sur un voisinage à droite de* 0*, à variation lente en* 0+*, telle que $\psi(x) \to 0$ comme $x \downarrow 0$. Alors presque sûrement, pour tout instant ρ réalisant un maximum local du mouvement brownien W, on a*

$$\liminf_{h\downarrow 0} \frac{W_\rho - W_{\rho+h}}{\sqrt{h}\psi(h)} = \begin{cases} +\infty, & \text{si } \int_{0+}^{\cdot} \psi(x)\dfrac{dx}{x} \text{ converge,} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

REMARQUE 5.4.2. En retournant le mouvement brownien W aux instants entiers, on voit qu'on a le même résultat pour

$$\liminf_{h\downarrow 0} \frac{W_\rho - W_{\rho-h}}{\sqrt{h}\psi(h)}.$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 5.4.1. La proposition est une conséquence immédiate des trois observations suivantes:

(i) Tout instant où W atteint un maximum local est de la forme $\rho(t_0, a)$ avec t_0, $a \in \mathbb{Q}_+$, en notant

$$\sigma(t_0, a) = \inf\{t \geq t_0 | W_t - W_{t_0} = -a\},$$
$$\rho(t_0, a) = \inf\Big\{t \geq t_0 \Big| W_t = \sup_{t_0 \leq s \leq \sigma(t_0, a)} W_s\Big\}.$$

$\rho(t_0, a)$ est presque sûrement le seul instant de $[t_0, \sigma(t_0, a)]$ réalisant le maximum de W sur cet intervalle à cause de la remarque suivante.

(ii) En utilisant un théorème de décomposition de Williams (voir [13] au Chapitre VI, Proposition 3.11), on voit que conditionnellement à $W_{\rho(t_0,a)} - W_{t_0} = m$, le processus $(m - W_{\rho(t_0,a)+t} + W_{t_0})_{0\le t\le\sigma(t_0,a)-\rho(t_0,a)}$ est un processus de Bessel de dimension 3 issu de 0 pris jusqu'à son premier instant de passage en $a+m$.

(iii) D'après la Section 4.12 (Kolmogorov's test) de [8], si R est un processus de Bessel de dimension 3 issu de 0, alors presque sûrement

$$\liminf_{h\downarrow 0} \frac{Rh}{\sqrt{h}\psi(h)} = \begin{cases} +\infty, & \text{si } \int_{0+}^{\cdot} \psi(x)\frac{dx}{x} \text{ converge,} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

6. Questions ouvertes.

6.1. *Lien entre L^F et le temps local de la semi-martingale $B - A^F$.* Nous avons démontré que L^F est le temps local en 0 de la semi-martingale $B - A^F$ dans les deux cas suivants:

1. Lorsque F est discret, ce qui était relativement simple, car le processus A^F est en escalier dans ce cas.
2. Lorsque $F = \mathbb{R}$, où la démonstration repose sur un calcul fastidieux.

On aimerait trouver une démonstration de cette propriété qui soit à la fois plus conceptuelle et générale (qui donne le résultat pour tout fermé F).

Il est tentant d'essayer de démontrer cette propriété dans le cas général, en approchant F par une suite de fermés discrets inclus dans F (comme nous l'avons fait au Section 3.1) et en effectuant un passage à la limite. Mais quelle que soit la méthode employée, on bute sur un problème d'interversion de limites assez délicat.

On peut aussi essayer d'adapter au cas général la démonstration de l'égalité $\lambda_t^0 = L_t^F$ dans le cas où $F = \mathbb{R}$, qui a fait l'objet de la quatrième partie. On peut en reproduire le début sans changement: en prenant un temps T exponentiel d'espérance 2 et indépendant du mouvement brownien B, on voit qu'il suffit de prouver l'égalité $\mathbb{E}\lambda_T^0 = \mathbb{E}L_T^F$ et on démontre comme dans la Section 4.2 que l'on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\lambda_T^0 &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon}\mathbb{E}\left[\int_0^T \mathbb{1}_{\{|B_s - A_s^F|\le\varepsilon\}}\, ds\right] \\ &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} P\big[|B_T - A_T^F| \le \varepsilon\big]. \end{aligned}$$

En revanche, on ne peut plus appliquer l'argument de retournement qui permettait de remplacer la densité en 0 de la variable aléatoire $B_T - A_T^F$ par celle de la variable aléatoire A_T^F.

On est donc réduit à prouver l'égalité

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} P[|B_T - A_T^F| \le \varepsilon] = L_T^F.$$

Cette égalité ne fait intervenir que la loi conjointe de la variable aléatoire B_T et du processus $(L_T^x)_{x\in\mathbb{R}}$ qui est donnée par le théorème de Ray. Connaissant cette loi, il "suffit" donc de vérifier cette égalité. Mais on ne voit pas comment aborder dans le cas général les calculs des Sections 4.3 à 4.6.

Par ailleurs il serait remarquable que cette égalité soit vraie pour tout fermé F (nous savons déjà qu'elle est vraie pour tout fermé discret). Peut-on l'interpréter à partir de la loi conjointe de B_T et $(L_T^x)_{x\in\mathbb{R}}$?

6.2. *Une égalité mystérieuse.* Si nous observons la démonstration de l'égalité

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}P\big[|A_T|\le\varepsilon\big]=\mathbb{E}L_T^*,$$

qui se trouve aux Sections 4.3 et 4.4, nous constatons qu'un miracle s'est produit. La formule de Borodin,

$$P[L_T^*\ge l]=\frac{4le^l}{(e^l-1)^2}\frac{I_1(l/2)}{I_0(l/2)}\quad\text{pour } l\in\mathbb{R}_+^*,$$

nous a fourni l'expression suivante pour le second membre:

$$\mathbb{E}L_T^*=\int_0^{+\infty}\frac{4le^l}{(e^l-1)^2}\frac{I_1(l/2)}{I_0(l/2)}\,dl.$$

Pour calculer le premier membre, égal à

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon^{-1}P[|A_T|\le\varepsilon;|B_T|>\varepsilon],$$

on a utilisé le théorème de Ray. On a obtenu exactement la même expression, dans laquelle l'intégration vis-à-vis de l provenait d'un conditionnement par rapport à $L_T^0=l$.

La démonstration prouve non seulement l'égalité escomptée, qui est l'égalité des *intégrales*, mais aussi l'égalité des *intégrandes*:

$$\begin{aligned}e^{-l}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}P\big[|A_T|\le\varepsilon|L_T^0=l\big]&=e^{-l}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}P[|A_T|\le\varepsilon;|B_T|>\varepsilon|L_T^0=l]\\&=\frac{4le^l}{(e^l-1)^2}\frac{I_1(l/2)}{I_0(l/2)}=P[L_T^*\ge l],\end{aligned}$$

qui était "inattendue." Peut-on l'interpréter?

Par changement d'échelle, on peut écrire une égalité similaire en remplaçant T par n'importe quel temps exponentiel indépendant du mouvement brownien. En interprétant chaque membre en termes de transformées de Laplace, on est conduit à supputer que pour $t,l\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{1}{2\varepsilon}P[|A_t|\le\varepsilon;L_t^0\in dl]\to\frac{l}{2t}P[L_t^*\in dl]\quad\text{quand } \varepsilon\downarrow 0,$$

ou encore

$$\frac{1}{2\varepsilon}P\big[|A_t| \le \varepsilon | L_t^* = l\big] \to \frac{l}{2t} \quad \text{quand } \varepsilon \downarrow 0.$$

Peut-on démontrer et interpréter ces inégalités?

6.3. *La loi de la variable aléatoire A_1.* Quelle est la loi du point le plus visité à l'instant 1?

Par changement d'échelle, on peut ramener le calcul de cette loi au calcul de celle de A_T, où T est un temps exponentiel indépendant du mouvement brownien. On dispose alors du théorème de Ray donnant la loi du processus $(L_T^x)_{x\in\mathbb{R}}$, mais très vite, le calcul devient extrêmement pénible.

Nous nous contenterons de trois remarques qui donnent une assez bonne idée de l'allure de la loi de A_1.

1. La loi de A_1 est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$,

$$\tfrac{1}{2}P[B_1 \ge 2a] \le P[A_1 \ge a] \le 2P[B_1 \ge a].$$

3. Si la loi de A_1 admet une densité continue et bornée f, alors cette dernière vérifie l'inégalité $f(a) \le f(0)\exp(-a^2/2)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

On trouvera la démonstration de ces affirmations dans [12].

6.4. *La probabilité de saut à l'instant $d(t)$.* Nous avons vu au Section 5.2 que la probabilité pour que le processus A saute à l'instant $d(t)$ est indépendante de $t \in \mathbb{R}_+^*$ et strictement comprise entre 0 et 1. Il serait intéressant de connaître sa valeur, c'est-à-dire de calculer $P[B_{d(1)} = B_{g(1)}]$.

Là encore, on peut se placer en un temps exponentiel indépendant du mouvement brownien, et les théorèmes de Ray-Knight permettent théoriquement de répondre.

6.5. *La mesure de Hausdorff de l'ensemble des zéros de $B - A^F$.* Dans [11], Perkins a démontré que si $\mathscr{H}_\varphi$ désigne la mesure de Hausdorff associée à la fonction φ: $t \mapsto \sqrt{2t\ln|\ln t|}$, alors presque sûrement, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathscr{H}_\varphi(\{s \in [0,t[\,|\, B_s = x\}) = L_t^x.$$

Ce résultat, améliorant dans le cas du mouvement brownien un théorème énoncé par Taylor et Wendel [15] concernant les processus stables, fournit à la fois la dimension *exacte* de Hausdorff des ensembles $\{s \in [0,t[\,|\, B_s = x\}$ et une interprétation des temps locaux comme mesure de Hausdorff de ces ensembles.

A-t-on un résultat semblable pour l'ensemble des zéros de $B - A^F$, à savoir:

$$\mathscr{H}_\varphi(\{s \in [0,t[\,|\, B_s = A_s^F\}) = L_t^F \text{ ?}$$

Dans le cas où le fermé F est discret, ce résultat est une conséquence directe du théorème de Perkins, car le processus A^F est en escalier.

Remerciement. Je remercie les rapporteurs pour leurs suggestions qui m'ont permis d'améliorer la présentation de certaines démonstrations.

REFERENCES

[1] ABRAMOVITZ, M. and STEGUN, I. A. (1965). *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York.

[2] BASS, F. R. and GRIFFIN, P. S. (1985). The most visited site of brownian motion and simple random walk. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 70 417–436.

[3] BIANE, P. and YOR, M. (1988). Sur la loi des temps locaux pris en un temps exponentiel. *Séminaire de Probabilités XXII. Lecture Notes in Math.* 1321 454–466. Springer, Berlin.

[4] BORODIN, A. N. (1984). Distribution of integrals functionals of Brownian motion. *J. Soviet Math.* 27 3005–3021.

[5] EISENBAUM, N. (1989). Temps locaux, excursions et lieu le plus visité par un mouvement brownien linéaire. Thèse de doctorat, Univ. Paris.

[6] EISENBAUM, N. (1990). Un théorème de Ray–Knight lié au suprémum des temps locaux browniens. *Probab. Theory Related Fields* 87 79–95.

[7] FEDERER, H. (1969). *Geometric Measure Theory*. Springer, Berlin.

[8] ITÔ, K. and MCKEAN, H. P. (1965). *Diffusion Processes and Their Sample Paths*. Springer, Berlin.

[9] KNIGHT, F. B. (1963). Random walk and a sojourn density processus. *Trans. Amer. Math. Soc.* 109 56–86.

[10] LEURIDAN, C. (1994). Problèmes liés aux temps locaux du mouvement brownien: estimation de normes H^p, théorèmes de Ray–Knight sur le tore, point le plus visité. Thèse de doctorat, Univ. Grenoble I.

[11] PERKINS, E. (1981). The exact Hausdorff measure of the level sets of Brownian motion. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 58 373–388.

[12] RAY, D. B. (1963). Sojourn time of a diffusion process. *Illinois J. Math.* 7 615–630.

[13] REVUZ, D. and YOR, M. (1991). *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer, Berlin.

[14] STROOCK, D. B. and VARADHAN, S. R. S. (1979). *Multidimensional Diffusion Processes*. Springer, Berlin.

[15] TAYLOR, S. J. and WENDEL, J. G. (1966). The exact measure of the zero set of a stable process. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 6 170–180.

[16] WILLIAMS, D. (1977). Path decomposition and continuity of local time for one-dimensional diffusions I. *Proc. London Math. Soc* (*3*) 28 738–768.

[17] YOR, M. (1978). Sur la continuité des temps locaux associés à certaines semi-martingales. *Astérisque* 52–53 23–35.

[18] YOR, M. (1983). Le drap brownien comme limite en loi des temps locaux d'un mouvement brownien linéaire. *Séminaire de Probabilités XVII. Lecture Notes in Math.* 989 89–105. Springer, Berlin.

UNIVERSITÉ DE GENOBLE I
INSTITUTE FOURIER
UMR 5582
UFR DE MATHÉMATIQUES
B.P. 74
38402 ST. MARGIN D'HERES CEDEX
FRANCE
E-MAIL: leuridan@fourier.ujf-grenoble.fr