The Annals of Probability
1989, Vol. 17, No. 4, 1521–1535

SUR UNE INTEGRALE POUR LES PROCESSUS A α-VARIATION BORNEE

PAR JEAN BERTOIN

Université Pierre et Marie Curie

On définit $\int_0^\cdot X_s\, dY_s$ pour X processus localement à β-variation bornée et Y processus localement à α-variation bornée ($\alpha < 2 \leq \beta$ et $1/\alpha + 1/\beta > 1$) comme limite de sommes de Riemann. Les propriétés de cette intégrale nous permettent d'obtenir une formule d'Itô et l'existence des temps locaux pour certains processus de Dirichlet.

We define $\int_0^\cdot X_s\, dY_s$ for X a process locally of bounded β-variation and Y locally of bounded α-variation ($\alpha < 2 \leq \beta$ and $1/\alpha + 1/\beta > 1$) as the limit of the Riemann sums. The properties of this integral lead us to an Itô formula and to the existence of local times for some kinds of Dirichlet processes.

Dans l'étude du mouvement Brownien apparaissent de façon naturelle des processus qui ne sont pas des semimartingales mais des processus de Dirichlet [voir par exemple Fukushima (1980), Yamada (1985) et Yor (1982)]. Pour les étudier, on ne peut donc pas utiliser directement la théorie de l'intégration stochastique; ce qui se révèle souvent peu pratique. Comme Dellacherie et Mokobodzki [théorème 8.80 de Dellacherie et Meyer (1980)] ont caractérisé les semimartingales comme étant les seuls L^0-intégrateurs, nous ne pouvons espérer étendre l'intégrale stochastique aux processus de Dirichlet. Or il apparaît fréquemment (comme par exemple dans la formule d'Itô) que les intégrants sont des processus à variation quadratique bornée, et il est donc naturel de se demander si l'on peut définir $\int_0^\cdot X_s\, dY_s$ pour X processus à variation quadratique bornée et Y processus de Dirichlet.

Ce n'est malheureusement pas le cas comme nous le verrons au paragraphe 1 mais nous montrerons au paragraphe 2 que nous pouvons définir une telle intégrale si nous supposons Y à α-variation bornée ($\alpha < 2$). Après avoir étudié les propriétés générales de cette intégrale, nous donnerons au paragraphe 3 des applications aux processus $X = M + Y$, avec M martingale locale continue et Y processus à α-variation bornée. Nous établirons une formule d'Itô qui nous permettra de prouver en dimension 1 l'existence des temps locaux pour X quand $\alpha < \frac{4}{3}$; et, en dimension 2, l'existence des temps locaux d'intersection quand M est un mouvement Brownien et $\alpha < \frac{4}{3}$. Le lecteur pourra trouver en outre dans Bertoin (1987b) des applications directes de cette intégrale aux transformées de Hilbert et dérivées fractionnaires des temps locaux Browniens.

1. Quelques notations et préliminaires. Pour toute la suite, nous nous donnons $(\Omega, \mathscr{F}_t, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré satisfaisant aux conditions

Received December 1987; revised October 1988.
AMS 1980 *subject classification*. 60H05.
Key words and phrases. Stochastic integration, α-variation, Dirichlet process.

habituelles. Les résultats suivants, ont soit été établis dans Bertoin (1986, 1988), soit peuvent l'être par des méthodes similaires.

On appelle *subdivision d'arrêt* de $\mathbb{R}^+$ toute suite croissante de temps d'arrêt $\tau = (T_0, \dots, T_n, \dots)$ telle que $T_0 = 0$ et $\lim T_n = +\infty$ $\mathbb{P}$ p.s. On note $|\tau|$ le *pas de* τ, c'est à dire $\mathbb{E}[\sup_n(T_{n+1} - T_n)]$. Nous désignons encore par $\mathbb{T}$ l'ensemble des subdivisions d'arrêt de $\mathbb{R}^+$.

Si Y est un processus et $\tau = (T_0, \dots, T_n, \dots)$ une subdivision d'arrêt, nous notons $Q_\tau^\alpha(Y) = |Y_0|^\alpha + \sum_{n=0}^\infty |Y_{T_{n+1}} - Y_{T_n}|^\alpha$.

Un processus Y continu, adapté, est dit à *α-variation bornée* si $\sup_{\tau \in \mathbb{T}} \mathbb{E}(Q_\tau^\alpha(Y))^{1/\alpha}$ est fini. Cette quantité est alors notée $\|Y\|_{Q^\alpha}$ et l'on désigne par Q^α l'espace des processus continus, adaptés, à α-variation bornée. $(Q^\alpha, \|\cdot\|_{Q^\alpha})$ est alors un espace de Banach.

Si Y appartient à Q^α, on dit que Y est à *α-variation nulle* si

$$\lim_{|\tau| \to 0} \mathbb{E}(Q_\tau^\alpha(Y)) = 0.$$

On note Q_0^α l'ensemble des processus à α-variation nulle. $(Q_0^\alpha, \|\cdot\|_{Q^\alpha})$ est encore un espace de Banach, et l'on montre que les processus continus à variation intégrable sont denses dans Q_0^α.

Pour tout Y dans Q^α, il existe un unique processus $A(Y, \alpha)$ continu, croissant, nul en zéro, adapté et intégrable, tel que, pour tout temps d'arrêt T:

$$\mathbb{E}(A_\infty(Y, \alpha) - A_T(Y, \alpha)) = \|Y - Y^T\|_{Q^\alpha}^\alpha.$$

Nous notons simplement Q pour Q^2 et Q_0 pour Q_0^2. On considère alors $D = \mathscr{M}_c^2 \oplus Q_0$ l'espace des *processus de Dirichlet forts* (où $\mathscr{M}_c^2$ désigne l'espace des martingales continues de carré intégrable). $(D, \|\cdot\|_Q)$ est également un espace de Banach, et plus précisément, si $(X_n = M_n + A_n\colon n \in \mathbb{N})$ est une suite de processus de Dirichlet forts avec $M_n \in \mathscr{M}_c^2$ et $A_n \in Q_0$, et si la suite $(X_n\colon n \in \mathbb{N})$ converge dans Q, alors les suites $(M_n\colon n \in \mathbb{N})$ et $(A_n\colon n \in \mathbb{N})$ convergent respectivement dans $\mathscr{M}_c^2$ et dans Q_0.

Nous dirons qu'un processus Y est *localement à α-variation bornée* s'il existe une suite $(T_n\colon n \in \mathbb{N})$ de temps d'arrêt telle que, pour tout n, Y^{T_n} est un processus à α-variation bornée et $\lim T_n = +\infty$ $\mathbb{P}$ p.s. On donne de même un sens à: localement à α-variation nulle, localement un processus de Dirichlet fort.

Nous avons le:

LEMME 1.1. *Si Y est un processus de Q^α nul en zéro, alors Y est localement à β-variation nulle pour tout $\beta > \alpha$.*

PREUVE. Soit $T_n = \inf\{t\colon A_t(Y, \alpha) > n\}$ [voir plus haut la définition de $A(Y, \alpha)$] et $S \le U \le T$ trois temps d'arrêt. Nous avons:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|Y_T - Y_U|^\alpha) &= \mathbb{E}\left(\left|(Y_T - Y_S) - (Y_U - Y_S)\right|^\alpha\right)\\ &\le \mathbb{E}\left[\left(A_T(Y, \alpha) - A_S(Y, \alpha)\right) - \left(A_U(Y, \alpha) - A_S(Y, \alpha)\right)\right].\end{aligned}$$

D'après le lemme 1.1 de Bertoin (1988), il existe une constante universelle $C_{\alpha,\beta}$ telle que:

$$\mathbb{E}(|Y_T - Y_S|^\beta) \le C_{\alpha,\beta}\mathbb{E}\left(\left(A_T(Y, \alpha) - A_S(Y, \alpha)\right)^{\beta/\alpha}\right).$$

Remarquons que

$$(A_T(Y,\alpha) - A_S(Y,\alpha))^{\beta/\alpha} \le A_T(Y,\alpha)^{\beta/\alpha} - A_S(Y,\alpha)^{\beta/\alpha}$$

et donc Y^{T_n} appartient à Q^β pour tout n. D'autre part $\sum_{S_i \in \tau,\, S_i \le T_n}(A_{S_{i+1}}(Y,\alpha) - A_{S_i}(Y,\alpha))^{\beta/\alpha}$ tend $\mathbb{P}$ presque sûrement vers zéro quand $|\tau|$ tend vers zéro, et est majoré par $A_{T_n}(Y,\alpha)^{\beta/\alpha}$. Par convergence dominée, Y^{T_n} est donc à β-variation nulle. □

Venons-en à l'intégration: Föllmer (1981) a prouvé que si X est localement un processus de Dirichlet fort, et si f est une fonction de classe C^1, alors les sommes de Riemann $\sum_{T_i < t} f(X_{T_i})(X_{T_{i+1}} - X_{T_i})$ convergent presque sûrement quand le pas de $\tau = (T_0, \dots, T_i, \dots)$ tend vers zéro. Comme $f(X)$ est encore localement un processus de Dirichlet fort, il est naturel de se demander si l'on peut définir $\int_0^\cdot X_s\, dY_s$ pour X et Y deux processus de Dirichlet forts quelconques, en prolongement de l'intégrale stochastique pour les semimartingales. Nous avons la:

Proposition 1.2. *L'intégrale $\int_0^\cdot X_s\, dY_s$ définie pour X processus de Dirichlet et Y processus à variation bornée, n'admet pas de prolongement par continuité à Y processus à variation quadratique nulle.*

Preuve. Le contre-exemple que nous allons donner s'inspire de l'étude de Bruneau (1974) des fonctions à α-variation bornée: Pour tout entier r strictement positif, soit:

$$f_r(t) = \sum_{n=1}^{r} 2^{-n/2}\cos(2^n\pi t)n^{-1/2}, \qquad g_r(t) = \sum_{n=1}^{r} 2^{-n/2}\sin(2^n\pi t)n^{-1/2}$$

et enfin:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n/2}\cos(2^n\pi t)n^{-1/2} \quad \text{et} \quad g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n/2}\sin(2^n\pi t)n^{-1/2}.$$

(Ces fonctions sont toutes définies sur $[0,1]$.)

Montrons que f_r converge dans Q vers f: Si $2^{-p-1} \le t - s < 2^{-p}$, alors

$$|\cos(2^n\pi t) - \cos(2^n\pi s)| \le \pi(2^{n-p} \wedge 1)$$

et donc:

$$\begin{aligned}
&|(f - f_r)(t) - (f - f_r)(s)| \\
&\quad \le \pi\left[\sum_{n=r}^{p} \frac{2^{n/2}2^{-p}}{\sqrt{n}} + \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{2^{-n/2}}{\sqrt{n}}\right] \\
&\quad \le \frac{\pi}{\sqrt{r}}\left[\sum_{n=1}^{p} 2^{n/2}\cdot 2^{-p} + \sum_{n=p+1}^{\infty} 2^{-n/2}\right] \le C\cdot 2^{-p/2}r^{-1/2}.
\end{aligned}$$

Donc $|(f - f_r)(t) - (f - f_r)(s)|^2 \le C^2 \cdot 2^{-p}r^{-1}$, et donc $\|f - f_r\|_Q^2 \le C^2 r^{-1}$.

En particulier, les f_r étant à variation bornée, f est à variation quadratique nulle, et le même raisonnement s'applique à g.

Or, pour tout r, nous avons:

$$\int_0^1 g(t)\, df_r(t) = -\sum_{n=1}^{r} \pi(2n)^{-1},$$

de sorte que cette suite d'intégrale diverge quand on fait tendre r vers l'infini. □

La condition $Y \in Q_0$ n'est donc pas suffisante pour définir $\int_0^{\cdot} X_s\, dY_s$ pour tout X à variation quadratique nulle. Dans le paragraphe suivant, nous allons voir comment une condition un peu plus forte (Y à α-variation bornée pour un $\alpha < 2$) nous permet de définir une telle intégrale.

2. Définition de l'intégrale et propriétés générales. Dans ce paragraphe, nous nous fixons deux réels α et β avec $1 < \alpha < 2$, $\beta \geq 2$ et $1/\alpha + 1/\beta > 1$. Nous considérons X processus continu localement à β-variation bornée (d'après le lemme 1.1, il suffit pour celà que X soit localement à variation quadratique bornée) et Y processus continu localement à α-variation bornée.

Nous allons d'abord montrer comment, dans un cas simple, on peut définir $\int_0^{\cdot} X_s\, dY_s$ comme limite des sommes de Riemann, et étudierons les premières propriétés de cette intégrale. Nous montrerons ensuite comment l'on se ramène du cas général au cas simple.

(a) *Etude du cas simple.* Nous supposerons dans cette partie que X est un processus à β-variation bornée et que:

(H) Y est un processus continu tel que, si $S \leq T$ sont deux temps d'arrêt bornés: $\mathbb{E}(|Y_T - Y_S|^\alpha) \leq \mathbb{E}(T - S)$.

Nous avons alors le:

THÉORÈME 2.1. *Soit $(I_n\colon n \in \mathbb{N})$ la suite de processus définis par*:

$$I_n = \sum_{k=0}^{+\infty} X_{k\cdot 2^{-n}}\left(Y^{(k+1)2^{-n}} - Y^{k\cdot 2^{-n}}\right).$$

Pour tout t dans $\mathbb{R}^+$, la suite de processus $(I_n^t\colon n \in \mathbb{N})$ converge dans Q^α vers un processus que l'on note $\int_0^{\cdot} X_s\, dY_s^t$ (où $Y^{k\cdot 2^{-n}}$ désigne le processus Y arrêté en $k \cdot 2^{-n}$).

PREUVE. Nous avons:

$$I_n - I_{n-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(X_{(2k+1)2^{-n}} - X_{2k\cdot 2^{-n}}\right)\left(Y^{(2k+2)2^{-n}} - Y^{(2k+1)2^{-n}}\right).$$

Si nous notons $Z_k = Y^{(2k+2)2^{-n}} - Y^{(2k+1)2^{-n}}$, nous avons par définition:

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(X_{(2k+1)2^{-n}} - X_{2k\cdot 2^{-n}}\right)Z_k\right\|_{Q^\alpha}^\alpha \\
&\quad = \sup_{\tau\in\mathbf{T}} \mathbb{E}\left[\left|X_{(2k+1)2^{-n}} - X_{2k\cdot 2^{-n}}\right|^\alpha Q_\tau^\alpha(Z_k)\right] \\
&\quad = \sup_{\tau\in\mathbf{T}} \mathbb{E}\left[\left|X_{(2k+1)2^{-n}} - X_{2k\cdot 2^{-n}}\right|^\alpha \mathbb{E}\left(Q_\tau^\alpha(Z_k)|\mathscr{F}_{(2k+1)2^{-n}}\right)\right].
\end{aligned}$$

Or Z_k est constant hors de $[(2k+1)2^{-n},(2k+2)2^{-n}]$, et il découle alors de notre hypothèse (H) que $\mathbb{E}(Q_\tau^\alpha(Z_k)|\mathscr{F}_{(2k+1)2^{-n}}) \le 2^{-n}$. Donc

$$\left\|\left(X_{(2k+1)2^{-n}} - X_{2k\cdot 2^{-n}}\right)Z_k\right\|_{Q^\alpha} \le 2^{-n/\alpha}\mathbb{E}\left(\left|X_{(2k+1)2^{-n}} - X_{2k\cdot 2^{-n}}\right|^\beta\right)^{1/\beta}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\left\|I_n^t - I_{n-1}^t\right\|_{Q^\alpha} &\le \sum_{k=0}^{[2^{n-1}\cdot t]} \left\|\left(X_{(2k+1)2^{-n}} - X_{2k\cdot 2^{-n}}\right)Z_k\right\|_{Q^\alpha} \\
&\le \left(\sum_{k=0}^{[2^{n-1}\cdot t]} \mathbb{E}\left(\left|X_{(2k+1)2^{-n}} - X_{2k\cdot 2^{-n}}\right|^\beta\right)\right)^{1/\beta} \left(\sum_{k=0}^{[2^{n-1}\cdot t]} 2^{-\beta' n/\alpha}\right)^{1/\beta'},
\end{aligned}$$

où β' est l'exposant conjugué de β $[\beta' = \beta/(\beta-1)]$. Si nous désignons par σ_n la n-ième subdivision dyadique, nous avons:

$$\|I_n^t - I_{n-1}^t\|_{Q^\alpha} \le \mathbb{E}\left(Q_{\sigma_n}^\beta(X)\right)^{1/\beta}\left(2^{-n(\beta'/\alpha-1)}t\right)^{1/\beta'}. \tag{1}$$

Or $\beta' > \alpha$ [puisque $1/\alpha + 1/\beta > 1$] et donc la série $(I_n^t - I_{n-1}^t)$ est absolument convergente dans Q^α. □

De la définition de $\int_0^\cdot X_s\,dY_s^t$ comme limite des sommes de Riemann découle immédiatement la:

PROPOSITION 2.2. (i) *Pour tout t, l'application $Q^\beta \to Q^\alpha$, $X \mapsto \int_0^\cdot X_s\,dY_s^t$ est une application linéaire continue.*

(ii) *Si $t \le t'$, alors $\int_0^\cdot X_s\,dY_s^t = (\int_0^\cdot X_s\,dY_s^{t'})^t$. Nous pouvons donc définir $\int_0^t X_s\,dY_s = \int_0^t X_s\,dY_s^{t'}$ qui est alors un processus localement à α-variation bornée.*

Le symbole $\int_0^\cdot X_s\,dY_s$ que nous venons de définir a déjà un sens quand Y est à variation bornée (celui de l'intégrale de Stieltjes) et quand X est à variation bornée [celui de Dellacherie et Meyer (1980), paragraphe 8.1]. Il nous faut donc vérifier que nos notations ne sont pas ambigües. Nous avons la:

PROPOSITION 2.3. *Si Y vérifie* (H) *et est à variation bornée, alors, pour tout X dans Q^β, le processus $\int_0^\cdot X_s\,dY_s$ que nous avons défini au théorème* 2.1 *est presque partout égal à l'intégrale prise au sens de Stieltjes.*

PREUVE. Notons $X_t^n = X_{k\cdot 2^{-n}}$ si $t \in [k \cdot 2^{-n}, (k+1)2^{-n}[$. Pour tout t, X_t^n converge vers X_t, et comme $\mathbb{P}$ p.s. les trajectoires de X sont bornées sur tout intervalle compact (puisque X est continu), par convergence dominée, au sens de Stieltjes, $\mathbb{P}$ p.s., pour tout t:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^t X_s^n \, dY_s = \int_0^t X_s \, dY_s.$$

Mais, d'autre part, comme $\int_0^t X_s^n \, dY_s = I_n(t)$ (avec les notations du théorème 2.1) et comme $I_n(t)$ converge dans $L^\alpha(\mathbb{P})$ vers $\int_0^t X_s \, dY_s$ (prise dans notre sens), nous en déduisons que l'intégrale de Stieltjes et la notre coïncident quand Y est à variation bornée. □

Dellacherie et Meyer (1980) ont donné une définition de $\int_0^t h(s)\, dg(s)$ pour toute fonction continue h à variation bornée et g continue à l'aide de la formule d'intégration par parties:

$$\int_0^t h(s)\, dg(s) = h(t)g(t) - h(0)g(0) - \int_0^t g(s)\, dh(s).$$

Vérifions que notre définition coïncide avec la leur quand X est à variation bornée:

PROPOSITION 2.4. *Si X est dans Q^β et est à variation bornée, alors $\int_0^t X_s \, dY_s$ coïncide avec l'intégrale prise au sens de Dellacherie et Meyer, c'est à dire que l'on a*:

$$\int_0^t X_s \, dY_s = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int_0^t Y_s \, dX_s.$$

PREUVE. Pour tout t dyadique:

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \sum_{k=0}^{[2^n t - 1]} \left((XY)_{(k+1)2^{-n}} - (XY)_{k\cdot 2^{-n}} \right)$$

dès que n est assez grand. Or:

$$\begin{aligned}(XY)&_{(k+1)2^{-n}} - (XY)_{k\cdot 2^{-n}} \\ &= X_{k\cdot 2^{-n}}\left(Y_{(k+1)2^{-n}} - Y_{k\cdot 2^{-n}}\right) + Y_{(k+1)2^{-n}}\left(X_{(k+1)2^{-n}} - X_{k\cdot 2^{-n}}\right).\end{aligned}$$

Nous savons que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{[2^n t - 1]} X_{k\cdot 2^{-n}}\left(Y_{(k+1)2^{-n}} - Y_{k\cdot 2^{-n}}\right) = \int_0^t X_s \, dY_s$$

(dans notre sens), et d'autre part, il est clair par convergence dominée que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{[2^n t - 1]} Y_{(k+1)2^{-n}}\left(X_{(k+1)2^{-n}} - X_{k\cdot 2^{-n}}\right) = \int_0^t Y_s \, dX_s$$

(au sens de Stieltjes). Nous avons donc bien la formule d'intégration par parties. □

REMARQUE. Nous pouvons maintenant prouver que notre intégrale est l'unique prolongement par continuité de celle de Dellacherie et Meyer: l'intégrale de Dellacherie et Meyer et la notre coïncident quand X est à variation bornée. Or, pour tout $\gamma \in]\beta, \alpha/(\alpha - 1)[$, nous savons d'après le lemme 1.1 que tout processus de Q^β nul en zéro est localement à γ-variation nulle. De plus, nous savons que pour tout X dans Q_0^γ, il existe une suite de processus X^n à variation bornée qui converge dans Q^γ vers X. D'après la proposition 2.2, $\int_0^t X_s^n \, dY_s$ converge dans $L^\gamma(\mathbb{P})$ vers $\int_0^t X_s \, dY_s$, ce qui prouve notre affirmation.

Il est maintenant temps de voir comment l'on passe du cas général au cas simple [Y vérifiant (H)].

(b) *Réduction du cas général au cas simple.* Revenons à nos hypothèses de départ: X localement à β-variation bornée, Y localement à α-variation bornée. Par localisation, nous nous ramenons à X élément de Q^β et Y élément de Q^α.

Comme nous l'avons rappelé au paragraphe 1, d'après le théorème 2.5 de Bertoin (1988), il existe un processus $A(Y, \alpha)$ continu, croissant, nul en zéro, adapté et intégrable tel que, pour tout temps d'arrêt T:

$$\mathbb{E}\big(A_T(Y, \alpha)\big) = \|Y - Y_0\|_{Q^\alpha}^\alpha - \|Y - Y^T\|_{Q^\alpha}^\alpha.$$

En particulier, si $S \leq T$ sont deux temps d'arrêt:

$$\mathbb{E}\big(|Y_T - Y_S|^\alpha\big) \leq \mathbb{E}\big(A_T(Y, \alpha) - A_S(Y, \alpha)\big).$$

Le processus $A(Y, \alpha)$ nous permet par changement de temps de nous ramener à (H):

Soit $\tau_t = \inf\{s\colon\ A_s(Y, \alpha) + s > t\}$, $\mathscr{G}_t = \mathscr{F}_{\tau_t}$, $X_t' = X_{\tau_t}$ et $Y_t' = Y_{\tau_t}$. X' et Y' sont alors des processus continus, adaptés à $\mathscr{G}_t$. Si $S \leq T$ sont deux $\mathscr{G}$-temps d'arrêt, alors $\tau_T = \inf\{s\colon\ A_s(Y, \alpha) + s > T\}$ et τ_S sont deux $\mathscr{F}$-temps d'arrêt. Nous avons:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(|Y_T' - Y_S'|^\alpha\big) = \mathbb{E}\big(|Y_{\tau_T} - Y_{\tau_S}|^\alpha\big) &\leq \mathbb{E}\big(A_{\tau_T}(Y, \alpha) - A_{\tau_S}(Y, \alpha)\big)\\ &\leq \mathbb{E}(T - S).\end{aligned}$$

Y' vérifie donc (H), et de même $\mathbb{E}(|X_T' - X_S'|^\beta) = \mathbb{E}(|X_{\tau_T} - X_{\tau_S}|^\beta)$, de sorte que, relativement à $\mathscr{G}_t$, X' est un processus à β-variation bornée.

Nous pouvons donc définir $\int_0^{\cdot} X_s' \, dY_s'$, et posons:

$$\int_0^t X_s \, dY_s = \int_0^{A_t(Y, \alpha) + t} X_s' \, dY_s'.$$

NOTA BENE. Cette définition ne dépend pas du choix du changement de temps pour se ramener au cas simple: en effet, si X appartient à Q^β, si Y vérifie (H), et si l'on considère un changement de temps σ_t tel que $X_t' = X_{\sigma_t}$ soit à β-variation bornée et $Y_t' = Y_{\sigma_t}$ vérifie encore (H) relativement à $\mathscr{G}_t = \mathscr{F}_{\sigma_t}$, alors:

$$\int_0^{\sigma_t} X_s \, dY_s = \int_0^t X_s' \, dY_s'$$

puisque cette égalité est vraie pour les processus X à variation bornée et que les processus à variation bornée sont denses dans Q_0^γ $[\beta < \gamma < \alpha/(\alpha - 1)]$.

(c) *Propriétés générales de l'intégrale.* Il résulte clairement des sous-parties (a) et (b) que l'application $(X, Y) \mapsto \int_0^\cdot X_s \, dY_s$ (X localement à β-variation bornée, Y localement à α-variation bornée) est bilinéaire et que $\int_0^\cdot X_s \, dY_s$ est alors un processus localement à α-variation bornée.

Si X' est un autre processus localement à β-variation bornée, nous pouvons encore définir $\int_0^\cdot X_s' \, dZ_s$ où $Z_\cdot = \int_0^\cdot X_s \, dY_s$. Comme d'autre part, il résulte de la proposition 2.1 de Bertoin (1986) que XX' est encore un processus localement à β-variation bornée, $\int_0^\cdot X_s' X_s \, dY_s$ a également un sens. Nous avons le:

THÉORÈME 2.5 (associativité de l'intégrale). *Sous les hypothèses précédentes*:

$$\int_0^\cdot X_s' \, dZ_s = \int_0^\cdot X_s' X_s \, dY_s.$$

PREUVE. Par localisations et changement de temps, nous nous ramenons à: Y et Z vérifient (H), $X'X$ appartient à Q^β, X appartient à Q_0^γ pour un $\gamma \in]\beta, \alpha/(\alpha - 1)[$ et X' borné. Nous avons alors:

$$\sum_{t_i \in \sigma_n} X_{t_i}'(Z^{t_{i+1}} - Z^{t_i}) = \sum_{t_i \in \sigma_n} X_{t_i}' X_{t_i}(Y^{t_{i+1}} - Y^{t_i})$$

$$+ \sum_{t_i \in \sigma_n} X_{t_i}' \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(X_s^{t_{i+1}} - X_s^{t_i} \right) dY_s.$$

Sous nos hypothèses, $\sum_{t_i \in \sigma_n} X_{t_i}'(Z^{t_{i+1}} - Z^{t_i})$ converge vers $\int_0^\cdot X_s' \, dZ_s$ et $\sum_{t_i \in \sigma_n} X_{t_i}' X_{t_i}(Y^{t_{i+1}} - Y^{t_i})$ converge vers $\int_0^\cdot X_s' X_s \, dY_s$ quand n tend vers l'infini.

D'autre part, pour tout t:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{\substack{t_i \in \sigma_n \\ t_i < t}} \left| X_{t_i}' \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(X_s^{t_{i+1}} - X_s^{t_i} \right) dY_s \right| \right]$$

$$\leq \|X_\infty'^*\|_{L^\infty} \sum_{\substack{t_i \in \sigma_n \\ t_i < t}} \mathbb{E}\left(\left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(X_s^{t_{i+1}} - X_s^{t_i} \right) dY_s \right| \right).$$

Or, d'après l'inégalité (1) dans la preuve du théorème 2.1:

$$\mathbb{E}\left[\left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(X_s^{t_{i+1}} - X_s^{t_i} \right) dY_s \right| \right] \leq \|X^{t_{i+1}} - X^{t_i}\|_{Q^\gamma} 2^{-n(\gamma - 1)/\gamma} \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-n(\gamma - \alpha\gamma + \alpha)/\alpha\gamma}$$

$$\leq C \|X^{t_{i+1}} - X^{t_i}\|_{Q^\gamma} 2^{-n(\gamma - 1)/\gamma}$$

et donc

$$\sum_{\substack{t_i \in \sigma_n \\ t_i < t}} \mathbb{E}\left[\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(X_s^{t_{i+1}} - X_s^{t_i}\right) dY_s\right|\right]$$

$$\le C\left[\sum_{\substack{t_i \in \sigma_n \\ t_i < t}} \|X^{t_{i+1}} - X^{t_i}\|_{Q^\gamma}^\gamma\right]^{1/\gamma} \left(\sum_{\substack{t_i \in \sigma_n \\ t_i < t}} 2^{-n}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}$$

$$\le C'\left[\sum_{\substack{t_i \in \sigma_n \\ t_i < t}} \|X^{t_{i+1}} - X^{t_i}\|_{Q^\gamma}^\gamma\right]^{1/\gamma} \le C' \sup_{\substack{\tau \in \mathbb{T} \\ |\tau| \le 2^{-n}}} \mathbb{E}\left(Q_\tau^\gamma(X)\right)^{1/\gamma}$$

quantité qui tend vers zéro puisque nous avons supposé que X appartenait à Q_0^γ. Il en résulte que:

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left[\left|\sum_{\substack{t_i \in \sigma_n \\ t_i < t}} X_{t_i}' \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(X_s^{t_{i+1}} - X_s^{t_i}\right) dY_s\right|\right] = 0,$$

ce qui prouve le théorème. □

Il sera parfois également utile d'avoir la majoration suivante:

PROPOSITION 2.6. *Si X et Y sont des fonctions (déterministes), respectivement à β-variation bornée et à α-variation bornée, alors, pour tout t, il existe un constante universelle $C(t)$ telle que*:

$$\left|\int_0^t X_s\, dY_s\right| \le C(t)\left(A_t(Y, \alpha) + t\right)\|X\|_{Q^\beta}.$$

PREUVE. Cette inégalité est clairement vérifiée d'après l'inégalité (1) dans le cas simple avec

$$C(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(2^{-n(\beta'/\alpha - 1)} t\right)^{1/\beta'}.$$

La méthode de réduction du cas général au cas simple par changement de temps nous donne alors la proposition 2.6. □

REMARQUE. Le travail que nous venons de faire est valable dans un cadre un peu plus général que celui que nous nous sommes donné: il s'applique également quand on ne suppose plus X continu, mais seulement càdlàg. Tous les résultats de ce paragraphe sont encore vrais sous cette hypothèse plus générale. On peut d'ailleurs le voir directement par changement de temps en notant que, pour presque tout ω, $\int_0^{\cdot} X_s\, dY_s$ est constant sur tout intervalle sur lequel Y est constant.

Comme nous l'avons vu au paragraphe 1, tout processus Y localement à α-variation bornée est localement à variation quadratique nulle. Si M est une martingale locale continue, $X = M + Y$ est donc localement un processus de Dirichlet fort, et donc localement à variation quadratique bornée. L'intégrale que nous venons de définir dans ce paragraphe va nous permettre d'étudier quelques propriétés de ces processus.

3. Applications à certains processus de Dirichlet.

(a) *Formule d'Itô.* Soit $M = (M^1, \dots, M^d)$ une martingale locale continue à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $Y = (Y^1, \dots, Y^d)$ une famille de d processus localement à α-variation bornée, et $X = (X^1, \dots, X^d)$ où $X^i = M^i + Y^i$. Föllmer (1981) a montré que si f est une fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2, alors, pour tout t, les sommes de Riemann:

$$\sum_{\substack{t_j \in \sigma_n \\ t_j < t}} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(X_{t_j}\right)\left(X^i_{t_{j+1}} - X^i_{t_j}\right)$$

convergent vers une quantité notée $\int_0^t Df(X_s)\, dX_s$, et nous avons la formule d'Itô:

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t Df(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2} \sum_{i,\, j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(X_s) d\langle M^i, M^j \rangle_s.$$

Il est à noter que pour Föllmer, la notation $\int_0^{\cdot}(\partial f/\partial x_i)(X_s)\, dX^i_s$ n'a pas de sens. Les résultats du paragraphe 1 nous conduisent au:

THÉORÈME 3.1 (formule d'Itô). *Sous les hypothèses précédentes,*

$$\int_0^t Df(X_s)\, dX_s = \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s)\, dM^i_s + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s)\, dY^i_s.$$

PREUVE. Par changement de temps et localisation, nous nous ramenons à X processus de Dirichlet fort borné, et, pour tout i, Y^i vérifie (H). Les M^i sont alors des martingales continues de carré intégrable. Nous avons:

$$\sum_{\substack{t_j \in \sigma_n \\ t_j < t}} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(X_{t_j}\right)\left(X^i_{t_{j+1}} - X^i_{t_j}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{d} \left[\sum_{\substack{t_j \in \sigma_n \\ t_j < t}} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(X_{t_j}\right)\left(M^i_{t_{j+1}} - M^i_{t_j}\right) + \sum_{\substack{t_j \in \sigma_n \\ t_j < t}} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(X_{t_j}\right)\left(Y^i_{t_{j+1}} - Y^i_{t_j}\right) \right].$$

$(\partial f/\partial x_i)(X_\cdot)$ étant à 2-variation bornée, le second terme dans la somme du membre de droite converge dans $L^\alpha(\mathbb{P})$ vers $\int_0^t(\partial f/\partial x_i)(X_s)\, dY^i_s$. Le premier quant à lui converge dans $L^2(\mathbb{P})$ vers $\int_0^t(\partial f/\partial x_i)(X_s)\, dM^i_s$, d'où le théorème. □

Nous en déduisons immédiatement le:

COROLLAIRE 3.2. *Sous les hypothèses précédentes, $f(X.)$ admet lui aussi une décomposition en somme d'une martingale locale continue et d'un processus localement à α-variation bornée.*

Ce théorème nous permet de montrer l'absolue continuité de certaines mesures d'occupation associées à des processus du type précédent:

(b) *Application à l'existence des temps locaux.* Soit donc $X = M + Y$ avec M martingale locale continue et Y processus localement à α-variation bornée. Considérons μ_t la mesure définie par: pour toute f borélienne bornée:

$$\int_{\mathbb{R}} f(a)\mu_t(da) = \int_0^t f(X_s)\, d\langle M\rangle_s.$$

Nous avons le:

THÉORÈME 3.3. *Si $\alpha < \frac{4}{3}$, la mesure μ_t admet $\mathbb{P}$ presque sûrement une densité $L_t^\alpha(X)$ dans $L^2(\mathbb{R})$ par rapport à la mesure de Lebesgue.*

PREUVE. Quitte à effectuer un changement de temps et une localisation, nous pouvons supposer que X est un processus de Dirichlet fort, et que Y vérifie (H); M est alors une martingale continue de carré intégrable. Pour simplifier les notations, nous supposerons en outre que $t = 1$.

D'après la formule d'Itô, pour tout ξ dans $\mathbb{R}$:

$$e^{i\xi X_1} - e^{i\xi X_0} = i\xi\int_0^1 e^{i\xi X_s}\, dM_s + i\xi\int_0^1 e^{i\xi X_s}\, dY_s - \tfrac{1}{2}\xi^2\hat{\mu}_1(\xi),$$

où nous avons noté $\hat{\mu}_1(\xi) = \int_0^1 e^{i\xi X_s}\, d\langle M\rangle_s$, la transformée de Fourier de μ_1. Nous avons les majorations suivantes:

$$\mathbb{E}\left(|e^{i\xi X_1} - e^{i\xi X_0}|^2\right) \leq 4, \qquad \mathbb{E}\left[\left|\int_0^1 e^{i\xi X_s}\, dM_s\right|^2\right] \leq \mathbb{E}(\langle M\rangle_1).$$

En admettant pour l'instant le:

LEMME 3.4. *Si $\alpha < \frac{4}{3}$, $\mathbb{P}$ presque sûrement*

$$\int_{|\xi|\geq 1}\left|\int_0^1 e^{i\xi X_s}\, dY_s\right|^2 |\xi|^{-2}\, d\xi < \infty.$$

Alors, à l'aide de la formule d'Itô, $\mathbb{P}$ p.s., $\int_{\mathbb{R}}|\hat{\mu}_1(\xi)|^2\, d\xi < +\infty$; et donc μ_1 admet une densité $L_1^\alpha(X)$ dans $L^2(\mathbb{R})$. □

PREUVE DU LEMME. Remarquons d'abord que si Y vérifie (H), et si $S \leq U \leq T$ sont trois temps d'arrêt bornés:

$$\mathbb{E}\left(|(Y_T - Y_S) - (Y_U - Y_S)|^\alpha\right) \leq \mathbb{E}((T - S) - (U - S)).$$

D'après le lemme 1.1 de Bertoin (1988), il existe alors une constante universelle $C_{2,\alpha}$ telle que: $\mathbb{E}(|Y_T - Y_S|^2) \le C_{2,\alpha}\mathbb{E}[(T-S)^{2/\alpha}]$, et donc, de même que pour le théorème 2.1, nous obtenons alors:

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^1 e^{i\xi X_s}\,dY_s\right|^2\right] \le C\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\left(Q_{\sigma_n}\left(e^{i\xi X^1_\cdot}\right)\right)^{1/2} 2^{-n(2-\alpha)/2\alpha}\right)^2.$$

Or, nous pouvons faire les majorations:

$$Q_{\sigma_n}\left(e^{i\xi X^1_\cdot}\right) \le 2^{n+2} \quad (\text{car, sur } [0,1]\ \sigma_n \text{ a } 2^n \text{ éléments})$$

et

$$Q_{\sigma_n}\left(e^{i\xi X_\cdot}\right) \le 2|\xi|^2 Q_{\sigma_n}(X) \quad \left(\text{car } |e^{i\xi X_t} - e^{i\xi X_s}| \le \sqrt{2}\,|\xi|\,|X_t - X_s|\right).$$

Si $2^{p-1} \le |\xi| < 2^p$, nous avons donc:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left|\int_0^1 e^{i\xi X_s}\,dY_s\right|^2\right] &\le C\left[\sum_{n=0}^{2p} 2^{n/2}\cdot 2^{-n(2-\alpha)/2\alpha} + \sum_{n=2p+1}^{\infty} 2^p\cdot 2^{-n(2-\alpha)/2\alpha}\right]^2\\ &\le C\left[\sum_{n=0}^{2p} 2^{n(\alpha-1)/\alpha} + 2^p\sum_{n=2p+1}^{\infty} 2^{-n(2-\alpha)/2\alpha}\right]^2\\ &\le C\cdot 2^{4p(\alpha-1)/\alpha} \le C|\xi|^{4(\alpha-1)/\alpha},\end{aligned}$$

où C désigne une constante qui a varié de ligne en ligne. Si $\alpha < \frac{4}{3}$, nous avons donc:

$$\mathbb{E}\left[\int_{|\xi|>1}\left|\int_0^1 e^{i\xi X_s}\,dY_s\right|^2 |\xi|^{-2}\,d\xi\right] < +\infty$$

ce qui prouve le lemme. □

Remarque. Ce théorème étend un résultat de Meyer (1976) qui établit l'existence des temps locaux pour les semimartingales réelles. Néanmoins, à la différence de Meyer, nous n'avons pas d'expression explicite (formule de Tanaka) décrivant, pour a donné, $L_t^a(X)$.

Cette méthode, combinaison d'arguments de transformées de Fourier et de calcul stochastique, peut être reprise pour étudier l'existence des temps locaux d'intersection de mouvements Browniens perturbés par des processus à α-variation bornée:

(c) *Application à l'existence des temps locaux d'intersection.* Soit $X = B + Y$ avec B un mouvement Brownien dans $\mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou 3) et Y un processus localement à α-variation bornée. Nous considérons ν_t la mesure donnée par: pour toute f borélienne bornée:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(a)\nu_t(da) = \int_0^t du\int_0^t dv\, f(X_u - X_v).$$

Des nombreux auteurs [Wolpert (1978) et Geman, Horowitz et Rosen (1984) pour ne citer que les premiers à s'être intéressés au sujet] ont prouvé, quand $Y = 0$, que, $\mathbb{P}$ p.s., la mesure ν_t admet une densité $\alpha(a, X, t)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Ce résultat a été étendu par Bertoin (1987a) à Y à variation bornée. En reprenant la méthode de ce dernier, nous obtenons le:

THÉORÈME 3.5. *$\mathbb{P}$ presque sûrement, la mesure ν_t admet une densité $\lambda(a, X, t)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ par rapport à la mesure de Lebesgue dans chacun des cas*: (i) $d = 2$ *et* $\alpha < \frac{4}{3}$, (ii) $d = 3$ *et* $\alpha < \frac{8}{7}$.

PREUVE. Grâce à la formule d'Itô, si $\xi = r\theta$ avec $r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in S^{d-1}$:

$$e^{ir\theta\cdot X_1} - e^{ir\theta\cdot X_0} - ir\int_0^1 e^{ir\theta\cdot X_s}\, d(\theta\cdot X_s) = -\frac{r^2}{2}\int_0^1 e^{ir\theta\cdot X_s}\, ds.$$

Or

$$\hat{\nu}_1(\xi) = \int_0^1 du \int_0^1 dv\, e^{ir\theta\cdot(X_u - X_v)} = \left|\int_0^1 du\, e^{ir\theta\cdot X_u}\right|^2,$$

et nous sommes donc amenés, comme pour le 3(b) à étudier le comportement de $\int_0^1 e^{ir\theta\cdot X_s}\, dY_s$. Si nous admettons pour l'instant le:

LEMME 3.6. *$\mathbb{P}$ presque sûrement*

$$\int_{|\xi|>1}\left|\int_0^1 e^{i\xi\cdot X_s}\, dY_s\right|^4 |\xi|^{-4}\, d\xi < +\infty$$

si $d = 2$ *et* $\alpha < \frac{4}{3}$, *ou si* $d = 3$ *et* $\alpha < \frac{8}{7}$.

Alors, grâce à la formule d'Itô, $\mathbb{P}$ p.s. $\int_{|\xi|>1}|\hat{\nu}_1(\xi)|^2\, d\xi < +\infty$, et comme $|\hat{\nu}_1(\xi)| \le 1$, nous en déduisons que $\hat{\nu}_1$ appartient $\mathbb{P}$ p.s. à $L^2(\mathbb{R}^d)$ et donc ν_1 admet une densité $\lambda(a, X, 1)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ par rapport à la mesure de Lebesgue. □

PREUVE DU LEMME. Par localisation, nous nous ramenons à X processus de Dirichlet fort et Y processus à α-variation bornée. Quitte à changer de temps, nous pouvons supposer que si $S \le T$ sont deux temps d'arrêt bornés:

$$\mathbb{E}(|Y_T - Y_S|^\alpha) \le \mathbb{E}(T - S) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left[(X_T - X_S)^2\right] \le \mathbb{E}(T - S).$$

En particulier, pour tout temps d'arrêt U dans $[\![S, T]\!]$:

$$\mathbb{E}\left(|(Y_T - Y_S) - (Y_U - Y_S)|^\alpha\right) \le \mathbb{E}((T - S) - (U - S))$$

et

$$\mathbb{E}\left[((X_T - X_S) - (X_U - S_X))^2\right] \le \mathbb{E}((T - S) - (U - S)).$$

D'après le lemme 1.1 de Bertoin (1988), il existe une constante C telle que:

$$\text{(2)} \quad \mathbb{E}\left(|Y_T - Y_S|^4\right) \le C\mathbb{E}\left((T - S)^{4/\alpha}\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left[(X_T - X_S)^4\right] \le C\mathbb{E}\left((T - S)^2\right).$$

De même que pour la preuve du théorème 2.1, nous obtenons alors:

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^1 e^{i\xi X_s}\,dY_s\right|^4\right] \le C'\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[Q_{\sigma_n}\left(e^{i\xi X^1_\cdot}\right)^2\right]^{1/4} \cdot 2^{-n(2-\alpha)/2\alpha}\right)^4.$$

Comme dans le 3(b), nous pouvons faire les majorations:

$$Q_{\sigma_n}\left(e^{i\xi X^1_\cdot}\right) \le 2^{n+2} \wedge 2|\xi|^2 Q_{\sigma_n}(X).$$

Notons tout de suite que, grâce à la seconde inégalité de (2), $\sup_n \mathbb{E}(Q_{\sigma_n}(X)^2) < +\infty$. Si $2^{p-1} \le |\xi| < 2^p$, nous avons donc:

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^1 e^{i\xi X_s}\,dY_s\right|^4\right] \le C'\left[\sum_{n=0}^{2p} 2^{n/2} \cdot 2^{-n(2-\alpha)/2\alpha} + \sum_{n=2p+1}^{\infty} 2^p \cdot 2^{-n(2-\alpha)/2\alpha}\right]^4$$

$$\le C' \cdot 2^{8p(\alpha-1)/\alpha} \le C'|\xi|^{8(\alpha-1)/\alpha}.$$

Quand $d = 2$, si $\alpha < \frac{4}{3}$, alors $8(\alpha - 1)/\alpha - 4 + 1 < -1$, et donc

$$\mathbb{E}\left[\int_{|\xi|>1} d\xi \left|\int_0^1 e^{i\xi X_s}\,dY_s\right|^4 |\xi|^{-4}\right] < +\infty.$$

Quand $d = 3$, si $\alpha < \frac{8}{7}$, alors $8(\alpha - 1)/\alpha - 4 + 2 < -1$, et donc

$$\mathbb{E}\left[\int_{|\xi|>1} d\xi \left|\int_0^1 e^{i\xi X_s}\,dY_s\right|^4 |\xi|^{-4}\right] < +\infty,$$

ce qui établit le lemme. □

REMARQUE. Comme pour le 3(b), et à la différence de Yor (1985), nous n'avons pas de formule de Tanaka et Rosen décrivant pour a donné $\lambda(a, X, t)$.

Note sur épreuves. J'ai appris après la rédaction de cet article, que Young (1936) avait déjà montré l'existence de l'intégrale $\int_0^\infty f(x)\,dg(x)$ pour f (resp. g) fonction à β-variation (resp. α-variation) bornée et $1/\alpha + 1/\beta > 1$.

REFERENCES

BERTOIN, J. (1986). Les processus de Dirichlet en tant qu'espace de Banach. *Stochastics* **18** 155–168.

BERTOIN, J. (1987a). Temps locaux d'intersection de mouvements Browniens perturbés et applications. A paraître dans *Probab. Theory Related Fields.*

BERTOIN, J. (1987b). Compléments sur la transformée de Hilbert et les dérivées fractionnaires des temps locaux Browniens. A paraître dans *J. Math. Kyoto Univ.*

BERTOIN, J. (1988). Une extension d'une inégalité de Burkholder, Davis, Gundy pour les processus à α-variation bornée et applications. *Stochastics* **24** 75–86.

BRUNEAU, M. (1974). *Variation totale d'une fonction. Lecture Notes in Math.* **413**. Springer, New York.

DELLACHERIE, C. et MEYER, P.-A. (1980). *Probabilités et potentiels. Théorie des martingales,* Chapters 5-8. Hermann, Paris.

FÖLLMER, H. (1981). Calcul d'Itô sans probabilités. *Séminaire de Probabilités XV 1979 / 80. Lecture Notes in Math.* **850** 143–150. Springer, New York.

FUKUSHIMA, M. (1980). *Dirichlet Forms and Markov Processes.* North-Holland, Amsterdam.

GEMAN, D., HOROWITZ, J. et ROSEN, J. (1984). A local time analysis of intersections of Brownian paths in the plane. *Ann. Probab.* **12** 86–107.

MEYER, P.-A. (1976). Un cours sur les intégrales stochastiques. *Séminaire de Probabilités X. Lecture Notes in Math.* **511** 245–400. Springer, New York.

WOLPERT, R. L. (1978). Wiener path intersections and local time. *J. Funct. Anal.* **30** 329–340.

YAMADA, T. (1985). On the fractional derivative of Brownian local time. *J. Math. Kyoto Univ.* **25** 49–58.

YOR, M. (1982). Sur la transformée de Hilbert des temps locaux Browniens et une extension de la formule d'Itô. *Séminaire de Probabiltiés XVI. Lecture Notes in Math.* **920** 238–247. Springer, New York.

YOR, M. (1985). Précisions sur l'existence et la continuité des temps locaux d'intersection du mouvement Brownien dans $\mathbb{R}^2$. *Séminaire de Probabilités XX. Lecture Notes in Math.* **1204** 532–543. Springer, New York.

YOUNG, L. C. (1936). An inequality of Hölder type, connected with Stieltjes integration. *Acta Math.* **67** 251–282.

LABORATOIRE DE PROBABILITÉS, TOUR 56, 3ÈME ÉTAGE
UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
4 PLACE JUSSIEU
75252 PARIS CEDEX 05
FRANCE