The Annals of Probability
1974, Vol. 2, No. 4, 745-746

UN CRITERE PROBABILISTE DE COMPACITE DES GROUPES[1]

A. BRUNEL ET D. REVUZ

University of Paris VI *and* VII

It is shown that a locally compact metrizable group G is compact if and only if every random walk on G is recurrent.

Soit G un groupe localement compact métrisable et μ une probabilité sur la tribu borélienne de G. On appelle Marche Aléatoire gauche (droite) de loi μ la chaîne de Markov sur G de probabilité de transition $\mu * \varepsilon_g$, $g \in G$, ($\varepsilon_g * \mu$, $g \in G$). Dans ce qui suit nous ne nous intéressons qu'aux probabilités dont le support engendre G (le plus petit sous groupe fermé contenant le support de μ est égal à G).

Il est facile de démontrer que si G est compact toute marche aléatoire est récurrente. Nous voulons montrer ici que la réciproque est également vraie, ce qui fournit un critère de compacité.

THÉORÈME. *Si toutes les marches aléatoires sur G sont récurrentes alors G est compact.*

DÉMONSTRATION. Rappelons tout d'abord que suivant [2], si le groupe G admet une marche aléatoire récurrente il est unimodulaire; nous appellerons m une mesure de Haar de G.

Si μ est une probabilité sur G, l'application $T: f \to Pf$ où

$$Pf(g) = \int f(hg)\mu(dh)$$

est une contraction positive de $L^1(m)$ où m est une mesure de Haar de G. Si la promenade de loi μ est récurrente, cette contraction est conservative, c'est à dire que pour toute fonction f de $L_1^+(m)$ on a

$$\sum_0^\infty T^n f = 0 \quad \text{ou} \quad +\infty \qquad\qquad m - p \cdot p\,.$$

Maintenant pour tout n, la contraction T^n est définie à partir de la même puissance de convolution μ^n de μ comme T à partir de μ. Soit $\{a_n\}$, $n \geqq 0$, une suite de réels positifs tels que

$$\sum_0^\infty a_n = 1\,.$$

L'opérateur

$$S = \sum_0^\infty a_n T^n$$

Received October 15, 1973; revised December 17, 1973.

[1] Equipe de Recherche "Processus Stochastiques et Applications" dépendant de la Section n° 1 "Mathématiques, Informatique" associée au C.N.R.S.

AMS 1970 *subject classifications*. Primary 6066.

Key words and phrases. Locally compact groups, recurrent random walk, conservative contraction.

est une contraction sur $L^1(m)$ et est définie à partir de la probabilité

$$\sigma = \sum_0^\infty a_n \mu^n$$

comme T à partir de μ, c'est-à-dire que S est la contraction associée à la marche aléatoire gauche de loi σ.

D'après le résultat de [1] la contraction T admet une mesure invariante bornée équivalente à m si et seulement si toutes les contractions du type de S, c'est à dire obtenue en prenant toutes les suites (a_n) possibles, sont conservatives. Donc P admet une mesure invariante bornée m' équivalente à m.

Mais en fait m' ne peut être qu'égale à m. En effet, la dérivée de Radon–Nikodym de m' par rapport à m est harmonique pour la marche de loi $\hat{\mu}$ symétrique de μ qui est aussi récurrente; cette dérivée est donc constante m p.s. et par suite m' est une mesure de Haar. Comme elle est bornée, le groupe est compact.

La même démonstration donne des critères plus maniables en considérant uniquement des familles de marches invariantes par l'opération $\mu \to \sigma$. Rappelons qu'une probabilité μ sur un groupe G est dite étalée s'il existe une puissance de convolution μ^n de μ qui ne soit pas étrangère à m.

COROLLAIRE. *Si toutes les marches de lois μ symétriques, ou étalées, ou symétriques et étalées, sont récurrentes alors le groupe G est compact.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRUNEL, A. (1970). New conditions for existence of invariant measures in ergodic theory, in *Contributions to Ergodic Theory and Probability*. Lecture notes in Math 160 Springer, Verlag, Berlin.

[2] BRUNEL, A., CREPEL, P., GUIVARC'H, Y. et KEANE, M. Marches aléatoires récurrentes sur les groupes localement compacts. C.R.A.S. t. 275.

LABORATOIRE DE CALCUL DES PROBABILITÉS
UNIVERSITY OF PARIS VI
9, QUAI SAINT-BERNARD, TOUR 56
75230 PARIS, CEDEX 05, FRANCE